

# Simultane nicht-kreuzende Quantilregression für die Risikomodellierung: ein Optimierungsansatz

von Philipp Wolters

Verfahren zur Risikomessung erleben in den letzten Jahren eine starke Weiterentwicklung. Mit gestiegenen Rechenkapazitäten, der Möglichkeit der Auslagerung von Berechnungen in Clouds und die fortschreitende erfolgreiche Anwendung von Techniken aus dem Bereich der künstlichen Intelligenz wird es stückweise möglich, granularere und exaktere Berechnungen zur Risikoabschätzung, insbesondere unter unterschiedlichen Randbedingungen, durchzuführen. Bei der Modellierung von Risiken ist es notwendig Risikoverteilungen zu unterstellen. Diese können aus empirischen Marktdaten sowie simulierten Daten hergeleitet werden. Häufig werden diese Verteilungen für einen bestimmten Zeitraum als konstant angenommen oder es werden simple, beispielsweise eindimensionale lineare Abhängigkeiten bzgl. beeinflussender Hyperparameter unterstellt. Mithilfe der Quantilregression können einzelne Quantile von hyperparameterabhängigen Verteilungen geschätzt werden [1]. Wird nun nicht nur eine einzelne Quantilfunktion, sondern mehrere Quantilfunktionen zur Herleitung einer empirischen Verteilung in Abhängigkeit von multi-dimensionalen Hyperparametern geschätzt, ergeben sich weitere Herausforderungen. Diese Funktionen können wiederum dazu verwendet werden empirische Verteilungen zu schätzen, die nichtlinear von multivariaten erklärenden Variablen abhängen und bieten somit einen großen Vorteil gegenüber simpleren Abhängigkeiten.

In diesem Artikel wird ein Ansatz vorgestellt, der für die multiple simultane nicht-kreuzende Quantilregression multivariate erklärende Variablen in ein generelles Framework einer Funktionsklasse einbettet. Diese Funktionsklasse stellt hier die Klasse der Linearkombination von im Allgemeinen beliebigen Basisfunktionen dar. Anschließend wird ein visuelles Beispiel unter Verwendung einer Polynombasis vorgestellt.

Die funktionale Herleitung und Beschreibung von bedingten empirischen Verteilungen ist insbesondere im Kontext von internen Risikomodellen, wie in [2] [4] [5], unter veränderten Marktbedingungen, interessant, da diese spezielle parameterabhängige Randverteilungen von einzelnen Risikofaktoren des Risikomodells auf effektive Weise definieren und schnell ausgewertet werden können. Damit ist insbesondere die Möglichkeit gegeben, bedingte Solvenzkapitalanforderungen unter beispielsweise Solvency II zu berechnen, ohne eine neue Kalibrierung der angenommenen Verteilungen erstellen zu müssen.

## Zusammenfassung

Der Artikel stellt einen Ansatz vor, wie die konsistente Schätzung von bedingten empirischen Verteilungen unter Berücksichtigung von nichtlinearen multi-dimensionalen Abhängigkeiten erfolgen kann. Im Detail wird für die Schätzung der Verteilung ein Ansatz der simultanen sich nicht-kreuzenden Quantilregression mehrerer Quantile vorgestellt, der gewährleistet, dass höhere Quantile auch höhere Werte erhalten und damit die Konsistenz der Schätzung sicherstellen.

Im ersten Schritt wird das allgemeine Optimierungsproblem der einzelnen Quantilregressionen definiert und anschließend deren Transformation in ein lineares Optimierungsproblem dargestellt. Dieses Problem kann dann mithilfe des Simplex-Algorithmus für lineare Probleme gelöst werden. Anschließend wird eine beliebige, aber feste Anzahl von Quantilregressionen zu unterschiedlichen Quantilen kombiniert und zu einem neuen System zusammengefasst, in dem die Zielfunktion und die Nebenbedingungen erweitert werden. Weiterhin werden neue Ungleichungsnebenbedingungen definiert, die dabei gerade die Bedingung der einzelnen Funktionen, sich nicht zu kreuzen, berücksichtigen. Damit wird die Konsistenz der Quantilschätzungen sichergestellt und ein neues zu lösendes Optimierungsproblem hergeleitet, das weiterhin mit dem Simplex-Algorithmus gelöst werden kann.

## Generelle Problemstellung

Seien  $n$  Punktpaare  $(x_i, y_i)$ ,  $x_i \in \mathbb{R}^M$ ,  $y_i \in \mathbb{R}$ ,  $i \in \{1, \dots, n\}$  gegeben und  $y$  eine Zufallsvariable, die von dem Hyperpa-

rameterset  $x$  abhängt. Gesucht seien dann  $S$  Funktionen, die spezielle Quantile von  $y$  in Abhängigkeit von  $x$  beschreiben.

## Nutzung einer Linearkombination von Basisfunktionen zur Beschreibung hyperparameterabhängiger Quantilsfunktionen

In dem hier vorgestellten Ansatz sollen die folgenden allgemeinen Annahmen an die Regressionsfunktionen getroffen werden:

- Die Lösung soll sich als Linearkombination einer geeigneten Funktionsbasis  $\{f_1, \dots, f_k\}$  darstellen lassen (beispielsweise Monome einer Polynombasis).
- Für jede Quantilregression  $p$  sind die Koeffizienten  $\{\beta_1^{(p)}, \dots, \beta_k^{(p)}\}$  zu schätzen.

Für das parameterabhängige Quantil  $\tau_p$  werden also Lösungen der folgenden Gestalt gesucht:

$$(F1) f^{(p)}(x) := \left[ f_1^{(p)}(x), \dots, f_k^{(p)}(x) \right] \left[ \beta_1^{(p)}, \dots, \beta_k^{(p)} \right]^T$$

mit  $f^{(p)}: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}$  und

$$f_i^{(p)}: \mathbb{R}^M \rightarrow \mathbb{R}, i \in \{1, \dots, k\}, x = [x^{(1)}, \dots, x^{(M)}] \in \mathbb{R}^M.$$

## Generelles Optimierungsproblem der einfachen Quantilregression

Nach [3] ist das folgende Optimierungsproblem zu lösen, um die Quantilregression bzgl. des Quantils  $\tau_p$  zu schätzen, wobei über die gesuchte Funktion  $f^{(p)}$  optimiert wird:

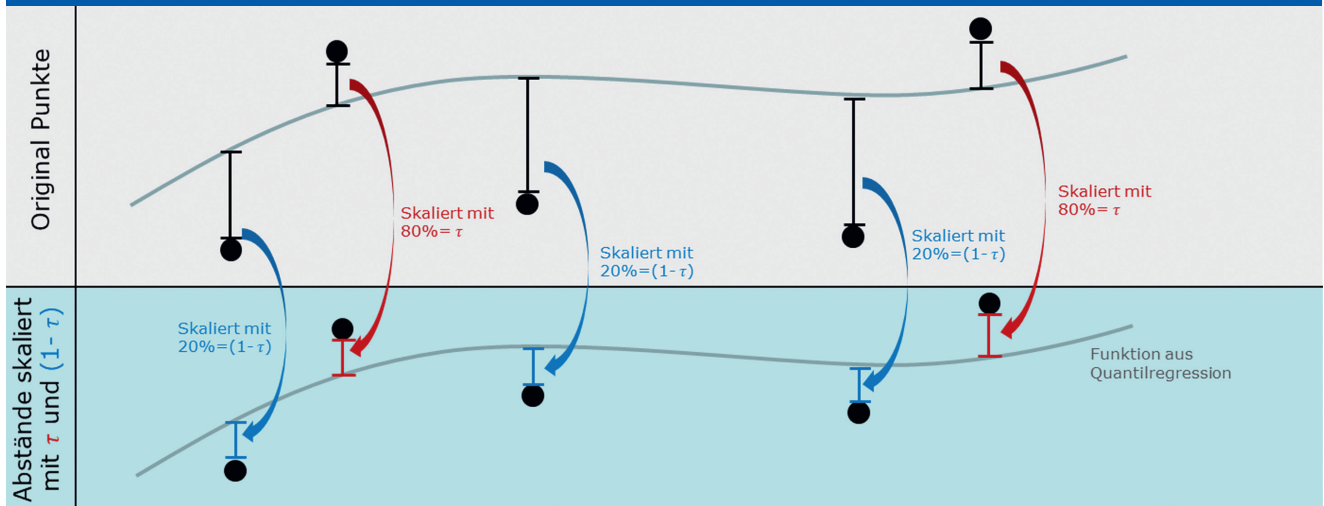
$$(1) \min_{f^{(p)}} \tau_p \sum_{\substack{i: \\ y_i - f^{(p)}(x_i) \geq 0}} |y_i - f^{(p)}(x_i)| + (1 - \tau_p) \sum_{\substack{i: \\ y_i - f^{(p)}(x_i) < 0}} |y_i - f^{(p)}(x_i)|$$

Anschauliche Visualisierung und Erläuterung zu Optimierungsproblem (1), siehe Abb. 1.

## Kurze Erläuterung zu Optimierungsproblem (1)

Es werden zwei Summen gebildet. Jeder Summand stellt die absolute Abweichung eines gegebenen Punktes zur Regressionsfunktion dar. Die erste Summe wird mit dem Konfidenzniveau  $\tau_p$  gewichtet und enthält alle Punkte, die sich oberhalb oder gleich der gesuchten Regressionsfunktion befinden (ausgedrückt durch die Bedingung:  $y_i - f^{(p)}(x_i) \geq 0$ ). Die zweite Summe wird mit dem Konfidenzniveau  $(1 - \tau_p)$  gewichtet und enthält alle Punkte, die sich unterhalb der gesuchten Regressionsfunktion befinden (ausgedrückt durch die Bedingung:  $y_i - f^{(p)}(x_i) < 0$ ). Wird  $\tau_p := 0,5$  gesetzt, fallen beide Summen zusammen und man erhält den Median.

Abb. 1 Visualisierung der Skalierung der Abstände zwischen Punkten und gesuchter Funktion zur Bestimmung der Quantilregression zum Konfidenzniveau 80 %



In dem hier betrachteten Fall mit  $f^{(p)}(\cdot)$  der Gestalt wie in (F1), stellen  $\beta^{(p)}$  die Optimierungsparameter dar und es ergibt sich folglich das Optimierungsproblem

$$(2) \min_{X_i^{(p)} \beta^{(p)}} \tau_p \sum_{\substack{i: \\ y_i - X_i^{(p)} \beta^{(p)} \\ \geq 0}} |y_i - X_i^{(p)} \beta^{(p)}| + (1 - \tau_p) \sum_{\substack{i: \\ y_i - X_i^{(p)} \beta^{(p)} \\ < 0}} |y_i - X_i^{(p)} \beta^{(p)}|$$

mit folgender Definition der Matrizen

$$X^{(p)} := \begin{bmatrix} X_1^{(p)} \\ \dots \\ X_n^{(p)} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} f_1^{(p)}(x_1) & \dots & f_k^{(p)}(x_1) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(p)}(x_n) & \dots & f_k^{(p)}(x_n) \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n,k},$$

$$y := \begin{bmatrix} y_1 \\ \dots \\ y_n \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n, \quad \beta^{(p)} := \begin{bmatrix} \beta_1^{(p)} \\ \dots \\ \beta_n^{(p)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Die Zuordnung der Summanden in (1) hängt von der Lösung  $\beta^{(p)}$  selbst ab, weshalb es günstig ist das Problem in die folgende lineare Gestalt zu transformieren:

$$(3) \min_{z^{(p)}} c^{(p)T} z^{(p)}, \text{ mit den Nebenbedingungen}$$

$$A^{(p)} z^{(p)} = y \text{ und} \\ z^{(p)} \geq 0$$

wobei

$$c^{(p)T} := [\tau_p \times \text{ones}(1, n), (1 - \tau_p) \times \text{ones}(1, n), \\ \text{zeros}(1, k), \text{zeros}(1, k)] \in \mathbb{R}^{1, 2n+2k}$$

$$A^{(p)} := [I_n, -I_n, X^{(p)}, -X^{(p)}] \in \mathbb{R}^{n, 2n+2k}$$

$$z^{(p)T} := [u^T, v^T, (\beta^{(p)+})^T, (\beta^{(p)-})^T]^T \in \mathbb{R}^{1, 2n+2k}$$

Dabei stellen  $\beta_k^{(p)+}$  und  $\beta_k^{(p)-}$  den Absolutbetrag der Positiv- und Negativanteile von  $\beta_k^{(p)}$  dar. Hier wurde die Notation verwendet, dass  $\mathbf{ones}(1, n)$  die Einheitsmatrix der Größe  $(1 \times n)$  und  $\mathbf{zeros}(1, k)$  die Nullmatrix der Größe  $(1 \times k)$  darstellt, d. h., die Lösung der Koeffizienten  $\beta_k^{(p)}$  ist Teil des Lösungsvektors  $z^{(p)}$  und ergibt sich als:

$$\beta_k^{(p)} := \beta_k^{(p)+} - \beta_k^{(p)-}$$

### Konsistenzbedingung: Motivation zur Herleitung der simultanen nicht-kreuzenden Quantilregression

Sei die parameterabhängige Schätzung von zwei Quantilen  $Q_{\tau_1}, Q_{\tau_2}$  zu zwei Konfidenzniveaus  $\tau_1$  und  $\tau_2$  und zu den Hyperparametern  $x \in \mathbb{R}^M$  gesucht, mit  $\tau_1 \geq \tau_2$ .

Dann muss offensichtlich gelten:

$$(4) \quad Q_{\tau_1}(x) \geq Q_{\tau_2}(x) \text{ für alle gültigen Hyperparameter } x.$$

Führt man jedoch zwei unabhängige Quantilregressionen durch, ist im Allgemeinen nicht sichergestellt, dass die Konsistenzbedingung (4) erfüllt wird. Die Bedingung kann insbesondere schnell verletzt werden, ohne dass dies schnell ersichtlich ist, wenn es sich bei der Lösung um multi-dimensionale und nicht-lineare Funktionen bzgl.  $x$  handelt.

### Umschreiben der Konsistenzbedingung (4) mithilfe der verwendeten Basisfunktionen

Seien die Schätzer für  $Q_{\tau_1}(\cdot)$  und  $Q_{\tau_2}(\cdot)$  durch Funktionen der Form (F1) gesucht. Dann kann die Bedingung

$$Q_{\tau_1}(x) \geq Q_{\tau_2}(x) \text{ für alle gültigen Hyperparameter } x$$

durch

$$\left[ f_1^{(1)}(x), \dots, f_k^{(1)}(x) \right] \left[ \beta_1^{(1)}, \dots, \beta_k^{(1)} \right]^T \geq \left[ f_1^{(2)}(x), \dots, f_k^{(2)}(x) \right] \left[ \beta_1^{(2)}, \dots, \beta_k^{(2)} \right]^T$$

und damit durch

$$(4.1) \quad X^{(1)} \beta^{(1)} \geq X^{(2)} \beta^{(2)}$$

ersetzt werden. Somit ist die Ungleichheitsbedingung (4) auf den gegebenen Punkten sichergestellt.

Entsprechend der vorherigen Definitionen kann (4.1) dann als

$$\left[ X^{(1)}, -X^{(2)} \right] \begin{bmatrix} \beta^{(1)} \\ \beta^{(2)} \end{bmatrix} \geq 0 \Leftrightarrow \left[ X^{(1)} B^{(1)}, -X^{(2)} B^{(2)} \right] \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \end{bmatrix} \geq 0$$

mit  $B^{(p)} := \left[ 0, 0, I_n^{(p)}, -I_n^{(p)} \right]$  geschrieben werden, da dann  $\beta^{(p)} = B^{(p)} z^{(p)}$ , für  $p \in \{1, 2\}$ . Dabei sei  $I_n^{(p)}$  die Identitätsmatrix der Dimension  $n$ .



### Über den Autor

→ Philipp Wolters ist Aktuar DAV und bei der Generali Deutschland als Experte im Risikomanagement tätig. Im Rahmen von Solvency II beschäftigt er sich mit der Entwicklung von Modellen zur Messung und Steuerung von Risiken. Seine aktuellen Arbeitsschwerpunkte liegen in der Verknüpfung von internem Risikomodell mit strategischen Kapitalanlageentscheidungen im Kontext des Asset-Liability-Managements (ALM). Er ist als Dozent bei der DAA im Ausbildungsfach Spezialwissen Investment und Finanzmathematik tätig.



## Referenzen

- <sup>1</sup> Koenker, R., and Hallock, K. (2001), Quantile Regression: An Introduction, Journal of Economic Perspectives, 2001
- <sup>2</sup> Warmuth, Wolters: Messung der täglichen Solvenzquote unter Solvency II, Der Aktuar, 1/2018
- <sup>3</sup> Koenker, Basset: Regression Quantiles, Econometrica, Vol. 46, No. 1, 1/1978
- <sup>4</sup> Henseler, Wolters: Investments und tägliche Kapitalmarktschwankungen: Wie lässt sich die Solvenzquote unterjährig überwachen?, Der Aktuar, 3/2018
- <sup>5</sup> Krah, Nikolić, Korn: A Least-Squares Monte Carlo Framework in Proxy Modeling of Life Insurance Companies, Risks 2018, 6(2)
- <sup>6</sup> Longstaff, F. A., Schwartz, E. S., Valuing American Options by Simulation: A Simple Least-Squares Approach, The Review of Financial Studies.
- <sup>7</sup> Yufeng Liu, Yichao Wu, Simultaneous multiple non-crossing quantile regression estimation using kernel constraints, doi: 10.1080/10485252.2010.537336
- <sup>8</sup> Ivan Fernandez-Val, Blaise Melly, Fast Algorithms for the Quantile Regression Process, doi: 10.48550/arXiv.1909.05782, 2019

### Simultane nicht-kreuzende Quantilregressionen für eine beliebige Anzahl $S$ von Quantilen

Sei  $S \in \mathbb{N}$ ,  $S > 1$  eine beliebige, aber feste Anzahl von Quantilregressionen zu unterschiedlichen Konfidenzniveaus  $\{\tau_1, \dots, \tau_S\}$  mit  $\tau_1 \geq \tau_2 \geq \dots \geq \tau_{S-1} \geq \tau_S$ . Damit ergibt sich das Optimierungsproblem (5):

$$(5) \min_{z^{(1)}} c^{(1)T} z^{(1)}, \dots, \min_{z^{(S)}} c^{(S)T} z^{(S)}, \text{ mit den Nebenbedingungen}$$

$$A^{(1)} z^{(1)} = y, \dots, A^{(S)} z^{(S)} = y,$$

$$[z^{(1)T}, \dots, z^{(S)T}] \geq 0,$$

$$[X^{(1)} B^{(1)}, -X^{(2)} B^{(2)}] \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \end{bmatrix} \geq 0, \dots, [X^{(S-1)} B^{(S-1)}, -X^{(S)} B^{(S)}] \begin{bmatrix} z^{(S-1)} \\ z^{(S)} \end{bmatrix} \geq 0.$$

Das Optimierungsproblem (5) ist noch nicht in der entsprechenden Form, um den Simplex-Algorithmus anwenden zu können. Allerdings kann es leicht in die entsprechende Form gebracht werden.

Da  $z^{(1)T}, \dots, z^{(S)T} \geq 0$  sowie  $c^{(1)T}, \dots, c^{(S)T} \geq 0$ , können die separaten Minimierungen aus (5) zu dem gemeinsamen Optimierungsproblem

$$(6) \min_{\begin{bmatrix} z^{(1)} \\ \dots \\ z^{(S)} \end{bmatrix}} [c^{(1)T}, \dots, c^{(S)T}] \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ \dots \\ z^{(S)} \end{bmatrix}, \text{ mit den Nebenbedingungen}$$

$$\begin{bmatrix} A^{(1)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & A^{(S)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ \dots \\ z^{(S)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y \\ \dots \\ y \end{bmatrix}$$

$$[z^{(1)T}, \dots, z^{(S)T}]^T \geq 0$$

$$(6.1) \begin{bmatrix} X^{(1)} B^{(1)}, -X^{(2)} B^{(2)} & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & X^{(S-1)} B^{(S-1)}, -X^{(S)} B^{(S)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z^{(1)} \\ z^{(2)} \\ \vdots \\ z^{(S-1)} \\ z^{(S)} \end{bmatrix} \geq 0$$

$$z^{(1)}, \dots, z^{(S)} \in \mathbb{R}^{2n+2k}, [z^{(1)T}, \dots, z^{(S)T}]^T \in \mathbb{R}^{S(2n+2k)}$$

transformiert werden. Dieses Optimierungsproblem (6) besitzt nun wieder die Standardform, um es mit dem Simplex-Algorithmus zu lösen und aus der Lösung  $[z^{(1)T}, \dots, z^{(S)T}]^T$  können die Koeffizienten  $\beta^{(p)}$  jeder Regressionsfunktion  $p$  gebildet werden:

$$\beta^{(p)} := B^{(p)} z^{(p)}, \text{ für } p \in \{1, \dots, S\}$$

$$\text{mit } B^{(p)} := [0, 0, I_n^{(p)}, -I_n^{(p)}].$$

Damit ist das gewünschte Ziel erreicht.

## Weitere Anmerkungen zu Vereinfachungen,

### Performance und Abdeckung des Fittingraumes:

Um eine geeignete Wahl an Basisfunktionen zu finden, ist es beispielsweise möglich einen adaptiven Forward-Algorithmus für Polynome zu verwenden. Dann muss in jedem Schritt des Algorithmus das Optimierungsproblem (6) gelöst werden.

Werden für alle Quantilregressionen die gleichen Basisfunktionen verwendet, gilt

$$\begin{aligned} A^{(1)} &= A^{(2)} = \dots = A^{(s-1)} = A^{(s)}, \\ X^{(1)} &= X^{(2)} = \dots = X^{(s-1)} = X^{(s)} \text{ und} \\ B^{(1)} &= B^{(2)} = \dots = B^{(s-1)} = B^{(s)}. \end{aligned}$$

In der Ungleichung (6.1) kann es, ggf. aus Gründen der Laufzeit, sowie des Speicherbedarfs, sinnvoll sein, die Datenmenge, auf denen die gekoppelte Nebenbedingung wirkt, zu verringern. Dies kann einfach erreicht werden, indem die Dimension der Nebenbedingung (6.1) reduziert wird und beispielsweise Zeilen der Ungleichung gestrichen werden. Allerdings besteht dann weiterhin die Gefahr, dass der Fittingraum keine gleichmäßige Verteilung der erklärenden Parameter aufweist und es zu größeren Lücken im Fittingraum kommt. Eine Alternative, um dieses Problem zu verringern, wäre eine ausreichend hohe aber möglichst kleine Anzahl von Punkten innerhalb des Fittingraumes zu erzeugen, auf denen die Ungleichungsnebenbedingung erfüllt werden soll. Hier böte sich an eine Niederdiskrepanzfolge (beispielsweise Sobol-Sequenz) zu verwenden, um den Raum mit möglichst wenig Punkten gleichmäßig auszufüllen.

Damit würde die Matrix  $X^{(p)}$  in der Nebenbedingung (6.1) durch

$$\tilde{X}^{(p)} := \begin{bmatrix} \tilde{X}_1^{(p)} \\ \dots \\ \tilde{X}_{\tilde{n}}^{(p)} \end{bmatrix} := \begin{bmatrix} f_1^{(p)}(x_1^{red}) & \dots & f_k^{(p)}(x_1^{red}) \\ \dots & \dots & \dots \\ f_1^{(p)}(x_{\tilde{n}}^{red}) & \dots & f_k^{(p)}(x_{\tilde{n}}^{red}) \end{bmatrix}$$

ersetzt werden, wobei  $\{x_1^{red}, x_2^{red}, x_3^{red}, \dots, x_{\tilde{n}-1}^{red}, x_{\tilde{n}}^{red}\}$  die  $\tilde{n} < n$  Punkte der Niederdiskrepanzfolge darstellten. Damit hätte die Matrix der Nebenbedingungen in (6.1) nur noch  $(s * \tilde{n})$  anstatt  $(s * n)$  Zeilen wobei gleichzeitig eine gleichmäßigere Abdeckung des Raumes sichergestellt werden könnte.

## Einfache Beispieldaten zur Visualisierung

In dem folgenden einfachen zweidimensionalen Beispiel soll der Unterschied zwischen unabhängig durchgeführten Quantilregressionen und dem Ansatz der simultanen nicht-kreuzenden Quantilregressionen verdeutlicht werden.

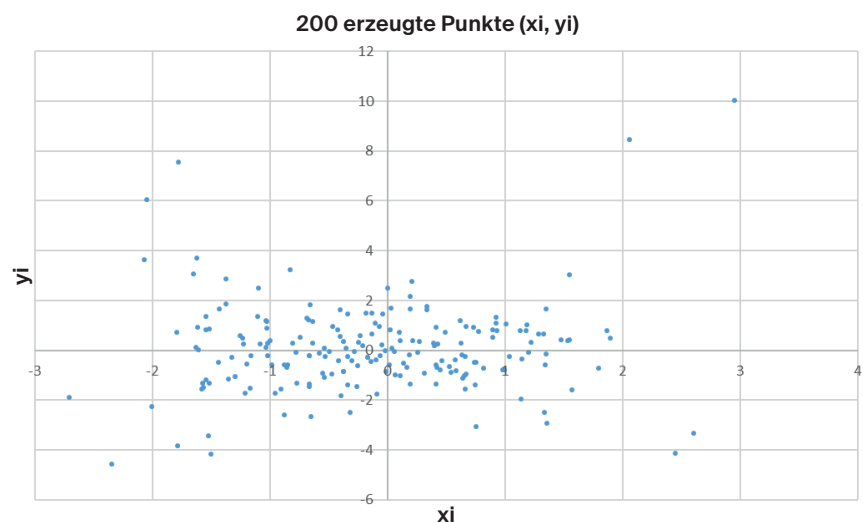
Gegeben seien 200 Punkte  $(x_i, y_i) \in \mathbb{R}^2$ .  $(x_i)_{i \in \{1, \dots, 200\}}$  sei standardnormalverteilt erzeugt.

Die  $(y_i)_{i \in \{1, \dots, 200\}}$  seien durch die Funktionsvorschrift

$$y(x) := b * v * \left(\frac{x}{1,2}\right)^3 + a$$

erzeugt. Dabei sei  $b \sim Ber(0,5)$  eine Bernoulli-verteilte Zufallsvariable, die die Werte -1 und 1 mit jeweils 50% Wahrscheinlichkeit annimmt sowie  $a$  und  $v$  jeweils eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Alle verwendeten Zufallsvariablen seien unabhängig.

Abb. 2 Beispieldaten



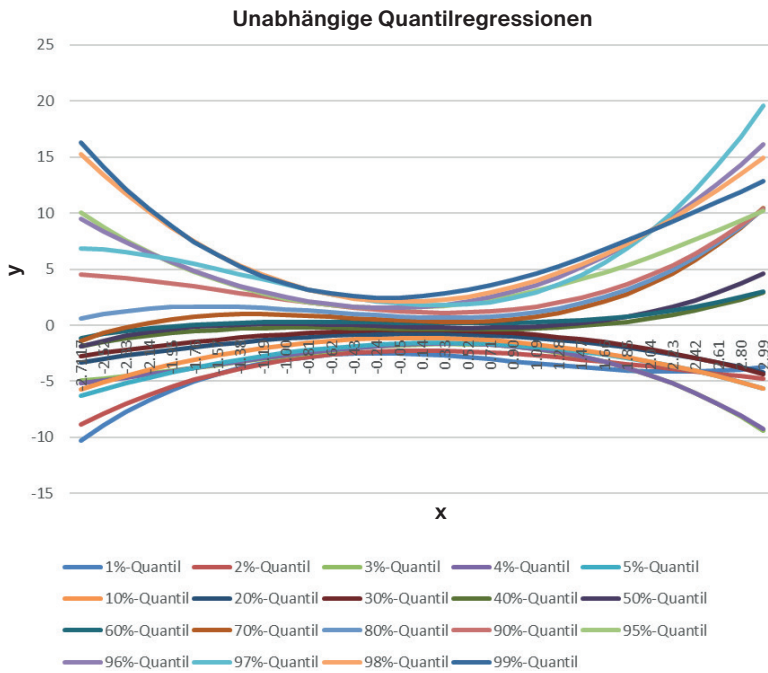
Nach Konstruktion ist  $x$  also um die Null dichter verteilt und  $y$  streut bei zunehmendem Wert  $|x|$  stärker entlang der  $y$ -Achse in die positive sowie negative Halbebene.

Die hier verwendeten generierten Punkte sehen in einem Koordinatensystem wie in Abb. 2 dargestellt aus.

Nun wurden einerseits unabhängige und andererseits simultane nicht-kreuzende Quantilregressionen für die Quantile 99 %, 98 %, 97 %, 96 %, 95 %, 90 %, 80 %, 70 %, 60 %, 50 %, 40 %, 30 %, 20 %, 10 %, 5 %, 4 %, 3 %, 2 % und 1 % durchgeführt.

Zur Vereinfachung werden hier nur Quantilregressionen basierend auf Polynomen mit Grad 3 gezeigt, da auch die ver-

Abb. 3 Beispieldaten mit unabhängig durchgeführten Quantilregressionen, Grad 3



wendeten Punkten mit einer Funktion des Grades 3 bzgl.  $x$  erzeugt wurden. Bei den simultanen nicht-kreuzenden Quantilregressionen wurde für die Nebenbedingung eine Sobol-Sequenz mit  $\tilde{n} = 50$  Realisationen verwendet.

In Abbildung 3 ist schnell zu erkennen, dass sich die hergeleiteten Quantilfunktionen an diversen Stellen kreuzen, hingegen dies bei den simultanen nicht-kreuzenden Quantilfunktionen in Abbildung 4 nicht der Fall ist.

### Mögliche Anwendungsgebiete

Die möglichen Anwendungsgebiete der simultanen nicht-kreuzenden Quantilregression sind so vielfältig, wie die der einfachen Quantilregression oder auch der einfachen Berechnung von Quantilen. Weiterhin hat die simultane nicht-kreuzende Quantilregression einen stabilisierenden Einfluss auf die Regressionsfunktionen, sodass selbst bei Interesse an nur einer Quantilfunktion zu überlegen ist, die simultane nicht-kreuzenden Quantilregression durchzuführen. So können mithilfe dieser, parameterabhängige empirische Verteilungen geschätzt werden, die beispielsweise zur Risikoberechnung von internen Modellen unter Solvency II wie in [4] [5], verwendet werden können.

Weiterhin eignet sich das Verfahren, um Verteilungseigenschaften beispielsweise

von Eigenmitteln in risikoneutralen Szenarien bzgl. bestimmter Hyperparameter, im Kontext eines Least-Squares-Monte-Carlo(LSMC)-Ansatzes [6] zu bestimmen. Einen anderen Anwendungsbereich stellt das Backtesting von verwendeten Risikoverteilungen mit Verteilungen aus der simultanen nicht-kreuzenden Quantilregression, basierend auf empirischen Marktdaten, dar. Der Anwendungsbreite sind im Allgemeinen keine Grenzen gesetzt.

### Fazit und Ausblick

Es existieren verschiedene Ansätze zur Erzeugung von sich nicht-kreuzenden Quantilregressionen, wobei bisher insbesondere Kernel-Regressionen und Neuronale Netze betrachtet wurden [7]. Die generelle Eigenschaft, dass die Quantilregressionen sich nicht kreuzen, verbessert

die Interpretierbarkeit und praktische Anwendbarkeit der Regressionsergebnisse sowie deren Stabilität. Polynome besitzen die Eigenschaft, relativ leicht darstellbar, leicht verständlich und glatt zu sein. Damit stellt das hier gezeigte Verfahren für multivariate Polynome eine Erweiterung der methodischen Ansätze bisheriger Verfahren dar. Es ist denkbar, dass zur weiteren Steigerung der Rechengeschwindigkeit bei großen Datenmengen Algorithmen ähnlich wie [8] Anwendung finden könnten. ▀

Abb. 4 Beispieldaten mit simultanen nicht-kreuzenden Quantilregressionen, Grad 3

