Beurteilung der biometrischen Verhältnisse in einem Bestand

IVS
INSTITUT DER VERSICHERUNGSMATHEMATISCHEN SACHVERSTÄNDIGEN FÜR ALTERSVERSORGUNG e.V.

Dr. Richard Herrmann, Köln

Agenda

Beurteilung der biometrischen Verhältnisse in einem Bestand

Der Aktuar muss zu der Angemessenheit der biometrischen Rechnungsgrundlagen Stellung nehmen

- **als Verantwortlicher Aktuar**
  - Pensionskassen
  - Pensionsfonds
  - Lebensversicherungen
- **als Gutachter bei Erstellung der Bilanzgutachten für versicherungsförmige Durchführungswege**
- **als "Plan-Aktuar"**

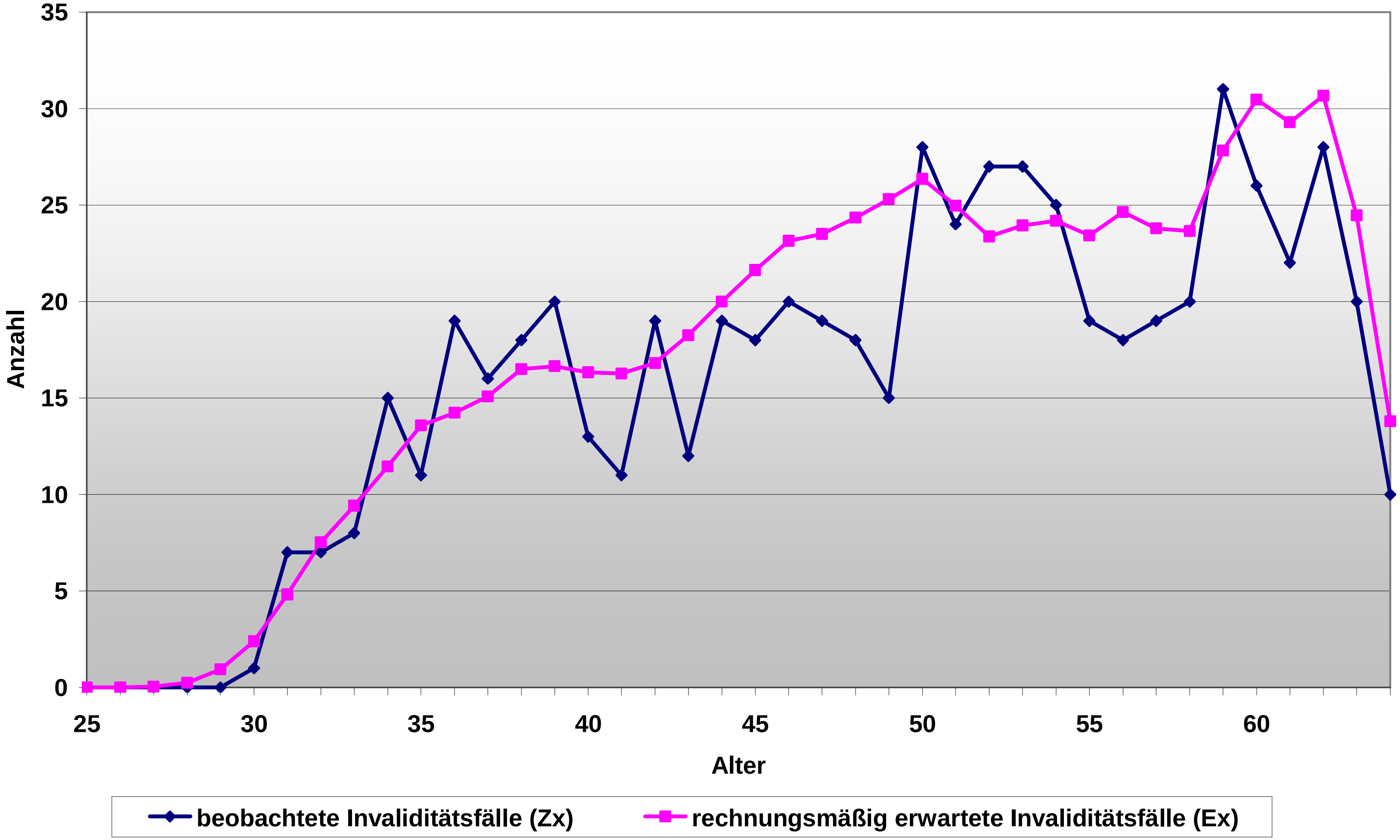
Zur Beurteilung der biometrischen Rechnungsgrundlagen erforderliche Schritte

1. Herleiten empirischer Häufigkeiten aus dem Bestand (z.B. der Bestandsbewegung eines Geschäftsjahres), die mit den angenommenen Rechnungsgrundlagen vergleichbar sind. "Herausrechnen" von Sicherheitsmargen, d. h. Vergleich mit Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung.

2. Vergleich durchführen mit geeigneter Methode

3. Beurteilung abgeben, Konsequenz ziehen
   z. B. Modifikation der Rechnungsgrundlagen (oder auch keine)

Beispielhafte Fragestellung



Sind die Rechnungsgrundlagen angemessen?

2.1 Vergleich der Anzahlen

- **Beurteilung anhand der Anzahlen**

Summe der beobachteten Invaliditätsfälle	630
Summe der rechnungsmäßig erwarteten Invaliditätsfälle	<u>693</u>
Abweichung (beobachtet ./. erwartet)	- 63

⇒ **Abweichung ca. - 10 %**
Schlussfolgerung?

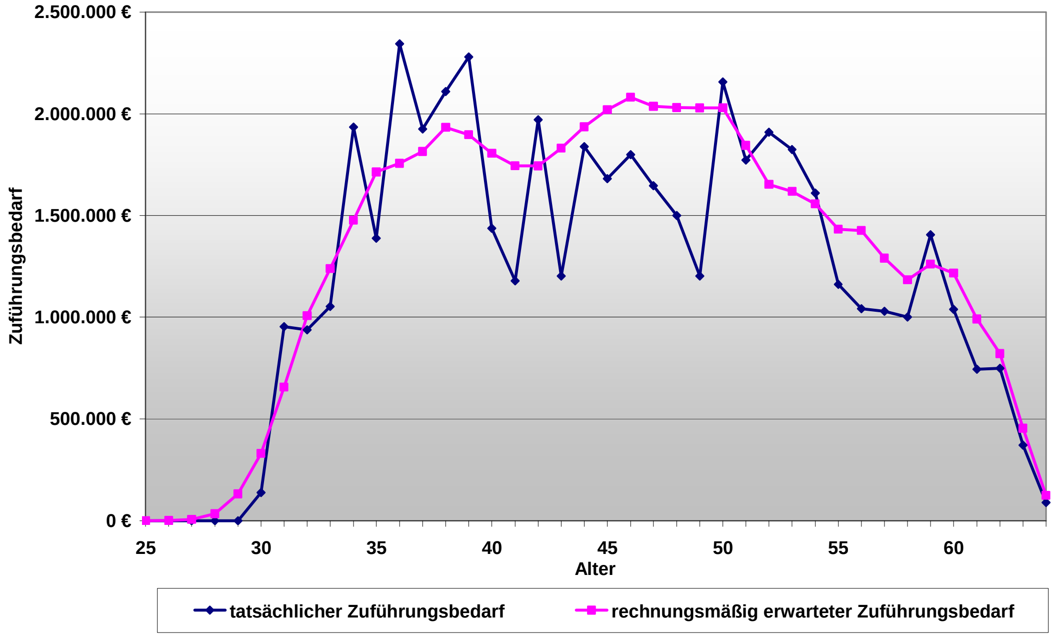
- **Da der Vergleich mit Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung vorgenommen wurde, bleiben Sicherheitsmargen außer Acht**

2.2 Vergleich der risikogewichteten Anzahlen

- **Beurteilung anhand der rechnungsmäßig erwarteten Zuführungen aufgrund von Invalidität mit den tatsächlichen Zuführungen aufgrund der Bestandsveränderungen**

Summe der tatsächlichen Zuführungen	48,4 Mio. €
Summe der erwarteten Zuführungen	<u>52,2 Mio. €</u>
Abweichung	- 3,8 Mio. €

⇒ **Abweichung ca. - 7 %**
Schlussfolgerung?



- **Beurteilung anhand der beobachteten und der erwarteten Anzahlen von Invaliditätsfällen anhand statistischer Testverfahren**

- **Grundidee:**
  Wenn die rechnungsmäßigen biometrischen Rechnungsgrundlagen angemessen (i. S. des Erwartungswerts) sind, dann darf "die Abweichung nicht zu groß sein"

- **Beispielhaft drei Testverfahren**
  - χ^2-Test
  - Vorzeichentest
  - Iterationstest

Statistisches Entscheidungsmodell

Gewünscht: Aussage zu den **tatsächlichen** Ausscheidewahrscheinlichkeiten im Vergleich zu den **rechnungsmäßig unterstellten** Ausscheidewahrscheinlichkeiten.

Hierzu werden die möglichen Aussagen in zwei disjunkte Teilmengen aufgeteilt:

H: Die tatsächlichen und die rechnungsmäßig unterstellten Ausscheidewahrscheinlichkeiten stimmen überein (Hypothese)

A: Die tatsächlichen und die rechnungsmäßig unterstellten Ausscheidewahrscheinlichkeiten sind verschieden (Alternative)

Mögliche Kombinationen von Entscheidung und Realität

		tatsächlich	
		Hypothese	Alternative
Entscheidung für	Hypothese	richtig kein Fehler	falsch Fehler 2. Art = β
	Alternative	falsch Fehler 1. Art = α	richtig kein Fehler

Definition der Zufallsvariablen

$$Z_{x_j} = \begin{cases} 1 \text{ wenn j - te Person des Alters x ausscheidet} \\ 0 \text{ sonst} \end{cases}$$

$$j = 1, ..., l_x := \text{Anzahl der Lebenden des Alters } x$$

Z_{x_j} ist binomial verteilt mit Erwartungswert q_x

Definiere $$Z_x = \sum_{j=1}^{l_x} Z_{x_j}$$

dann ist Z_x näherungsweise poissonverteilt mit

Erwartungswert = Varianz = $l_x \cdot q_x =: E_x$

= Anzahl der erwarteten Ausgeschiedenen

χ^2-Test

Teststatistik für χ^2-Test

$$T = \sum_{x=0}^{\omega} \frac{\left(Z_x - E_x\right)^2}{E_x}$$

T ist χ^2 - verteilt mit (ω+1) Freiheitsgraden

Entscheidung:

für Alternative, wenn: $T > \chi^2_{\omega+1;1-\alpha}$
für Hypothese: sonst

Interpretation des Testergebnisses

1. T > $\chi^2_{\omega+1;1-\alpha}$ (Verwerfen der Hypothese)

   "Tatsächliche und rechnungsmäßige angenommene Ausscheide-wahrscheinlichkeiten sind signifikant verschieden auf dem Niveau $1 - \alpha$".

2. T $\leq$ $\chi^2_{\omega+1;1-\alpha}$ (Annahme der Hypothese)

   "Auf dem Niveau $1-\alpha$ spricht der Test nicht gegen die Gleichheit von tatsächlichen und rechnungsmäßig unterstellten Ausscheide-wahrscheinlichkeiten".

Für das Beispiel: keine signifikante Abweichung für α = 5 %

Vorzeichentest

Teststatistik: $T = \sum_{x=0}^{\omega} 1_{\{Z_x > E_x\}}$

Bei Gültigkeit der Nullhypothese ist T binomial verteilt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für jedes Vorzeichen, d. h. $T \sim B\left(\omega+1, \frac{1}{2}\right)$.

Zu vorgegebenem Niveau 1 - α werden zwei Schwellenwerte n_α und $\omega + 1 - n_\alpha$ bestimmt, so dass bei Unterschreiten von n_α bzw. bei Überschreiten von $\omega + 1 - n_\alpha$ die Nullhypothese abgelehnt wird. n_α wird bestimmt aus

$$2 \cdot P\left(T < n_\alpha\right) = 2\sum_{j=0}^{n_\alpha - 1} \binom{\omega+1}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{j} \left(\frac{1}{2}\right)^{\omega+1-j} \overset{!}{\leq} \alpha$$

Für das Beispiel: signifikante Abweichung für α = 5 %

Iterationstest

Teststatistik: $T = \sum_{x=1}^{\omega} 1_{\{\mathrm{Sign}(Z_x - E_x) \neq \mathrm{Sign}(Z_{x-1} - E_{x-1})\}}$

Bei Gültigkeit der Nullhypothese ist T binomial verteilt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ für jedes Vorzeichen, d. h. $T \sim B\left(\omega, \frac{1}{2}\right)$.

Zu vorgegebenem Niveau 1 - α wird ein Schwellenwert n_α bestimmt, so dass bei Unterschreiten von n_α die Nullhypothese abgelehnt wird. n_α wird bestimmt aus

$$P\left(T < n_\alpha\right) = \sum_{j=0}^{n_\alpha - 1} \binom{\omega}{j} \left(\frac{1}{2}\right)^j \left(\frac{1}{2}\right)^{\omega - j} \overset{!}{\leq} \alpha$$

Für das Beispiel: **keine signifikante Abweichung für α = 5 %**

Eigenschaften der drei Testverfahren

Testverfahren	Ansatz	Vorteile	Nachteile
χ^2-Test	Summe der quadrierten und normierten Differenzen zwischen beobachteten und tatsächlichen Leistungsfällen	• Berücksichtigung der Größe der Differenzen • Verteilung tabelliert • Bestandsgröße wird berücksichtigt	• Vorzeichen der Differenzen bleiben unberücksichtigt • "Schiefe" kann nicht festgestellt werden
Vorzeichentest	Anzahl der positiven (bzw. negativen) Differenzen zwischen erwarteten und tatsächlichen Leistungsfällen	• Teststatistik leicht zu ermitteln • Verteilung tabelliert	• Systematische Abweichungen werden selten erkannt • Größe der Differenzen zwischen erwarteten und tatsächlichen Leistungsfällen wird nicht berücksichtigt • Bestandsgröße wird nicht berücksichtigt
Iterationstest	Vorzeichenwechsel bei benachbarten Altern in Hinblick auf die Differenz zwischen erwarteten und tatsächlichen Leistungsfällen	• Teststatistik leicht zu ermitteln • Verteilung tabelliert • Anzahl und Reihenfolge der Differenzen werden berücksichtigt	• Größe der Differenzen zwischen erwarteten und tatsächlichen Leistungsfällen wird nicht berücksichtigt • Bestandsgröße wird nicht berücksichtigt

Fazit

- **Vergleich der Anzahlen allein häufig ungeeignet**
  - keine oder nur geschätzte Aussage zum Risikoergebnis
  - keine Berücksichtigung der Leistungshöhe
- **Verwendung von gewichteten Anzahlen aussagekräftiger, Einbeziehung von**
  - Rentenhöhe
  - riskiertes Kapital
- **Statistische Testverfahren unabhängiger von subjektiver Einschätzung**
  - Irrtumswahrscheinlichkeit ist festzulegen
  - kein "Test-picking"
  - Verfahren mit Berücksichtigung der Bestandsgröße sind zu bevorzugen