DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Ergebnisbericht des Ausschusses Investment

# Zwischenbericht zur Kalibrierung und Validierung spezieller ESG unter Solvency II

Köln, 9. November 2015

## Präambel

Der Ausschuss Investment der Deutschen Aktuarvereinigung e.V. (DAV) hat den vorliegenden Ergebnisbericht [1] erstellt.

## Zusammenfassung

Der Ausschuss Investment der Deutschen Aktuarvereinigung e.V. (DAV) wird ab dem Jahr 2016 quartalsweise eine beispielhafte Kalibrierung eines ESG für das sog. Branchensimulationsmodell veröffentlichen. Mit dieser beispielhaften Kalibrierung für das Branchensimulationsmodell soll den Aktuaren eine Hilfestellung an die Hand gegeben werden. Es ist wichtig festzuhalten, dass es sich um eine beispielhafte Kalibrierung handelt. Jeder Aktuar muss prüfen, ob und wie die beispielhafte Kalibrierung im unternehmensindividuellen Kontext anzupassen und ob der ESG grundsätzlich für das Unternehmen angemessen ist.

Die beiden Zielrichtungen des vorliegenden Ergebnisberichts sind:

- Einerseits beschreibt er die Methodik, mit der die AG ‚Kalibrierung spezieller ökonomischer Szenariogeneratoren unter Solvency II‘ des Ausschusses Investment im Rahmen der quartalsweisen Kalibrierung und Validierung arbeitet.
- Andererseits kann er einem Aktuar, der einen einfachen ESG für Zwecke von Solvency II kalibrieren und validieren muss, Hilfestellung bieten.

## Verabschiedung

Der Ergebnisbericht ist durch den Ausschuss Investment am 09.11.2015 verabschiedet worden und ersetzt den gleichnamigen Ergebnisbericht vom 08.07.2015.

[1] Der Ausschuss dankt der AG ‚Kalibrierung spezieller ökonomischer Szenariogeneratoren unter Solvency II‘ ausdrücklich für die geleistete Arbeit, namentlich Johannes Fabrega, Dr. Manfred Gravekarstens, Sebastian Helbig, Dr. Mario Hörig, Dr. Thiemo Hustedt, Dr. Wilfried Homann, Dr. Aristid Neuburger (Leitung), Roland Paetzold, Norbert Quapp, Ulrich Remmert, Dr. Holger Schalk, Dr. Bernhard Schmidt, Dr. Marco Schnurr und Prof. Dr. Annegret Weng.

## Inhaltsverzeichnis

# 1. Einleitung

Als Teil des Branchensimulationsmodells für Solvency II stellt der GDV aktuell ein Excel-Tool zur Verfügung, mit dem risikoneutrale, marktkonsistente Szenarien generiert werden können. Die Szenarien werden dabei unter Verwendung eines 1-Faktor-Hull-White-Zinsmodell und je einer geometrischen Brownschen Bewegung zur Modellierung des Aktien- und des Immobilienportfolios erzeugt.

In diesem Papier wird die finanzmathematische Theorie dieser Modelle skizziert und es werden Aspekte für die Kalibrierung und die Validierung der Modelle beschrieben. Dieser Ergebnisbericht verfolgt dabei folgende zwei Zielrichtungen:

- Einerseits beschreibt er die Methodik, mit der die AG ‚Kalibrierung spezieller ökonomischer Szenariogeneratoren unter Solvency II' im Rahmen der periodischen beispielhaften Kalibrierung und Validierung arbeiten wird.
- Andererseits kann dieser Ergebnisbericht einem Aktuar, der einen einfachen Szenariogenerator für Zwecke von Solvency II kalibrieren und validieren muss, Hilfestellung bieten.

Dieser Ergebnisbericht ist wie folgt aufgebaut:

- In Kapitel 2 wird beschrieben, wie die Parameter des betrachteten Szenariogenerators kalibriert werden können. Hierbei werden das 1-Faktor-Hull-White-Zinsmodell und die geometrische Brownschen Bewegung zur Modellierung des Aktien- und Immobilienportfolios zu Grunde gelegt. Die Art und Weise der Kalibrierung wird dargestellt.
- In Kapitel 3 wird beschrieben, welche Tests zur Validierung von Szenarien, die mit dem kalibrierten Modell erzeugt worden sind, durchgeführt werden können. Die entsprechende Theorie wird skizziert.

# 2. Kalibrierung des Modells

## 2.1. Einleitung

In diesem Abschnitt wird dargelegt, wie die Parameter eines Szenariogenerators mit folgenden zwei Treibern kalibriert werden können:

- Zinsen nach dem 1-Faktor-Hull-White-Modell und
- Aktien- und Immobilien mit der geometrischen Brownschen Bewegung.

Die Kalibrierung erfolgt – soweit möglich – an aktuellen Kapitalmarktdaten. Durch diese marktkonsistente Kalibrierung soll eine einheitliche Bewertung der Aktiv- und Passivinstrumente sichergestellt werden. Darüber hinaus ist die marktkonsistente Bewertung von der persönlichen Risikopräferenz des Betrachters, der die Berechnung durchführt, unabhängig.

Es ist wichtig festzuhalten, dass es nicht die eine richtige Methode gibt, nach der die Parameter eines Szenariogenerators kalibriert werden können. In diesem Abschnitt wird eine mögliche Methode beschrieben. Andere Methoden können gleichermaßen geeignet sein.

## 2.2. Inaktive Märkte

Die klassische marktkonsistente Bewertung, d.h. die Replizierung von Stichtagswerten, hat in der Praxis Grenzen. So sind z.B. die realen Märkte am langen Ende der Zinskurve nicht vollständig. Eine perfekte Replikation aller Finanzinstrumente ist daher nicht möglich.

Der DAV-Hinweis „Kalibrierung in inaktiven Märkten“ (siehe [2]) bezeichnet ein Marktsegment als inaktiv, wenn es nicht aktiv ist. Ein Marktsegment wird als aktiv bezeichnet, wenn

- die Daten in diesem Marktsegment (Preise, Volatilitäten, Zinssätze, etc.) vollständig verfügbar sind,
- Transaktionen in jedem Umfang und jederzeit ohne Beeinflussung der Preise ausgeführt werden können und
- die Anzahl der Kontrahenten und handelbaren Wertpapiere hinreichend groß ist.

Falls inaktive Marktsegmente vorliegen, darf der Einfluss eines einzelnen Stichtags nicht voll auf das kalibrierte Modell durchschlagen. Dies wird in der hier beschriebenen Kalibrierungsmethodik berücksichtigt.

## 2.3. Das Zinsmodell – das 1-Faktor-Hull-White-Model

### 2.3.1. Einleitung

In diesem Unterabschnitt wird die Kalibrierung für das 1-Faktor-Hull-White-Modell beschrieben.

Dieses Modell weist folgende wichtige Eigenschaften auf:

- Es handelt sich um ein arbitragefreies Modell.
- Es hat eine Mean-Reversion-Eigenschaft.

- Einfache Zinsderivate können mittels geschlossener Lösungen bewertet werden.
- Die numerische Diskretisierung des stetigen Modells ist relativ einfach umzusetzen (sowohl für die Kalibrierung als auch für die Generierung der Pfade).
- Es können auch negative Zinsen auftreten.

Schwächen des Modells resultieren aus seiner Einfachheit. Insbesondere sind je zwei Stellen der Zinsstrukturkurve vollständig korreliert.

### 2.3.2. Theorie des Hull-White-Modells

In diesem Abschnitt wird zunächst auf das Modell, die Parameter und die zur Kalibrierung benötigten Formeln für die Bewertung Europäischer Swaptions eingegangen (vgl. auch [1, 3]).

**Definition:** Das **1-Faktor-Hull-White-Modell** zur Simulation der Short-Rate ist durch folgende Short-Rate-Dynamik gegeben:

$$dr(t) = \left(\theta(t) - \alpha r(t)\right)dt + \sigma dW_t$$

Das Modell wird also durch einen von der Zeit t abhängigen Parameter $\theta(t)$ und zwei von der Zeit t unabhängige Parameter $\alpha$ und $\sigma$ zum Leben erweckt.

Mit

$$\theta(t) = \frac{\partial F(0,t)}{\partial T} + \alpha \cdot F(0,t) + \frac{\sigma^2}{2\alpha} \cdot \left(1 - \exp(-2\alpha t)\right),$$

wobei F(0,t) die im Zeitpunkt 0 am Markt beobachtete kurzfristige Forwardrate für eine Anlage zum Zeitpunkt t ist, lässt sich die Anfangskurve exakt replizieren. Der Parameter $\alpha$ (auch **Mean Reversion Rate** oder **Drift-Parameter** genannt) beschreibt die Intensität, mit der der Zins auf den Parameter $\theta(t)$ gezogen wird. Je größer $\alpha$, desto schneller erfolgt die Korrektur des stochastischen Prozesses nach einer ‚Übertreibung'.

Der Koeffizient $\sigma$ des Wiener Prozesses $W_t$ beschreibt die Volatilität der Short-Rate. Es werden europäische Swaptions der Laufzeit T+n, d.h. mit einer Optionslaufzeit T und einer Swaplaufzeit n, betrachtet. Der Preis für einen Zerobond der Laufzeit T in t=0 wird mit P(0, T) bezeichnet. Es wird angenommen, dass es eine Zahlung pro Jahr gibt. Die Auszahlungszeitpunkte des Swaps werden mit

$T_1$, …, $T_n$ bezeichnet. Weiter seien $s_0$ die Forward-Swaprate zum Zeitpunkt t=0 gegeben durch

$$\frac{P(0,T)-P(0,T_n)}{\sum_{i=1}^{n} P(0,T_i)}$$

und $s_k$ der Strike.

Zur Bewertung mit dem Hull-White-Modell wird gesetzt:

$$\sigma_{ZBP}(T,T_i) = \frac{1}{\alpha}\cdot\left(1-\exp(-\alpha(T_i - T)\right)\cdot\sqrt{\frac{\sigma^2}{2\alpha}\cdot\left(1-\exp\left(-2\alpha T\right)\right)},$$

$$A(T,T_i) = \exp\left(\ln\left(\frac{P(0,T_i)}{P(0,T)}\right) - B(T,T_i)\frac{\partial \ln P(0,T)}{\partial T} - \frac{1}{2}\sigma_{ZBP}(T,T_i)^2\right),$$

$$B(T,T_i) = \frac{1-\exp\left(-\alpha(T_i - T)\right)}{\alpha}.$$

Des Weiteren sei $X_i := A(T,T_i)\exp\left(-B(T,T_i)r\right)$.

Um den Swaptionpreis im Hull-White-Modell mit Hilfe der Jamshidian-Zerlegung in die Summe der Preise von Zerobondoptionen zu zerlegen, muss aus der Gleichung

$$\sum_{i=1}^{n} c_i X_i = 1 \tag{1}$$

mit $c_i$=$s_k$ für i=1, …, n-1 und $c_n$ = $s_k$ + 1 die kritische Short-Rate r* ermittelt werden (vergleiche [3], S. 120).

Für den Preis der Receiver-Swaption im Hull-White-Modell zum Nominal N ergibt sich:

$$N\cdot\sum_{i=1}^{n} c_i \cdot ZBC^{HW}\left(T,T_i,X_i\right) \tag{2}$$

wobei $ZBC^{HW}$ der Preis einer Calloption auf einen Zerobond ist. Es gilt

$$ZBC^{HW}\left(T,T_i,X_i\right) = P(0,T_i)\cdot\Phi(d_1) - X_i\cdot P(0,T)\cdot\Phi(d_2).$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln\left(\frac{P(0,T_i)}{P(0,T)X_i}\right) + \sigma_{ZBP}{}^2(T,T_i)/2}{\sigma_{ZBP}(T,T_i)}$$

und

$$d_2 = \frac{\ln\left(\frac{P(0,T_i)}{P(0,T)X_i}\right) - \sigma_{ZBP}{}^2(T,T_i)/2}{\sigma_{ZBP}(T,T_i)}.$$

Vergleiche dazu auch [3], S. 112 und S. 135.

Weiter wird die Bewertung einer europäischen Swaption nach Black 76 benötigt. Hierzu sei $\sigma_{T.n}$ die vorgegebene Zielvolatilität für eine Swaption der Laufzeit T+n. Für den **Wert einer Receiver-Swaption nach Black 76** zum Nominal N ergibt sich (vergleiche [1], S. 72)

$$N \cdot \sum_{i=1}^{n} P(0,T_i)\left(s_k \Phi(-d_2 *) - s_0 \Phi(-d_1 *)\right) \quad (3)$$

mit

$$d_1 * = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{s_k}\right) + \sigma_{T,n}^2 \; T/2}{\sigma_{T,n}\sqrt{T}}$$

und

$$d_2 * = \frac{\ln\left(\frac{s_0}{s_k}\right) - \sigma_{T,n}^2 T/2}{\sigma_{T,n}\sqrt{T}}.$$

### 2.3.3. Die Kalibrierung der Hull-White-Parameter

In diesem Abschnitt wird eine mögliche Herleitung der Parameter $\alpha$ und $\sigma$ des Hull-White-Modells beschrieben.

Die Kalibrierung erfolgt mit Hilfe der am Markt quotierten ATM-Swaption-Volas. Es ist theoretisch möglich, beide Parameter bestmöglich an die Zielwerte (hier die Marktpreise mit Black 76) anzupassen. In der Fachliteratur werden zahlreiche verschiedene Verfahren zur Schätzung von $\alpha$ diskutiert, die allerdings alle zu wenig konsistenten und insbesondere auch instabilen Werten führen.

Vor diesem Hintergrund hat sich in der Praxis der Konsens herausgebildet, den Drift-Parameter $\alpha$ fest vorzugeben. Im Allgemeinen wird demnach für den Parameter $\alpha$ ein Wert von 0,1 (entspricht einer 10-Jahresperiode) angenommen. Dadurch reduziert sich die Optimierungsaufgabe auf ein eindimensionales Problem, nämlich die Kalibrierung von $\sigma$.

Für die beispielhafte Kalibrierung werden somit die folgenden Schritte durchgeführt:

1. Unter Verwendung einer vorgegebenen Zielvolatilität $\sigma_{10,10}$ wird der Swaptionpreis U der Swaption 10+10 nach Black 76 (Formel (3)) ermittelt. Dabei wird das Nominal N=1.000.000 und der Streik $s_k$ gleich der Forward-Swaprate $s_0$ gesetzt.
2. Nun wird ein Optimierungsalgorithmus durchgeführt, um den Parameter $\sigma$ des Hull-White-Modells zu ermitteln. Dafür werden die folgenden Schritte iterativ durchlaufen:
    - Für $\alpha$=0,1 und festes $\sigma$ wird
        - der Wert der kritischen Short-Rate r* mittels Newton-Iteration aus der Formel (1) bestimmt
        - und anschließend der Swaptionpreis $V(\alpha,\sigma)$ nach Hull-White mit der Formel (2) ermittelt.
    - Die Zielfunktion für die Minimierung ist

$$(V(\alpha,\sigma)-U)^2.$$

Man beachte, dass es prinzipiell auch möglich ist, an mehreren Swaption-Volas gleichzeitig zu kalibrieren. In diesem Fall wird die Summe der quadratischen Abweichungen minimiert, und es ist i.a. nicht möglich, eine Nullstelle der Zielfunktion zu finden, d.h. es kann nur der Fehler minimiert werden.

Das vorliegende Zinsmodell wird zur Bewertung der Verpflichtungen der Passiv-Seite verwendet, d.h. insbesondere auch der langlaufenden Verpflichtungen (größer 20 Jahre). Daher würde es sich anbieten, für die Kalibrierung beobachtbare Volas von Swaptions mit langen Laufzeiten zu verwenden. Allerdings liegt für die längeren Swaptionlaufzeiten kein aktiver Markt vor (vgl. auch Abschnitt 2.2).

Deshalb wird die folgende Vorgehensweise gewählt:

- Zur Kalibrierung werden quotierte ATM-Swaptions-Volas von Receiver-Swaptions der Laufzeit 10+10 verwendet.
- Die Kalibrierung wird für jeden Stichtag der letzten fünf Jahre durchgeführt. Anschließend werden die ermittelten Werte für $\sigma$ gemittelt (Mittelung über 5 Jahre).

Dieses Vorgehen verwendet die vorhandenen Marktdaten, glättet diese aber über einen Zeitraum von 5 Jahren, um der Inaktivität der Zinsmärkte am langen Ende gerecht zu werden.

## 2.4. Modellierung des Aktien-und Immobilienindex

### 2.4.1. Einleitung

In diesem Unterabschnitt wird die Kalibrierung für den Aktien- und den Immobilienindex beschrieben. Das Vorgehen zur Kalibrierung ist dabei für beide Indizes weitestgehend identisch, es wird pro Index lediglich auf eine andere Datengrundlage zurückgegriffen.

Die geometrische Brownsche Bewegung weist folgende Vorteile auf:

- Es handelt sich um ein arbitragefreies Modell.
- Das Modell ist einfach zu verstehen.
- Die Kalibrierung der Parameter ist nicht schwierig.

Das einfache Modell hat jedoch auch Nachteile und spiegelt nur bedingt eine realistische Aktienperformance wider. Insbesondere werden Fat Tails nicht repliziert.

### 2.4.2. Theorie der geometrischen Brownschen Bewegung

**Definition:** Ein **Standard-Wiener-Prozess** (oder **Standard-Brownsche-Bewegung**) ist ein stochastischer Prozess $\left(W(t)\right)_{t\in[0,T]}$ mit folgenden Eigenschaften:

- $\mathrm{W}(0) = 0$ fast sicher.
- Die Abbildung $t \mapsto W(t)$ ist fast sicher stetig.
- Die Argumente $\left(W(t_1) - W(t_0)\right), \dots, \left(W(t_k) - W(t_{k-1})\right)$ sind stochastisch unabhängig für $0 \leq t_0 < t_1 \leq \cdots \leq t_{k-1} < t_k \leq T$.
- $\left(W(t) - W(s)\right) \sim \mathcal{N}(0, t - s)$, für $0 \leq t < s \leq T$.

Dies bedeutet, dass die die absoluten Zuwächse stochastisch unabhängig und jeweils normalverteilt sind. $W(t)$ ist ein Martingal.

Dieser Ansatz lässt sich verallgemeinern, wenn man für einen Driftparameter $\mu$ und einen Diffusionsparameter $\eta^2$ einen **Wiener-Prozess** $(X(t))_{t\in[0,T]}$ definiert als

$$X(t) = \mu t + \eta W(t).$$

$X(t)$ löst die stochastische Differentialgleichung $dX(t) = \mu dt + \eta dW(t)$ und es gilt:

$$X(t) \sim \mathcal{N}(\mu t, \eta^2 t), \text{ für } 0 < t \leq T.$$

Unter Verwendung eines Wiener-Prozesses können für jede Wahl von $\mu$ und $\eta^2$ auch negative Werte auftreten, daher ist dieser Ansatz für die Modellierung eines Aktienindexes ungeeignet. Dieses Problem umgeht man, indem der Prozess $S(t) \coloneqq S(0)\exp(X(t))$ modelliert wird:

$$d\left(\log\left(\frac{S(t)}{S(0)}\right)\right) = dX(t) = \mu dt + \eta dW(t)$$

Hieraus folgt

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \eta dW(t)$$

bzw.

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \eta S(t)dW(t).$$

Die Lösung $S(t)$ dieser Differentialgleichung heißt **geometrische Brownsche Bewegung** und lautet:

$$S(t) = S(0)\exp\left(\left(\mu - \frac{\eta^2}{2}\right)t + \eta W(t)\right).$$

Die geometrische Brownsche Bewegung besitzt folgende Eigenschaften:

(i) $\frac{S(t)}{S(0)} \sim \mathcal{LN}\left((\mu - \frac{\eta^2}{2})t, \eta^2 t\right), \text{für } 0 < t \leq T$

(ii) $\mathbb{E}[S(t)] = S(0)\exp(\mu t)$

(iii) $Var[S(t)] = S^2(0)\exp(2\mu t)(\exp(\eta^2 t) - 1)$

(iv) Für $\mu = 0$ ist $S(t)$ ein Martingal.

Im Falle von zeitabhängigen Parametern $\mu(t)$ und $\eta(t)$ ergibt sich entsprechend für die explizite Lösung der Differentialgleichung die Formel

$$S(t) = S(0)\exp\left(\int_0^t \left(\mu(s) - \frac{\eta^2(s)}{2}\right) ds + \int_0^t \eta(s) dW(s)\right)$$

mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\frac{S(t)}{S(0)} \sim \mathcal{LN}\left(\int_0^t (\mu(s) - \frac{\eta^2(s)}{2}) ds, \int_0^t \eta^2(s) ds\right), \text{für } 0 < t \leq T$

(ii) $\mathbb{E}[S(t)] = S(0)\exp\left(\int_0^t \mu(t) ds\right)$

(iii) $Var[S(t)] = S^2(0)\exp\left(2\int_0^t \mu(t) ds\right)\left(\exp\left(\int_0^t \eta^2(t) ds\right) - 1\right).$

### 2.4.3. Kalibrierung der Parameter

#### 2.4.3.1. Der Drift-Parameter $\mu$

Soll die geometrische Brownsche Bewegung in einem ESG einen risikoneutralen Aktien- bzw. Immobilienindex beschreiben, so muss man für den Drift-Parameter μ den risikofreien Zins verwenden. Im Rahmen einer Iteration verwendet man den **risikofreien Zins** $r_t$ des jeweiligen Jahres, genauer die Short Rate des Zinsmodells. Damit folgt wegen Eigenschaft (ii), dass der Ertrag aus Aktien bzw. Immobilien im Erwartungswert gerade diesem Zins entspricht bzw. dass der mit diesem Zins diskontierte Ertrag aus Aktien bzw. Immobilien ein Martingal ist.

#### 2.4.3.2. Kalibrierung der Index-Volatilität $\eta_t^2$

Um Marktkonsistenz zu erreichen, muss der Diffusionsparameter $\eta_t^2$ pro Index so gewählt werden, dass die tatsächlich am Markt beobachtete Volatilität für ein repräsentatives (ggf. unternehmensindividuelles) Aktien- bzw. Immobilienportfolio optimal repliziert wird.

Für Aktien verwendet man im liquiden Bereich die implizite Volatilität von Put-Optionen der Laufzeit $t$ auf einen geeigneten Index. Im aufgrund von zu hohen Laufzeiten der Optionen nicht liquiden Bereich für Aktien verwendet man einen aus der Historie über 10 Jahre ermittelten Wert über die Formel:

$$\eta_{hist} = -p + \sqrt{p^2 - q} \quad \text{, mit}$$
$$p = \frac{\rho\sigma}{\alpha}\left(1 - \frac{1}{\alpha\delta}(1 - \exp(-\alpha\delta))\right) \quad \text{und}$$

$$q = \frac{\sigma^2}{\alpha^2}\left(1 - \frac{2}{\alpha\delta}(1 - \exp(-\alpha\delta) + \frac{1}{2\alpha\delta}(1 - \exp(-2\alpha\delta)\right) - \eta^2_{A,hist}\,.$$

Dabei erhält man den Wert $\eta^2_{A,hist}$ als annualisierten Standardfehler aus den monatlichen Log-Returns auf einen geeigneten Aktienindex. Verwendet man hier monatliche Returns, gilt $\delta = \frac{1}{12}$. Bei $\alpha$ und $\sigma$ handelt es sich um die Parameter des Hull-White-Modells. Für Details sei auf [1], S. 885 verwiesen.

In Ermangelung eines liquiden Marktes für Optionen auf Immobilienindizes wird für die Kalibrierung der Immobilienvolatilität auf die empirisch ermittelte historische Volatilität der logarithmierten Returns eines geeigneten Immobilienindex zurückgegriffen, unter Bereinigung der Autokorrelation mittels des Verfahrens von Blundell-Ward. Im Falle von Problemen bei der Datenversorgung mit impliziten Volatilitäten von Put-Optionen auf den Aktienindex ist ein analoges Vorgehen für die Volatilitätskalibrierung des Aktienprozesses ebenfalls möglich.

## 2.5. Korrelationen

Die Korrelationen zwischen den insgesamt drei Wiener-Prozessen, welche den Aktien- und Immobilienindex sowie den Shortrateprozess antreiben werden aus den entsprechenden historischen Zeitreihen, welche auch der Aktien-, Immobilien- und Zinskalibrierung zugrunde liegen, abgeleitet.

# 3. Validierung des kalibrierten Modells

## 3.1. Einleitung

Dieser Abschnitt beschreibt einen möglichen Test von Szenarien, die mit dem in Abschnitt 2 beschriebenen Szenariogenerator erzeugt worden sind. Wenn hier von Szenarien und deren Eigenschaften gesprochen wird, so werden darunter i.d.R. ein kompletter Szenariensatz eines ökonomischen Szenariogenerators (ESG) und die Eigenschaften des Szenariensatzes verstanden.

Mit Blick auf Solvency II werden insbesondere folgende Eigenschaften überprüft:

- Arbitragefreiheit (Martingaleigenschaft)
- Replikation von Marktpreisen (Test auf Volatilitäten)
- Konsistenz zur relevanten risikolosen Zinsstrukturkurve

Mit der hier beschriebenen Methodik können die Martingaleigenschaft der Szenarien (Arbitragefreiheit), der mittlere Total Return und die implizite Volatilität einer

Assetklasse anhand von Marktpreisen (Replikation) überprüft werden. Die Korrelation, die Konsistenz zur risikoneutralen Zinsstrukturkurve sowie einige weitere statistische Eigenschaften können bestimmt werden.

Zu jedem Test werden Abnahmegrenzen genannt. Diese sind jedoch nicht als starre Grenzen zu sehen, sondern können von Jahr zu Jahr je nach Kapitalmarktlage schwanken.

Werden ein oder mehrere Prüfungen nicht bestanden, so können die Szenarien gar nicht oder nur mit Vorbehalt verwendet werden. Die Ursachen dafür können vielschichtig sein. Im einfachsten Fall ist die Anzahl der Szenarien zu klein oder die konkrete Wahl des Startwerts für den Zufallszahlengenerator (seed) ist unglücklich. Es kann aber auch sein, dass die Szenarien komplett neu kalibriert werden müssen oder dass ein anderes Modell zur Erzeugung der Szenarien notwendig ist.

Allerdings bedeutet ein erfolgreicher Test nicht, dass die Szenarien ohne Bedenken verwendet werden können. Es konnte dann nur gezeigt werden, dass die untersuchten Szenarien den im Vorfeld definierten Qualitätskriterien genügen, keine Grenzen verletzen und keine Auffälligkeiten aufgetreten sind. Es wurden keine Anhaltspunkte mit diesen Tests gefunden, die gegen eine Verwendung sprechen. Das bietet aber keine Gewähr dafür, dass die Szenarien in jedem Fall für ein Simulationsmodell im Rahmen von Solvency II verwendet werden können.

## 3.2. Über die Validierung

Unter "Validierung" (von lateinisch validus "kräftig, wirksam, fest") einer Argumentation ist in erster Linie die argumentative Gewichtung einer meist wissenschaftlichen Untersuchung, Aussage oder Theorie zu verstehen. Wichtig ist hierbei der direkte Ursache-Wirkungs-Charakter, der eine "Gültigkeit" der Aussagen oder Annahmen belegt. Die Validität steht dabei in direktem Gegensatz zu der Falsifizierbarkeit (Widerlegbarkeit) und der Verifizierbarkeit (Belegbarkeit). Also kann die Validität als ein Kriterium zur Güte empirischer Aussagen (Schlussfolgerungen auf Messungen beruhend) und dessen Operationalisierung (beispielsweise Fähigkeit des Messbarkeitsbereichs) in wissenschaftlichen Kausalmodellen verstanden werden.

Ein wichtiges Ergebnis des nach der Erzeugung von Kapitalmarktszenarien zu durchlaufenden Validierungsprozesses ist die Entscheidung, ob der untersuchte Szenariensatz für den weiteren Einsatz verwendet werden kann oder nicht. Die Entscheidung über die Freigabe von Szenariensätzen sollte dabei soweit wie möglich anhand von vorher festgelegten Prüf- und Abnahmekriterien getroffen werden.

Die Überprüfung der Szenarien lässt sich dabei grundsätzlich in zwei Teilanforderungen unterteilen:

1. Überprüfung der Szenarien aufgrund definierter Qualitätskriterien

   Ziel dieser Überprüfung ist es, Fehler in den Szenarien bezüglich der definierten Qualitätskriterien zu entdecken. Ein typischer Fehler in den Szenarien ist das Überschreiten von im Vorfeld definierten Abnahmegrenzen.

2. Überprüfung der Szenarien auf Gesamtplausibilität

   Die Vorgaben für die Kalibrierung entstammen in der Regel dem unmittelbaren Marktumfeld. Werden dabei wichtige Aspekte übersehen, Informationen in den Anforderungen unzureichend berücksichtigt oder sind die Informationen fehlerhaft, folgen daraus Fehler in Anforderungen oder gar Widersprüche. Auch das Nichteinbeziehen von relevanten Informationsquellen kann zu fehlerhaften Anforderungsdefinitionen führen. Zu guter Letzt darf nicht vergessen werden, dass die Szenarien aus einem (mathematischen) Modell heraus erzeugt werden. Jedes Modell enthält Vereinfachungen und damit Modellfehler. Es ist also bei jeder Validierung zu prüfen, ob die Szenarien in sich logisch und für den jeweiligen Einsatzzweck geeignet sind.

Während die erste Testanforderung relativ einfach anhand fester Rechenverfahren und Kriterien zu beantworten ist, lässt sich die zweite Testanforderung nicht in feste Kriterien zwängen und erfordert weitergehende Prüfverfahren im Validierungsprozess. Das bedeutet, dass jeder Validierungsprozess nur teilweise automatisiert und nicht allein durch eine Validierungssoftware abgearbeitet werden kann. Entsprechender Sachverstand über die Verwendung der Szenarien muss in den Validierungsprozess einfließen. Dieser Aspekt der Validierung erfordert in der Regel auch eine unternehmensspezifische Betrachtung, bei der die dem jeweiligen Unternehmen zugrundeliegenden Exposures eine Rolle spielen. Von daher kann an manchen Stellen der Validierung kein pauschales Urteil gebildet werden, sondern es müssen unternehmensspezifische Kennzahlen in die Bewertung der Validierungsergebnisse mit einfließen.

## 3.3. Tests auf Martingaleigenschaft

### 3.3.1. Einleitung

Eine wichtige Eigenschaft risikoneutraler Bewertungsszenarien besteht in deren Arbitragefreiheit, was damit einhergeht, dass die diskontierten Preisprozesse für die in den Szenarien abgebildeten Assets Martingale sind. Vereinfacht bedeutet dies, dass jedes Asset von einem Projektionszeitpunkt zum nächsten im nach Diskontierung gebildeten Mittel die entsprechende risikoneutrale Rendite verdient. Im Mittel ist daher die Performance aller Assets gleich. Dabei wird für jedes Asset Thesaurierung unterstellt, d. h. aus dem Asset generierte Cashflows werden wieder in das Asset investiert. Die Martingaleigenschaft lässt sich wie folgt beschreiben:

- Angenommen, es liegen n Bewertungsszenarien $s_1, \ldots, s_n$ für die Projektionszeitpunkte $t_0, t_1, \ldots, t_m$ vor.

- Bezeichne Asset(t,s) den thesaurierten Wert eines Asset zum Zeitpunkt t in Szenario s und Disk(t,s) den zugehörigen risikolosen Diskontfaktor für das Szenario s, der den Wert des Assets auf den Projektionsbeginn t=0 diskontiert.

- Falls das Asset im Zeitpunkt $t_0=0$ die Martingaleigenschaft erfüllt, so bedeutet dies insbesondere:

  $$1/n\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Asset}(t_i,s_j)\cdot\mathrm{Disk}(t_i,s_j)=\mathrm{Asset}(t_0) \text{ für jeden Zeitpunkt } t_i, \qquad (1)$$

  Hierbei bezeichnet $\mathrm{Asset}(t_0)$ den Startwert des Assets in $t_0$.

- Zum Zeitpunkt $t_i$ bedeutet dies insbesondere für den Spezialfall einer Nullkuponanleihe der Laufzeit k mit jeweiligen Marktwerten $ZCB_k(t_i,s_j)$, dass folgende Bedingung erfüllt ist:

  $$1/n\sum_{j=1}^{n}ZCB_k(t_i,s_j)\cdot\mathrm{Disk}(t_i,s_j)=ZCB_{t_i-t_0+k}(t_0) \qquad (2)$$

  Hierbei ist $ZCB_{t_i-t_0+k}(t_0)$ der Marktwert in $t_0=0$ der Nullkuponanleihe der Laufzeit $t_i-t_0+k$, der sich szenarienunabhängig aus der Startzinskurve ergibt.

- Die für alle betrachteten Assetklassen postulierte Gleichung (1) muss insbesondere auch für Sachwerte wie Aktien und Immobilien gelten. Bezeichne für ein solches Asset $TR_i(s_j)$ den Total Return (d.h. die Summe aus Preisreturn und Income Return) in Szenario $s_j$ für das Zeitintervall $[t_i-1;t_i]$, dann hat das Asset im Pfad $s_j$ zum Zeitpunkt $t_i$ den Wert

$$\begin{aligned}\text{Asset}(t_i, s_j) &= \text{Asset}(t_0) \cdot \prod_{k=1}^{i} (1 + TR_k(s_j)) \\ &= \text{Asset}(t_0) \cdot (1 + TR_1(s_j)) \cdot \ldots \cdot (1 + TR_i(s_j))\end{aligned}$$

Eingesetzt in die obige Gleichung ergibt sich als Martingaleigenschaft die Identität

$$1/n \sum_{j=1}^{n} \left(\prod_{k=1}^{i} (1 + TR_k(s_j))\right) \cdot \text{Disk}(t_i, s_j) = 1 \quad \text{für i=1, ..., m.} \qquad (3)$$

D. h. bei einem Investment in dieses Asset führt die pfadweise Wertentwicklung nach Diskontierung im Mittel wieder zum investierten Betrag. Anders ausgedrückt zeigt das betrachtete Asset in der stochastischen Bewertung mittels des gegebenen Szenariensatzes die gleiche Performance wie die risikofreie Anlage.

### 3.3.2. Martingaltest

#### 3.3.2.1. Allgemein

Bei einem in der Praxis vorliegenden Satz von n Szenarien $s_1, \ldots, s_n$ ist zu prüfen, wie weit dieser die oben beschriebene Martingaleigenschaft erfüllt, d.h. wie gut bei einer Bewertung mittels dieses Szenariensatzes die ursprünglichen Marktpreise der betrachteten Assets getroffen werden. Unter Benutzung der obigen Notation bedeutet dies, dass für jeden Zeitpunkt t die Verteilung der auf den initialen Marktwert normierten diskontierten Asset-Werte

$$\text{Norm\_Asset}(t, s_j) := \text{Asset}(t, s_j) \cdot \text{Disk}(t, s_j) / \text{Asset}(t_0)$$

einen Mittelwert MW(Norm_Asset)(t) möglichst nahe 1 haben sollte. Aus diesem Grund wird dieser Test auch als 1=1-Test bezeichnet.

Ein Standardverfahren zur Quantifizierung maximal tolerierbarer Abweichungen ist die Vorgabe von Konfidenzintervallen (vgl. [7]). Zu einem vorgegebenen Konfidenzniveau $1 - \alpha$ (z. B. 95%) sei $\alpha$ die Irrtumswahrscheinlichkeit und Norm_inv($1-\alpha/2$) bezeichne das ($1-\alpha/2$)-Quantil der Standardnormalverteilung.

Man definiert

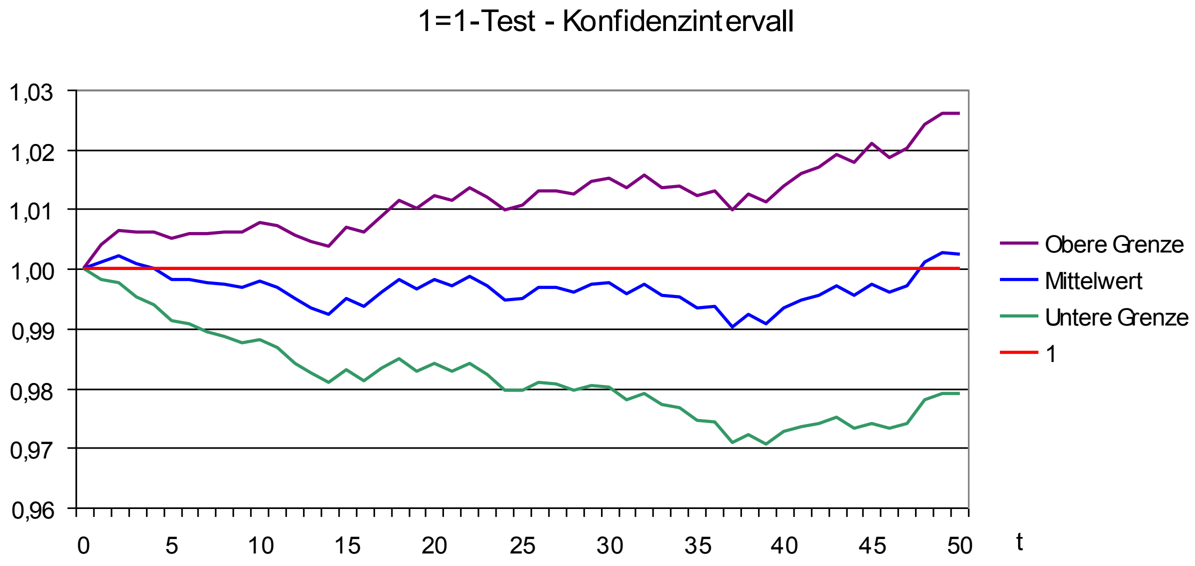
$$\text{Delta}(t) = \text{Norm\_inv}(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{Varianz(\text{Norm\_Asset}(t,s_j))/n}$$

$$= \text{Norm\_inv}(1-\alpha/2) \cdot \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^{n}[\text{Norm\_Asset}(t,s_j) - MW(\text{Norm\_Asset})(t)]^2}{n(n-1)}}$$

und betrachtet das Konfidenzintervall zum Niveau 1 – α

$$[MW(Norm\_Asset)(t) - Delta\ (t); MW(Norm\_Asset)(t) + Delta\ (t)]$$

Der Test ist bestanden, wenn für alle Projektionszeitpunkte t der Wert 1 innerhalb dieses Intervalls liegt. Folgende Abbildung illustriert dieses Vorgehen:




Fällt für ein betrachtetes Asset der Martingaltest oder auch 1=1-Test negativ aus, d. h. liegt die 1-Linie nicht durchgehend im Konfidenzkorridor, so ist bei größeren Abweichungen der Prozess der Szenariengenerierung neu zu durchlaufen. Im einfachsten Fall können andere Pseudo-Zufallszahlen zu einer besseren Qualität der Szenarien führen. Eventuell muss aber auch die Kalibrierung mit Blick auf die kritische Asset-Klasse modifiziert werden, um eine bessere Konfidenz zu erreichen.

Im Allgemeinen wird der maximal tolerierte Fehler Delta(t) mit wachsendem t ansteigen. Will man eine absolut vorgegebene Fehlerobergrenze (z.B. 2%) im zeitlichen Projektionsintervall nicht überschreiten, so ist u. U. die Anzahl der Szenarien geeignet zu erhöhen.

### 3.3.2.2. Martingaltest für Zinskurven

Der zu testende Szenariensatz enthält als zentrale Komponente pro Szenario $s_j$ und pro Zeitpunkt t eine Zerobondkurve hinreichender Länge (Restlaufzeit). Die Qualität der Zinsszenarien bezüglich der Martingaleigenschaft prüft man, indem man für jedes k Nullkuponanleihen der Restlaufzeit k einem Martingaltest für den gesamten Projektionszeitraum unterzieht. Für festes k betrachtet man in Konsistenz zu (2)

$$\mathrm{Norm\_}ZCB_k(t_i,s_j) := ZCB_k(t_i,s_j)\cdot Disk(t_i,s_j)/ZCB_{k+t_i}(t_0) \quad \text{für i=1,..,m}$$

und unterzieht jeweils $(\mathrm{Norm\_}ZCB_k(t_i,s_j))_{j=1,..,n}$ einem Martingaltest wie oben beschrieben.

Bestehen die Zinsszenarien diesen Konfidenztest bezüglich der Marktwerte von Zerobonds, so kann auf einen entsprechenden Test bezüglich der Marktwerte von Kuponbonds verzichtet werden.

### 3.3.2.3. Martingaltest für Aktien und Immobilien

Der zu prüfende Szenariensatz enthält für die Assetklassen Aktien und Immobilien jeweils pro Szenario $s_j$ und für jeden Projektionszeitpunkt $t_i$ den Total Return $TR_i(s_j)$.

Man betrachtet entsprechend obiger Gleichung (3)

$$\mathrm{Norm\_Asset}(t_i,s_j) := 1/n\cdot\sum_{j=1}^{n}\left(\prod_{k=1}^{i}(1+TR_k(s_j))\right)\cdot\mathrm{Disk}(t_i,s_j)$$

und rechnet jeweils für $(\mathrm{Norm\_Asset}(t_i,s_j))_{j=1,..,n}$ den 1=1-Test.

## 3.3.3. Reinvestitionstest

### 3.3.3.1. Allgemein

Der Reinvestitionstest (auch „1=1=1-Test“ genannt) stellt eine Erweiterung des einfachen Martingaltests dar. Hierbei wird die Martingaleigenschaft eines Assets, welches aus einer dynamischen Reinvestitionsstrategie in Aktien, Immobilien und Zinsen resultiert, überprüft.

Im Folgenden wird anhand eines realistischen Beispiels illustriert, wie ein solcher Reinvestitionstest in der Praxis durchgeführt werden kann:

In diesem Beispiel werden anfängliche Investitionen in $t_1$ =1, …, 80 in Zinstitel bzw. Aktien- oder Immobilienwerte nach weiteren $t_2$ =5, 10, 15, 20 Jahren in Aktien- oder Immobilienwerte bzw. Zinstitel umgeschichtet und deren mittlerer diskontierter Marktwert sowie die zugehörigen symmetrischen 5%-Konfidenzintervalle ermittelt. Liegt der Mittelwert einer solchen Umschichtungsstrategie in einem Projektionsjahr außerhalb des zugehörigen Konfidenzintervalls, so gilt der Test in diesem Fall als nicht bestanden.

Es werden die folgenden sieben Anlagestrategien getestet:

- Zweimalige Investition in Zerobonds,
- Anlage in Zerobonds, gefolgt von Investition in Aktien,
- Anlage in Zerobonds, gefolgt von Investition in Immobilien,

- Anlage in Aktien gefolgt von Anlage in Zerobonds,
- Anlage in Aktien gefolgt von Anlage in Immobilien,
- Anlage in Immobilien gefolgt von Anlage in Zerobonds und
- Anlage in Immobilien gefolgt von Anlage in Aktien.
-

### 3.3.3.2. Hypothesentest

Das Ziel eines Hypothesentests besteht darin, aufgrund einer Stichprobe zu prüfen, ob eine vermutete Wahrscheinlichkeit, die Hypothese, als wahr angenommen werden kann oder ob sie verworfen werden muss.

Treten keine oder nur wenige Abweichungen der Einzeltests auf, dann gilt der Test als bestanden, treten zu viele auf, ist er nicht bestanden. Im Gegensatz zum reinen Hypothesentest wird hier zusätzlich eine Grauzone aufgenommen, an der aus der Anzahl der Abweichungen nicht allein entschieden werden kann, ob der Test bestanden wurde. Es bleibt dem Nutzer anhand einer Detailbetrachtung überlassen, ob er dem Szenariensatz vertraut oder nicht.

Die Grenze zum Nichtbestehen argumentiert sich wie folgt: bei N Tests für jede einzelne Anlagestrategie und einer Wahrscheinlichkeit des Überschreitens von $\alpha$ gibt es unter der Annahme der Binomialverteilung einen Mittelwert von $N*\alpha$ Abweichungen und einer Varianz von $N\cdot\alpha\cdot(1-\alpha)$. Ist $N\cdot\alpha\cdot(1-\alpha) > 9$, so lässt sich die Binomialverteilung durch die Normalverteilung $(N\cdot\alpha,\ N\cdot\alpha\cdot(1-\alpha))$ approximieren. So kann leicht zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau die Anzahl der Abweichungen ermittelt werden, ab wann die Hypothese abzulehnen ist.

#### 3.3.3.3. Ausreißertest

Der Reinvestitionstest wird zusätzlich um einen Ausreißertest > 99,5% (symmetrischer 0,5%-Konfidenztest) ergänzt. Wie beim Hypothesentest kann nun für ein vorgegebenes Signifikanzniveau die Wahrscheinlichkeit des Auftretens ermittelt werden. Wenn zu viele Ausreißer gefunden werden, gilt dieser Test als nicht bestanden. Bei nur wenigen Ausreißern gilt der Test als bestanden. Dazwischen ergibt dieser Test keine eindeutige Aussage und es ist eine weitere Detailbetrachtung notwendig.

## 3.4. Validierung der Volatilitäten

### 3.4.1. Einleitung

Nachdem im vorangegangenen Kapitel das Vorgehen zur Überprüfung der korrekten mittleren Entwicklung aller im Szenariensatz vorliegenden Assets beschrieben wurde (im risikoneutralen Kontext die Martingal-Eigenschaft), wird nun die Frage betrachtet, inwiefern die Volatilitäten der Assetpreisentwicklungen den gegebenen Input-Parametern entsprechen. Üblicherweise wird als relevante Kenngröße die sogenannte implizite Volatilität (siehe unten für Details) betrachtet, da diese ein wesentlicher Parameter für die Preisprozesse der Assets und der sich daraus ableitenden Derivate (Optionen) ist. Diese impliziten Volatilitäten basieren nicht auf historischen Zeitreihen, sondern entsprechen den Volatilitäten, welche sich durch Bewertung von Swaptions und Indexoptionen und nachgelagerte Transformation durch die Black-Formel (für Swaptions) bzw. Black-Scholes-Formel (für Indexoptionen) ergeben.  Es wird bei der Validierung geprüft, ob sich die beobachtbaren bzw. zur Kalibrierung verwendeten Marktpreise (transformiert in implizite Volatilitäten) von Swaptions und Indexoptionen in den vorliegenden und zu überprüfenden Szenarien realisieren.

Zur Ermittlung der impliziten Volatilitäten betrachtet man zunächst eine Option, welche sich auf die betrachtete Asset-Klasse bezieht (für Indizes Call/Put-Option, für Anleihen Receiver-/Payer-Swaption). Für diese Option muss ein verlässlicher Marktpreis vorliegen. Die Preise dieser Option werden dann durch Invertierung der Black-Scholes-Formel (für Indexoptionen) bzw. der Black-Formel (für Swaptions) auf eine implizite Volatilität transformiert. In diesem Kontext besteht eine eindeutige Beziehung zwischen Optionspreis und impliziter Volatilität in dem Sinne, dass die zu einem Optionspreis gehörige implizite Volatilität gerade dem

Volatilitätsparameter im Black-Scholes bzw. Black-Model entspricht, die bei Bewertung der Option mit dem jeweiligen Model genau zu diesem Optionspreis führt.

Anschließend vergleicht man die sich aus den Szenarien ergebenden impliziten Volatilitäten mit den am Markt vorliegenden impliziten Volatilitäten und definiert entsprechende Gütekriterien, um die Abweichungen zu bewerten (wobei hier differenziert werden muss zwischen den Instrumenten/Optionen, die zur Kalibrierung verwendet wurden, für die man nur kleine Volatilitätsabweichungen tolerieren wird, und den anderen Instrumente/Optionen, die nicht zur Kalibrierung verwendet wurden und für die größere Abweichungen akzeptiert werden können).

Die Vorteile dieser Methode liegen einerseits darin, dass sie zum einen unabhängig vom verwendeten Zins- und Indexmodell ist. Zudem ermöglicht ein Vergleich der impliziten Volatilitäten anstelle von Optionspreisen auch den Vergleich von Volatilitätskalibrierungen bei Startzinskurven, welche (etwa wegen Extrapolation, CCP u.ä.) nicht der Marktzinskurve entsprechen.

Betrachtet man nur at-the-money (ATM) Optionen, so sind die impliziten Volatilitäten von Call- und Put-Optionen bzw. von Payer- und Receiver-Swaptions aufgrund der sogenannten Put-Call-Parität jeweils identisch (bis auf einen Monte-Carlo-Fehler), so dass in diesem Fall dieser Optionstyp nicht weiter spezifiziert werden muss.

Da für Immobilien kein tiefer und liquider Markt an entsprechenden Optionen besteht, ermittelt man für diese Assetklasse anstelle der impliziten Volatilität die empirische Volatilität der jährlichen Immobilienreturns und vergleicht diese mit den Kalibrierungszielen.

Im Folgenden werden die Eigenschaften und die Formeln zur Bestimmung der impliziten Volatilität aus Optionspreisen skizziert.

### 3.4.2. Optionspreismodell von Black und Black-Scholes

Für die Ermittlung der Swaption- bzw. Optionspreise werden die Modelle von Black ("Black 76") und Black-Scholes verwendet. Die beiden Modelle basieren auf folgenden Grundannahmen:

- Es gibt keine Transaktionskosten und Gebühren, ebenso hat das eigene Kaufverhalten keinen Einfluss auf den Markt. Im Black-Scholes-Modell ist zudem der Zinssatz am Markt deterministisch und zeitlich konstant.

- Der Markt ist arbitragefrei.

- Für die Bewertung von Aktienoptionen im Black-Scholes-Modell wird dabei der Kurs S(t) einer Aktie durch eine geometrische Brownsche Bewegung beschrieben und folgt der stochastischen Differentialgleichung

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t),$$

  mit dem Drift-Parameter μ und dem Volatilitätsparameter σ. Der Parameter μ modelliert das mittlere Wachstum oder den Trend des Kurses.

- Für die Bewertung von Swaptions im Black-Modell folgt dabei der Wert F(t) des Forwards der stochastischen Differentialgleichung

$$dF(t) = \sigma F(t)dW(t),$$

  mit dem Volatilitätsparameter σ.

Die Modelle bestechen durch ihre Einfachheit und sind auch heute noch Grundlage vieler finanzmathematischer Anwendungen in der Modellierung von Kursverläufen. Dennoch sollte beachtet werden, dass durch die Verwendung dieser Modelle implizit angenommen wird, dass sich die Veränderungen von Swaprates sowie die Kurse von Aktien und Immobilen lognormal verhalten. Dies ist in der Realität nicht so zu beobachten. Für die Anwendung der geschlossenen Preisformeln für die Standardoption ist die Annahme der „lognormal-Verteilung" entscheidend. Die zugrundeliegenden Szenarien können dabei jedoch auch auf einem verallgemeinerten Modell mit einer stochastischen Drift und einer zeitabhängigen Volatilität basieren.

### 3.4.3. Volatilität der Forward Rate

Die Ermittlung der impliziten Volatilität einer Swaption mit gegebenem Tenor N und Laufzeit T im Black-Modell erfolgt durch Auswertung der unten dargestellten analytischen Preisformel, welche sich direkt aus den dargestellten Verteilungseigenschaften der Forwardrates im Black-Modell ergibt. Es gilt dabei für den Preis einer entsprechenden Payer Swaption (PSW) bzw. einer Receiver Swaption (RSW) gemäß der Black-Formel (unter der Annahme einer jährlichen Zahlungsfrequenz und eines Nominals von Eins):

$$PSW(F, FR) = \sum_{i=1}^{N} \exp(-r_{T+i}(T+i))[F\ \Phi(d_1) - FR\ \Phi(d_2)]$$

bzw.

$$RSW(F,FR) = \sum_{i=1}^{N} \exp(-r_{T+i}(T+i))[FR\,\Phi(-d_2) - F\,\Phi(-d_1)]$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln(F/FR) + (\sigma^2/2) * T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ und } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T} .$$

Dabei bezeichnen:

- $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung
- N Tenor des Swaps (in Jahren)
- F Forward Rate des Swaps
- FR Fixed Rate, d.h. der feste Zinssatz des Swaps
- $r_i$ risikofreier Zinssatz zur Laufzeit i
- T Laufzeit der Option in Jahren
- σ implizite Volatilität der Forwardrate des Swaps

Zur Ermittlung der impliziten Volatilität wird dann aus den vorliegenden ESG-Szenarien zunächst durch Monte-Carlo Simulation ein Preis für die betrachtete Swaption ermittelt. Dies geschieht durch die pfadweise Ermittlung des diskontierten Cashflows dieses Instruments und nachgelagerter Mittelung über alle Pfade. Anschließend wird dann durch Zielsuche (z.B. iteratives Newtonverfahren) die zugehörige implizite Volatilität σ so ermittelt, dass sich daraus via der Black-Formel der Monte-Carlo-basierte Swaptionpreis ergibt.

Die am Markt vorliegenden Swaptionpreise werden ebenso auf diesem Weg auf die zugehörigen impliziten Volatilitäten abgebildet.

Die für die Validierung herangezogenen Swaptionlaufzeiten T und Tenors N sollten sich an den Laufzeiten orientieren, die für die Kalibrierung verwendet wurden. Im Allgemeinen wird es nicht möglich sein, dass ein Szenariensatz für alle beobachtbaren Laufzeiten T und Tenors N die Marktpreise gut repliziert. Hier sind geeignete Gewichtungen durch den Anwender vorzunehmen, welche unternehmensspezifische Charakteristika der zu bewertenden versicherungstechnischen Verpflichtungen angemessen widerspiegeln sollten.

Dabei sind insbesondere auch sehr langlaufende Swaptions, d.h. Swaptions mit hohen Maturities und Tenors zu betrachten, da diese oft den Charakter der zu bewertenden Verpflichtungen und deren langlaufenden Garantien besonders gut reflektieren. Aufgrund der mangelnden Liquidität dieser Instrumente ist ein Abgleich der Modellpreise-/volatilitäten mit den zugehörigen Marktvorgaben jedoch prinzipiell schwierig.

Wird an einer Vielzahl von Swaptions kalibriert, so ist es schwierig, eine maximal zulässige Obergrenze für die Abweichungen zwischen Zielwerten und empirisch vorliegenden Werten der Swaptionvolatilitäten anzugeben, da einzelne Werte deutlich abweichen können. In der Praxis beobachtet man ferner häufig das Phänomen, dass sich die Black-Formel für den Monte-Carlo-Preis von sehr volatilen Swaptions numerisch nicht mehr stabil invertieren lassen, weshalb in diesem Fall keine implizite Black-Volatilität angegeben werden kann.

### 3.4.4. Volatilität von Aktien- und Immobilienszenarien

Die Ermittlung der impliziten Volatilität einer Aktienoption mit Laufzeit T im Black-Scholes-Modell erfolgt durch Auswertung der unten dargestellten analytischen Preisformel, welche sich direkt aus den dargestellten Verteilungseigenschaften der Aktie im Black-Scholes-Modell ergibt. Es gilt für den risikoneutralen Call-Optionspreis (C) bzw. Put-Optionspreis (P) gemäß Black-Scholes (ohne Dividende):

$$C(M,A) = M\,\Phi(d_1) - A\exp(-r\,T)\,\Phi(d_2)$$

bzw.

$$P(M,A) = A\exp(-r\,T))\,\Phi(-d_2) - M\,\Phi(-d_1)$$

mit

$$d_1 = \frac{\ln(M/A) + (r + \sigma^2/2)T}{\sigma\sqrt{T}} \text{ und } d_2 = d_1 - \sigma\sqrt{T}\,.$$

Dabei bezeichnen:

- $\Phi(x)$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.
- M den aktuellen Marktpreis des Basiswertes
- A den Ausübungspreis des Basiswertes
- r den zur Restlaufzeit der Option gehörenden Zinssatz
- σ die Volatilität des Basiswertes
- T die Laufzeit der Option

Zur Ermittlung der impliziten Volatilität wird dann aus den vorliegenden ESG-Szenarien zunächst durch Monte-Carlo Simulation ein Preis für die betrachtete Option ermittelt. Dies geschieht durch die pfadweise Ermittlung des diskontierten Cashflows dieses Instruments und nachgelagerter Mittelung über alle Pfade. Anschließend wird dann durch Zielsuche (z.B. iteratives Newtonverfahren) die zugehörige implizite Volatilität σ so ermittelt, dass sich daraus via der Black-Scholes-Formel der Monte-Carlo-basierte Optionspreis ergibt.

Die am Markt vorliegenden Optionspreise werden ebenso auf implizite Volatilitäten abgebildet.

Die für die Validierung herangezogenen Laufzeiten T sollten sich an den Laufzeiten orientieren, die für die Kalibrierung verwendet wurden. Im Allgemeinen wird es nicht möglich sein, dass ein Szenariensatz für alle beobachtbaren Laufzeiten T die Marktpreise gut repliziert. Hier sind geeignete Gewichtungen durch den Anwender vorzunehmen, welche unternehmensspezifische Charakteristika der zu bewertenden versicherungstechnischen Verpflichtungen angemessen widerspiegeln.

### 3.4.5. Korrelationen

Korrelationsvorgaben für das Modell werden häufig in Form von historischen Korrelationen zwischen Assetklassen vorgegeben, da eine verlässliche Datenbasis für Derivate auf Korrelationen nicht zur Verfügung steht. Es sind insbesondere die Korrelationen zwischen Bonds und Aktien sowie zwischen Aktien und Immobilien zu prüfen.

Zusammenhänge über Korrelationen abzubilden, ist in der Praxis sehr verbreitet, aber keineswegs die einzige oder uneingeschränkt favorisierte Methode. Daneben gibt es noch die Möglichkeit, mit Kopulas oder Mischformen von Korrelationen und Kopulas zu modellieren. Die Betrachtung hier beschränkt sich auf Korrelationen, da Korrelationen wesentlich leichter zu bestimmen und unabhängig vom funktionalen Zusammenhang zwischen den Assetklassen zu modellieren sind.

Bei Korrelationen wird häufig die Stichprobenkorrelation (Pearson Korrelation) $p_{x,y}$ der Assetklassen x und y verwendet, d.h.

$$p_{x,y} = \frac{\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{i,j} - \hat{x})(y_{i,j} - \hat{y})}{\sqrt{(\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (x_{i,j} - \hat{x})^2) \cdot (\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} (y_{i,j} - \hat{y})^2)}} .$$

Dabei betrachtet man als zugrundeliegende Größen zum einen bei Aktien und Immobilien die sogenannten Log-Excess-Returns, d.h. den logarithmierten Indexreturn des Jahres abzüglich des einjährigen Zinsreturn dieses Jahres, und zum anderen bei Zinsen die Forward Rates. Die Parameter $\hat{x}$ und $\hat{y}$ entsprechen den Mittelwerten aus den Log-Excess-Returns bzw. der Forward Rates über alle Zeitpunkte i und alle Szenarien j.

Die Betrachtung der Log-Excess-Returns bzw. der Forward Rates hat den Vorteil, dass man damit nahe an den zur Kalibrierung verwendeten Korrelationen zwischen den normalverteilten Inkrementen liegt und damit anhand der Kalibrierungsparameter prüft. Die Ableitung der Korrelationen zwischen den zugehörigen Assets als solche hingegen verzerrt die hier betrachteten Korrelationen teilweise so stark, dass diese nicht aussagekräftig genug sind, um damit die Kalibrierungsparameter zu validieren.

Möchte man nun einen Quantilsbereich von $p_{x,y}$ bestimmen, um zu prüfen, ob die vorgegebene Korrelation mit den Szenarien in Einklang steht, so führt man die sogenannte Fishersche Z-Transformation durch:

$$z = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+p_{x,y}}{1-p_{x,y}}\right)$$

Die Größe z ist selbst für kleine Stichproben n approximativ normalverteilt mit dem Mittelwert $\hat{z} = z + \frac{p_{x,y}}{2\cdot(n-1)}$ und der Varianz $Varianz(z) = \frac{1}{n-3}$.

Es ergibt sich daraus also das Konfidenzintervall

$$\left[\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+p_{x,y}}{1-p_{x,y}}\right) - \frac{p_{x,y}}{2\cdot(n-1)} - \frac{\text{Norm\_inv}(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n-3}};\quad \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+p_{x,y}}{1-p_{x,y}}\right) - \frac{p_{x,y}}{2\cdot(n-1)} + \frac{\text{Norm\_inv}(1-\frac{\alpha}{2})}{\sqrt{n-3}}\right]$$

mit Norm_inv(1 – $\alpha$/2) als das (1 – $\alpha$/2)-Quantil der Standardnormalverteilung.

## 3.5. Weitere Kennzahlen

Ist der Martingaltest bestanden, ist zusätzlich auch die Konsistenz zur initialen Zinsstrukturkurve und den Deflatoren zu prüfen. Die Szenarien sollten so generiert sein, dass die Diskontfaktoren des jeweiligen Währungsraums äquivalent zum inversen jeweiligen Cash Return sind. Ebenfalls soll für alle Projektionszeitpunkte der mittlere Diskontfaktor konsistent zur initialen Zinskurve sein.

Zur Überprüfung der initialen Zinsstrukturkurve werden die absoluten und relativen Abweichungen der Simulationskurve von der vorgegebenen Zinskurve betrachtet.

Werden die Kriterien in diesem Abschnitt 3 erfüllt und sind die Zinsen zur initialen Zinskurve konsistent, so sind die Tests für die Abnahme der Szenarien formal bestanden. Trotzdem sollten noch weitere Größen ermittelt werden, um die Szenarien auch auf ihre innere Logik überprüfen zu können. Auf einige wichtige Aspekte soll hier noch näher eingegangen werden.

Für das in der aktuellen Version des ESG vorliegende Zinsmodell, bei dem es sich um ein 1-Faktor Hull-White-Modell handelt, liegen geschlossene Formeln für die Verteilung der simulierten Shortrate sowie der daraus resultierenden Spotrates vor. Daher ist es möglich, für folgende Größen sowohl den theoretischen Wert (durch Auswertung der oben genannten geschlossenen Formeln) als auch den sich in den Szenarien realisierten Wert (auf empirische Weise) zu ermitteln und miteinander zu vergleichen:

- Auftrittswahrscheinlichkeit negativer Zinsen in der Projektion der Zinsen über die Zeit.
- Quantilsfächer der Verteilung der Spotrates für zentrale Restlaufzeiten in der Projektion der Zinsen über die Zeit.

Der Vergleich zwischen den empirisch ermittelten und theoretischen Zielwerten zeigt, wie gut sich die Zielvorgaben in dem vorliegenden Szenariensatz realisiert haben; eventuell auftretende signifikante Abweichungen können etwa auf mangelnde Konvergenz bei Vorliegen von z.B. lediglich 1.000 Szenarien oder eine schlechte Seedwahl hindeuten.

# 4. Literatur


1. D. Brigo; F. Mercurio: Interest Rate Models – Theory and Practice: With Smile, Inflation and Credit, Springer, 2. Auflage, 2006

2. DAV-Arbeitsgruppe *Kalibrierung in inaktiven Marktsegmenten*, DAV Grundsatz, Hinweis, in Kraft getreten am 27.01.2011

3. Reitz, S.; Schwarz, W.; Martin, M.: Zinsderivate, Eine Einführung in Produkte, Bewertung, Risiken, Vieweg 2004

4. DAV, DAV Fachgrundsatz: Anforderungen an einen ökonomischen Szenariogenerator. Köln, 2012

5. GDV, Dokumentation Kapitalmarktmodell / Szenariogenerator, August 2014 (GDV-PKV-Erhebung 2014)

6. J. Hartung: Statistik – Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik. Kap IX: Die Korrelation von Merkmalen, 12. Auflage, Oldenbourg, 1999

7. U. Krengel: Einführung in die Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. 8. Auflage. Vieweg, 2005

8. K. Pohl: Requirements Engineering. Grundlagen, Prinzipien, Techniken. Kap. 26: Grundlagen der Validierung, 2. korrigierte Auflage dpunkt.Verlag 2008

9. John C. Hull: Optionen, Futures und andere Derivate, Pearson Studium, 2006

10. P. Glasserman: Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer, 2004