Optionsbewertung

Prof. Dr. Edgar Neuburger

IVS

INSTITUT DER VERSICHERUNGS-
MATHEMATISCHEN
SACHVERSTÄNDIGEN

IVS-Forum, 14. November 2006, Nürnberg

Ein einfaches Beispiel

Ein Unternehmen gewährt zum Zeitpunkt 0, dem Ausgabedatum, einem Mitarbeiter das Recht, zum späteren Zeitpunkt T eine Aktie des Unternehmens zum Ausübungspreis von X erwerben zu können.

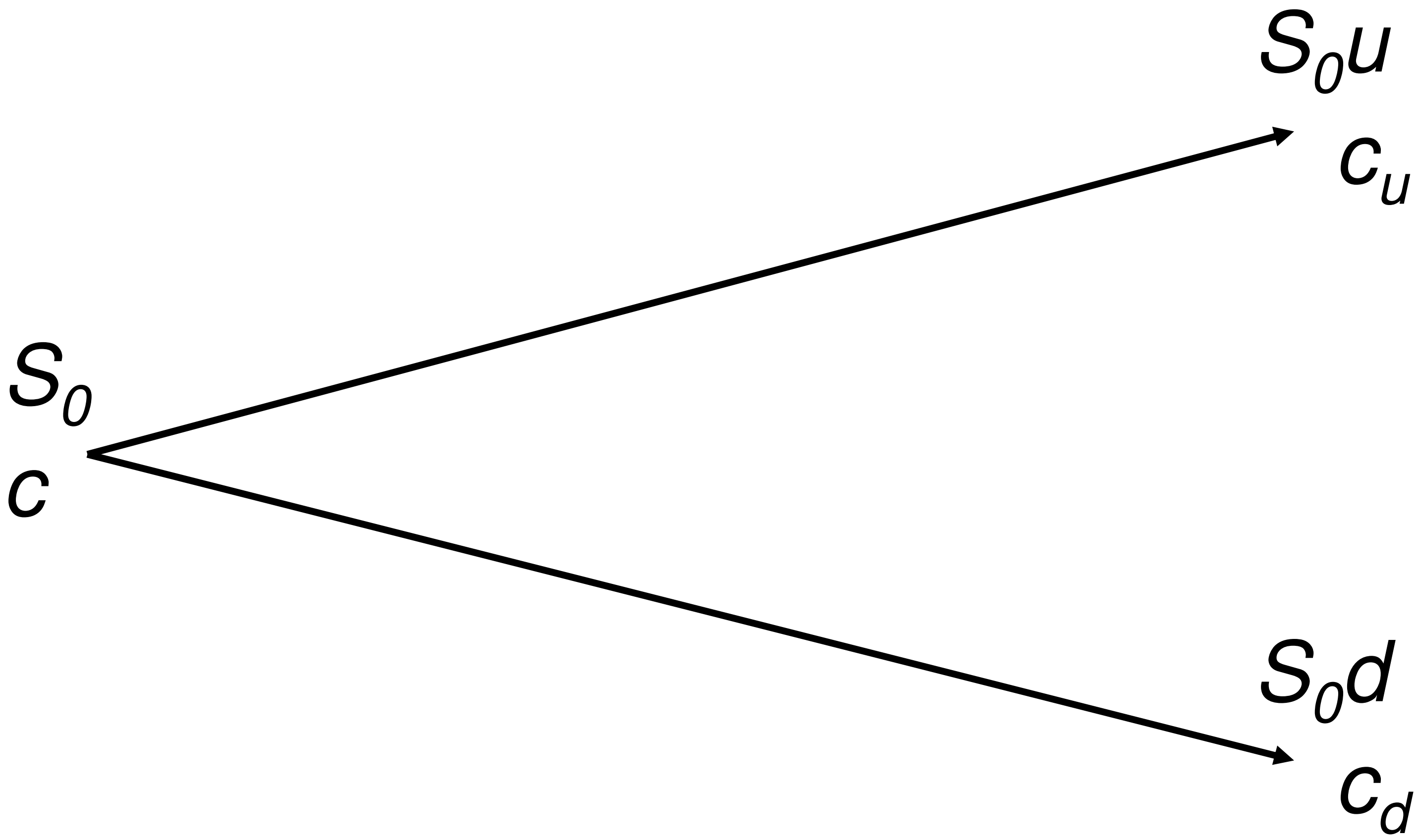
Aktienkurs des Unternehmens: $S_t, t \epsilon [0, T]$

Wert der Option zum Ausgabedatum: c

Buchungssatz: per Personalaufwand an Eigenkapital

Personalaufwand nach IFRS 2: Wert - fair value - der gewährten Option zum Ausgabedatum

Ein einfaches Beispiel



Ein einfaches Beispiel

$$c_u = max(0, S_0 u - X)$$

$$c_d = max(0, S_0 d - X)$$

Portfolio:

- **Gewährung eines Optionsrechts, ausübbar zum Zeitpunkt T zum Ausübungspreis X**
- **ein Aktienanteil des Unternehmens von Δ Stück**

Wert des Portfolios zum Ausgabedatum:

$$S_0\Delta \;-\; c$$

Zum Zeitpunkt T:die Aktie steht entweder bei $S_0 u$ oder bei $S_0 d$

Ein einfaches Beispiel

Atienkurs: $S_0\,u$

Wert des Portfolios: $S_0 u\Delta - c_u$

Atienkurs: $S_0\,d$

Wert des Portfolios: $S_0 d\Delta - c_d$

Gleichsetzen führt zu:

$$S_0 u\Delta - c_u = S_0 d\Delta - c_d$$

$$\Delta(S_0 u - S_0 d) = c_u - c_d$$

$$\Delta = \frac{c_u - c_d}{S_0(u-d)}$$

Ein einfaches Beispiel

Wert des Portfolios zum Ausgabedatum:

$$S_0\,\Delta - c = \frac{c_u - c_d}{u-d} - c$$

Wert des Portfolios zum Ausübungsdatum bei einem Aktienkurs von $S_0 u$:

$$\Delta\, S_0\, u = \frac{c_u d - c_d u}{u-d}$$

Wert des Portfolios zum Ausübungsdatum bei einem Aktienkurs von $S_0 d$:

$$\Delta\, S_0\, d = \frac{c_u d - c_d u}{u-d}$$

Ein einfaches Beispiel

Wert der Option zum Ausgabedatum???

Annahme: Keine Arbitragemöglichkeiten

Ein risikoloses Portfolio verdient bei Nichtexistenz von Arbitragemöglichkeiten den risikolosen Zins

δ : Risikolose Zinsintensität p.a.

Wert des Portfolios zum Ausgabedatum:

$$(S_0 u \Delta - c_u) e^{-\delta T}$$

Wert des Portfolios zum Ausgabedatum:

$$S_0 \Delta - c$$

Es folgt:

$$S_0\Delta - c = (S_0 u\Delta - c_u)e^{-\delta T}$$

bzw.

$$c = S_0\Delta - (S_0 u\Delta - c_u)e^{-\delta T}$$

Ersetzen von Δ und Vereinfachen führt zu

$$c = e^{-\delta T}\left[p' c_u + (1 - p')c_d\right],$$

mit

$$p' = \frac{e^{\delta T} - d}{u - d}$$

Eine 2. Berechnungsweise

Beh.: Wert einer Option zum Ausgabedatum entspricht dem Erwartungswert der Option zum Ausübungszeitpunkt in einer risikoneutralen Welt, diskontiert auf das Ausgabedatum.

p: Wahrscheinlichkeit, dass in einer risikoneutralen Welt der Aktienkurs in der Zeit von 0 bis T von S_0 auf S_0u steigt.

$$\mathcal{E}(S_T) = pS_0u + (1-p)S_0d$$

bzw.

Eine 2. Berechnungsweise

$$\mathcal{E}(S_T) = pS_0(u-d) + S_0 d$$

$$\mathcal{E}(S_T) = S_0\, e^{\delta\, T}$$

δ: Zinsintensität p.a.

Es gilt also bei stetiger Verzinsung:

$$r = 1 + i = e^{\delta}$$

mit i = Zins p.a.

Eine 2. Berechnungsweise

Gleichsetzen der beiden Gleichungen führt zu:

$$S_0\, e^{\delta\, T} = p S_0 (u - d) + S_0 d$$

$$e^{\delta\, T} = p(u - d) + d$$

$$p(u - d) = e^{\delta\, T} - d$$

$$p = \frac{e^{\delta\, T} - d}{u - d}$$

$$p = p'$$

Eine 2. Berechnungsweise

Zufallsgröße „Option zum Ausübungszeitpunkt“ ?

$$c_u = max(0, S_0u - X) \text{ für } S_T = S_0u$$

$$c_d = max(0, S_0d - X) \text{ für } S_T = S_0d$$

Zufallsgröße „Option zum Ausübungszeitpunkt“ :

$$max\,(0, S_T - X)$$

Eine 2. Berechnungsweise

$$\mathcal{E}[max\,(0, S_T - X)] = pc_u + (1-p)c_d$$

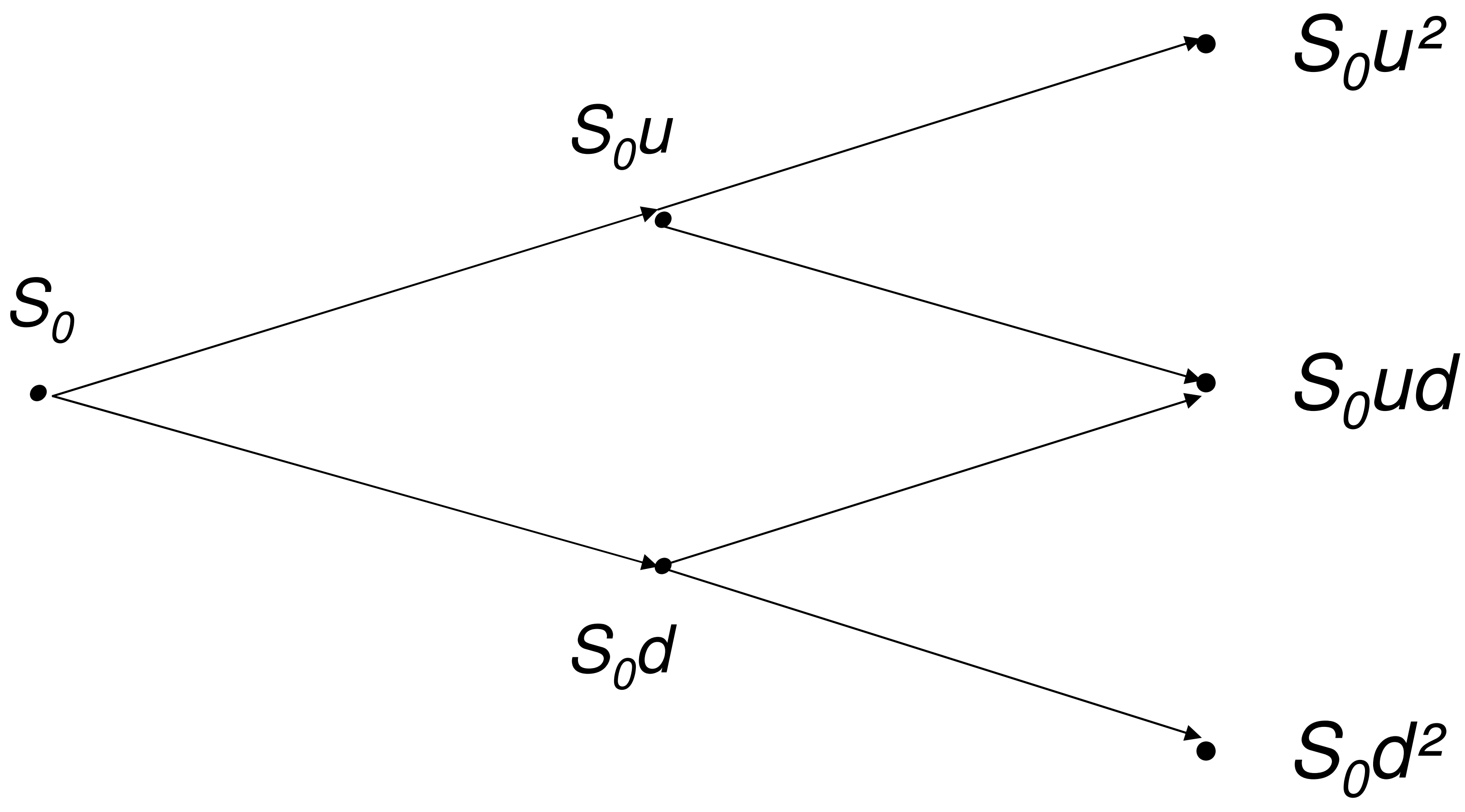
$$\begin{aligned} e^{-\delta T}\mathcal{E}[max(0, S_T - X)] &= e^{-\delta T}[pc_u + (1-p)c_d] \\ &= e^{-\delta T}[p'c_u + (1-p')c_d] \\ &= c \end{aligned}$$

$$c = e^{-\delta T}\mathcal{E}[\max\,(0, S_T - X)]$$

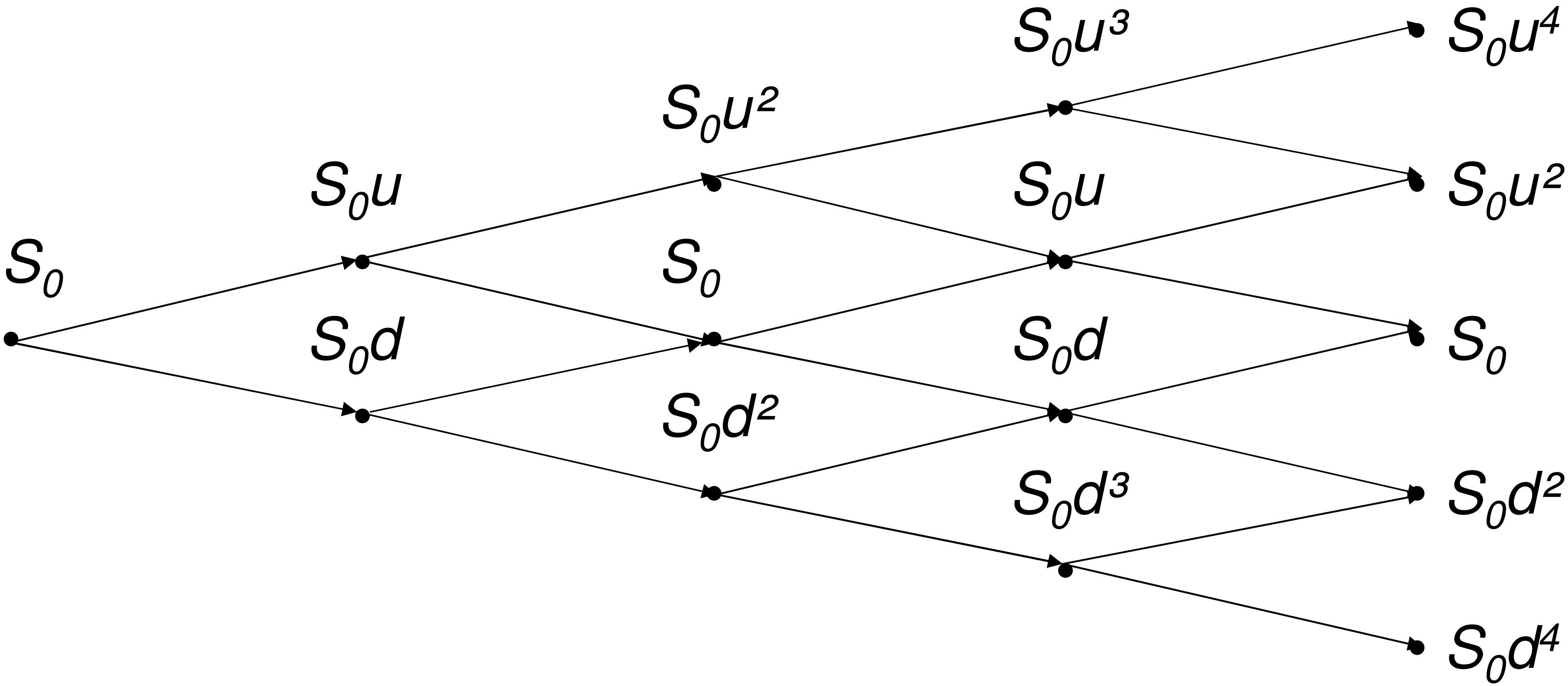
$$c = e^{-\delta T}\hat{\mathcal{E}}[\max\,(0, S_T - X)]$$

$\hat{\mathcal{E}}$: **Erwartungswert in einer risikoneutralen Welt**

Verallgemeinerung: zweiperiodiger Binomialbaum



Verallgemeinerung: vierperiodiger Binomialbaum



Verallgemeinerung: Geometrischer Brown'scher Prozess

$$\Delta t \to 0$$

$$S_t,\ t \in [0, T]$$

S_t : Aktienkurs zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$

$$c = e^{-\delta T} \hat{\mathcal{E}}[max\,(0, S_T - X)]$$

c : Wert der Option zum Ausgabedatum

δ: Zinsintensität p.a.

X : Ausübungspreis der Option

Verallgemeinerung: Geometrischer Brown'scher Prozess

Modell für das Verhalten von Aktienkursen: Geometrischer Brown'scher Prozess mit den Parametern Zins und Volatilität

Risikoloser Zins nach IFRS 2: implizite Rendite von Null-Coupon-Staatsanleihen des Landes, in dessen Währung der Ausübungspreis ausgedrückt wird, mit einer Restlaufzeit, die der erwarteten Laufzeit der zu bewertenden Option entspricht.

Volatilität nach IFRS 2: annualisierte Standardabweichung der stetigen Rendite der Aktie über einen bestimmten Zeitraum

Optionspläne

$S_T - X > 0$: **Ausübung mit Gewinn von** $S_T - X$

$S_T - X < 0$: **Verzicht auf Ausübung, weder Gewinn noch Verlust**

1. **Laufzeit und Sperrfristen von Optionsplänen**

   IRFS 2: Bei mehreren Sperrfristen des Optionsplans ist jede Sperrfrist wie ein eigener Plan zu bewerten

Optionspläne

2. Ausübungsfenster

3. Ausübungshürden

4. Ausübungsstrategie

5. Vorzeitiges Ausscheiden

6. Dividenden

Praktische Durchführung

Auswertung der Formel $c = e^{-\delta T}\hat{\mathcal{E}}[max\,(0, S_T - X)]$ durch Monte-Carlo-Methode (Simulationsverfahren)

- **Ausübungszeitplan**

  Zukünftige entscheidungsrelevante Zeitpunkte t des Optionsplans

- **Aktienkurs**

  Realisierungen des zukünftigen Aktienkurses $\hat{S}_t$ in einer risikoneutralen Welt

Praktische Durchführung

- **Realisierung eines Optionswerts**

  Zu geeigneten Zeitpunkten t: Realisierung eines Optionswerts zum Ausgabedatum gemäß

  $$\hat{c} = e^{-\delta t} max\,(0, \hat{S}_t - X)$$

- **Wiederholung der Schritte 2 und 3**

- **Optionswert**

  Das Mittel aller $\hat{c}$ ergibt den gesuchten Optionswert c zum Ausgabedatum gemäß

  $$c = \frac{\sum \hat{c}}{n}$$

  n **: Anzahl der Berechnungen von** $\hat{c}$