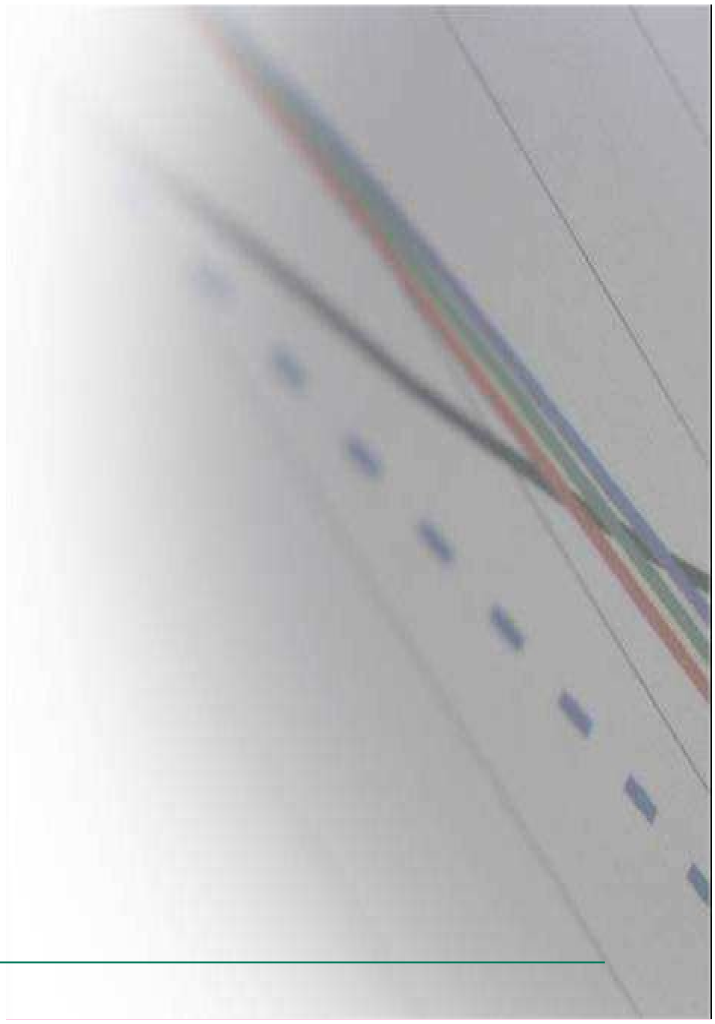
HEUBECK AG
Lösungen zur Altersvorsorge

Value-at-Risk



Dr. Richard Herrmann

Nürnberg, 14. November 2006
IVS-Forum

Gliederung

- **Modell**
- **Beispiel aus der betrieblichen Altersversorgung**
- **Verteilung des Gesamtschadens**
- **Value-at-Risk und Tail Value-at-Risk**
- **Risikobeurteilung einer Pensionskasse**
- **Hinweise für die Praxis**

Modell

- **Hauptgesamtheit der versicherten Personen**
  - **gesamter Bestand**
  - **Abrechnungsverband**
  - **Versicherte in einem Tarif**
  - **Versorgungsberechtigte in einem Pensionsplan**
- **Verschiedene Ursachen, aus der Hauptgesamtheit in eine Nebengesamtheit auszuscheiden**
- **Typische Ausscheideursachen können beispielsweise sein:**
  - **in der Lebensversicherung: Tod, Rückkauf, Beitragsfreistellung**
  - **in der Krankenversicherung: Tod, Storno**
  - **in der betrieblichen Altersversorgung: Tod ohne Witwe, Tod mit Witwe, Invalidität, Ausscheiden mit oder ohne unverfallbare Ansprüche, Portabilität, Wechsel in den Altersruhestand.**

Modell

Ausscheidewahrscheinlichkeiten

Für das Mitglied j der Hauptgesamtheit bezeichne für die Ausscheideursachen
$h = 1, \ldots, m$

$$q_j^{(h)} = P \quad (\text{Ausscheiden wegen Ursache h})$$

die Wahrscheinlichkeit aus der Hauptgesamtheit auszuscheiden und

$$q_j^{(0)} = 1 - \sum_{h=1}^{m} q_j^{(h)}$$

die Wahrscheinlichkeit, in der Hauptgesamtheit zu verbleiben.
Da es sich bei der Hauptgesamtheit um Versicherungen handelt, wird im Folgenden ausgeschlossen, dass sämtliche Ausscheidewahrscheinlichkeiten null sind, d. h.

$\exists \quad h \in \{1, \ldots, m\}$ mit $\qquad q_j^{(h)} > 0$

Modell

Zufallsvariable des Ergebnisses

Bezeichne die Zufallsvariable X_j für Mitglied j das Ergebnis (Aufwand bzw. Ertrag) für die Versicherung im Geschäftsjahr, dann gibt es für X_j (m + 1) mögliche Realisationen. Bezeichne

$$R_j = \left\{ r_j^{(h)} \in \mathbb{Z}, h = 0, 1, \ldots, m \right\}$$

die Menge der möglichen Realisation von X_j.
Für Erwartungswert und Varianz von X_j gilt dann

$$E(X_j) = \sum_{h=0}^{m} q_j^{(h)} \cdot r_j^{(h)} =: \mu_j$$

$$Var(X_j) = \sum_{h=0}^{m} q_j^{(h)} \cdot \left(r_j^{(h)} - \mu_j \right)^2 =: \sigma_j^2$$

Darüber hinaus existieren auch die Momente höherer Ordnung.

Für die Versicherung ergeben sich die Realisationen von X_j als Differenzen zwischen dem vorhandenen Vermögen und der zu erbringenden Leistung.

Modell

Bezeichne

$L^{(h)}$ **den Barwert (zu Beginn des Jahres) aller Leistungen, die bei Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit aufgrund der Ursache h (h = 1, …, m) fällig werden,**

$L^{(0)}$ **den Barwert (zu Beginn des Jahres) bei Verbleiben in der Hauptgesamtheit.**

$_0V$ = Deckungskapital am Beginn des Jahres bei Zugehörigkeit zur Hauptgesamtheit

P = Prämie (fällig zu Beginn des Jahres)

P^S = Sparprämie

v $= \dfrac{1}{1+i}$ **, i = Zins**

Modell

Dann gilt

$$\begin{aligned}
{}_0V + P &= q_j^{(0)} \cdot L^{(0)} + \sum_{h=1}^{m} q_j^{(h)} \cdot L^{(h)} \\
&= \left(1 - \sum_{h=1}^{m} q_j^{(h)}\right) L^{(0)} + \sum_{h=1}^{m} q_j^{(h)} \cdot L^{(h)} \\
&= L^{(0)} + \sum_{h=1}^{m} q_j^{(h)} \left(L^{(h)} - L^{(0)}\right) \\
&= L^{(0)} + \sum_{h=1}^{m} q_j^{(h)} \underbrace{\left(L^{(h)} - L^{(0)}\right)}_{\substack{\text{Risikokapital } K^{(h)} \text{ für} \\ \text{Ausscheideursache } h}} \\
&= {}_0V + P^S + \sum_{h=1}^{m} q_j^{(h)} \cdot K^{(h)}
\end{aligned}$$

Modell

Für die individuelle Schadenfunktion werden die Realisationen $r_j^{(h)}$ von X_j wie folgt festgelegt

$$\begin{aligned}
r_j^{(h)} &= K^{(h)} = L^{(h)} - L^{(0)} && \text{für } h = 1, \ldots, m \\
r_j^{(0)} &= L^{(0)} - L^{(0)} = 0
\end{aligned}$$

Der Erwartungswert $E(X_j)$ ist dann

$$\begin{aligned}
E\left(X_j\right) &= \sum_{h=0}^{m} q_j^{(h)} \cdot r_j^{(h)} \\
&= \sum_{h=0}^{m} q_j^{(h)} \left(L^{(h)} - L^{(0)}\right) \\
&= {}_0V + P - L^{(0)}
\end{aligned}$$

Beispiel aus der betrieblichen Altersversorgung

- **Pensionszusage auf gleichbleibender Jahresrente R, 60 % Witwenrentenanwartschaft**
- **Populationsmodell der Richttafeln, d.h. drei Ausscheideursachen: Invalidität, Tod mit Witwe, Tod ohne Witwe**
- **Barwerte, riskierte Kapitale und Ausscheidewahrscheinlichkeiten**

Verbleiben in der Hauptgesamtheit (h = 0)

$$\begin{aligned} L^{(0)} &= v\,{}_1V \\ &= v \cdot R \cdot \left(a^{aiA}_{x+k+1} + w \cdot a^{aw}_{x+k+1} - P \cdot a^{a}_{x+k+1}\right) \\ K^{(0)} &= 0 \\ q_j^{(0)} &= 1 - i_{x+k} - q^{aa}_{x+k} \end{aligned}$$

Tod mit Witwe (h = 2)

$$\begin{aligned} L^{(2)} &= w \cdot R \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot a^{w}_{y(x+k)+\frac{1}{2}} \\ K^{(2)} &= L^{(2)} - L^{(0)} \\ q_j^{(2)} &= q^{aa}_{x+k} \cdot h_{x+k} \end{aligned}$$

Invalidität (h = 1)

$$\begin{aligned} L^{(1)} &= R \cdot v^{\frac{1}{2}} \cdot \left(a^{i}_{x+k+\frac{1}{2}} + w \cdot a^{iw}_{x+k+\frac{1}{2}}\right) \\ K^{(1)} &= L^{(1)} - L^{(0)} \\ q_j^{(1)} &= i_{x+k} \end{aligned}$$

Tod ohne Witwe (h = 3)

$$\begin{aligned} L^{(3)} &= 0 \\ K^{(3)} &= -L^{(0)} \\ q_j^{(3)} &= q^{aa}_{x+k} \cdot \left(1 - h_{x+k}\right) \end{aligned}$$

Beispiel aus der betrieblichen Altersversorgung

Der Erwartungswert des Einzelschadens beträgt bei gleichem Populations-modell und gleichen Ausscheidewahrscheinlichkeiten wie für die Bewertung

$$E\left(X_j\right) = R\left[\left(a^{aiA}_{x+k} + w \cdot a^{aw}_{x+k} - P \cdot a^{a}_{x+k,\overline{z-x-k}|}\right) + P - v \cdot \left(a^{aiA}_{x+k+1} + w \cdot a^{aw}_{x+k+1} - P \cdot a^{a}_{x+k+1,\overline{z-x-k-1}|}\right)\right]$$

Zusätzliche Berücksichtigung der Fluktuation

- **Modifikation der Ausscheidewahrscheinlichkeiten für Tod und Invalidität erforderlich**
- **Modellerweiterung**
  $q_j^{(4)}$ = **Fluktuationswahrscheinlichkeit**

Dann gilt

$$\begin{aligned} L^{(4)} &= v \cdot u \cdot R \cdot \left(a^{aiA}_{x+k+1} + w \cdot a^{aw}_{x+k+1}\right) \\ K^{(4)} &= L^{(4)} - L^{(0)} \end{aligned}$$

mit $u < 1$ Unverfallbarkeitsfaktor

oder

$$\begin{aligned} L^{(4)} &= 0 \\ K^{(4)} &= -L^{(0)} \end{aligned}$$

falls keine Ansprüche aufrecht-erhalten werden

Verteilung des Gesamtschadens

Der Gesamtschaden des Versicherungsunternehmens (bzw. eines Teilbestandes) ergibt sich als Summe der Einzelschäden

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} X_j$$

Es gilt dann

$$E(S_n) = \sum_{j=1}^{n} E(X_j) = \sum_{j=1}^{n} \mu_j$$

und wegen der Unabhängigkeit der X_j

$$\mathrm{Var}(S_n) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{Var}(X_j) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2$$

Verteilung des Gesamtschadens

Berechnung der Gesamtschadenverteilung durch Faltung

Da die Verteilungen der Einzelschäden bekannt sind, kann die Gesamtschadenverteilung durch Faltung ermittelt werden mittels

$$P(S_n = a) = \sum_{h=0}^{m} P\left(S_{n-1} = a - K_n^{(h)}\right) \cdot P\left(X_n = K_n^{(h)}\right)$$

wobei $K_n^{(h)}$ **das riskierte Kapital bei Ausscheiden wegen Ursache h (h = 1, …, m) des Mitglieds n aus der Hauptgesamtheit bzw. das Verbleiben in der Hauptgesamtheit (h = 0) bezeichnet.**

Mit Hilfe der Faltung kann insbesondere für kleinere Bestände die Gesamtschadenverteilung exakt und zugleich schnell ermittelt werden.

Verteilung des Gesamtschadens

Approximation der Gesamtschadenverteilung durch eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung

Im kollektiven Modell wird der Gesamtschaden S als Summe aus N Einzel-schäden und den Schadenhöhen Y_i betrachtet und es wird angenommen, dass die Y_i identisch verteilt und die Zufallsvariablen N, Y_i, Y_2, … stochastisch unabhängig sind und dass N poissonverteilt ist.

Der Erwartungswert für die Anzahl der Schäden beträgt

$$E(N) = \sum_{j=1}^{n} P\left(X_j > 0\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{h=1}^{m} q_j^{(h)} = \sum_{j=1}^{n}\left(1 - q_j^{(0)}\right) =: \lambda$$

Die Verteilung des Gesamtschadens ergibt sich dann für x > 0 durch

$$P(S = x) = \sum_{l=0}^{x} p^{*l}(x)\, e^{-\lambda} \frac{\lambda^e}{l!}$$

HEUBECK AG
Lösungen zur Altersvorsorge

Verteilung des Gesamtschadens

Approximation der Gesamtschadenverteilung durch die Normalverteilung

- **Die Einzelschäden X_i sind unabhängig und haben einen Wertebereich, der höchstens m+1 Werte umfasst**
- **Die Einzelschäden X_i sind nicht identisch verteilt**
  - $\Rightarrow$ **zentraler Grenzwertsatz nur gültig, wenn die Lindeberg-Bedingung erfüllt ist.**
- **Zentraler Grenzwertsatz gilt, wenn**
  - **für alle Einzelschäden die Momente 4. Ordnung existieren und durch M > 0 begrenzt sind**
  - **Varianzen der Einzelrisiken nach unten durch c > 0 begrenzt sind**
- **Gesamtschadenverteilung konvergiert gegen Normalverteilung mit Erwartungswert $E(S_n)$ und Varianz $Var(S_n)$**

HEUBECK AG
Lösungen zur Altersvorsorge

Value-at-Risk und Tail Value-at-Risk

Das Risikomaß Value-at-Risk (VaR) ist definiert durch

$$\mathrm{VaR}^{\alpha}(X) = u_{1-\alpha}(X) \qquad \alpha \in (0,1)$$

Der Value-at-Risk ergibt sich somit aus der Verteilungsfunktion F von X durch

$$\mathrm{VaR}^{\alpha}(X) = F^{-1}(1-\alpha)$$

Das Risikomaß Tail Value-at-Risk (TVaR) ist definiert durch

$$\mathrm{TVaR}_{\alpha}(X) = \frac{1}{\alpha}\int_{1-\alpha}^{1} \mathrm{VaR}^{1-\beta}(X)\,d\beta \qquad \alpha \in (0,1)$$

Der TVaR ist das arithmetische Mittel der Quantile von X für $1 - \alpha \leq \beta < 1$. Dadurch wird der Verlauf der Verteilungsfunktion oberhalb des $(1 - \alpha)$-Quantils bei der Beurteilung des Risikos einbezogen.

Value-at-Risk und Tail Value-at-Risk

Im Fall der Normalverteilung $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ mit Verteilungsfunktion Ψ ist der Value-at-Risk

$$\mathrm{VaR}^{\alpha}(X) = \Psi^{-1}(1-\alpha) = u_{1-\alpha}$$

und mit Φ als Verteilungsfunktion der Standard-Normalverteilung gilt

$$\mathrm{VaR}^{\alpha}(X) = \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(1-\alpha)$$

Für den Tail Value-at-Risk gilt dann mit φ als Dichtefunktion der Standard-Normalverteilung

$$\mathrm{TVaR}_{\alpha}(X) = \mu + \varphi\left(\Phi^{-1}(1-\alpha)\right) \cdot \frac{\sigma}{\alpha}$$

Risikobeurteilung einer Pensionskasse

Plan A:

Zusage auf Alters-, Invaliden- und Hinterbliebenenrente; der Leistungsanspruch entwickelt sich proportional zur Dienstzeit beim Unternehmen (lineares Steigerungssystem). Der Anspruch auf Hinterbliebenenleistungen beträgt 60 % des Anspruchs des Versorgungsberechtigten.

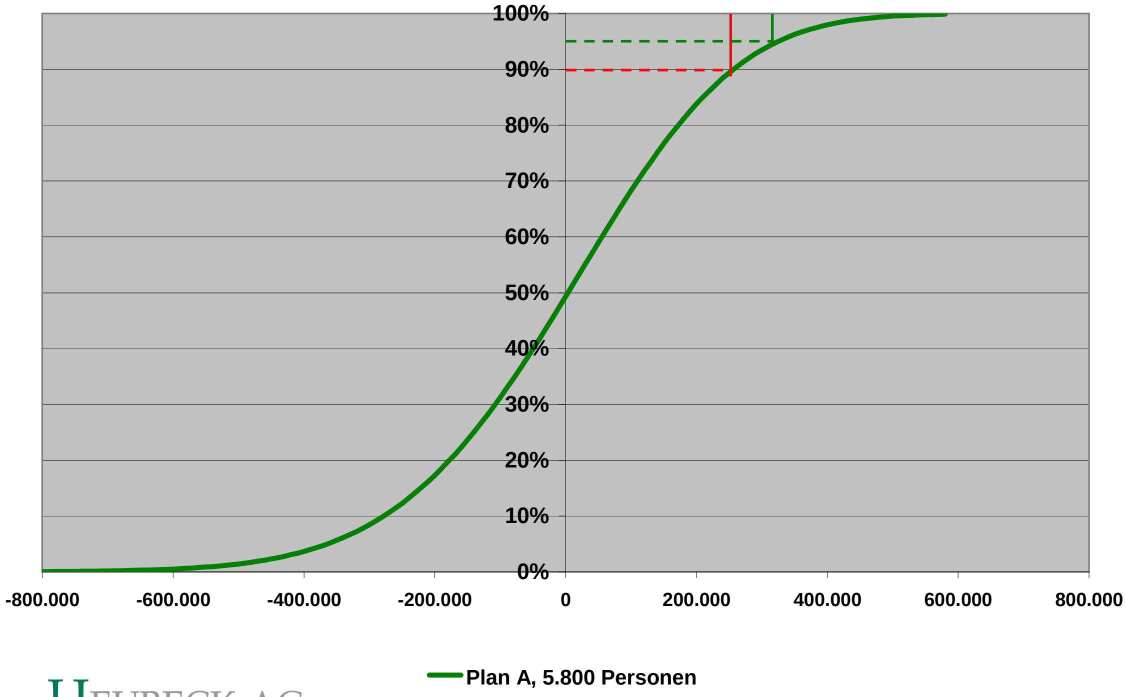
Plan B:

Im Gegensatz zu Plan A wird bei vorzeitigen Leistungsfällen Invalidität und Tod mit Hinterbliebenenversorgung eine Rente gewährt, die sich nicht aus dem erreichten Anspruch sondern durch Zurechnungszeit bis zum Pensionierungsalter ergibt.

Die beiden Pläne unterscheiden sich dadurch, dass das riskierte Kapital in Plan B aufgrund der Zurechnungszeit deutlich höher ist als in Plan A. Darüber hinaus wird die Anzahl der Mitglieder der Hauptgesamtheit (Aktive) in beiden Fällen einmal mit 1.000 Personen und einmal mit 5.800 Personen angenommen.

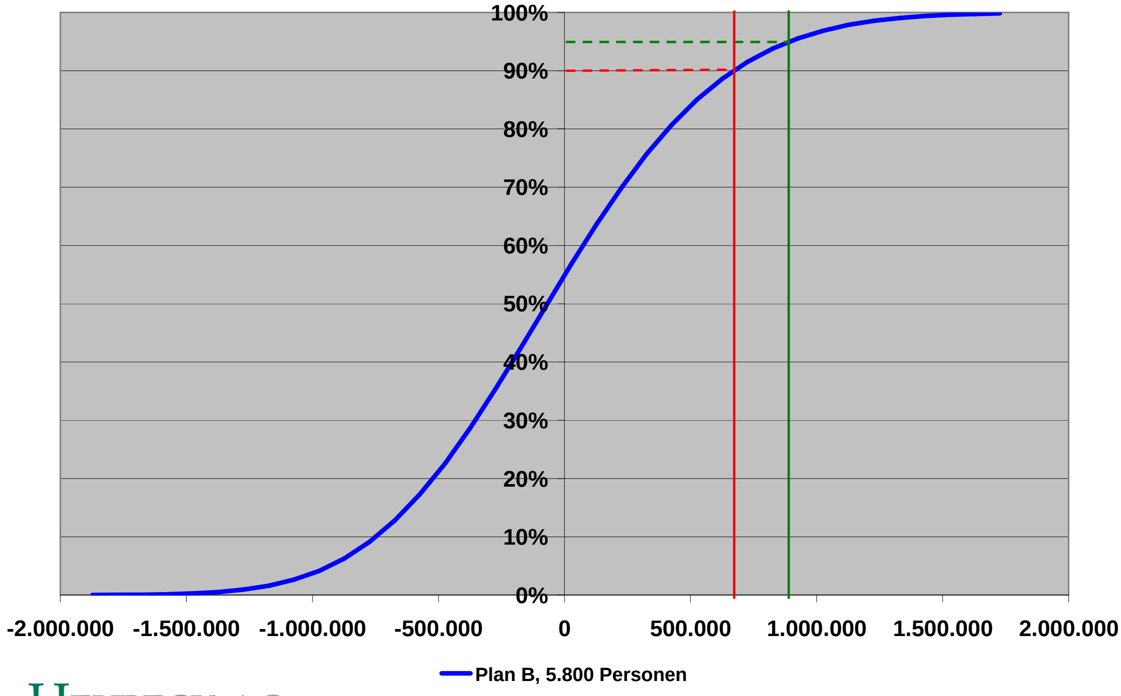
Risikobeurteilung einer Pensionskasse

Verteilungsfunktion Plan A, 5.800 Aktive



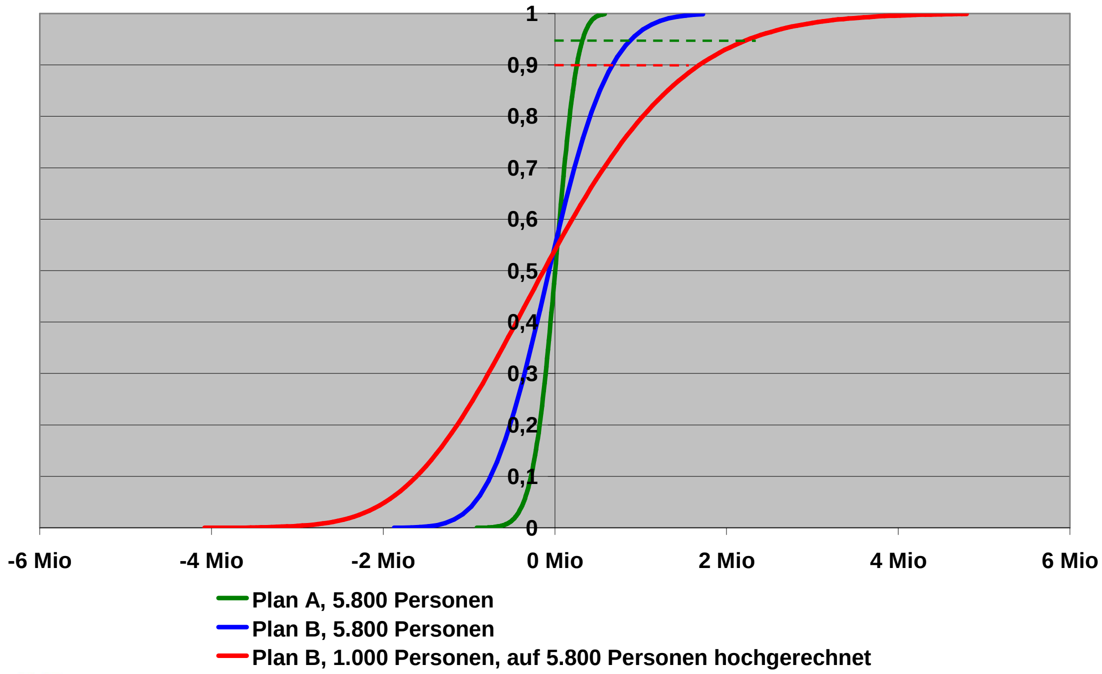
Risikobeurteilung einer Pensionskasse

Verteilungsfunktion Plan B, 5.800 Aktive



Risikobeurteilung einer Pensionskasse

Verteilungsfunktionen im Vergleich



Risikobeurteilung einer Pensionskasse

Vergleich der Risikomaße und der Risiken

Bestand: Plan:	5.800 Personen Plan A		5.800 Personen Plan B		1.000 Personen Plan B		auf 5.800 Personen hochgerechnet Plan B	
Deckungs-rückstel-lung:	339 Mio€		349 Mio€		58 Mio€		349 Mio€	
α	VaR	TVaR	VaR	TVaR	VaR	TVaR	VaR	TVaR
	Mio€	Mio€	Mio€	Mio€	Mio€	Mio€	Mio€	Mio€
10%	0,3	0,4	0,6	1,7	0,3	0,5	1,7	3,2
5%	0,3	0,5	0,8	1,8	0,4	0,6	2,2	3,4
1%	0,5	0,5	1,2	2,0	0,6	0,7	3,4	3,9

Hinweise für die Praxis

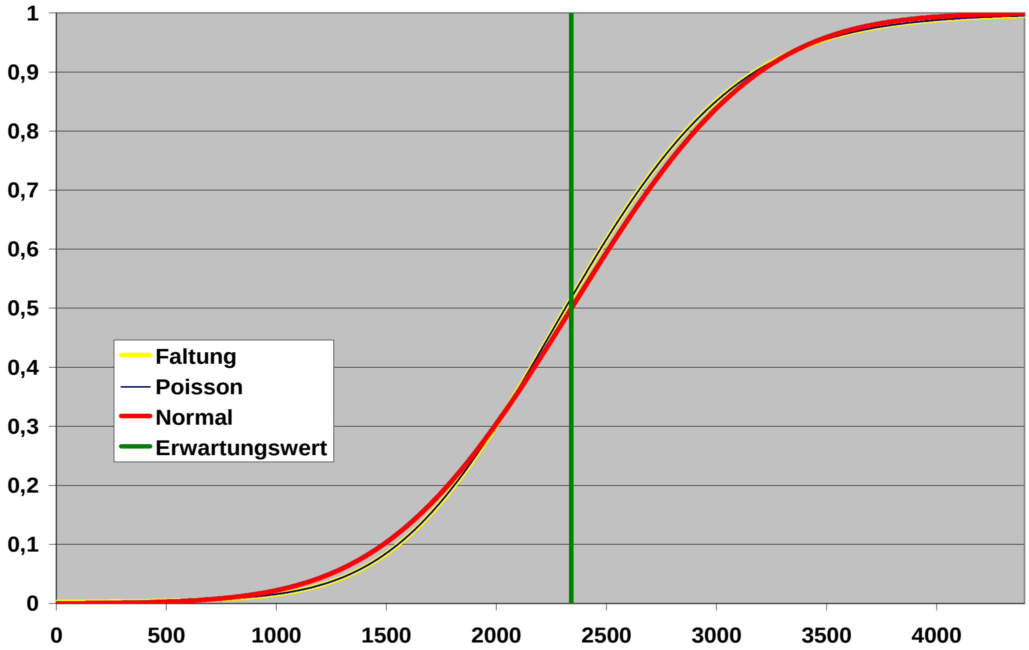
Praktische Fragen bei der Anwendung

- Gesamte Verteilungsfunktion erforderlich?
- Rechenaufwand
- Welche Approximation ist besser?
- Gibt es Abschätzungen für die Qualität des (Tail-) Value-at-Risk der Approximationen?

Hinweise für die Praxis

Approximation durch Poisson- und Normalverteilung

Darstellung der Verteilungsfunktionen

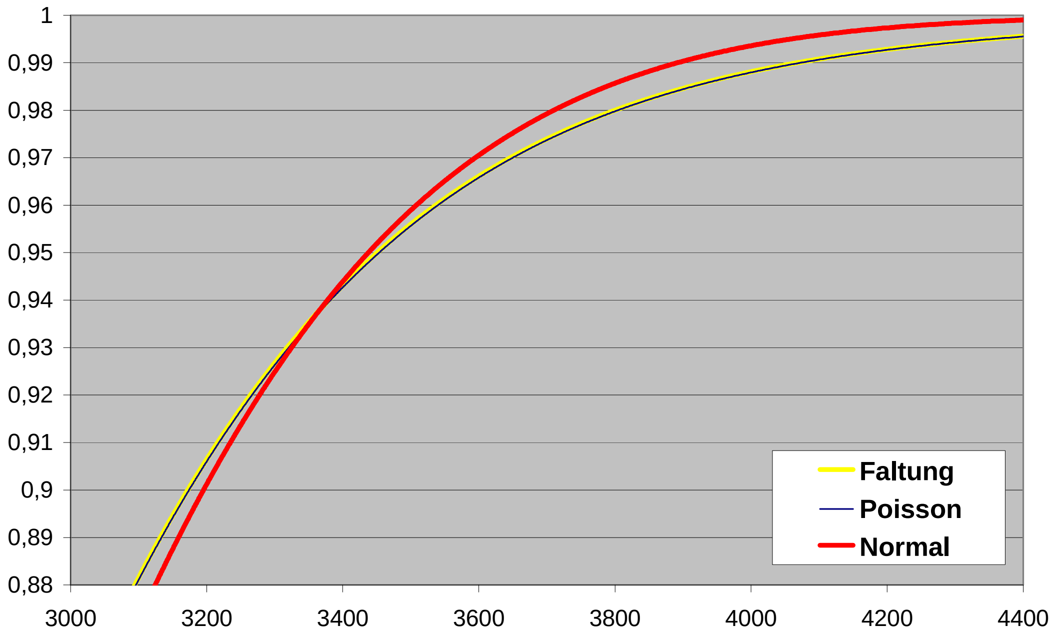


HEUBECK AG
Lösungen zur Altersvorsorge

Hinweise für die Praxis

Approximation durch Poisson- und Normalverteilung

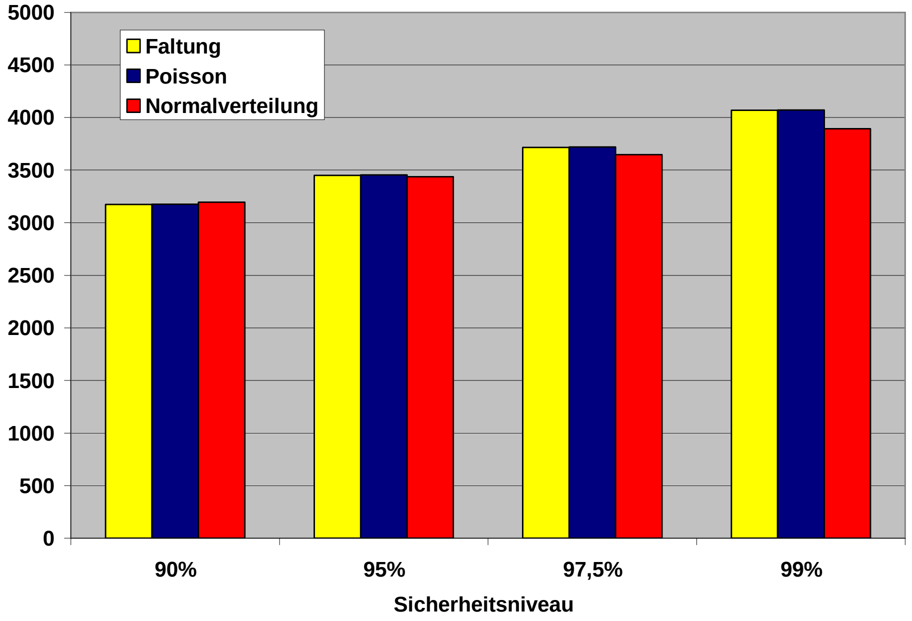
Darstellung der Verteilungsfunktionen
Ausschnitt für den oberen Bereich



HEUBECK AG
Lösungen zur Altersvorsorge

Hinweise für die Praxis

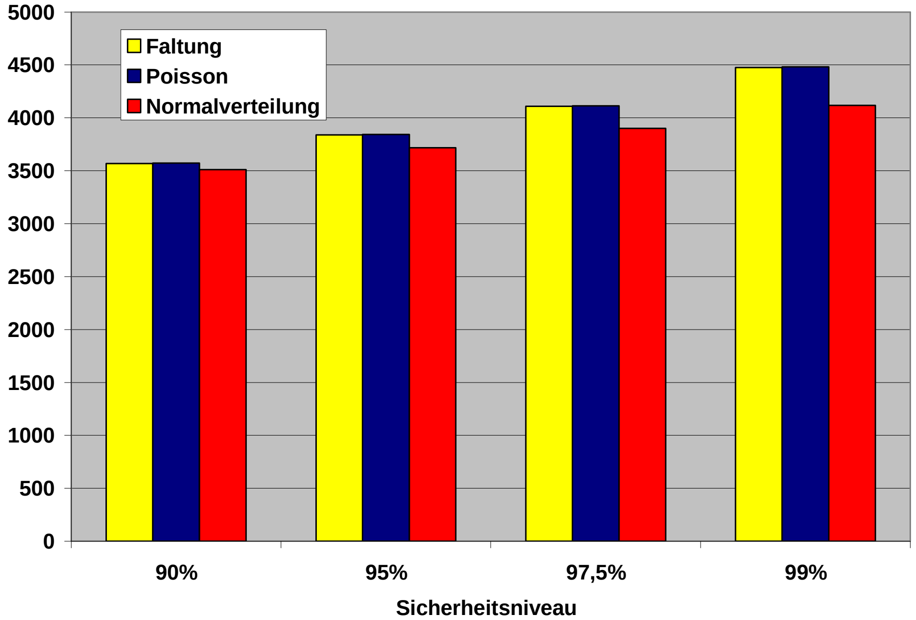
Value-at-Risk für verschiedene Sicherheitsniveaus



HEUBECK AG
Lösungen zur Altersvorsorge

Hinweise für die Praxis

Tail Value-at-Risk für verschiedene Sicherheitsniveaus



HEUBECK AG
Lösungen zur Altersvorsorge

Zusammenfassung

- **Zur Risikobeurteilung ist die (näherungsweise) Bestimmung der Gesamtschadenverteilung erforderlich**
- **Tail Value-at-Risk bezieht den weiteren Verlauf der Verteilungsfunktion ein**
- **VaR $\leq$ TVaR**
- **Einhaltung eines Sicherheitsniveaus mit Hilfe des Value-at-Risk erreichbar**
- **Approximation durch Normalverteilung kann zu einer Unterschätzung des Risikos führen**

Dr. Richard Herrmann

HEUBECK AG
Lindenallee 53
D-50968 Köln (Marienburg)

Telefon: **+ 49 (0) 221 / 93 46 93-17**
Telefax: **+ 49 (0) 221 / 37 88 89**

e-mail: **R.Herrmann@heubeck.de**
Internet: **www.heubeck.de**