Rentenanpassungen bei der Bewertung unmittelbarer Pensionsverpflichtungen

von Joy Klemcke und Clemens Sommer

Die versicherungsmathematische Bewertung unmittelbarer Pensionsverpflichtungen erfordert eine sachgerechte Modellierung zukünftiger Rentenanpassungen. In der Praxis wird der Rententrend häufig vereinfacht als jährliche Dynamik abgebildet, ohne den tatsächlichen Anpassungsturnus oder den individuellen Anpassungsstichtag zu berücksichtigen. Dieser Beitrag zeigt anhand eines Markov-basierten Bewertungsmodells, wie unterjährige Anpassungsstichtage und variable Anpassungshöhen konsistent abgebildet werden können. Anhand von Rechenbeispielen für einen 65-jährigen Altersrentner mit monatlicher Zahlungsweise werden die resultierenden Bewertungsabweichungen gegenüber dem Standardverfahren quantifiziert. Die Ergebnisse belegen, dass je nach Lage im Anpassungszyklus systematische Über- oder Unterschätzungen von bis zu rund 4% auftreten können. Darüber hinaus wird gezeigt, wie das Modell zur Plausibilisierung einer pauschalen Rententrendabsenkung bei wirtschaftlicher Notlage des Arbeitgebers eingesetzt werden kann.

Die Rentenanpassung unmittelbarer Pensionsverpflichtungen – sofern diese in den Anwendungsbereich des Betriebsrentengesetzes (BetrAVG) fallen – wird gesetzlich durch § 16 Abs. 1 und 2 BetrAVG geregelt. Arbeitgeber sind demnach verpflichtet, laufende Leistungen der betrieblichen Altersversorgung alle drei Jahre auf einen Anpassungsbedarf hin zu überprüfen und hierüber nach billigem Ermessen zu entscheiden. Die Prüfungspflicht gilt als erfüllt, wenn die Anpassung seit Rentenbeginn nicht geringer ist als der Anstieg des Verbraucherpreisindex für Deutschland oder die Nettolohnentwicklung vergleichbarer Arbeitnehmergruppen des Unternehmens im Prüfungszeitraum. Hierbei sind die wirtschaftliche Lage des Arbeitgebers sowie die Belange der Versorgungsempfänger angemessen zu berücksichtigen.

Bei nach dem 31.12.1998 erteilten Pensionszusagen verpflichten sich Arbeitgeber in der Praxis häufig dazu, die laufenden Leistungen um mindestens 1% p.a. anzupassen. In diesen Fällen entfällt gemäß § 16 Abs. 3 Nr. 1 BetrAVG die laufende Prüfungspflicht. Darüber hinaus existieren vielfältige einzelvertragliche Regelungen bezüglich der Zeitpunkte und der Höhe garantierter Rentenanpassungen.

Im Rahmen der versicherungsmathematischen Bewertung unmittelbarer Pensionsverpflichtungen nach deutschen und internationalen Rechnungslegungsstandards müssen die zukünftigen Zeitpunkte sowie die jeweilige Höhe der Rentenanpassung sachgerecht modelliert werden. Bei der Bewertung für die deutsche Steuerbilanz vereinfacht sich die Parametrisierung insofern, als nach § 6a Abs. 3 Satz 2 Nr. 1 EStG künftige Rentenanpassungen nur dann berücksichtigt werden dürfen, wenn und soweit sie vertraglich garantiert sind.

Vor diesem Hintergrund wird im Folgenden untersucht, inwieweit Standardverfahren die tatsächliche Struktur von Rentenanpassungen adäquat abbilden, und welchen Mehrwert ein markov-basiertes, monatliches Bewertungsmodell bietet.

Bewertungsmodelle der Pensionsversicherungsmathematik

Standardverfahren

In der betrieblichen Altersversorgung wird bei der Bewertung von Pensionsverpflichtungen häufig ein fester Rententrend angesetzt. Hierbei wird eine über die gesamte Restlaufzeit konstante jährliche Steigerungsrate r unterstellt. Wir bezeichnen dieses Vorgehen im Folgenden als Standardverfahren. Der Barwert einer lebenslangen, vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag 1 an einen x-jährigen Altersrentner berechnet sich wie folgt:

$$a_x = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot (1+i)^{-k} \cdot (1+r)^k$$

mit

- ω als Schlussalter für Altersrentner
- l_x als Anzahl der Altersrentner des Alters x
- i als konstanter jährlicher Rechnungszinssatz
- r als konstante jährliche Steigerungsrate

Erweitertes Standardverfahren

Erfolgt die Rentenanpassung in einem n-jährigen Turnus (z. B. alle drei Jahre), so kann die Anpassungsfunktion als diskrete Treppenfunktion modelliert werden (erweitertes Standardverfahren). Der Barwert einer lebenslangen, vorschüssig zahlbaren Rente vom Jahresbetrag 1 an einen x-jährigen Altersrentner ergibt sich dann zu:

$$a_{x,m} = \sum_{k=0}^{\omega-x} \frac{l_{x+k}}{l_x} \cdot (1+i)^{-k} \cdot (1+r)^{n \cdot \lfloor \frac{m+k}{n} \rfloor}$$

Dabei bezeichnet $\lfloor \ldots \rfloor$ die Abrundungsfunktion (Gauß-klammer), wobei die letzte Anpassung $m=0, 1, \ldots, n$ Jahre zurückliegt. Die beiden Verfahren unterscheiden sich somit lediglich in der Dynamisierung der Leistungen, um den Turnus der Rentenanpassungen sachgerecht abbilden zu können.

Bei einer angenommenen Auszahlung der Leistungen in T Raten (z. B. $T = 12$ für die monatliche Zahlungsweise) innerhalb eines Jahres werden die jährlichen Barwerte durch Korrekturterme modifiziert. Dem in der betrieblichen Altersversorgung für die Berechnung von Barwerten allgemein anerkannten Modell der Heubeck-Richttafeln[1] liegen hierbei die Annahmen zugrunde, dass die Ausscheidezeitpunkte über das Jahr gleichverteilt sind und die Verzinsung innerhalb eines Jahres linear erfolgt (sog. gemischte oder relative Verzinsung).

Markov-basiertes monatliches Bewertungsmodell

Für unsere versicherungsmathematische Analyse in diesem Beitrag übernehmen wir ein Bewertungsmodell für unterjährliche Zahlungsweisen nach Knobloch[2]. Das Modell basiert auf einer bewerteten Markov-Kette sowie der Linearisierung jährlicher Übergangswahrscheinlichkeiten und ermöglicht auf diese Weise eine Barwertbestimmung für eine beliebige Anzahl unterjähriger Zahlungszeitpunkte.

Betrachtet wird eine Markov-Kette X, die den Zustand einer betrachteten Person im Zeitverlauf abbildet. Der Parameter

Über die Autorin

→ Joy Klemcke studiert derzeit im Master an der TH Rosenheim. Zuvor schloss sie dort im Sommer 2025 den Bachelorstudiengang Wirtschaftsmathematik-Aktuarwissenschaften ab. Sie ist als Werkstudentin bei der ROKOCO GmbH im Bereich Pensionen/bAV tätig. Bereits im Rahmen ihrer Bachelorarbeit beschäftigte sie sich mit der Anwendung von Markov-Prozessen in der Bewertung von Pensionsverpflichtungen.

T gibt dabei die Anzahl an unterjährigen Zahlungszeitpunkten pro Jahr an.

$$X = \left(X_{k+\frac{s}{T}}\right)_{\substack{k=0,1,2,\dots\\ s=0,\dots,T-1}}$$

$$= X_0, X_{\frac{1}{T}}, X_{\frac{2}{T}}, \dots, X_{\frac{T-1}{T}}, X_1, X_{1+\frac{1}{T}}, X_{1+\frac{2}{T}}, \dots, X_{1+\frac{T-1}{T}}, X_2, \dots$$

Der Zustand der Person zu Beginn des $(k+1)$-ten Jahres wird durch die Zufallsvariablen X_k beschrieben. Entsprechend bezeichnet $X_{k+\frac{s}{T}}$

den Zustand zu Beginn des $(s+1)$-ten unterjährigen Zeitpunkts innerhalb des $(k+1)$-ten Jahres. Die annehmbaren Zustände der Zufallsvariablen werden durch den Zustandsraum S beschrieben.

Da Übergangswahrscheinlichkeiten in der Regel als Jahreswerte vorliegen, werden diese und die daraus resultierenden Übergangsmatrizen unterjährig linear interpoliert. So werden Übergangsmatrizen für den Zeitpunkt k zu einem unterjährigen Zeitpunkt $k+\frac{s}{T}$ definiert, die anschließend als entsprechende lineare Anteile der jährlichen Übergangsmatrizen berechnet werden.

$$U(s,k) = (u_{i,j}(s,k))_{i,j\in S} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)}$$

$$u_{i,j}(s,k) := P(X_{k+\frac{s}{T}} = j | X_k = i) \text{ für } k = 0,1,2,\dots$$

und $s = 0,1,\dots,T-1,T$

Konkret werden diese speziellen Übergangsmatrizen mittels linearer Interpolation zwischen der Einheitsmatrix und den jährlichen Übergangsmatrizen $Q(k+1)$

$$Q(k) = (q_{i,j}(k))_{i,j\in S} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times(N+1)} \text{ für } k \geq 1$$

$$q_{i,j}(k) := P(X_k = j \mid X_{k-1} = i) \text{ für } k \geq 1$$

wie folgt bestimmt:

$$U(s,k) = \frac{s}{T}\cdot Q(k+1) + \frac{T-s}{T}\cdot \mathbb{E} \text{ für } k = 0,1,2,\dots$$

und $s = 0,1,\dots,T-1$

Um den Zuständen der Markov-Kette einen Wert zuweisen zu können, werden zusätzlich zu der beschriebenen Markov-Kette Leistungsvektoren benötigt.

$$L_{k+\frac{s}{T}} = (L_{k+\frac{s}{T},j})_{j\in S} \in \mathbb{R}^{(N+1)\times 1} \text{ für } k = 0,1,2,\dots \text{ und } s = 0,1,\dots,T-1$$

Die Einträge dieser Vektoren geben die zu leistende Zahlung an, wenn die betrachtete Person zum Zeitpunkt $k+\frac{s}{T}$ den Zustand j einnimmt. Zur Bewertung der um die Leistungsvektoren erweiterten Markov-Kette wird folgender Barwert definiert:

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{T-1}\sum_{j=0}^{N} 1_{\{X_{k+\frac{s}{T}}=j\}}\cdot v^k\cdot v(s)\cdot L_{k+\frac{s}{T}}$$

Dieser setzt sich aus den zu leistenden Zahlungen für die jeweils eingetretenen

Zustände sowie einem jährlichen Diskontierungsfaktor v^k und einem Diskontierungsfaktor $v(s)$ für das unterjährliche Intervall $\left(k, k+\frac{s}{T}\right)$ zusammen.

$$v(s) = \begin{cases} \dfrac{1}{1+\frac{s}{T}\cdot i} & \text{für eine relative Verzinsung} \\ v^{\frac{s}{T}} & \text{für eine konforme Verzinsung} \end{cases}$$

Der konkrete Barwert hängt dabei von der zukünftigen Entwicklung des Prozesses ab, die zum Betrachtungszeitpunkt nicht bekannt ist. Um diese Unsicherheit angemessen zu berücksichtigen, wird daher der erwartete Barwert betrachtet.

$$\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot U(s,k) \cdot L_{k+\frac{s}{T}}$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot P_{k+\frac{s}{T}} \cdot L_{k+\frac{s}{T}}$$

Dieser wird durch die Zustandsvektoren $P_{k+\frac{s}{T}}$ der Markov-Kette

$P_{k+\frac{s}{T}} = (P_{k+\frac{s}{T},j})_{j\in S} \in \mathbb{R}^{1\times(N+1)}$ mit

$P_{k+\frac{s}{T},j} = P(X_{k+\frac{s}{T}} = j)$ für $k = 0, 1, 2, \ldots$ und $s = 0, 1, \ldots, T-1$

$$P_{k+\frac{s}{T}} = P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot U(s,k)$$

sowie den Leistungsvektoren $L_{k+\frac{s}{T}}$ vollständig bestimmt.

So lassen sich Barwerte bestimmen, die eine unterjährige Zahlungsweise direkt berücksichtigen, während gleichzeitig jährliche Übergangswahrscheinlichkeiten verwendet werden können. Für die Berechnung der nachfolgenden Beispiele wurde das Modell konkret auf eine monatliche Zahlungsweise angepasst und auf die Zustände „Altersrentner" und „Tod" bzw. „Ohne Anspruch" beschränkt. Die Übergangswahrscheinlichkeiten sind den Heubeck-Richttafeln entnommen.

Betrachtet wird eine Markov-Kette

$$X = (X_{k+\frac{s}{T}})_{\substack{k=0,1,2,\ldots,\omega-x \\ s=0,\ldots,11,\ T=12}}$$

$$= X_0, X_{\frac{1}{12}}, X_{\frac{2}{12}}, \ldots, X_{\frac{11}{12}}, X_1, X_{1+\frac{1}{12}}, X_{1+\frac{2}{12}}, \ldots, X_{1+\frac{11}{12}}, X_2, \ldots, X_{w-x}, \ldots, X_{w-x+\frac{11}{12}}$$

mit

- X_k = „Zustand der betrachteten Person zu Beginn des $(k+1)$-ten Jahres"
- $X_{k+\frac{s}{12}}$ = „Zustand der betrachteten Person zu Beginn des $(s+1)$-ten Monats im $(k+1)$-ten Jahr"
- T = 12 als Anzahl unterjähriger Zahlungszeitpunkte
- w = 115 als Endaler der verwendeteten Sterbetafeln
- x als Alter der betrachteten Person zum Bewertungsstichtag
- Zustandsraum S = {0,1}
- Zustand 0: = „Ohne Anspruch"
- Zustand 1: = „Altersrentner"

Über den Autor

→ Clemens Sommer leitet bei der ROKOCO GmbH in Grünwald den Geschäftsbereich Pension/bAV. Er ist Aktuar (DAV) und Sachverständiger (IVS) und seit 2005 verantwortlich für die Bewertung von Pensions- und Personalrückstellungen zahlreicher Mandanten. Weitere Schwerpunkte seiner Tätigkeit sind die Unterstützung von Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung im Rahmen von ALM-Studien und die Weiterentwicklung versicherungsmathematischer Rechenkerne für Projektionsrechnungen.

Die Markov-Kette X wird beschrieben durch:

- jährliche Übergangswahrscheinlichkeiten
  $q_{i,j}(k) := P(X_k = j \mid X_{k-1} = i)$ für $k \geq 1$

$$q_{i,j}(k) = \begin{cases} 1 & , i = j = 0 \\ 0 & , i = 0 \wedge j = 1 \\ q^r_{x+k-1} & , i = 1 \wedge j = 0 \\ 1 - q^r_{x+k-1} & , i = j = 1 \end{cases}$$

- jährliche Übergangsmatrizen vom Zeitpunkt $k-1$ zum Zeitpunkt k
  $Q(k) = (q_{i,j}(k))_{i,j \in S} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für $k \geq 1$

- spezielle Übergangswahrscheinlichkeiten
  $u_{i,j}(s,k) := P(X_{k+\frac{s}{12}} = j | X_k = i)$ für

  $k = 0, 1, 2, ...,$ und $s = 0, 1, ..., 11, 12$

$$u_{i,j}(s,k) = \begin{cases} \frac{s}{12} \cdot q_{i,j}(k+1) + \frac{12-s}{12} & \text{für } i = j \text{ (Diagonaleinträge)} \\ \frac{s}{12} \cdot q_{i,j}(k+1) & \text{für } i \neq j \end{cases}$$

- spezielle Übergangsmatrizen vom Zeitpunk k zum Zeitpunkt $k + \frac{s}{12}$

  $U(s,k) = (u_{i,j}(s,k))_{i,j \in S} \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ für $k = 0, 1, 2, ...$

  und $s = 0, 1, ..., 11, 12$

  wobei $U(s,k) = \frac{s}{12} \cdot Q(k+1) + \frac{12-s}{12} \cdot \mathbb{E}$

- Zeilenvektoren
  $P_{k+\frac{s}{12}} = (P_{k+\frac{s}{12},j})_{j=0,1} \in \mathbb{R}^{1\times 2}$ mit $P_{k+\frac{s}{12},j} = P(X_{k+\frac{s}{12}} = j)$

  für $k = 0, 1, 2, ...$ und $s = 0, 1, ..., 11$

  wobei $P_0 = (0,1)$ und $P_{k+\frac{s}{12}} = P_0 \cdot \prod_{j=1}^{k} Q(j) \cdot U(s,k) = P$

Die Bewertung der Markov-Kette erfolgte anhand von:

- Leistungsvektoren
  $L_{k+\frac{s}{12}} = (L_{k+\frac{s}{12},j})_{j=0,1}$ für

  $k = 0, 1, 2, ...$ und $s = 0, 1, ..., 11 \in \mathbb{R}^{2\times 1}$

- der Bewertungsformel

  $E(B_0) = \sum_{k=0}^{\omega-x} \sum_{s=0}^{T-1} v^k \cdot v(s) \cdot P_{k+\frac{s}{T}} \cdot L_{k+\frac{s}{T}}$ mit

  $v = \frac{1}{1+i}$ für den konstanten Rechnungszinssatz i

  $v(s) = \frac{1}{1+\frac{s}{12}\cdot i}$

Die Einträge der Leistungsvektoren berechnen sich dabei als:

$$L_{k+\frac{s}{T}} = L_0 \prod_{k=0}^{\omega-x} \prod_{s=0}^{T-1} (1 + r_{k+\frac{s}{T}})$$

mit $r = (r_{k+\frac{s}{T}})_{\substack{k=0,1,2,\dots,\omega-x \\ s=0,\dots,11,\, T=12}}$ ist Rententrendvektor

Bemerkung:
Die Konstruktion der speziellen unterjährigen Übergangsmatrizen $U(s,k)$ als linearer Anteil der jährlichen Übergangsmatrizen $Q(k+1)$ ergibt eine Markov-Kette, deren Existenz nur dann gesichert ist, wenn die Matrizen $U(s,k)$ invertierbar sind[2]. Im vorliegenden Modell ist diese Bedingung erfüllt, da die Matrizen $U(s,k)$ quadratisch sind und für jede Matrix $\det(U(s,k)) \neq 0$ gilt.

Versicherungsmathematische Analyse

Modellvergleich mit monatlichen Anpassungsstichtagen

Bei der Modellierung des Rententrends wird oft auf eine detaillierte Abbildung des mehrjährigen Anpassungsturnus verzichtet und stattdessen das Standardverfahren mit jährlichem Turnus verwendet. So bleibt bei einer tatsächlichen Anpassung im dreijährigen Turnus in der Bewertung unberücksichtigt, wo sich der Leistungsempfänger innerhalb seines Anpassungszyklus gerade befindet.

In den beiden folgenden Diagrammen haben wir zwei Verläufe von Leistungsvektoren bei einem jährlichen und dreijährigen Turnus zum Bilanzstichtag 31.12.2025 gegenübergestellt. Im ersten Fall liegt die letzte Rentenanpassung im dreijährigen Turnus genau ein Jahr zurück m 1 und die nächste Anpassung der Leistungen in Höhe von 6,12% (bei einem angenommenen Rententrend von 2,00% p.a.) wird genau zwei Jahre nach dem aktuellen Bilanzstichtag stattfinden. Im Vergleich zum Modell mit jährlichem Turnus wechseln sich Jahre mit identischen, niedrigeren und höheren Leistungen ab, sodass sich die Unterschiede im Zeitverlauf bis auf geringfügige Differenzen aufheben.

Im zweiten Fall liegt die letzte Rentenanpassung im dreijährigen Turnus genau zwei Jahre zurück m 2 , und die nächste Anpassung der Leistungen wird genau ein Jahr nach dem aktuellen Bilanzstichtag stattfinden. Die Modellierung über einen jährlichen Turnus unterschätzt hier systematisch die Leistungshöhen, da die detaillierte Modellierung im dreijährigen Turnus zu jedem Zeitpunkt identische oder höhere Leistungen unterstellt.

Im letzten möglichen Fall (m=), bei dem die nächste Rentenanpassung unmittelbar nach dem Bilanzstichtag ansteht, kommt es ebenfalls zu systematischen Unter-

Abb. 1 Vergleich der Leistungsvektoren bei jährlichem und dreijährigem Turnus (m=1)

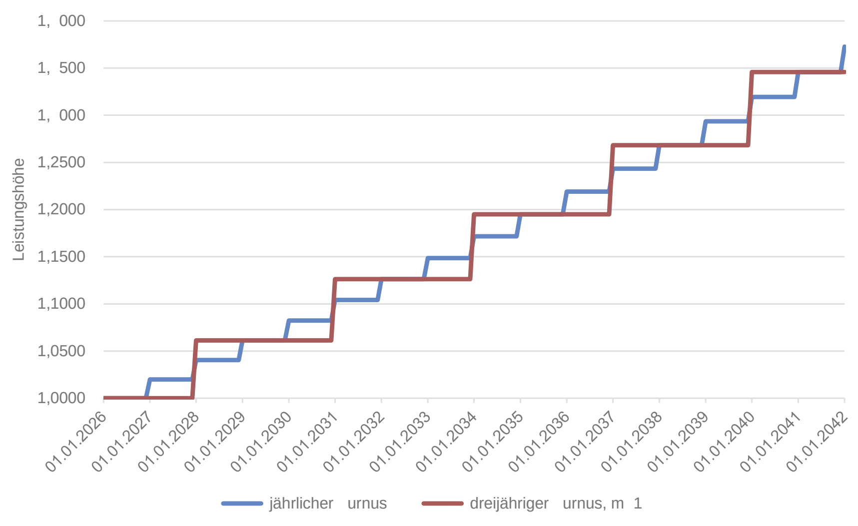
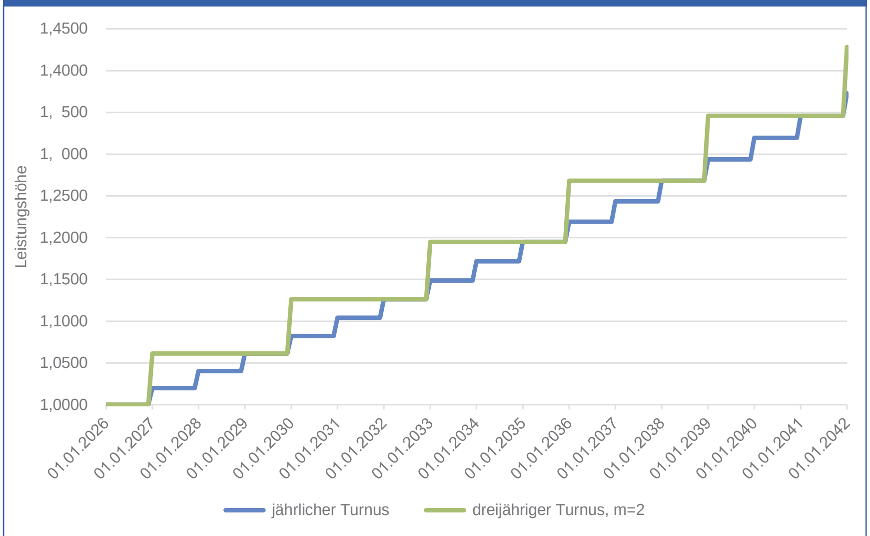


Abb. 2 Vergleich der Leistungsvektoren bei jährlichem und dreijährigem Turnus (m=2)



schieden zwischen den beiden Modellvarianten. Ob die Leistungshöhen über- oder unterschätzt werden, hängt davon ab, ob in der Leistung zum Bilanzstichtag bei jährlicher Modellierung die anstehende Rentenanpassung bereits enthalten ist oder nicht.

Beispielberechnung

Mithilfe des Markov-Modells ermitteln wir nun die Barwerte unter Berücksichtigung des nächsten individuellen, monatsgenauen Anpassungsstichtags sowie des Anpassungsturnus und vergleichen diese mit den Barwerten des Standardverfahrens.

Wir betrachten im Folgenden einen 65-jährigen Altersrentner des Geburtsjahrgangs 1961 ohne Zusage auf Hinterbliebenenversorgung. Der konstante Rechnungszins beträgt 2,06 % pro Jahr. Die monatlich vorschüssig zahlbare Rente beläuft sich auf 100 Euro. Der Barwert der Pensionsverpflichtung wird zum Bewertungsstichtag 31.12.2025 für zwölf Szenarien ermittelt. Für die Szenarien wird ein dreijähriger Anpassungsturnus mit einer jeweiligen Anpassung zum Stichtag in Höhe von 6,12 % unterstellt. Die Szenarien unterscheiden sich hinsichtlich der Annahme, zu welchem Zeitpunkt innerhalb der nächsten drei Kalenderjahre jeweils zu Quartalsbeginn die nächste Rentenanpassung ansteht.

Zum Vergleich: Der Barwert einer monatlichen Altersrente von 100 Euro im Standardverfahren und einem Rententrend von 2,00 % p.a. beträgt 25.057 Euro. Steht der nächste Anpassungsstichtag unmittelbar zum 1. Januar 2026 an und wird im Rahmen der Bewertung der Zahlbetrag direkt um 6,12 % erhöht, so beträgt der Barwert 26.591 Euro.

Unter diesen Annahmen ergeben sich folgende relative Abweichungen der Barwerte mit dem Markov-Modell im

Tabelle 1: Barwerte in Euro zum Bilanzstichtag in Abhängigkeit individueller Anpassungsstichtage (Markov-Modell)

Nächste Anpassung Kalenderjahr / Stichtag	1. Januar	1. April	1. Juli	1. Oktober
2026	26.089	25.951	25.817	25.684
2027	25.553	25.425	25.298	25.174
2028	25.052	24.932	24.814	24.698

Tabelle 2: Prozentuale Abweichungen der Ergebnisse aus Tabelle 1 im Vergleich zur Bewertung mit dem Standardverfahren					
Nächste Anpassung	**1. Januar**	**1. April**	**1. Juli**	**1. Oktober**	**Ø**
2026	4,12 % (-1,89 %)	3,57 %	3,03 %	2,50 %	3,31 % (1,80 %)
2027	1,98 %	1,47 %	0,96 %	0,47 %	1,22 %
2028	-0,02 %	-0,50 %	-0,97 %	-1,43 %	-0,73 %
Ø	2,03 % (0,07 %)	1,51 %	1,01 %	0,51 %	1,26 % (0,76 %)

Vergleich zum Standardverfahren. Die in Klammern ausgewiesenen Werte beziehen sich auf die Abweichungen, wenn bei der Bewertung mit dem Standardverfahren und einer unmittelbar anstehenden Rentenanpassung der Zahlbetrag im Bestand von 100 Euro auf 106,12 Euro angepasst wird.

Anhand der Ergebnisse lassen sich folgende Schlussfolgerungen für praxisrelevante Beispiele aus der Bewertung von Pensionsverpflichtungen ableiten:

- **Anpassungsprüfung anhand des individuellen Rentenbeginns**
  In der betrieblichen Praxis werden lediglich bei Einzelzusagen oder kleinen Kollektiven die Anpassungsprüfungen nach § 16 Abs. 1 BetrAVG turnusgemäß in unmittelbarer Abhängigkeit vom individuellen Rentenbeginn vorgenommen.
  Erwartungsgemäß bestehen zwischen den beiden betrachteten Bewertungsmodellen systematische Abweichungen, die der obenstehenden Tabelle entnommen werden können. Das Markov-Modell liefert bei einer Gleichgewichtung der Szenarien um 1,26% höhere Barwerte als das Standardverfahren.
- **Bildung von drei Kohorten und jährliche Anpassungsprüfung**
  Um den Verwaltungsaufwand für die Anpassung der Betriebsrenten in einem vertretbaren Rahmen zu halten, bündeln viele Arbeitgeber die Betriebsrenten in drei Kohorten und entscheiden sich für einen einheitlichen Anpassungsstichtag in jedem Kalenderjahr.
  Unter der Annahme, dass sich die Betriebsrenten gleichmäßig auf die Kohorten verteilen und der Anpassungsstichtag jeweils unmittelbar nach dem Bilanzstichtag liegt, gleichen sich die modellbedingten Abweichungen aus (Mittelwert Spalte „1. Januar": 0,07%). Dies setzt allerdings voraus, dass im Rahmen der versicherungsmathematischen Bewertung die unmittelbar auf den Bilanzstichtag folgende Rentenanpassung einkalkuliert wird. Legt der Arbeitgeber den Anpassungsstichtag in die Mitte seines Wirtschaftsjahres, so liefert das Markov-Modell in unserem Beispiel um ca. einen halben Rententrend höhere Barwerte als das Standardverfahren (Mittelwert Spalte „1. Juli": 1,01%).
- **Zusammenfassung der Kohorten und dreijährige Anpassungsprüfung**
  Geht der Arbeitgeber noch einen Schritt weiter und fasst alle drei Kohorten zusammen, so ist nur noch eine Anpassungsprüfung zu einem Stichtag alle drei Jahre erforderlich. Für unseren Barwertvergleich bedeutet dies, dass zum Bilanzstichtag bekannt ist, in welchem Szenario sich der gesamte Bestand der Leistungsempfänger gerade befindet. Die Abweichungen aus Tabelle 2 können als impliziter Anpassungsstau aus der Modellwahl interpretiert werden, der sich – je weiter der nächste Anpassungsstichtag nach dem Bilanzstichtag liegt – langsam auflöst und für m=1 sogar negativ wird.

Ein Modellvergleich für einen 85-jährigen Altersrentner sowie Berechnungen mit einem erweiterten Modell unter Einschluss einer 60%-igen Anwartschaft auf Hinterbliebenenrente führen zu vergleichbaren Ergebnissen.

Modellvergleich mit variablen Anpassungshöhen

Im Folgenden gehen wir auf die Modellierung variabler Anpassungshöhen ein. In versicherungsmathematischen Gutachten ist häufig abzubilden, dass kurz- bis mittelfristig vom langfristigen Rententrend abweichende Anpassungen erwartet werden. Gründe hierfür sind z. B. vom Langfristtrend abweichende Inflationsannahmen für einen begrenzten Zeithorizont oder bereits zum Bilanzstichtag über mehrere Jahre feststehende Rentenanpassungen als Folge länger laufender Tarifabschlüsse. Oft werden solche Anforderungen über pauschale Modifikationen des einheitlichen Rententrends oder der Rentenhöhe umgesetzt. Dies führt allerdings zu unerwünschten Änderungen der Cashflows und weiterer Ergebnisgrößen[3].

Wir betrachten nun den – aus mathematischer Sicht – vergleichbaren Fall einer wirtschaftlichen Notlage des Arbeitgebers. Wird ein Arbeitgeber bei den nach dem Bilanzstichtag anstehenden Anpassungsprüfungen die Betriebsrenten erwartungsgemäß nicht oder nur teilweise anpassen können, kann dies bereits bei der Bewertung der Pensionsrückstellungen zum Bilanzstichtag berücksichtigt

Tabelle 3: Barwerte in Euro mit dem erweiterten Standardverfahren und bei Aussetzen der nächsten Rentenanpassung (Markov-Modell)			
Nächste Anpassung	**Erweitertes Standardverfahren (Barwert)**	**Wirtschaftliche Notlage (Barwert)**	**Wirtschaftliche Notlage (Rententrend)**
1. Januar 2026	26.089	24.584	1,5656 %
1. Januar 2027	25.553	24.147	1,5528 %
1. Januar 2028	25.052	23.741	1,5392 %

werden. Üblicherweise wird dieser Effekt über eine Reduzierung des langfristigen Rententrends abgebildet.

Rechenbeispiel

Auf Basis des Markov-Modells ermitteln wir für den bereits bekannten 65-jährigen Altersrentner den Umfang einer rechnerisch äquivalenten Absenkung des Rententrends bei Aussetzen der als nächstes anstehenden Rentenanpassung. Hierfür belegen wir im jeweiligen Szenario den Eintrag im Rententrendvektor für die nächste Anpassung mit 0. Als Vergleichsmodell für das Markov-Modell legen wir diesmal das erweiterte Standardverfahren, d.h. unter Berücksichtigung des Anpassungsturnus, zugrunde und unterstellen, dass die Stichtage für die Rentenanpassungen auf den Tag nach dem Bilanzstichtag fallen. Die Ergebnisse sind in Tabelle 3 zusammengefasst.

Die Spalten der Tabelle 3 zeigen

- den Barwert zum Bilanzstichtag im erweiterten Standardverfahren unter Berücksichtigung des nächsten Anpassungsstichtages bei einem unveränderten Rententrend von 2,0 % p.a.,
- den Barwert zum Bilanzstichtag gemäß dem vorgestellten Markov-Modell unter der Annahme des Aussetzens der nächsten Rentenanpassung $r_0 = 0 \; bzw. r_1 = 0 \; bzw. r_2 = 0$,
- den rechnerisch äquivalenten Rententrend, mit dem die Barwerte im erweiterten Standardverfahren mit dem Markov-Modell übereinstimmen.

In diesem Rechenbeispiel rechtfertigt die unterstellte wirtschaftliche Notlage eine Absenkung des Rententrends um ca. 45 Basispunkte. Allerdings muss beachtet werden, dass die Modifikation vom jeweiligen Alter des Betriebsrentners abhängig ist. Durch die mit steigendem Alter kürzer werdende Duration der Verpflichtung muss der Rententrend stärker abgesenkt werden, wenn eine Nichtanpassung in jeweils gleicher prozentualer Höhe ausgeglichen werden soll. So muss für einen 85-jährigen Altersrentner der Rententrend schon um ca. 100 Basispunkte reduziert werden, um eine einmalige Nichtanpassung zu kompensieren.

Wie schon an diesen beiden einfachen Beispielen sichtbar wird, sollte eine pauschale Absenkung des Rententrends sorgfältig plausibilisiert werden. Für die Anwärter im Bestand ist zu prüfen, inwieweit die Rentenanpassungen der (rentennahen) Anwärter durch die wirtschaftliche Notlage überhaupt betroffen sind.

Fazit und Ausblick

Mit dem vorgestellten Markov-Modell können die Standardverfahren für die Bewertung von Pensionsverpflichtungen konsistent abgebildet und um zusätzliche Annahmen (z. B. auch nicht konstante Rechnungszinssätze) erweitert werden. In dem vorliegenden Beitrag haben wir dies konkret am Beispiel eines Altersrentners mit monatlicher Zahlungsweise und variablen Rentenanpassungen vorgestellt. Das Markov-Modell sowie verwandte Cashflow-Modelle[4] erhöhen die Transparenz und Nachvollziehbarkeit der Bewertung und können bei der Festlegung und Validierung der versicherungsmathematischen Annahmen für die Bewertung von Pensionsverpflichtungen unterstützen. Alternativ kann das Modell um weitere Zustände und Zustandsübergänge erweitert und unmittelbar zur Bewertung von Pensionsverpflichtungen genutzt werden.

Fußnoten

[1] Heubeck-Richttafeln-GmbH, Köln, HEUBECK-RICHTTAFELN 2018 G

[2] Prof. Dr. Ralf Knobloch, Bewertung von risikobehafteten Zahlungsströmen mithilfe von Markov-Ketten bei unterjährlicher Zahlweise, Forschung am IVW Köln, 6/2012

[3] Unterarbeitsgruppe Rententrend der Arbeitsgruppe *Rechnungslegung* des Fachausschusses Altersversorgung der Deutschen Aktuarvereinigung e. V., Ergebnisbericht „Inflationsabhängige Rententrendannahme bei der Bewertung unmittelbarer Pensionsverpflichtungen nach HGB und IFRS", 22. April 2024

[4] Dr. M. Matthias Schmitt, Cashflows und Barwerte in der Pensionsversicherungsmathematik unter Berücksichtigung von Inflationskurven, DAV Journal 03/2024