

Modelle zur Quantifizierung des Klimawandels

von Prof. Dr. Benedikt Funke und Prof. Dr. Klaus J. Schröter

■ Ausgangspunkt der im Folgenden vorgestellten Modellansätze ist das klassische kollektive Modell der Risikotheorie, das den Gesamtschaden eines Bestands der Schadenversicherung in einer festen Periode beschreibt. Dieses Basismodell wird zur Modellierung der Einflüsse des Klimawandels erweitert. Einerseits ist eine zeitabhängige Modellierung erforderlich. Zudem werden die Schadenvariablen nach versicherten Gefahren und Regionen unterschieden.

Eine die Einflüsse des Klimawandels repräsentierende Zufallsvariable, der Klimawandelindikator (KWI), wird eingeführt. Sie geht in die Verteilung der Schadenanzahl- und -höhenvariablen ein, was zu komplexen Abhängigkeitsstrukturen führt. Konkret entspricht die Verteilung des KWI der a-priori-Verteilung in einem Bayesschen Modell.

Exemplarisch werden ausgewählte potenzielle Klimawandelindikatoren vorgestellt. Die Modellkalibrierung operiert mit verschiedenen Verteilungsansätzen bzgl. KWI und Schadenvariablen sowie unterschiedlichen Techniken der Parameterschätzung. Simulationen ermöglichen die Bewertung klimabedingter Großschadenereignisse hinsichtlich Häufigkeit und Schadenausmaß.

Das vorliegende Papier fasst ausgewählte Ergebnisse zusammen, die in der DAV-Arbeitsgruppe *Klimawandel – aktuarielle Implikationen in der Schadenversicherung* des Ausschusses Schadenversicherung erarbeitet wurden. Konkret betreffen die Darstellungen die Resultate der Unter-AG *Quantifizierung und Modellierung* der genannten AG.

Im Fokus stehen Modelle, die den Gesamtschaden in Zweigen der Schadenversicherung, die in besonderem Maße dem Klimawandel unterliegen, beschreiben. Solche Modelle werden – gegenüber den klassischen Modellen der Risikotheorie – insbesondere die folgenden Erweiterungen aufweisen:

- zeitabhängige Modellierung, um die dynamische Entwicklung des Klimawandels zu erfassen;
- potenzielle zweistufige Modellierung der Schadenzahlen je nach versicherter Gefahr:
 1. Anzahl der Kumulereignisse (events)
 2. Anzahl der Schadenereignisse pro Kumulereignis;
- Unterscheidung nach Regionen;
- Unterscheidung nach versicherten (Natur-)Gefahren;
- Integration von klimatologischen Merkmalen.

Die Kalibrierung der Modelle umfasst im Wesentlichen zwei Disziplinen:

- Auswahl der exogenen Variablen mit den Alternativen:
 - keine exogenen Variablen, d. h. lediglich zeitabhängige Modellierung, somit ohne weitere klimabedingte Abhängigkeitsstrukturen;
 - klimatologische Merkmale, wie CO₂-Emissionen, Temperaturen, Windstärken, Niederschlagsmengen etc. unter Ansatz von Abhängigkeitsstrukturen; das Resultat ist eine klimakausale Modellierung des (zukünftigen) Gesamtschadens.
- Parameterschätzung
 - Wegen des zu glättenden Zeiteffektes stehen hier keine Standardverfahren zur Verfügung, sodass heuristische Ansätze gefragt sind.

Die vorgeschlagenen Möglichkeiten der Parameterschätzungen basieren bezogen auf die Schadenvariablen ausschließlich auf öffentlich zugänglichen Daten des GDV, s. [1] und [2], sowie hinsichtlich der klimatologischen Komponenten auf Daten unterschiedlichster Art des Deutschen Wetterdienstes (DWD).

Hinsichtlich der Unterscheidung nach Regionen operiert der GDV mit Bundesländern bzw. einer Aggregation auf zwölf Regionen. Der DWD weist dagegen Daten für zahlreiche deutsche Wetterstationen aus. Hier wurde eine grobe Aggregation auf die vier Areale NORD, WEST, SÜD und

OST (im Folgenden als N, W, S, O bezeichnet) umgesetzt. Daneben wurden die Daten des DWD so auf Jahresebene aggregiert, dass diese die gleiche zeitliche Dimension wie die jährlichen Schadendaten des GDV besitzen.

Das konkrete Vorgehen orientiert sich exemplarisch an der Wohngebäudeversicherung und greift explizit – den Ansätzen der GDV-Naturgefahrenreporte 2021 und 2022 ([1] und [2]) folgend – die versicherten Gefahren

- Sturm/Hagel
- Starkregen
- weitere Naturgefahren/Elementargefahren

auf. Das methodische Vorgehen hängt allerdings nicht von der versicherten Gefahr ab. Unterschiede ergeben sich allein aus den gegebenenfalls heterogenen Datenbasen.

Ziel ist es, ein Vorgehen zur Erstellung eines vollständig parametrisierten Gesamtschadenmodells aufzuzeigen. Neben diesem allgemeinen Konzept, das unternehmensindividuell auszugestalten wäre, sollen auch exemplarisch konkrete Modelle auf der Basis der GDV-Daten und ggf. des DWD generiert werden. Diese Modelle stehen dann für die Zwecke der Simulation zur Verfügung und können sowohl im Kontext der Beitragskalkulation als auch des Risikomanagements genutzt werden.

Analytisch geschlossene Elementarformeln (etwa für die Verteilungsfunktion des Gesamtschadens) sind bei diesen Modellen aufgrund der beschriebenen Komplexität nahezu ausgeschlossen. Allerdings können durch Simulationsstudien die wesentlichen Fragestellungen untersucht werden. So wird hinsichtlich der Varianz- und Risikobewertung insbesondere aufgezeigt, dass die Wahrscheinlichkeiten von *bad cases* – also kritischen Szenarien mit sehr vielen und/oder sehr hohen Einzelschäden – in den klimakausalen Modellen im Vergleich zu den rein zeitabhängigen Ansätzen bzw. bei angenommener Unabhängigkeit der versicherten Gefahren signifikant ansteigen.

Erweiterte Ansätze für Gesamtschadenmodelle

Im Folgenden werden konkrete Ansätze zur Modellierung des Gesamtschadens unter Einbeziehung des Klimawandels vorgestellt. Zwecks Strukturierung der Modelle werden zwei Arten von Modellen unterschieden. Solche Modelle, die die Effekte des Klimawandels nicht (kausal) durch die Einbeziehung klimatologischer Merkmale erfassen, sondern lediglich die Zeit (*T*) als einzige unabhängige (exogene) Variable aufnehmen, werden als „T-Modelle“ bezeichnet. In Abgrenzung bzw. Erweiterung der T-Modelle enthalten „C-Modelle“ (auszuwählende) klimatologische Merkmale als exogene Variablen, die den Gesamtschaden beeinflussen. Da sich die T-Modelle als Spezialfälle der

C-Modelle erweisen, können die Darstellungen auf Letztere reduziert werden.

Einführung in C-Modelle

Die Modellbildung orientiert sich exemplarisch an der besonders vom Klimawandel betroffenen Wohngebäudeversicherung. Dabei seien

G = Anzahl der versicherten Gefahren
und
 R = Anzahl der versicherten Regionen.¹

Außerdem bezeichnet die Variable T das jeweilige (Kalender-)Jahr. Für jede versicherte Gefahr ($g = 1, \dots, G$) und jede Region ($r = 1, \dots, R$) ergibt sich der zugehörige Gesamtschaden im Jahr $T = t$ durch die folgenden Zufallsvariablen:

\tilde{N}_{grt} = (bestandsunabhängige) Anzahl der Kumulereignisse

M_{grtj} = Anzahl der Einzelschäden bei dem j -ten Kumulereignis

N_{grt} = Gesamtanzahl der Einzelschäden = $\sum_{j=1}^{\tilde{N}_{grt}} M_{grtj}$

X_{grti} = Höhe des i -ten Einzelschadens

S_{grt} = Gesamtschaden = $\sum_{i=1}^{N_{grt}} X_{grti}$

Die Zusammenfassung über alle Gefahren und Regionen führt auf

S_t = Gesamtschaden im Jahr $t = \sum_{g=1}^G \sum_{r=1}^R S_{grt}$

Während die Erwartungswerte der kumulierten Gesamtschäden die übliche Additivität aufweisen, ergeben sich in den C-Modellen im Allgemeinen recht komplizierte Varianz- und Korrelationsstrukturen, da sämtliche Schadenvariablen potenziell von dem im folgenden Abschnitt eingeführten Klimawandelindikator abhängen.

Den genannten Zufallsvariablen sind geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilungen anzupassen. Hier werden für die Anzahlverteilungen Delaporte-Verteilungen und zusammengesetzte Poisson-Verteilungen (CP) sowie für klimatologische Variablen und die Einzelschäden verschobene Gamma-Verteilungen herangezogen. Diese Verteilungsklassen gelten als relativ anpassungsfähig. Selbstverständlich sind – je nach Datenbasis – auch ganz andere Verteilungsklassen geeignet. Insofern gelten die hier gewählten Ansätze als exemplarisch.

Die C-Modelle weisen substantziell die beiden folgenden Charakteristika auf:

- Es wird eine klimatologische (Zufalls-)Variable θ_t in die Modellbildung aufgenommen. Ihr Verlauf wird basierend auf Vergangenheitsdaten analysiert und geeignet an zeitdynamische Wahrscheinlichkeitsverteilungen (hier: (verschobene) Gamma-Verteilungen) angepasst. Sie wird nachfolgend als „Klimawandelindikator“ (KWI) bezeichnet.
- Die Verteilungen der einschlägigen Schadenvariablen (Anzahlen, Einzelschadenshöhen etc.) werden von den (zufälligen) Ausprägungen des KWI θ_t abhängig modelliert. Formal gehen die (Schaden-)Verteilungen in bedingte Verteilungen über. Ähnlich geht die in klassischen Modellen übliche stochastische Unabhängigkeit in eine bedingte Unabhängigkeit, gegeben θ_t , über. Somit ist in die C-Modelle integriert, dass die Schadenanzahlen und Einzelschadenshöhen – sogar verschiedener Gefahren und Regionen – eines Jahres Abhängigkeiten aufweisen, nämlich die gemeinsamen Abhängigkeiten von der Ausprägung von $\theta_t = \vartheta_t$ im t -ten Jahr. Zufallsvariablen verschiedener Jahre sind auch in C-Modellen unabhängig.

Einführung des Klimawandelindikators θ_t

Den folgenden Modellierungen liegt die vereinfachende Annahme zugrunde, dass es eine (univariate) Variable gibt, die die für die Schadenversicherung einschlägigen mit dem Klimawandel verbundenen Veränderungen signifikant beschreibt. Diese Variable bezeichnen wir als den Klimawandelindikator θ_t . Für diesen KWI gibt es zahlreiche Kandidaten, etwa und naheliegend die weltweiten CO_2 -Emissionen. Hier werden die Betrachtungen auf die folgenden sechs „C-Variablen“ konzentriert:

- Niederschlagshöhe in mm
- Mittlere Tagestemperatur in °C
- Maximale Tagestemperatur in °C
- Sonnenstunden in h
- Mittlere Windgeschwindigkeit in m/sec
- Maximale Windstärke in m/sec.

Für diese Variablen veröffentlicht der DWD regelmäßig Daten für zahlreiche Wetterstationen in Deutschland. Außerdem gibt es auch schon speziell auf die Anforderungen der Schadenversicherung ausgerichtete internationale Klimaindices wie den *Actuaries Climate Index® (ACI)*.²

Auch hinsichtlich der Auswahl des KWI ist klarzustellen, dass die hier nachfolgend vorgenommene Auswahl nur methodisch-exemplarischen Charakter haben kann. Keineswegs soll ein konkreter Index klar favorisiert werden. Dies ergibt sich allein aus der relativ dünnen und hoch aggregierten (GDV-) Datenlage der Schadenvariablen, die eine fundierte Analyse der Abhängigkeiten der Schäden

von den potenziellen Klimawandelindikatoren ausschließt. Außerdem werden sich bei den konkreten Modellanpassungen recht unterschiedliche Variablen als geeignet erweisen, und zwar je nachdem, welche Schwerpunkte hinsichtlich der versicherten Gefahren und Regionen im Bestand vorliegen.

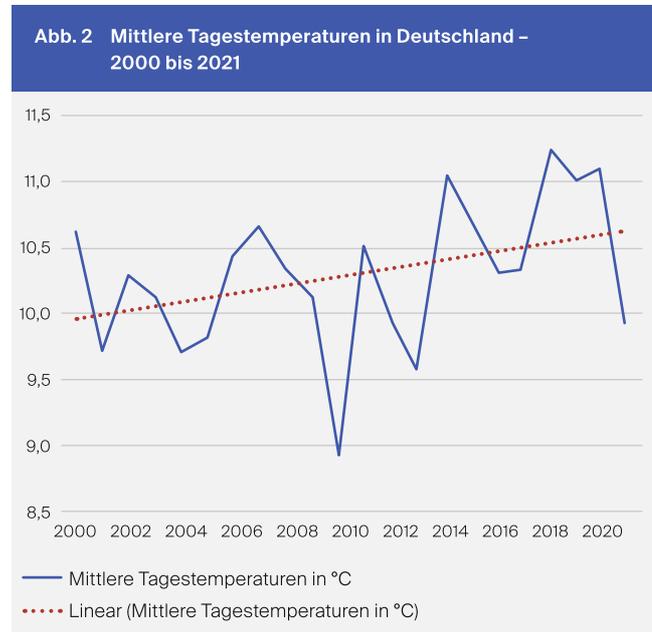
Für die sechs oben genannten vom DWD veröffentlichten Variablen wurde versucht, die Wechselbeziehungen zu den (vorliegenden) (GDV-)Schadendaten zu analysieren. Die Ergebnisse entsprachen mehrfach nicht den zu erwartenden Tendenzen. So wiesen z. B. die mittleren Windgeschwindigkeiten in den letzten gut 20 Jahren in Deutschland eher fallenden Charakter auf, vgl. Abbildung 1.



Es ergab sich weiterhin schnell, dass ein regionaler Ansatz von Klimaeffekten eher zu verwerfen sei, da sonst die Gefahr des Overfittings gegeben wäre. Bei der Quantifizierung von Wechselbeziehungen ist zu beachten, dass die Daten bei mehrjährigen Betrachtungen sicher Trends unterliegen, die die üblichen Korrelationskoeffizienten verzerren. Solche Verzerrungen können durch Stationarisierungen, die polynomiale Trends eliminieren, bereinigt werden, vgl. [4].

Die Auswahl des KWI wird sich somit an mehreren Kriterien orientieren. Neben einem gewissen Pragmatismus hinsichtlich der Kausalität sind (vorsichtige) Korrelationsanalysen und Erfahrungen im Umgang mit alternativen Klimawandelindikatoren hilfreich. Die Untersuchung der Wechselwirkungen der genannten Variablen mit den einschlägigen SchadenvARIABLEN (Anzahlen/Schadenhöhen) ergab keine klare Tendenz für die Auswahl eines KWI. Aus diesem Grund wurden zusätzlich die vom DWD veröf-

fentlichten Anzahlen der Starkregenereignisse (in Deutschland in den Jahren 2001 bis 2021, vgl. [5]) betrachtet. Hier ergaben sich deutlich stimmigere Werte. Die höchsten Wechselwirkungen zeigten sich für die mittleren Tagestemperaturen, sowohl mit und ohne Trendbereinigung, deren historische Entwicklung in Abbildung 2 dargestellt ist.



Dieses Ergebnis legte nahe, mit den mittleren Tagestemperaturen als KWI zu operieren. Diese Festlegung ist aber ohne große Bedeutung für das weitere prototypische Vorgehen.

Für die Verteilungen \mathbb{P}^{Θ_t} des KWI werden verschobene Gamma-Verteilungen angesetzt. Sie zeichnen sich vor allem durch hohe Anpassungsgüte an sehr verschiedene Daten sowie durch analytisch geschlossene Darstellungen der Momente, die insbesondere für die notwendigen Parametrisierungen zweckmäßig sind, aus und sind somit als Prototyp prädestiniert. Die sehr unterschiedlichen Klimaeffekte auf die verschiedenen SchadenvARIABLEN sind Grund für eher vorsichtige Modellansätze. Deshalb werden nur solche (Gamma-)Verteilungen herangezogen, deren Erwartungswerte linear (mit positiver Steigung) in der Zeit sind. Konkret sei:

$$\Theta_t \sim \nu\Gamma(\alpha, \beta_t, c_t) := c_t + \Gamma(\alpha, \beta_t)$$

$$\text{mit } \alpha > 0, \beta_t := \beta_a + t \cdot \beta_b > 0, c_t := c_a + t \cdot c_b.^3$$

Anzahlen der Kumulereignisse

Während der KWI überregional und jede versicherte Gefahr übergreifend modelliert wurde, werden die schadenspezifischen Modellkomponenten für jede versicherte Gefahr und für jede Region unterschiedlich modelliert. Grob

skizziert werden die Modellanpassungen zunächst nach den versicherten Gefahren unterschieden und innerhalb dieser die regionalen Effekte durch (Marginal-) Faktoren erfasst. Schließlich werden die zeitlichen Einflüsse durch den Ansatz linearer Strukturen (insb. Erwartungswerte) geglättet. Die methodischen Vorgehensweisen ähneln sich für die verschiedenen Variablen, während die konkreten Anpassungen aufgrund verschiedener Datenbasen stark voneinander abweichen können.

Die Modellkalibrierung für die Anzahlen der (deutschlandweiten) Kumulereignisse \tilde{N}_{grt} erfordert – dem Anspruch der C-Modelle folgend – die Berücksichtigung des Einflusses der Ausprägungen des KWI. Für gegebene Realisierungen $\Theta_t = \vartheta_t$ sind somit den bedingten (Kumulanzzahl-) Verteilungen $\mathbb{P}^{\tilde{N}_{grt}|\Theta_t=\vartheta_t}$ geeignete Modellverteilungen anzupassen, deren Erwartungswerte insbesondere linear in ϑ_t sind. Hier wurden dynamische Poisson-Verteilungen angesetzt, deren Handhabung sich als praktikabel darstellte. Genauer gelte:

$$\mathbb{P}^{\tilde{N}_{grt}|\Theta_t=\vartheta_t} = \pi(\tilde{\lambda}_{gr\vartheta_t}) \text{ mit } \tilde{\lambda}_{gr\vartheta_t} := \tilde{\beta}_r^g \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g).$$

Die Faktoren $\tilde{\beta}_1^g, \dots, \tilde{\beta}_R^g$ repräsentieren die über die Zeit geglätteten Regionaleffekte. Sie sind – auch zur eindeutigen Festlegung der Verteilungsparameter – stets geeignet zu normieren. $\tilde{\lambda}_a^g, \tilde{\lambda}_b^g$ beschreiben überregional den von den Ausprägungen des KWI linear abhängigen (mittleren) Klimawandel-/Zeiteffekt. Der Fall $\tilde{\lambda}_b^g = 0$ korrespondiert damit, dass kein solcher Effekt vorliegt.

Man beachte, dass somit die bedingten Verteilungen $\mathbb{P}^{\tilde{N}_{grt}|\Theta_t=\vartheta_t}$ Poisson-Verteilungen sind – und diese sind später zu simulieren –, während sich die (volatileren) unbedingten Verteilungen $\mathbb{P}^{\tilde{N}_{grt}}$ als spezielle gemischte Poisson-Verteilungen, nämlich als Delaporte-Verteilungen, vgl. [7], S. 106 und S. 388, erweisen.

Anzahlen der Einzelschäden im Bestand

Während in dem vorherigen Abschnitt die Anzahlen der Kumulereignisse \tilde{N}_{grt} bundesweit angesetzt wurden, gilt es nun, die im Fokus stehenden Anzahlen auf einen konkreten (gegebenen) Bestand eines Versicherungsunternehmens zu beziehen. Der betrachtete Bestand wird dabei im Wesentlichen durch die gegebene Anzahl

$n_{gr} :=$ Anzahl der Risiken im Bestand bzgl. versicherter Gefahr g in Region r

beschrieben. Diese Anzahlen werden vereinfachend als unabhängig von der Zeit t angesetzt.

Die Gesamtanzahl N_{grt} der Einzelschäden für jede versicherte Gefahr g , in jeder Region r und für jedes Jahr t ergibt sich als die Summe der Anzahlen der Einzelschäden pro Kumul über alle Kumulereignisse.

N_{grt} ist also eine Zufallssumme mit den stochastischen Komponenten der Anzahl \tilde{N}_{grt} und den (für feste g, r, t) als identisch verteilt angenommenen Anzahlen $M_{grtj}, j = 1, 2, \dots, \tilde{N}_{grt}$. Für gegebene Realisierungen $\Theta_t = \vartheta_t$ werden die genannten Variablen als bedingt stochastisch unabhängig angenommen.

Da in die Anzahlen \tilde{N}_{grt} der Kumulereignisse bereits der Einfluss des KWI integriert ist, wird vereinfachend darauf verzichtet, dies auch für die Anzahlen M_{grtj} zu unterstellen. Die zugehörige Modellbildung und die potenzielle Verteilungsanalyse werden dadurch erheblich vereinfacht. Konkret wird erneut ein Poisson-Ansatz verfolgt:

$$\mathbb{P}^{M_{grtj}|\Theta_t=\vartheta_t} = \mathbb{P}^{M_{grtj}} = \pi(\lambda_{grt}^M), \quad j = 1, 2, \dots, \tilde{N}_{grt}$$

Der Parameter

$$\lambda_{grt}^M = E[M_{grtj}] = \text{erwartete Anzahl der Einzelschäden im Bestand pro Kumulereignis}$$

gibt also für jede versicherte Gefahr, jede Region und jedes Jahr die im Bestand zu erwartende Anzahl der Einzelschäden pro Kumulereignis an. Diese Anzahl bzw. dieser Parameter und damit die Verteilung ist im Modell für jedes Kumulereignis identisch, hat aber selbstverständlich die (relative) Größe des Bestands zu berücksichtigen.

Die einzelnen Anzahlen M_{grtj} spielen im Übrigen im Vergleich zu deren Summe eine eher untergeordnete Rolle, da die Einzelschadenshöhen (für feste g, r, t) als identisch verteilt angenommen werden, vgl. nachfolgenden Abschnitt. Für festes $\tilde{N}_{grt} = \tilde{n}_{grt}$ ergibt sich dann, gegeben $\Theta_t = \vartheta_t$, die Verteilung dieser Summe als Faltung und hier wiederum als Poisson-Verteilung:

$$\mathbb{P}^{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_{grt}} M_{grtj}|\Theta_t=\vartheta_t} = \mathbb{P}^{\sum_{j=1}^{\tilde{n}_{grt}} M_{grtj}} = \pi(\tilde{n}_{grt} \cdot \lambda_{grt}^M).$$

Gegeben $\Theta_t = \vartheta_t$ hat somit N_{grt} eine zusammengesetzte Poisson-Verteilung (CP-Verteilung), vgl. [7], S. 117 ff., nämlich eine solche, deren Summanden auch Poisson-verteilt sind. In Kurznotation gilt:

$$\mathbb{P}^{N_{grt}|\Theta_t=\vartheta_t} = CP(\tilde{\lambda}_{gr\vartheta_t}; \pi(\lambda_{grt}^M))$$

wobei der Einfluss des KWI $\Theta_t = \vartheta_t$ in dem Parameter

$$\tilde{\lambda}_{gr\vartheta_t} := \tilde{\beta}_r^g \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g)$$

enthalten ist, und wie oben beschrieben nicht auch zusätzlich in λ_{grt}^M . Ähnlich wie bei der (bestandsunabhängigen) Anzahl der Kumulereignisse wird der Parameter λ_{grt}^M hier faktorisiert in Regional- und Zeit- bzw. Klimaeffekte modelliert. Konkret wird der Ansatz

$$\lambda_{grt}^M := \beta_r^g \cdot (\lambda_a^g + t \cdot \lambda_b^g)$$

gewählt. Die Schätzung der Regionaleffekte $\beta_r^g, r = 1, \dots, R$, sowie der Parameter der potenziellen Klima- bzw. Zeiteffekte λ_a^g, λ_b^g wird im späteren Verlauf des Artikels genauer beschrieben.

Einzelschadenshöhen im Bestand

Für die Einzelschadenshöhen X_{grti} werden – aus analogen Gründen wie bei den Modellverteilungen für den KWI – dynamische verschobene Gamma-Verteilungen eingesetzt. Konkret wird die folgende Parametrisierung angesetzt

$$\mathbb{P}^{X_{grti} | \Theta_t = \vartheta_t} \sim \nu \Gamma(\alpha_{gr\vartheta_t}^X, \beta_{gr\vartheta_t}^X, c_{gr\vartheta_t}^X) =$$

$$c_{gr\vartheta_t}^X + \Gamma(\alpha_{gr\vartheta_t}^X, \beta_{gr\vartheta_t}^X) \text{ mit } \alpha_{gr\vartheta_t}^X, \beta_{gr\vartheta_t}^X > 0.$$

Grundsätzlich wird für jeden der drei Parameter für jede Gefahr $g = 1, \dots, G$ ein multiplikativer Ansatz verfolgt, der sich – wie bisher für alle Schadenkomponenten – aus einem Regionalfaktor und einem, den Klimawandel repräsentierenden und von ϑ_t abhängigen, KWI-Faktor zusammensetzt. Details zur Ermittlung der Parameter werden im weiteren Artikelverlauf beschrieben.

Daten

Die Grundlage der Kalibrierung der Modellansätze sind geeignete Datenbasen, also hier sowohl für die klimatologischen Variablen (den KWI) als auch die Schadenanzahlen und -höhen.

Klimatologische Daten

Für die eingeführten potenziellen Klimawandelindikatoren steht eine Fülle von z. T. sehr detaillierten Daten zur Verfügung. Die hier vorgenommenen Modellanpassungen basieren auf Daten, die auf der interaktiven Homepage des DWD generiert wurden, vgl. [8]. Konkret liegen für die sechs o. g. C-Variablen an fixierten Messstationen seit 2000 die mittleren Tageswerte pro Jahr vor. Die Wetterstationen in Hamburg, Köln, München und Berlin wurden als Repräsentanten für die Regionen N, W, S bzw. O angesehen und abschließend in arithmetische Mittel überführt. Diese Mittelung ist erforderlich, da die Anpassung des KWI an überregionale Daten vorzunehmen ist.

Schadendaten

Die Modellanpassungen basieren (mangels besserer Alternativen) auf den z. T. stark aggregierten Daten des GDV. Das Vorgehen der Modellanpassungen hat somit exemplarischen und prototypischen Charakter. Selbstverständlich werden Anwender der vorgestellten Modelle in der Regel über (unternehmens-)eigene Daten verfügen und diese als Grundlage der Kalibrierungen verwenden können.

Die Datenbasis ist durch die Serviceteile der GDV-Naturgefahrenreporte der Jahre 2021 und 2022 gegeben, vgl. [1], [2]. Diese enthalten insbesondere

- für die Jahre 2010 bis 2020 und
- für die versicherten Gefahren „Sturm/Hagel“, „Starkregen“ und „sonstige Naturgefahren (Elementar)“ und
- 12 Bundesland-Verbünde

Angaben zu

- den Schadensätzen,
- den Schadenhäufigkeiten und
- den Schadendurchschnitten.

Da die GDV-Daten stark aggregiert und unvollständig sind, ergab sich die Notwendigkeit, vor der Anwendung einschlägiger Kalibrierungsmethoden weitere Näherungen („Proxies“) zu generieren. Diese betrafen die absoluten Anzahlen der Schäden und die Anzahlen der versicherten Jahreseinheiten – unterschieden nach versicherten Gefahren, den vier Regionen N, W, S, O und den Jahren. Mithilfe vereinfachender Annahmen konnten so z. B. die in Abb. 3 dargestellten Proxies für die absoluten Schadenanzahlen der Jahre 2010 bis 2020 in der Wohngebäudeversicherung für die versicherte Gefahr Sturm/Hagel – unterschieden nach den Regionen N, W, S, O generiert werden.

Abb. 3 Absolute Schadenanzahlen (Proxies) in der WGV für Sturm/Hagel – 2010 bis 2020⁴

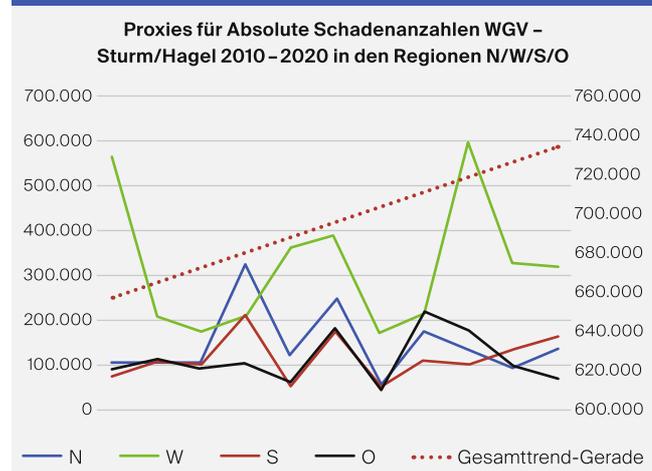
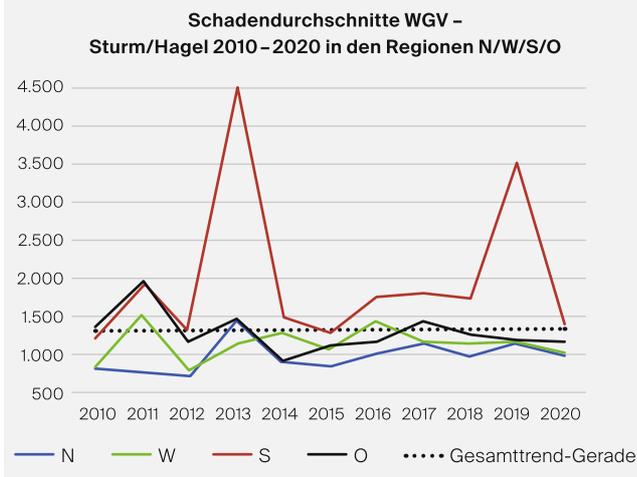


Abb. 4 Schadendurchschnitte (Proxies) in der WGV für Sturm/Hagel – 2010 bis 2020



Es ist zu erkennen, dass die Entwicklung in den einzelnen Regionen keinen klaren Trend aufweist. Der hier verfolgte Ansatz eines überregionalen Klimaeffektes (θ_t) erscheint somit angemessen, zumal dieser im Mittel den erwarteten steigenden Trend aufweist, s. die „Gesamt-trend-Gerade“ in Abb. 3.

Hinsichtlich der Einzelschadenhöhen ist erneut zu betonen, dass keine vollständigen Stichproben vorlagen. Vielmehr enthalten die GDV-Daten im Wesentlichen nur die Schadendurchschnitte – unterschieden nach versicherter Gefahr, Bundesland und Jahr. Durch Gewichtung mit den Proxies für die absoluten Schadenanzahlen wurden die folgenden (approximativen) Schadendurchschnitte in den Regionen N, W, S, O hergeleitet:

Auch hier zeigen sich in den Regionen instabile Gegebenheiten, in der Region O sogar mit fallenden Tendenzen. Der Gesamttrend ist schwach steigend.

Parameterschätzungen

Ansätze der Parameterschätzung haben hier zu berücksichtigen, dass die in der Zeit unterschiedlichen Effekte nicht durch Overfitting zu sehr an die Vergangenheitsdaten angepasst werden und somit rein zufällige zeitliche Schwankungen ausgeglichen würden. Hier wurden im Wesentlichen lineare Trends unterstellt. Diese Trends sind zu konkretisieren und zu parametrisieren.

Parameterschätzung bei dem Klimawandelindikator

Wie bereits erwähnt unterliegt der Klimawandelindikator θ_t einer mit $c_t = c_a + t \cdot c_b$ (verschobenen) Gamma-Verteilung mit der folgenden Darstellung

$$\theta_t \sim \nu\Gamma(\alpha, \beta_t, c_t) := c_t + \Gamma(\alpha, \beta_t) \text{ mit } \alpha > 0, \beta_t := \beta_a + t \cdot \beta_b > 0.$$

Es wird davon ausgegangen, dass die Translationsparameter c_a, c_b bekannt sind. Entweder sind sie im Fall der nicht verschobenen Gamma-Verteilung beide gleich 0 oder sie wären vorab geeignet zu schätzen. Eine solche Vorabschätzung könnte darin bestehen, für gegebene Datenpunkte

$$(t_i, \vartheta_i), i = 1, \dots, n$$

unter den $\frac{n(n-1)}{2}$ Geraden durch je zwei verschiedene Punkte (t_i, ϑ_i) und $(t_j, \vartheta_j), i < j$, zunächst alle Pareto-optimalen Geraden zu bestimmen, d. h. solche, die in allen n Punkten nicht über den ϑ -Werten liegen, und unter diesen dann diejenige auszuwählen, die die Summe der Vertikalabstände minimiert. Auf die Eindeutigkeit und Existenz von Lösungen bei diesem Vorgehen wird hier nicht näher eingegangen. Es ergaben sich aber für alle C-Variablen stimmige Ergebnisse, sodass unterstellt werden kann, dass im Allgemeinen geeignet parametrisierte dynamische Untergrenzen $c_t = c_a + t \cdot c_b$ vorliegen.

Für die Schätzung der verbleibenden Parameter α, β_a, β_b wird ein heuristischer Ansatz verfolgt, der als *angepasste Momentenmethode* bezeichnet wird. Standardmethoden – wie die ordinäre Momentenmethode – scheiden hier wegen der dynamischen Momente aus. Der angepasste Ansatz betrachtet an den Rändern des Betrachtungszeitraums die Erwartungswerte und zudem eine Art mittlere Varianz. Konkret gilt allgemein (und ohne Beweis) für st. unabhängige Zufallsvariablen X_1, X_2, \dots, X_n mit zeitlinearen Erwartungswerten

$$\mu_i := E[X_i] = \mu_a + t_i \cdot \mu_b, i = 1, \dots, n,$$

und deterministischen (Zeit-)Punkten t_1, t_2, \dots, t_n , dass:

$$(1) E[\bar{X}_n] = \mu_a + \bar{t}_n \cdot \mu_b \text{ mit } \bar{t}_n := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n t_i.$$

$$(2) M_{b,n} := \frac{1}{\sum_{i=1}^n (t_i - \bar{t}_n)^2} \cdot (\sum_{i=1}^n t_i \cdot X_i - n \cdot \bar{t}_n \cdot \bar{X}_n)$$

ist erwartungstreu für μ_b .

$$(3) M_{a,n} := \bar{X}_n - M_{b,n} \cdot \bar{t}_n \text{ ist erwartungstreu für } \mu_a.$$

Die Unabhängigkeit der Zufallsvariablen – für die obigen Aussagen übrigens nicht benötigt – geht in das folgende Resultat ein, welches eine erwartungstreu Schätzung der mittleren Varianz ermöglicht. Der Einfachheit halber konzentrieren wir uns hierfür auf äquidistante Punkte $t_i := t_0 + i \cdot \Delta t, i = 1, \dots, n$. Unterstellt man zusätzlich zeitlineare Varianzen:

$$\sigma_i^2 := V[X_i] = \sigma_a^2 + t_i \cdot \sigma_b^2, i = 1, \dots, n,$$

dann ist der Schätzer

$$\Sigma^2 := \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{i=1}^n (X_i - (M_{a,n} + t_i \cdot M_{b,n}))^2$$

erwartungstreu für die „mittlere Varianz“ $\bar{\sigma}_n^2 := \sigma_a^2 + \bar{t}_n \cdot \sigma_b^2$. Setzt man nun in Anlehnung an die Momentenmethode die Erwartungswerte in den Rand(zeit-)punkten sowie die mittlere Varianz gleich ihren erwartungstreuen Schätzern, so ergeben sich die folgenden expliziten (!) Lösungen bzw. Schätzer der unbekannt Parameter α, β_a, β_b :

$$\widehat{\beta}_b = \frac{(M_{b,n} - c_b) \cdot (M_{a,n} - c_a) + \bar{t}_n \cdot (M_{b,n} - c_b)^2}{\Sigma^2}$$

$$\widehat{\alpha} = \frac{\widehat{\beta}_b}{M_{b,n} - c_b},$$

$$\widehat{\beta}_a = \widehat{\alpha} \cdot (M_{a,n} + t_1 \cdot M_{b,n} - c_a) - t_1 \cdot (\widehat{\alpha} \cdot c_b + \widehat{\beta}_b).$$

Es ist allerdings zu prüfen, ob für alle t_i positive Verteilungsparameter $\widehat{\alpha}$ und $\widehat{\beta}_a + t_i \cdot \widehat{\beta}_b$ vorliegen. Anstelle dieses heuristischen Ansatzes kommt potenziell auch die Maximum-Likelihood-Methode in Frage, die allerdings wegen der erforderlichen Ableitung der Gamma-Funktion auf die numerisch unhandliche Digammafunktion, vgl. [9], S. 616, führt, weshalb die ML-Methode i. d. R. verworfen wurde.

Parameterschätzung bei der Anzahl der Kumulereignisse

Wie bereits dargestellt, werden für die bedingten Verteilungen $\mathbb{P}^{\tilde{n}_{grt} | \Theta_t = \vartheta_t}$ der Anzahlen der Kumulereignisse dynamische Poisson-Verteilungen mit Poisson-Parameter

$$\tilde{\lambda}_{gr\vartheta_t} := \tilde{\beta}_r^g \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g)$$

angesetzt. Zu schätzen sind die Regionalparameter $\tilde{\beta}_r^g, r = 1, \dots, R$, sowie die beiden den zeitlichen (Klima-)Wandel betreffenden Parameter $\tilde{\lambda}_a^g, \tilde{\lambda}_b^g$. Neben dem (iterativen) Vorgehen bei der ML-Methode wird ein heuristischer Ansatz dargestellt, der sich am Marginalsummenverfahren orientiert.

ML-Methode

Die Likelihood-Funktion für eine gegebene Stichprobe $(\vartheta_t, \tilde{n}_{grt})_{r=1, \dots, R; t=1, \dots, T}$ ist hier

$$L(\tilde{\lambda}_a^g, \tilde{\lambda}_b^g, \tilde{\beta}_1^g, \dots, \tilde{\beta}_R^g) = \prod_{t=1}^T \prod_{r=1}^R e^{-(\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g) \cdot \tilde{\beta}_r^g} \cdot \frac{((\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g) \cdot \tilde{\beta}_r^g)^{\tilde{n}_{grt}}}{\tilde{n}_{grt}!}.$$

Die Log-Likelihood-Funktion ist somit – bis auf von den Parametern unabhängigen Konstanten – gleich:

$$\begin{aligned} \ln L(\tilde{\lambda}_a^g, \tilde{\lambda}_b^g, \tilde{\beta}_1^g, \dots, \tilde{\beta}_R^g) \\ = - \left(T \cdot \tilde{\lambda}_a^g + \sum_{t=1}^T \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g \right) \cdot \sum_{r=1}^R \tilde{\beta}_r^g + \sum_{t=1}^T \sum_{r=1}^R \ln(\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g) \cdot \tilde{n}_{grt} + \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T \ln(\tilde{\beta}_r^g) \cdot \tilde{n}_{grt}. \end{aligned}$$



Fußnoten

¹ Die GDV-Daten in [1] und [2] beziehen sich auf die drei versicherten Gefahren Sturm/Hagel, Starkregen bzw. weitere Naturgefahren (Elementar). Unterschieden wird dort nach zwölf Regionen, die im Wesentlichen den Bundesländern bzw. deren Zusammenfassungen entsprechen.

² Der Actuaries Climate Index® (ACI) kombiniert die sechs Merkmale Höchst- und Mindesttemperaturen, Starkregen, Trockenheit (an aufeinanderfolgenden Tagen), Starkwind und Meeresspiegelhöhen. Er wird vierteljährlich und insbesondere für die USA und Kanada veröffentlicht und zielt auf die Beschreibung von Wetterextremen ab, vgl. [3].

³ Zu Gamma-Verteilungen und verschobenen Verteilungen s. etwa [6], S. 478, und [7], S. 347 bzw. 355

⁴ Die rechte Skala betrifft nur die Gesamtanzahlen kumuliert über alle vier Regionen. Die linke Skala bezieht sich auf die Anzahlen in den vier Regionen.

⁵ Bei Verwendung nicht identischer Volumenmaße geht noch ein Normierungsfaktor ($\neq 1$) ein.

⁶ Auf die Angabe der sehr aufwendigen Formeldarstellungen wird hier verzichtet.



Über den Autor

→ Prof. Dr. Benedikt Funke war als Aktuar im Risikomanagement eines Erstversicherers sowie als Unternehmensberater im Kontext des quantitativen Risikomanagements tätig und ist heute Professor am Institut für Versicherungswesen der TH Köln. Seine Fachgebiete sind insbesondere das aktuarielle und betriebliche Risikomanagement. Seit dem Jahr 2020 ist er Mitglied der Deutschen Aktuarvereinigung e.V. und unter anderem ehrenamtlich tätig in der Arbeitsgruppe „Klimawandel – aktuarielle Implikationen in der Schadenversicherung“.

mit $\tilde{n}_{g \bullet t} := \sum_{r=1}^R \tilde{n}_{grt}$ und $\tilde{n}_{gr \bullet} := \sum_{t=1}^T \tilde{n}_{grt}$.

Die partiellen Ableitungen liefern $R + 2$ nichtlineare Gleichungen. Normiert man die Regionalfaktoren durch $\sum_{r=1}^R \tilde{\beta}_r^g = R$, so ergibt sich nach Nullsetzen der ersten beiden partiellen Ableitungen die folgende Bestimmungsgleichung für $\tilde{\lambda}_b^g$:

$$\sum_{t=1}^T \frac{\tilde{n}_{g \bullet t}}{\tilde{n}_{g \bullet \bullet} - \tilde{\lambda}_b^g \cdot T \cdot R \cdot (\vartheta_T - \vartheta_t)} = 1,$$

wobei $\tilde{n}_{g \bullet \bullet} := \sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T \tilde{n}_{grt}$, $\bar{\vartheta}_T := \frac{1}{T} \cdot \sum_{t=1}^T \vartheta_t$. Gesucht ist eine von 0 verschiedene Lösung $\tilde{\lambda}_b^g$. Im Kontext des Klimawandels ist von $\tilde{\lambda}_b^g > 0$ auszugehen.

Lösungen konnten i. d. R. unproblematisch (etwa mit dem Bisektionsverfahren) bestimmt werden. Die verbleibenden Parameter ergeben sich dann gemäß

$$\tilde{\lambda}_a^g = \frac{\tilde{n}_{g \bullet \bullet}}{T \cdot R} - \tilde{\lambda}_b^g \cdot \bar{\vartheta}_T,$$

$$\tilde{\beta}_r^g = \frac{n_{gr \bullet}}{T \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \bar{\vartheta}_T \cdot \tilde{\lambda}_b^g)}, r = 1, \dots, R.$$

Heuristischer Ansatz: Orientierung an dem Marginalsummenverfahren

Hier wird für jede versicherte Gefahr $g = 1, \dots, G$ – losgelöst von einem Verteilungsansatz – vorab das Marginalsummenverfahren (MSV) eingesetzt, um die Einflüsse der Regionen und des KWI multiplikativ und geglättet zu quantifizieren. Es wurden identische Volumenmaße $v_{grt} = 1$ verwendet, man könnte allerdings auch die Regionen und/oder Jahre unterschiedlich gewichten. Man erhält so – neben dem gewichteten Kollektivmittel \bar{s}_g (der Anzahlen der Kumulereignisse in Jahr und Region) – normierte Marginalfaktoren $\hat{\beta}_r^g, r = 1, \dots, R$, sowie $\hat{A}_t^g, t = 1, \dots, T$, für die τ Beobachtungsjahre des KWI. Letztere korrespondieren nun mit den Ausprägungen $\vartheta_t, t = 1, \dots, T$, also nicht mit der Zeit τ selbst. Zwecks Quantifizierung des als linear unterstellten Klimaeffekts werden die Beobachtungspaare $(\vartheta_t, \hat{A}_t^g), t = 1, \dots, T$, an eine lineare Regression angepasst. Mit dem resultierenden Achsenabschnitt \hat{A}_a^g und der Steigung \hat{A}_b^g ergeben sich die folgenden Schätzer für die künftigen Anzahlen der Kumulereignisse bei Vorliegen der Realisierung $\theta_t = \vartheta_t$, nämlich:

$$\bar{s}_g \cdot (\hat{A}_a^g + \vartheta_t \cdot \hat{A}_b^g) \cdot \hat{\beta}_r^g \text{ mit Normierung}$$

$$\sum_{r=1}^R \frac{v_{gr \bullet}}{v_{g \bullet \bullet}} \cdot \hat{\beta}_r^g = 1 = \sum_{t=1}^T \frac{v_{g \bullet t}}{v_{g \bullet \bullet}} \cdot \hat{A}_t^g \cdot 5$$

Dieser verteilungsfreie Ansatz wird als Grundlage einer (auch für die Zwecke der Simulation notwendigen) konkreten Verteilungsannahme verwendet. Da wir von (bedingten) Poisson-Verteilungen ausgehen, gehen diese Schätzer in die Poisson-Parameter über:

$$\tilde{\lambda}_{grt} = \tilde{\beta}_r^g \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \vartheta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g) \stackrel{!}{=} \bar{s}_g \cdot (\hat{A}_a^g + \vartheta_t \cdot \hat{A}_b^g) \cdot \hat{\beta}_r^g,$$

$$\text{d. h. } \hat{\lambda}_a^g := \bar{s}_g \cdot \hat{A}_a^g, \hat{\lambda}_b^g := \bar{s}_g \cdot \hat{A}_b^g.$$

In der Regel wird man bei dem MSV bei der Anpassung an Schadenanzahlen – im Gegensatz zu dem Vorgehen bei Schadendurchschnitten – keine Volumenmaße benötigen bzw. identische Volumengewichte (= 1) verwenden. In diesem Fall muss für das MSV keine Iteration durchgeführt werden, da dieses dann in das einfache-

re Verfahren der sogenannten Marginaldurchschnitte, vgl. [6], S. 139 ff., übergeht.

Parameterschätzung bei der Anzahl der Einzelschäden im Bestand

Die Anzahlen der Einzelschäden N_{grt} im Bestand, gegeben $\theta_t = \vartheta_t$, unterliegen, wie bereits dargestellt, einer zusammengesetzten Poisson-Verteilung $CP(\tilde{\lambda}_{grt}; \pi(\lambda_{grt}^M))$. Während die Schätzung des Parameters $\tilde{\lambda}_{grt}$, wie im vorherigen Abschnitt beschrieben, unabhängig vom Bestand erfolgte, ist für den bestandsspezifischen Parameter

$$\lambda_{grt}^M := \beta_r^g \cdot (\lambda_a^g + t \cdot \lambda_b^g)$$

die Schätzung der Größen $\beta_1^g, \dots, \beta_R^g, \lambda_a^g, \lambda_b^g$ nötig. Dies erfolgt hier durch sehr intuitive Ansätze, die die Größe des Bestands zu berücksichtigen haben. Zunächst werden Schätzer für die Anzahlen der Risiken im Markt (= Deutschland) benötigt. Es sei

$$\hat{n}_{gr}^{\text{ges}} := (\text{Schätzer für}) \text{ Anzahl der Risiken im Markt bzgl. Gefahr } g \text{ in Region } r.$$

Diese Schätzer können etwa aus den GDV-Daten, vgl. [1] und [2], abgeleitet werden. Weiter seien:

$$\hat{n}_{gr} := (\text{Schätzer für}) \text{ Anzahl der Risiken im Bestand bzgl. Gefahr } g \text{ in Region } r.$$

Beide Schätzer werden vereinfachend als konstant in der Zeit angenommen. Durch die Verhältnisse der beiden Schätzer der Anzahlen der Risiken im Bestand im Verhältnis zum Markt ergeben sich (näherungsweise) folgende Marktanteile, die für weitere Hochrechnungen verwendet werden

$$\widehat{MA}_{gr} := \frac{\hat{n}_{gr}}{\hat{n}_{gr}^{\text{ges}}}$$

Diese Anzahlen bzw. Marktanteile haben noch keinerlei Bezug zu Schadenanzahlen. Dies erfolgt nun, indem – analog zu der Technik bei den Anzahlen der Kumulereignisse – ein am MSV orientierter Ansatz umgesetzt wird. Dazu sind im ersten Schritt Proxies für Schadenanzahlen im gesamten Markt für die R Regionen und für vergangene Jahre – z. B. aus GDV-Daten – abzuleiten. Mit dem MSV werden diesen Schadenanzahlen des Marktes Marginalfaktoren $\beta_r^g, r = 1, \dots, R$, für die (zeitunabhängigen) Regionaleffekte und zeitabhängige Marginalfaktoren $A_t^g, t = 1, \dots, T$ zugeordnet. Erstere können direkt verwendet werden; die Marginalfaktoren A_t^g werden wiederum mithilfe eines linearen Regressionsansatzes

$$A_t^g \approx \hat{A}_t^g := \lambda_a^g + t \cdot \lambda_b^g$$

geglättet. Hier ergaben sich mitunter in der Zeit fallende (!) Tendenzen, d. h. negative λ_b^g . In solchen Fällen empfiehlt es sich, auf zeitkonstante Ansätze überzugehen. In Verbindung mit den Proxies für die Marktanteile liegen somit für jede versicherte Gefahr, jede Region und jedes Jahr die folgenden Proxies für die Schadenanzahlen im Bestand vor:

$$\beta_r^g \cdot (\lambda_a^g + t \cdot \lambda_b^g) \cdot \widehat{MA}_{gr}.$$

An diesen Näherungen der Gesamtanzahl der Einzelschäden N_{grt} im Bestand wird nun die Parameterschätzung ausgerichtet. Hier gilt für den unbedingten a-priori-Erwartungswert

$$\begin{aligned} E[N_{grt}] &= E[E[N_{grt}|\theta_t]] = E[\tilde{\lambda}_{grt} \cdot \lambda_{grt}^M] \\ &= \lambda_{grt}^M \cdot E[\tilde{\beta}_r^g \cdot (\tilde{\lambda}_a^g + \theta_t \cdot \tilde{\lambda}_b^g)] = \lambda_{grt}^M \cdot E[\tilde{N}_{grt}]. \end{aligned}$$

Der noch offene Parameter λ_{grt}^M wird nun derart geschätzt, dass der (von θ_t unabhängige) a-priori-Erwartungswert mit den oben hergeleiteten Proxies übereinstimmt, d. h. man setzt

$$\hat{\lambda}_{grt}^M := \frac{\beta_r^g \cdot (\lambda_a^g + t \cdot \lambda_b^g) \cdot \widehat{MA}_{gr}}{E[\tilde{N}_{grt}]}$$

Mit den Erwartungswerten der Anzahlen der Kumulereignisse

$$E[\tilde{N}_{grt}] = \tilde{\beta}_r^g \cdot \left(\tilde{\lambda}_a^g + \tilde{\lambda}_b^g \cdot \left(c_t + \frac{\beta_t}{\alpha} \right) \right)$$

ergeben sich explizite Darstellungen für die Parameter $\hat{\lambda}_{grt}^M$. Für gegebene Realisierungen \tilde{n}_{grt} der Anzahlen der Kumulereignisse werden Realisierungen der Gesamtanzahl N_{grt} durch Simulationen der Poisson-Verteilung $\pi(\tilde{n}_{grt} \cdot \hat{\lambda}_{grt}^M)$ generiert. Im Mittel fällt die eigentliche Modellierung der Anzahlen der Kumulereignisse nicht maßgeblich ins Gewicht, da in den Poisson-Parameter der Faktor

$$\frac{\tilde{n}_{grt}}{E[\tilde{N}_{grt}]}$$

einght. Tatsächlich prägt somit die Varianz der Anzahl der Kumulereignisse diesen Modellansatz.

Parameterschätzung bei den Einzelschadenhöhen im Bestand

Die Einzelschadenhöhen im Bestand, gegeben $\theta_t = \vartheta_t$, werden als verschoben Gamma-verteilt angenommen. Die hier vorliegende Komplexität legt erneut heuristische Ansätze der Parameterschätzung nahe. Die Parameter



Über den Autor

→ Prof. Dr. Klaus J. Schröter ist Professor an der Hochschule Kaiserslautern, Campus Zweibrücken, am Fachbereich Betriebswirtschaft. Er ist Aktuar (DAV) und bei der DAV seit 2002 in der Ausbildung zur Mathematik der Schadenversicherung tätig. Klaus Schröter war auch mehrere Jahre bei deutschen Erstversichern in der Produkttechnik beschäftigt. Seine Lehr- und Forschungsschwerpunkte sind mathematische Methoden und Modelle sowie ihre Anwendungen in den Finanzdienstleistungen. Seit dem Jahr 1993 ist er Mitglied der DAV und war unter anderem ehrenamtlich tätig in der Arbeitsgruppe „Klimawandel – aktuarielle Implikationen in der Schadenversicherung“.

selbst werden dabei i. d. R. nicht linear in ϑ_t sein, wohl aber die ersten drei Momente, insbesondere die Erwartungswerte.

Vorgabe KWI-linearer Momente

Bei diesem Ansatz werden die ersten drei Momente, genauer die Erwartungswerte, die Varianzen bzw. alternativ die Standardabweichungen, und die Schiefen linear in ϑ_t vorgegeben. Konkret gelte für $g = 1, \dots, G, r = 1, \dots, R, t = 1, 2, \dots, T$:

$$E[X_{grti} | \Theta_t = \vartheta_t] =: \mu_{grt} = \beta_{gr}^\mu \cdot (\mu_a^g + \mu_b^g \cdot \vartheta_t),$$

$$V[X_{grti} | \Theta_t = \vartheta_t] =: \sigma_{grt}^2 = \beta_{gr}^{\sigma^2} \cdot (\sigma_a^{2g} + \sigma_b^{2g} \cdot \vartheta_t)$$

bzw.

$$\sqrt{V[X_{grti} | \Theta_t = \vartheta_t]} =: \sigma_{grt} = \beta_{gr}^\sigma \cdot (\sigma_a^g + \sigma_b^g \cdot \vartheta_t),$$

$$\gamma[X_{grti} | \Theta_t = \vartheta_t] =: \gamma_{grt} = \beta_{gr}^\gamma \cdot (\gamma_a^g + \gamma_b^g \cdot \vartheta_t).$$

Für jedes Moment sind also die R Regionalfaktoren sowie die Abszisse und die Steigung des linearen KWI-Effekts vorzugeben. Als besonders vorteilhaft erweist es sich hier, dass die verschobene Gamma-Verteilung für (vor-)gegebene erste drei Momente (mit positiver Schiefe) eine eindeutige explizite Parametrisierung aufweist. Konkret ergeben sich bei der Momentenmethode die folgenden nichtlinear von ϑ_t abhängigen Verteilungsparameter:

$$\hat{\beta}_{gr\vartheta_t}^X := \frac{4}{\gamma_{grt}^2} > 0,$$

$$\hat{\alpha}_{gr\vartheta_t}^X := \frac{\sqrt{\hat{\beta}_{gr\vartheta_t}^X}}{\sqrt{\sigma_{grt}^2}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{\alpha}_{gr\vartheta_t}^X := \frac{\sqrt{\hat{\beta}_{gr\vartheta_t}^X}}{\sigma_{grt}},$$

$$\hat{c}_{gr\vartheta_t}^X := \mu_{grt} - \frac{\hat{\beta}_{gr\vartheta_t}^X}{\hat{\alpha}_{gr\vartheta_t}^X}.$$

Hier zeigt sich im Übrigen, dass für den Fall, dass sowohl Varianzen bzw. Standardabweichungen als auch Schiefen als KWI-unabhängig angesetzt werden, was σ_b^{2g} (bzw. σ_b^g) = 0 = γ_b^g entspricht, lediglich der Translationsparameter $\hat{c}_{gr\vartheta_t}^X$ von ϑ_t abhängig ist.

Heuristischer Ansatz: Orientierung am Marginalsummenverfahren

Analog zu dem Vorgehen bei der Parameterschätzung bei der Anzahl der Kumulereignisse, kann auch für die Parameterschätzung der Einzelschadenshöhen das MSV eingesetzt werden, indem die Einflüsse der Regionen und des KWI – getrennt nach den ersten Momenten der Einzelschadenshöhen – multiplikativ und geglättet quantifiziert werden. Es wird unterstellt, dass als Datenbasis für jede versicherte Gefahr g , jede Region r und für gegebene Realisierungen $\vartheta_t, t = 1, \dots, T$, des KWI

- arithmetische Mittelwerte („Schadendurchschnitte“) \bar{x}_{grt} ,
- Stichprobenvarianzen s_{grt}^2 bzw. Stichprobenstandardabweichungen s_{grt} und
- Stichprobenschiefen γ_{grt}

vorliegen. Die Volumenmaße v_{grt} werden hier nicht trivial bzw. identisch gewählt. Vielmehr bieten sich hier die den Schadendaten zugrunde liegenden Stichprobenumfänge, also die Schadenanzahlen, an.

Das Vorgehen für die drei Momente ist methodisch identisch. Es wird nachfolgend exemplarisch für die Erwartungswerte dargestellt. Im ersten Schritt werden auf Basis der vorliegenden Schadendurchschnitte \bar{x}_{grt} und der Volumenmaße, nämlich der Schadenanzahlen $v_{grt} = n_{grt}$ (bzw. deren Proxies), für jede (feste) Gefahr g das MSV mit den beiden Merkmalen Region und KWI angewendet. Zunächst wird das gewichtete Kollektivmittel

$$\bar{s}_g = \frac{s_{\bullet\bullet}^g}{n_{\bullet\bullet}^g} = \frac{\sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T n_{grt} \cdot \bar{x}_{grt}}{\sum_{r=1}^R \sum_{t=1}^T n_{grt}}$$

berechnet. Das MSV generiert dann als Grenzwerte einer Iteration nicht-normierte (von ϑ_t unabhängige) Marginalfaktoren $\hat{\beta}_{gr}^{\infty\mu}$, $r = 1, \dots, R$, für die Regionen sowie nicht-normierte (von der Region r unabhängige) Marginalfaktoren $\hat{A}_{gt}^{\infty\mu}$, $t = 1, \dots, T$, für die T Beobachtungsjahre des KWI. Diese Grenzwerte werden durch den Übergang auf

$$\hat{\beta}_{gr}^{\mu} := \frac{\hat{\beta}_{gr}^{\infty\mu}}{\sum_{i=1}^R \frac{n_{gi\bullet}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{\beta}_{gi}^{\infty\mu}} \quad \text{bzw.} \quad \hat{A}_{gt}^{\mu} := \frac{\hat{A}_{gt}^{\infty\mu}}{\sum_{j=1}^T \frac{n_{g\bullet j}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{A}_{gj}^{\infty\mu}}$$

normiert. Es gilt dann $\sum_{r=1}^R \frac{n_{gr\bullet}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{\beta}_{gr}^{\mu} = 1 = \sum_{t=1}^T \frac{n_{g\bullet t}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{A}_{gt}^{\mu}$.

Diese Normierung wird in dem Normwert

$$NW_g^{\mu} := \left(\sum_{r=1}^R \frac{n_{gr\bullet}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{\beta}_{gr}^{\mu} \right) \cdot \left(\sum_{t=1}^T \frac{n_{g\bullet t}}{n_{\bullet\bullet}^g} \cdot \hat{A}_{gt}^{\mu} \right)$$

erfasst. Es gilt dann

$$\hat{\beta}_{gr}^{\infty\mu} \cdot \hat{A}_{gt}^{\infty\mu} = NW_g^{\mu} \cdot \hat{\beta}_{gr}^{\mu} \cdot \hat{A}_{gt}^{\mu}.$$

Zwecks Quantifizierung des als im Mittel linear unterstellten Klimaeffekts werden im zweiten Schritt die Beobachtungspaare

$$(\vartheta_t, \hat{A}_{gt}^{\mu}), t = 1, \dots, T,$$

an eine lineare Regression angepasst. Mit dem resultierenden Achsenabschnitt $\hat{A}_a^{\mu g}$ und der Steigung $\hat{A}_b^{\mu g}$ ergeben sich die folgenden Schätzer für die linearisierten Erwartungswerte der Einzelschadenhöhen bei Gefahr g , in Region r und bei Vorliegen der Realisierung $\theta_t = \vartheta_t$:

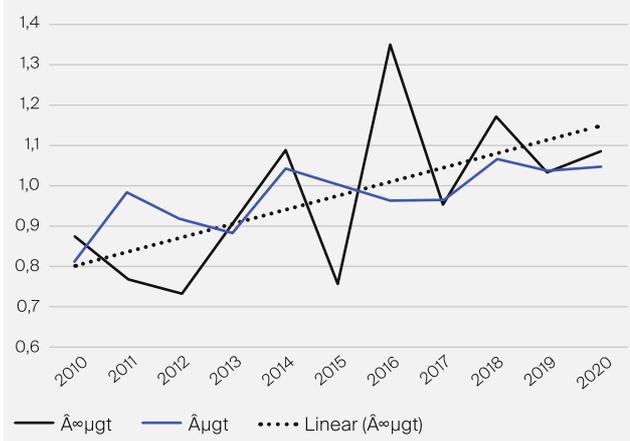
$$\bar{s}_g \cdot (\hat{A}_a^{\mu g} + \vartheta_t \cdot \hat{A}_b^{\mu g}) \cdot \hat{\beta}_{gr}^{\mu} \cdot NW_g^{\mu}.$$

Passt man die modellierten Erwartungswerte im Sinne der Momentenmethode an diese Näherungen an, so übernimmt man naheliegender Weise die normierten Marginalfaktoren $\hat{\beta}_{gr}^{\mu}$ für die Regionen und erhält weiter:

$$\hat{\mu}_a^g := \bar{s}_g \cdot \hat{A}_a^{\mu g} \cdot NW_g^{\mu}, \quad \hat{\mu}_b^g := \bar{s}_g \cdot \hat{A}_b^{\mu g} \cdot NW_g^{\mu}.$$

Die folgende Abbildung illustriert (exemplarisch für die Gefahr Starkregen) den Verlauf der geglätteten und nicht geglätteten Marginalfaktoren der KWI-Effekte. Dabei ist darauf hinzuweisen, dass diese Marginalfaktoren nicht linear in der Zeit, sondern linear in dem KWI modelliert sind. Letzterer weist aber gemäß den Modellannahmen zeitlineare Erwartungswerte auf.

Abb. 5 Marginalfaktoren der Klimawandeleffekte für Erwartungswerte der Einzelschadenhöhen, WGV für Starkregen – 2010 bis 2020



Für die Varianzen bzw. Standardabweichungen und Schiefen ist formal das gleiche Vorgehen durchzuführen. Es stellt sich aber die Frage, inwieweit Varianzen und Schiefen so „fein“ modelliert werden sollten. Man kann es sicher vertreten, zumindest KWI-unabhängige Varianzen und Schiefen anzusetzen, vielleicht sogar überregional. In den Anwendungen (Simulationen) wurde bislang vorzugsweise das MSV für die Erwartungswerte herangezogen, diese Schätzer dann für die KWI-lineare Momentenvorgabe verwendet und auch (meist konstante) Varianzen und Schiefen vorgegeben.

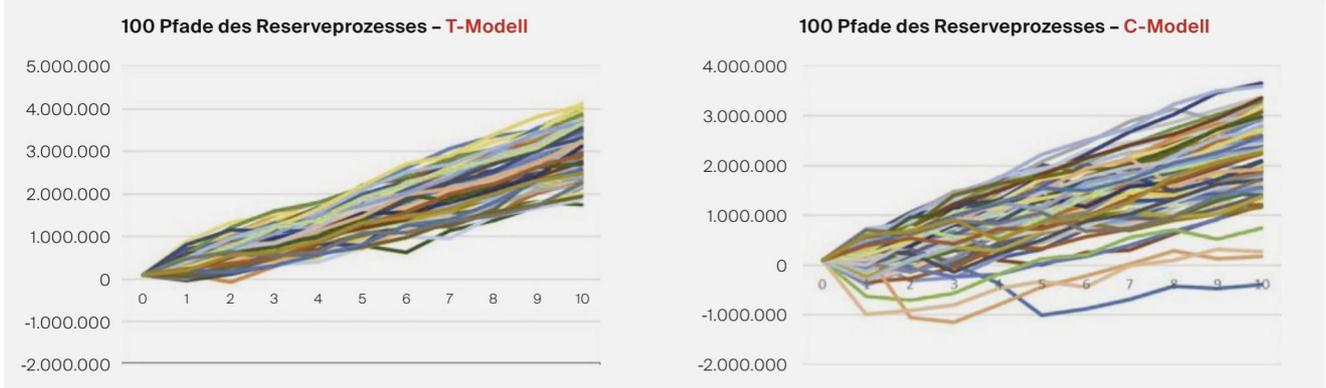
Ergebnisse

Nachfolgend werden ausgewählte Auswertungen von Simulationen sowie analytische Erkenntnisse der Modellbildung angesprochen.

Auswertung von Simulationen

Mit den dargestellten Modellbildungen können potenziell alle Zufallsvariablen weitgehend problemlos simuliert

Abb. 6 100 simulierte 10-Jahres-Verläufe der Reserven, WGV für Starkregen, Gesamtschäden für 4 Regionen



werden. Im Fokus stehen insbesondere Gesamtschadenvariablen, vornehmlich im Rahmen des Risikomanagements. Nachfolgend wird der Gesamtschaden für eine versicherte Gefahr (hier: Starkregen) betrachtet und dabei auf den Vergleich zwischen C-Modellen und T-Modellen eingegangen, also insbesondere auf die Unterschiede zwischen zufälligen Klimaeffekten (KWI θ_t) und deterministischen Effekten (T).

Ohne auf die Details der konkreten Modellkalibrierung, etwa die verwendeten Varianten der Parameterschätzungen, näher einzugehen, sind in Abbildung 6 je 100 simulierte 10-Jahres-Pfade der Reserveverläufe für ein T-Modell (links) bzw. ein C-Modell (rechts) dargestellt. Es wurden Prämien inkl. eines Sicherheitszuschlags von 15 % der Erwartungswerte sowie eine Anfangsreserve von 100.000 EUR (ca. 5 – 7 % der erwarteten Gesamtschäden) unterstellt. Das C-Modell operiert mit dem KWI der mittleren Tagestemperaturen. Hier wurden jährliche Gesamtschäden für lediglich eine versicherte Gefahr (Starkregen), aber kumuliert über die vier Regionen betrachtet.

Bei allen Vorbehalten zu der Aussagekraft einzelner Modellanwendungen ist doch festzustellen, dass erwartungsgemäß die Variabilität und damit die Verlust- und Ruingefahr in

den C-Modellen signifikant höher erscheint. Die Resultate in Tabelle 1 quantifizieren die relativen Häufigkeiten technischer Verluste (Reserve < Anfangsreserve) bzw. technischer Ruine (Reserve < 0) bei je 1000 simulierten Pfaden, unterschieden nach den beiden Modellen. Dabei wurden technische Ruine nicht als absorbierende Zustände betrachtet, konnten also durch spätere Gewinne behoben werden. Solche Ansätze entsprechen zwar nicht der klassischen Definition, bieten sich aber in der Praxis für ausgewählte Teilbestände an.

Insbesondere hinsichtlich der Bewertung der Ruingefahr ergeben sich offenbar bei Ansatz der C-Modelle drastisch höhere Häufigkeiten.

Analytische Ergebnisse

Die Herleitung analytischer Erkenntnisse erweist sich in den C-Modellen wegen der Abhängigkeit nahezu sämtlicher Zufallsvariablen von dem KWI θ_t als sehr aufwendig. Während die Erwartungswerte noch problemlos zu berechnen sind, gehen in die Varianzen der Gesamtschäden diverse Kovarianzen und die bekannte Varianzzerlegung

$$V[Y] = E[V[Y|\theta]] + V[E[Y|\theta]],$$

Tabelle 1: Relative Häufigkeiten technischer Verluste bzw. Ruine bei 1000 simulierten 10-Jahres-Verläufen der Reserven, T- vs. C-Modell

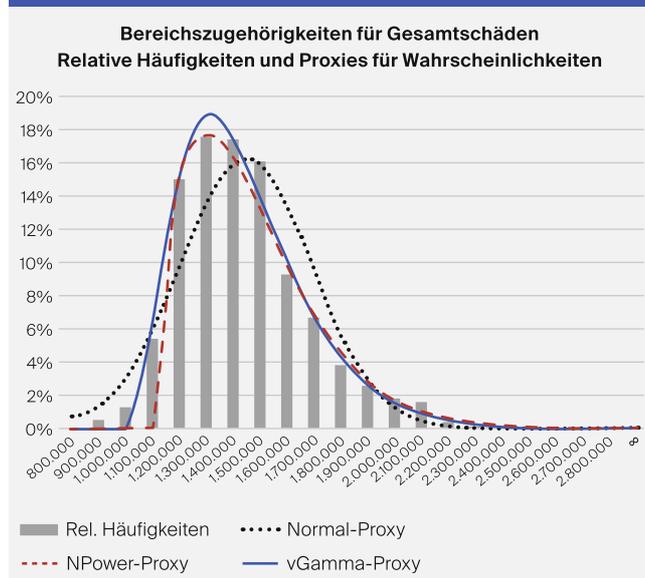
Relative Häufigkeit	Modell	Jahr 1	Jahr 2	Jahr 3	Jahr 4	Jahr 5	Jahr 6	Jahr 7	Jahr 8	Jahr 9	Jahr 10
technischer Verlust	T	3,9%	0,6%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	C	20,0%	13,7%	9,0%	6,6%	4,0%	2,9%	1,9%	0,9%	0,5%	0,3%
technischer Ruin	T	0,9%	0,1%	0,2%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%	0,0%
	C	13,1%	9,9%	7,0%	4,5%	2,9%	2,1%	1,5%	0,6%	0,2%	0,2%

vgl. [6], S. 470, ein. Für die absoluten Schiefen (= 3. zentralen Momente) gilt eine ähnliche Zerlegung, nämlich

$$\begin{aligned}\bar{m}_3[Y] &= \gamma_{\text{abs}}[Y] \\ &= E[\bar{m}_3[Y|\theta]] + \bar{m}_3[E[Y|\theta]] + 3 \cdot \text{Cov}[E[Y|\theta], V[Y|\theta]],\end{aligned}$$

was sich als Spezialfall des sogenannten *law of total cumulance*, vgl. [10], ergibt. Da sich auch die absoluten Schiefen von Summen abhängiger Zufallsvariablen neben der Summe der einzelnen Schiefen als Summe von Kovarianzen berechnen lassen, sind die ersten drei Momente der Gesamtschäden in den C-Modellen exakt und explizit berechenbar⁶. Somit können für die auftretenden Gesamtschäden auch Approximationen mit verschobenen Gamma-Verteilungen problemlos angewendet werden. Abbildung 7

Abb. 7 Dichte-Approximationen für Gesamtschäden und (simulierte) relative Häufigkeiten (WGV, Starkregen, 4 Regionen)



illustriert eine solche Approximation, auch im Vergleich zu einer Normal- und einer Normal-Power-Approximation, vgl. [6], S. 457 ff. Der Gesamtschaden bezieht sich wiederum auf nur eine Gefahr und vier Regionen.

Mit der verschobenen Gamma-Verteilung liegt offenbar ein handliches Instrument zur fundierten Bewertung der Risikogegebenheiten vor.

Fazit

Ausgehend von dem klassischen kollektiven Modell der Risikotheorie wurden Erweiterungen entwickelt, die neben der Zeit insbesondere eine den Klimawandel repräsentierende Zufallsvariable einführen. Dieser sogenannte Klimawandelindikator (KWI) beeinflusst potenziell sämtliche Schadenanzahl- und -höhenvariablen aller versicherten Gefahren

und in allen Regionen. Die Auswahl des KWI erfolgt hier rein exemplarisch. Im Rahmen der Modellkalibrierung werden intuitive Ansätze der Parameterschätzung vorgestellt. Den Abschluss bilden Ergebnisse beispielhafter Simulationen sowie ein kurzer Blick auf analytische Erkenntnisse. Es bleibt zu wünschen, dass das vorgestellte Modell auf reale, unternehmenseigene und möglichst verschiedene Daten angewandt und hinsichtlich seiner Güte überprüft wird. Entsprechende Initiativen sind hochwillkommen und werden von den Autoren bei Bedarf gerne unterstützt. ▀



Literaturverzeichnis

- [1] GDV (Hrsg.): Naturgefahrenreport 2021 – Serviceteil. 2021.
- [2] GDV (Hrsg.): Naturgefahrenreport 2022 – Serviceteil. 2022.
- [3] <https://actuariesclimateindex.org/home/>. 2023.
- [4] Kreiß, J.-P., Neuhaus, G.: Einführung in die Zeitreihenanalyse, Springer, 2006.
- [5] DWD: Climate Data Center (CDC) Portal v2.1; https://www.dwd.de/DE/Klimaumwelt/cdc/cdc_node.html. 2022.
- [6] Goelden, H.-W., Hess, K. Th., Morlock, M., Schmidt, K. D., Schröter, K. J.: Schadenversicherungsmathematik. 2. Auflage, Springer, 2024.
- [7] Heilmann, W.-R., Schröter, K.: Grundbegriffe der Risikotheorie, 2. Auflage, Verlag Versicherungswirtschaft, 2014.
- [8] DWD: Climate Data Center (CDC) Portal v2.1; https://www.dwd.de/DE/Klimaumwelt/cdc/cdc_node.html. 2022.
- [9] Klugman, St. A., Panjer, H. H., Willmot, G. E.: Loss Models – From Data to Decisions. 3. Auflage, Wiley, 2008.
- [10] Brillinger, D.: The calculation of cumulants via conditioning, *Annals of the Institute of Statistical Mathematics*, Vol. 21 (1969), pp. 215–218.