DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Fachgrundsatz der Deutschen Aktuarvereinigung e.V.

Anforderungen an einen ökonomischen Szenariengenerator

Hinweis

Köln, 27.11.2023

Präambel

Die Deutsche Aktuarvereinigung (DAV) e. V. hat entsprechend dem Verfahren zur Feststellung von Fachgrundsätzen vom 25.04.2019 den vorliegenden *Fachgrundsatz* festgestellt.[1] Fachgrundsätze zeichnen sich dadurch aus, dass sie

- aktuarielle und berufsständische Fragen behandeln,
- von grundsätzlicher und praxisrelevanter Bedeutung für Aktuare sind,
- berufsständisch durch ein Feststellungsverfahren legitimiert sind, das allen Aktuaren eine Beteiligung an der Feststellung ermöglicht, und
- ihre ordnungsgemäße Verwendung seitens der Mitglieder durch ein Disziplinarverfahren berufsständisch abgesichert ist.

Dieser Fachgrundsatz ist ein *Hinweis*. Hinweise sind Fachgrundsätze, die bei aktuariellen Erwägungen zu berücksichtigen sind, über deren Verwendung aber im Einzelfall im Rahmen der Standesregeln frei entschieden werden kann und die konkrete Einzelfragen behandeln.

Anwendungsbereich

Der vorliegende *Hinweis* enthält unverbindliche Empfehlungen zum Einsatz von Kapitalmarktmodellen in Versicherungsunternehmen. Der sachliche Anwendungsbereich dieser Ausarbeitung betrifft die Aktuare aller Versicherungssparten.[2]

Verabschiedung und Gültigkeit

Dieser Hinweis ist mit der Verabschiedung durch den Vorstand der DAV am 27.11.2023 in Kraft getreten und ersetzt den gleichnamigen, redaktionell überarbeiteten Hinweis vom 01.08.2017. Des Weiteren umfasst dieser Hinweis die Inhalte des früheren DAV-Fachgrundsatzes „Kalibrierung in inaktiven Marktsegmenten" vom 04.12.2014, der damit im vorliegenden Fachgrundsatz aufgeht.

---

[1] Der Vorstand dankt der Arbeitsgruppe „Anforderungen an einen ökonomischen Szenariengenerator" des Ausschusses Investment ausdrücklich für die geleistete Arbeit, namentlich Dr. Mario Hörig (Leitung), Mascha Fiona Baedorf, Dr. Jan-Eric Daum, Miglena Gavrilova, Markus Hannemann, Sebastian Helbig, Andreas Hogh, Dr. Daniel Hohmann, Dr. Wilfried Homann, Tobias Koch, Dr. Ingo Kraus, Michael Messow, Stefan Nagel, Stefan Nohl, Dr. Robin Pfeiffer, Norbert Quapp, Dr. Magdalena Roth, Frederik Ruez, Dr. Holger Schalk, Dr. Axel Schmidt, Dirk Strehmel und Florian Walla

[2] Dieser Fachgrundsatz ist an die Mitglieder der DAV gerichtet; seine sachgemäße Anwendung erfordert aktuarielle Fachkenntnisse. Dieser Fachgrundsatz stellt deshalb keinen Ersatz für entsprechende professionelle aktuarielle Dienstleistungen dar. Aktuarielle Entscheidungen mit Auswirkungen auf persönliche Vorsorge und Absicherung, Kapitalanlage oder geschäftliche Aktivitäten sollten ausschließlich auf Basis der Beurteilung eine(n) qualifizierte(n) Aktuar DAV/Aktuarin DAV getroffen werden.

Inhaltsverzeichnis

I. Grundlegendes

1. Ziel und Umfang des Hinweises

Es geht in diesem Fachgrundsatz darum, die in Deutschland tätigen Aktuare darauf hinzuweisen, was sie bei der Anwendung von Kapitalmarktmodellen beachten sollten.

Kapitalmarktmodelle dienen generell dazu, Kapitalmärkte bzw. dort zu findende Investments oder sich daraus abzuleitende Risikofaktoren, über den Zeitverlauf in die Zukunft zu projizieren. Grundsätzlich finden sich im aktuariellen Kontext zwei verschiedene Paradigmen und Anwendungsgebiete dieser Projektion (für genauere Definitionen verweisen wir auf die zugrundeliegenden Hauptabschnitte dieses Dokuments):

1. Realistische ("real-world") Projektion des Kapitalmarkts
2. Risikoneutrale[3] Projektion des Kapitalmarkts

Zentrale Themen für beide Anwendungsfälle, welche wir später weiter detailliert erarbeiten, sind die Fragestellungen:

- Welche mathematischen Modelle sind grundsätzlich geeignet zur Modellierung der einzelnen Kapitalmarktinstrumente und Risikofaktoren?
- Wie kann man diese Modelle kalibrieren, d.h. wie sind die Parameter der Modelle zu setzen?
- Wie sind diese Modelle bzw. sich daraus resultierende Simulationen zu validieren?

Grundsätzlich gliedert sich der vorliegende Hinweis daher wie folgt:

- Zunächst werden im Abschnitt II Metathemen der Modellierung von Kapitalmärkten diskutiert. Ziel ist es, dort übergreifende Themen der Modellierung, Kalibrierung, Daten und Validierung zu behandeln sowie für die weiteren Abschnitte relevante einleitende Fragestellungen zu behandeln. Insbesondere werden dort auch Fragestellungen zur Kalibrierung in inaktiven Marktsegmenten behandelt.
- Die Abschnitte III und IV behandeln dann separate entsprechende Modellierungs-, Kalibrierungs- und Validierungsthemen in Kontext der real-world bzw. der risikoneutralen Modellierung.

[3] oft auch "marktkonsistente" Projektion genannt

2. Allgemeine Prinzipien bei der Anwendung eines ökonomischen Szenariengenerators

In diesem Abschnitt werden inhaltliche und prozessuale Aspekte diskutiert, die als besonders wichtig beim Einsatz eines ökonomischen Szenariengenerators (auch "Economic Scenario Generator", kurz ESG) zur Kapitalmarktmodellierung betrachtet werden und daher als Prinzipien dargestellt sind. Diese Prinzipien beinhalten zunächst eher allgemeingültige Aussagen, die in den nachfolgenden Abschnitten des Hinweises konkretisiert werden.

> **Prinzip 1 (Konsistenz im Anwendungskontext)**: Die Ausgestaltung des Kapitalmarktmodells folgt den Anforderungen der Anwendung. Ähnliche Anwendungen werden mit ähnlichen Modellen realisiert.

Kapitalmarktmodelle werden für unterschiedliche Zielstellungen wie etwa der Berechnung des benötigten Solvenzkapitals, der marktkonsistenten Bewertung eines Lebensversicherungsunternehmens für Solvency II oder IFRS 17, der strategischen Unternehmens- und Bilanzplanung sowie der Einordnung verschiedener Assetallokationen benötigt. Jede dieser Anwendungen verlangt eine spezielle Ausgestaltung des Kapitalmarktmodells hinsichtlich Modellwahl, Risikofaktoren und Assetklassen sowie ihrer Kalibrierung. Für die Solvenzkapitalberechnung ist es beispielweise besonders wichtig, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der einzelnen Risikofaktoren an ihren Rändern plausibel sind, für die Bewertung eingebetteter Optionen und Garantien wiederrum, dass vorgegebene Marktpreise für relevante Optionen vom Modell mit ausreichender Genauigkeit reproduziert werden. Für die Optimierung der Assetallokation ist ein ökonomisch plausibles Risiko-Rendite-Verhältnis der Assetklassen untereinander von besonderer Bedeutung.

Das Prinzip umfasst neben den Eigenschaften des stochastischen Modells auch Aspekte wie den Zeithorizont, die Schrittweite, die Anzahl der ökonomischen Szenarien und die Auswahl der zu berücksichtigenden Risikofaktoren.

> **Prinzip 2 (Ausrichtung am Unternehmensprofil)**: Die Ausgestaltung des Kapitalmarktmodells folgt den Anforderungen des unternehmensindividuellen Portfolios.

Insbesondere die Auswahl der modellierten Risikofaktoren können nicht unabhängig vom Portfolio des Unternehmens, d.h. von den gehaltenen Kapitalanlagen und Versicherungsprodukten im Bestand, betrachtet werden.

> **Prinzip 3 (Modellverständnis)**: Das Unternehmen stellt sicher, dass es die wesentlichen Prinzipien, die dem ESG hinsichtlich Modell und Kalibrierung zu Grunde liegen, in ausreichendem Maße verstanden hat. Dies setzt eine vollständige und aktuelle technische Dokumentation voraus.

Bei der Auswahl des Kapitalmarktmodells und dessen Parametern inklusive der Kalibrierungsmethoden verschafft sich das Unternehmen ein Verständnis der ökonomischen

Zusammenhänge und der Wahlmöglichkeiten bei der Kapitalmarktmodellierung. Die Gründe für die Wahl der verwendeten Modelle werden dokumentiert.

Prinzip 4 (Transparenz): Das Unternehmen schafft Transparenz über die bei der Modellierung und Kalibrierung getroffenen Annahmen, damit Entscheidungsträger in der Lage sind, die Modellergebnisse richtig zu interpretieren.

Das Unternehmen stellt sicher, dass die Ausprägung aller modellierten Risikofaktoren, deren Wechselwirkungen und die mit dem Modell erzielten Ergebnisse, einem sachverständigen Dritten sowie den Entscheidungsträgern im Haus dargelegt werden können.

Prinzip 5 (Sparsamkeit): Das Kapitalmarktmodell ist so einfach wie möglich und nur so komplex, wie es die konkrete Anwendung und das Unternehmensprofil erfordern.

Die Komplexität des ESG sollte angemessen zur Problemstellung und zur Modellierungsgenauigkeit innerhalb eines übergeordneten Unternehmensmodells sein.

Der ESG stellt Szenarien zur Verfügung, die die Bewertung bzw. die Einschätzung des Risikos unternehmensindividueller Produkte geeignet unterstützen. Für Bewertungsfragen bedeutet dies u.a., dass eine Kalibrierung an solchen Kapitalmarktinstrumenten vorgenommen wird, die den unternehmensindividuellen Produkten möglichst ähnlich sind. Im Hinblick auf Fragen der Risikoeinschätzung (z.B. SCR-Berechnung) bedeutet dies, dass für alle wesentlichen unternehmensindividuellen Produkte bzw. Risiken geeignete Risikofaktoren durch den ESG zur Verfügung gestellt werden.

In der Praxis beschränkt oftmals eine verlässliche Verfügbarkeit, der für die Parameterschätzung benötigten, historischen Daten die Komplexität der Modellierung.

Prinzip 6 (Flexibilität / Erweiterbarkeit / Verfügbarkeit): Ein ESG ist flexibel, so dass bei Bedarf Modelle für Risikofaktoren hinzugefügt oder ausgetauscht werden können. Zudem besteht die Möglichkeit, eine Neukalibrierung des Modells und die Erzeugung neuer Szenarien jederzeit effizient vornehmen zu können.

Aus den Prinzipien 1, 2 und 5 wird deutlich, dass es nicht *das eine* Kapitalmarkmodell im Unternehmen geben wird, sondern dass in Abhängigkeit von der Anwendung verschiedene Varianten des Kapitalmarkmodells in unterschiedlichen Kalibrierungen notwendig sind. Dies stellt Anforderungen an die Flexibilität des ESG.

Prinzip 7 (Verantwortung): Die inhaltliche Verantwortung für den ESG (Modellierung, Kalibrierung, Validierung) verbleibt immer beim jeweiligen Anwender bzw. Unternehmen.

Wird der ESG oder einzelne Prozessschritte (z.B. Kalibrierung) ausgelagert, sollten Unternehmen sicherstellen, dass sie ein angemessenes Verständnis der mathematischen Modelle, auf denen der ESG basiert, und der Kalibrierung haben, insbesondere der verwendeten Methoden und Annahmen sowie seiner Unzulänglichkeiten. Weitergehend sollte ein Unternehmen stets eine qualifizierte eigene Qualitätssicherung durchführen.

Zudem verlangt dieses Prinzip eine klare Definition und Abgrenzung von Verantwortlichkeiten innerhalb eines Unternehmens in Bezug auf die einzelnen Prozessschritte im Kontext des ESG (z.B. Freigabe von Szenarien).

> **Prinzip 8 (Objektivierbare Modellierung / Zieldefinition)**: Das Unternehmen stellt objektivierbare Kriterien auf, die einer regelmäßigen Prüfung zugänglich sind und legt dar, wann es mit der Qualität des ESG einverstanden ist.

Das Prinzip erfordert zunächst, dass klar definiert wird, welche Fragestellungen mittels des ESG beantwortet werden bzw. in welchem Kontext er eingesetzt wird (z.B. risikoneutrale oder real-world Modellierung). Daraus folgen auch unterschiedliche Anforderungen an ein Modell. Bei der Modellauswahl muss sich dabei mit den zentralen Annahmen, die durch die Modellauswahl implizit getätigt werden, auseinandergesetzt werden.

Eine für alle Zwecke und Zeiträume gültige Kalibrierung wird nur selten geeignet sein.

> **Prinzip 9 (Notwendigkeit der regelmäßigen Prüfung)**: Die Annahmen und Eigenschaften des verwendeten ESG werden regelmäßig auf Gültigkeit geprüft und mit dem ökonomischen und unternehmensinternen Umfeld abgeglichen.

Es sollten regelmäßig Tests zur Überprüfung der Genauigkeit, der Stabilität und der Marktkonformität des verwendeten ESG durchgeführt werden. Die Anforderungen und die Güte eines ESG können sich im Zeitablauf ändern (z.B. die Notwendigkeit der Abbildung negativer Zinsen aufgrund des Niedrigzinsumfeldes). So werden der Modellierungsprozess, Kalibrierungsprozess und insbesondere der Validierungsprozess als wiederkehrende Prozesse implementiert. Es sei darauf hingewiesen, eine Anwendung der Modellergebnisse ohne Validierung unbedingt zu vermeiden.

> **Prinzip 10 (Stabilität)**: Der ESG liefert möglichst robuste Ergebnisse für das Unternehmensmodell.

Unternehmen sollten adäquate Verfahren eingerichtet haben, um sicherzustellen, dass ein ESG sich langfristig für die Anwendung eignet. Hintergrund dieses Prinzips ist die nachfolgende Verwendung der generierten Szenarien in einem komplexen, nicht-linearen Unternehmensmodell. Dort können Veränderungen der Szenarieneigenschaften zu sehr unterschiedlichen Ergebnissen führen, die eine Interpretation der Resultate erschweren. Daher sind die Modelle, die dem ESG zu Grunde liegen, und deren Kalibrierung so gestaltet, dass im Zeitverlauf möglichst stabile Ergebnisse erzielt werden.

Gleichwohl reagiert die Kalibrierung des ESGs hinreichend sensitiv auf Marktschwankungen.

Zudem betrifft dieses Prinzip die Stochastik des ESG selbst. Bei den Resultaten eines ESG handelt es sich um Ergebnisse eines Zufallsexperiments. Die Schwankung der Ergebnisse, die aus dem Unternehmensmodell abgeleitet werden, kann durch die Erhöhung der Pfadanzahl auf Kosten der Laufzeit reduziert werden.

II. Metathemen

3. Einleitung

Simulationen des Kapitalmarkts auf Basis von ESGs haben in der Versicherungswirtschaft im letzten Jahrzehnt deutlich an Bedeutung gewonnen. Die Hauptaufgabe eines ESG ist dabei die Erzeugung von Szenariensätzen, um die Auswirkungen möglicher Kapitalmarktentwicklungen aufzuzeigen.

Im Zuge des Modellierungsprozesses werden zunächst diejenigen Fragen beantwortet, welche Risikofaktoren und welche Assetklassen im Portfolio des Unternehmens wesentlich sind. Anschließend wird geprüft, welche stochastischen ökonomischen (Teil-) Modelle bzw. Kapitalmarktmodelle verwendet werden und ob entsprechende Szenariensätze selbst zu erzeugen oder zuzukaufen sind. Bei Eigenentwicklungen ebenso wie bei der Verwendung eines Kapitalmarktmodells bzw. von Teilmodellen eines externen Anbieters wird der Anwender folgende Fragen angemessen beantworten:

- Welche Ziele werden mit dem Einsatz von ökonomischen Szenarien verfolgt?
- Werden real-world Projektionen und/oder marktkonsistente Bewertungen durchgeführt?
- Über welchen Zeithorizont und mit welcher Periodenlänge wird modelliert?
- Welche Anzahl von Simulationen wird erzeugt?
- Welche Ökonomien werden bei der Modellierung berücksichtigt?
- Welche Indizes repräsentieren einzelne Assetklassen bzw. Risikotreiber?
- Welche Detaillierungsebene ist angemessen?
- Wie werden Ist-Positionen den Modell-Assetklassen zugeordnet?
- Welche Anforderungen ergeben sich an die Dokumentation?
- Nach welchen Prinzipien sind Teilmodelle konzipiert?
- Welche Stärken und Schwächen hat bzw. haben das Modell bzw. die Teilmodelle?
- Welche Modellierungsansätze sind für bestimmte Teilmodelle geeignet?
- Wie werden Teilmodelle miteinander verknüpft?

Die keineswegs vollständige oben angegebene Aufzählung verdeutlicht, dass die Frage nach dem richtigen Kapitalmarktmodell nicht einfach zu beantworten ist. Vielmehr ergeben sich eine Reihe von Möglichkeiten und Ansätzen zu diesem Thema, die in zahlreichen Veröffentlichungen diskutiert werden. Die folgenden Ausführungen sollen die Einarbeitung in die Thematik erleichtern und Hilfestellung dabei geben, diese Ansätze zu bewerten.

Bevor in den folgenden Kapiteln tiefer auf die Modelle für real-world und risikoneutrale Anwendungen, sowie deren Kalibrierung, Validierung und Anwendungsbereiche, eingegangen wird, sollen in diesem Kapitel übergreifende Themen betrachtet werden. Diese umfassen

- Festlegung der relevanten Assetklassen
- Datenqualität und Verfügbarkeit
- Definition der Begriffe "real-world" und "risikoneutral" sowie Diskussion deren Konsistenz
- Modellierung
- Festlegung von Kalibrierungszielen
- Kalibrierung in inaktiven Märkten
- Validierung

4. Festlegung der relevanten Assetklassen

Bei der Verwendung eines ESG ist zu prüfen, ob das verwendete Modell sämtliche wesentlichen Kapitalmarktrisiken des Unternehmensportfolios abdeckt. So ist bei einem internen Modell eine realistische Analyse der Unternehmenssituation aufgrund einer detaillierten Abbildung der Unternehmensspezifika möglich. Dies setzt u.a. voraus, dass das Kapitalmarktmodell auf die Anforderungen des Portfolios und des Unternehmensgeschäftsmodells zugeschnitten ist.

Im Kapitalmarktmodell werden den abgebildeten Assetklassen diejenigen Risikofaktoren zugeordnet, von denen ihre Wertentwicklung abhängt. Dabei sollte sichergestellt sein, dass zum einen das Modell alle Risikofaktoren umfasst, die für die Wertentwicklung der Assetklassen maßgeblich sind, und dass zum anderen alle ökonomischen Faktoren, die einen wesentlichen Einfluss auf das Unternehmen haben, durch geeignete Assetklassen abgedeckt werden.

Die Festlegung der relevanten Assetklassen sollte zum einen unter Berücksichtigung des Kapitalanlagebestands erfolgen, um sicherzustellen, dass die vorhandenen Kapitalanlagen und die aus diesen entstehenden zukünftigen Zahlungsströme mit hinreichender Genauigkeit abgebildet werden können. Lebensversicherungsunternehmen sind zum Beispiel typischerweise in Renten, Beteiligungen, Aktien und Immobilien investiert[4], wobei sich diese Anlageklassen wiederum in eine Vielzahl von Unterklassen auffächern, deren Spezifika bei der Auswahl der für die Modellierung relevanten Assetklassen zu berücksichtigen sind.

Zum anderen hängt die Festlegung der relevanten Assetklassen auch von den Versicherungsverbindlichkeiten ab. In der traditionellen Altersvorsorge haben die Wechselwirkungen zwischen Verbindlichkeiten und Kapitalmarkt (etwa in Form der Überschussbeteiligung) und der aus ihnen resultierende Wert der Optionen und Garantien wesentlichen Einfluss auf die Bewertung und die Risikoeinschätzung des Unternehmens. Die Abbildung von „alternativen Garantien" oder von fondsgebundenen Versicherungen

---

[4] siehe z.B. http://www.gdv.de/zahlen-fakten/lebensversicherung/kapitalanlagen/#struktur-der-kapitalanlagen-der-lebensversicherer

(und deren Garantien) ist je nach ihrer Bedeutung für Bestand oder Neugeschäft ebenfalls bei der Auswahl der Assetklassen zu berücksichtigen.

Außerdem ist zu beachten, dass nicht nur der aktuelle Bestand die Auswahl determiniert, sondern auch die vorgesehenen Anwendungen des Modells. Für die Durchführung von ALM-Analysen und die Risikobewertung neuer Kapitalanlageinstrumente sind möglicherweise zusätzliche Assetklassen im Kapitalmarktmodell erforderlich.

Nicht zuletzt sollte die Festlegung der für die Modellierung relevanten Assetklassen die Verfügbarkeit von Referenzdaten für die Kalibrierung des Modells (siehe Abschnitt 5) und den zu erwartenden finanziellen und personellen Aufwand für die Umsetzung und den Betrieb des Modells berücksichtigen.

Werden vom Unternehmen mehrere Szenariengeneratoren für die unterschiedlichen Anwendungsfelder verwendet, dann können die jeweils relevanten Assetklassen voneinander abweichen. In diesem Fall ist auf Konsistenz zwischen den Modellen zu achten (siehe Abschnitt 6.3).

4.1. Zusammenfassung von Assetklassen

Ähnliche Wertpapiere können bei der Modellierung zusammengefasst werden. „Ähnlich" ist hier in dem Sinne zu verstehen, dass die Rendite-/Risiko-Charakteristika vergleichbar sind bzw. die Wertpapiere von vergleichbaren ökonomischen Faktoren beeinflusst werden.

Ob die Zusammenfassung von Kapitalanlagen zu einer modellierten Assetklasse zweckmäßig ist, hängt u.a. davon ab, welche Anwendungsziele mit dem Kapitalmarktmodell verfolgt werden. Für eine risikoneutrale Bewertung (vgl. Abschnitt 6.1) des Bestands kann eine geringere Granularität der Abbildung ausreichend sein als für Risikountersuchungen.

Im Folgenden werden für die grundlegenden Assetklassen Aspekte einer möglichen Zusammenfassung diskutiert.

4.2. Renten

Unter den Oberbegriff „Renten" fallen unter anderem Staats- und Länderanleihen, Unternehmensanleihen, Hypotheken, Geldmarktanlagen, Darlehen und Pfandbriefe, sowie komplexere Produkte wie kündbare Anleihen.

Im einfachsten Fall werden alle Rentenpapiere in der Assetklasse „risikoloses Zinspapier" zusammengefasst und die jeweiligen Besonderheiten damit im Modell ausgeblendet. Es findet lediglich eine Korrektur der Nominalwerte und/oder der Kuponzahlungen statt, um eine Übereinstimmung von tatsächlichen und modellierten Marktwerten der Papiere sicherzustellen.

Ein Vorteil dieser Vereinfachung besteht im Verzicht auf die Modellierung von Risikofaktoren, deren für die Kalibrierung erforderliche Marktdaten unter Umständen mit deutlich höheren Unsicherheiten behaftet sind als die Marktdaten für den „risikolosen

Zins“, d.h. für Swaps und Swaptions (siehe Abschnitt 5). Ebenso entfällt die Notwendigkeit, Abhängigkeiten für eine höhere Anzahl von Risikofaktoren zu modellieren. Des Weiteren sinkt mit der Komplexität des Kapitalanlagemodells auch der Aufwand für seine Entwicklung und seinen Betrieb.

Der Nachteil dieser Vereinfachung liegt vor allem darin, dass sie die Bandbreite möglicher Wertschwankungen auf die Bewegungen der risikolosen Zinsen einschränkt. Die Auswirkungen der ausgeblendeten Risiken müssen, soweit möglich, durch vorsichtige Annahmen bei der Modellierung vorweggenommen werden – zum Beispiel, indem bei kündbaren Anleihen und Hypotheken die Laufzeit auf den für das Unternehmen ungünstigsten Zeitpunkt festgesetzt wird. Solche Vorwegnahmen können jedoch häufig nicht alle möglichen Fälle erfassen, weshalb die Gefahr einer Unterschätzung der Wertschwankungen verbleibt.

Während diese Vereinfachung für eine risikoneutrale Bewertung (vgl. Abschnitt 6.1) der Verbindlichkeiten möglicherweise angemessen ist, dürfte sie im Rahmen einer ALM- oder Risikoanalyse zu ungenauen und damit für die Kapitalanlage- oder Risikosteuerung nur eingeschränkt verwendbaren Ergebnissen führen.

Die Vor- und Nachteile lassen sich am Beispiel von stochastischen Credit Spreads illustrieren:

Reale Zinspapiere sind niemals risikofrei, sondern immer mit einem v.a. vom Emittenten abhängigen Ausfallrisiko behaftet, das sich im Marktpreis des Zinspapiers (bzw. in den vereinbarten Kuponzahlungen) als Differenz zur risikolosen Verzinsung ausdrückt, dem Credit Spread. Dieser kann im Zeitablauf deutlichen, gewissermaßen „zufälligen“ Schwankungen unterliegen.

Bei einer expliziten Modellierung von stochastischen Credit Spreads sind u.a. folgende Aspekte zu berücksichtigen:

- Erforderliche Granularität der Abbildung nach Ratingklassen und Finanzsektoren (z.B. Financials, Corporates, Sovereigns) – diese kann wieder je nach Anwendung unterschiedlich sein;
- Verfügbarkeit von Marktdaten zu Spreadentwicklungen und Migrationen über die gesamte zu betrachtende Projektionsdauer;
- Auswahl der Modelle und der Abhängigkeitsstrukturen (untereinander und zum risikolosen Zins).

Außerdem müssen die Bewertungs- und Prognosemodelle, welche auf die mit dem Kapitalmarktmodell erzeugten, ökonomischen Szenarien aufsetzen, die zusätzlichen Informationen sachgerecht verarbeiten können (zum Beispiel in Form entsprechend angepassten Managementregeln zur Wiederanlage).

Die Ersteinführung stochastischer Credit Spreads ist daher erfahrungsgemäß ein zeitaufwändiger Prozess[5].

4.3. Aktien / Immobilien / Beteiligungen

Die Modellierung von Realwerten (Aktien, Immobilien, Beteiligungen) erfolgt häufig durch die Zuordnung auf einen oder mehrere Indizes. Im einfachsten Fall werden alle aktienähnlichen Kapitalanlagen einem einzigen Index zugeordnet.

Die Vor- und Nachteile einer stark vereinfachten Abbildung sind ähnlich wie im Fall der Renten, wobei die Verlässlichkeit von verfügbaren Marktdaten im Falle von Aktien auch bei einer höheren Granularität der gewählten Indices noch gewährleistet ist.

Neben der Auswahl der zu modellierenden Indizes ist außerdem zu entscheiden, ob die Wertentwicklung und der Dividendenprozess als getrennte Risikofaktoren modelliert werden oder eine „Total Return" Modellierung gewählt wird.

4.4. Weitere Assetklassen

Weitere bei Bedarf in Betracht zu ziehende Assetklassen sind zum Beispiel:

- Inflation bzw. Realzinsen: Die Höhe der künftigen Leistungen oder der zu berücksichtigenden Kosten kann von der Inflationsentwicklung abhängen und dadurch einen wesentlichen Einfluss auf die Bewertung oder die Risikoeinschätzung haben, oder der Kapitalanlagebestand umfasst inflationssensitive Wertpapiere (z.B. Inflation Linked Bonds).
- Fremdwährungen: Wenn ein wesentlicher Teil der Kapitalanlagen gegen Wechselkursrisiken exponiert ist, kann die Modellierung weiterer Währungen erforderlich sein.
- Optionen und Derivate: Für die Kalibrierung von Zins- und Aktienmodellen im Rahmen einer risikoneutralen Bewertung werden die aktuellen Marktpreise relevanter Zins- oder Aktienoptionen benötigt (siehe nachfolgende Abschnitte zur Kalibrierung). Für Risikobetrachtungen können daher Modelle zur Veränderung von Optionspreisen bzw. impliziten Volatilitäten erforderlich sein.
- Alternative Assets: In den vergangenen Jahren nahmen in der Kapitalanlage von Versicherungsunternehmen „alternative Anlagen" wie zum Beispiel Infrastrukturfinanzierungen deutlich zu. Hier ist fallweise zu überprüfen, ob diese Anlagen durch ein Mapping auf bestehende Assetklassen angemessen abgebildet werden können, oder ob Besonderheiten in ihrem Auszahlungsprofil eine separate Modellierung erfordern.

[5] Einen Praxisbericht über die Komplexität und die erzielbaren Vorteile einer Modellierung stochastischer Credit Spreads findet man z.B. im Artikel „Ein integrierter Ansatz zur Modellierung von Kreditrisiken im internen Modell einer Lebensversicherung", Aktuar 04.2015, S. 188 ff.

5. Datenqualität und Verfügbarkeit

Für die Datenqualität und Verfügbarkeit der Daten sind die folgenden Prinzipien (vgl. Abschnitt 2) relevant:

- P2 (Ausrichtung am Unternehmensprofil)
- P4 (Transparenz)
- P10 (Stabilität)

Für die Kalibrierung der im ESG verwendeten Modelle werden verschiedene Kapitalmarktdaten benötigt. Die Datenqualität und die Verfügbarkeit dieser Daten spielen eine zentrale Rolle.

Um die statistischen Kalibrierungsmethoden korrekt und sinnvoll umsetzen zu können, sollte bei der Wahl von Benchmark-Indizes für das Assetportfolio neben den unternehmensspezifischen Charakteristika auch auf die Güte der am Markt verfügbaren Indizes geachtet werden. Je verbreiteter der jeweilige Index ist, desto mehr Datenpunkte sind typischerweise bei historischen Zeitreihen verfügbar. Darüber hinaus lassen sich Optionen häufig nur für eine geringe Anzahl weit verbreiteter Indizes finden. Dies ist besonders bei einer Kalibrierung unter dem risikoneutralen Wahrscheinlichkeitsmaß von Bedeutung.

Allgemein muss bei den genutzten Kapitalmarktdaten sichergestellt werden, dass die Regelmäßigkeit der Veröffentlichung neuer Daten hinreichend hoch und kontinuierlich ist. Für marktkonsistente Bewertungen ist es aufgrund der Stichtagsbezogenheit der Kalibrierungen wichtig, dass sich auch die aktuellen Kapitalmarktentwicklungen in den Datenreihen widerspiegeln und nicht durch stark nachgelagerte Publikation der Daten außenvorgelassen werden. Dies gilt ebenfalls für real-world Modelle in dem Sinne, dass die Ausgangsbasis für die Prognose aktuelle Kapitalmarktsituationen widerspiegeln können muss.

Bei der Auswahl der Daten ist deren Transparenz und Nachvollziehbarkeit ebenfalls zu gewährleisten. Es muss darauf geachtet werden, dass die genutzten Daten stets abrufbar sind und keine Manipulationen, wie nachträgliche Anpassungen einzelner Datenpunkte, vorgenommen werden. Je bekannter die gewählten Benchmarks sind, desto unwahrscheinlicher ist das Auftreten solcher Probleme.

Zusätzlich ist die Frage nach der Länge und der Frequenz der für die Kalibrierung des Modells zu verwendenden Zeitreihen bedeutsam. Die Anforderungen an die Länge der Zeitreihe ergeben sich einerseits aus dem Risiko-/Prognosehorizont. Wenn die Modellierung auf einen mittel- bis langfristigen Horizont erfolgen soll, ist eine lange Historie von Vorteil. Gleichzeitig ist bei langen Historien die Frage zu beantworten, ob die abgebildeten Märkte und Zeiträume repräsentativ für die aktuelle Situation und den Risikohorizont sind. Hier ergibt sich ein klassischer „Trade-Off". Grundsätzlich bietet eine lange Historie eine bessere Basis für die Verteilungsschätzung und gewährleistet, dass sie auch Veränderungen in konjunkturellen Auf- und Abschwungphasen widerspiegelt. Es ist dabei jedoch in Abhängigkeit des Assetklasse zu prüfen, ob Trends aus der aktuellen Marktphase oder Strukturbrüche einen besonderen Einfluss haben.

Die Frequenz der Zeitreihe ergibt sich meistens aus der Datenverfügbarkeit und der Liquidität der Märkte. Während etwa Börsendaten zu liquiden Papieren täglich zur Verfügung stehen, werden Marktdaten zu weniger liquiden Positionen eher auf monatlicher Basis oder im Fall von Immobilien sogar mit jährlicher Frequenz geliefert. Da sich die statistischen Eigenschaften einer Zeitreihe mit der Betrachtungsfrequenz teilweise deutlich unterscheidet, sollte die Projektionsfrequenz bei der Festlegung der Analysefrequenz ebenfalls in Betracht gezogen werden. Für die unterschiedlichen Risikofaktoren bzw. sogar für die Herleitung unterschiedlicher Parameter (Mittelwerte, Volatilitäten, …) können sich Länge und Frequenz der zugrundeliegenden Zeitreihen auch unterscheiden.

Ist für einen zu modellierenden Risikofaktor keine oder nur eine sehr kurze Zeitreihe vorhanden, sind alternative Modellierungen zu prüfen. So kann etwa die Historie des fehlenden Risikofaktors aus bestehenden Zeitreihen ähnlicher Risikofaktoren durch Regressions- oder Faktoransätze konstruiert werden. Alternativ kann ein Mapping auf einen vorhandenen Risikofaktor erfolgen. Eine unvollständige Historie eines Risikofaktors kann auf ähnliche Weise auf Basis der Historie eines anderen Risikofaktors sinnvoll ergänzt werden. Von Vorteil ist es hierbei, wenn vergleichbare bzw. eng verwandte Risikofaktoren vorliegen, so dass Extrapolationsverfahren zum Einsatz kommen können. Wenn etwa für die Ratings BBB und BB Rendite- bzw. Credit-Spread-Kurven vorliegen, so kann für das Rating B daraus zum Beispiel mit Hilfe aktueller Marktdaten eine Extrapolation vorgenommen werden. Ähnliches gilt, wenn Risikofaktoren für kurze und mittlere Laufzeiten vorliegen, aber für lange Laufzeiten fehlen oder eine geringe Qualität aufweisen. Die Ergebnisse der Extrapolationen sind dabei sorgfältig zu validieren, da diese sehr stark vom gewählten Verfahren abhängen können.

Generell ist jede vorliegende Zeitreihe auf deren Qualität zu überprüfen. Weist die Zeitreihe Ausreißer auf, welche sehr wahrscheinlich auf Datenfehler oder Illiquidität zurückzuführen sind, können diese vor der Weiterverarbeitung entfernt oder geglättet werden. Fehlende Datenpunkte werden typischerweise durch Interpolation zwischen zwei benachbarten Datenpunkten ergänzt. Ergänzend kann auch die Entwicklung anderer Risikofaktoren zum entsprechenden Zeitpunkt als Information mit in die Interpolation einfließen.

Des Weiteren können historische Zeitreihen von Marktdaten starke Autokorrelation aufweisen. Diese ergeben sich v.a. bei den Daten weniger liquider Positionen, bei denen Preise oder Kurse von Marktteilnehmern „gestellt" werden, ohne dass ein wirklicher Handel in diesen Positionen stattfindet. Ebenfalls ist dies bei Investments der Fall, deren Renditen sich auf Basis von Bewertungen und nicht Transaktionen bilden, beispielsweise Immobilien, Private Equity oder Wind- und Solarparks. Eine Prüfung der Marktdaten auf Liquidität kann – falls verfügbar – das Handelsvolumen berücksichtigen. Bei einer zu geringen Zahl an Datenpunkten ist die Bestimmung statistischer Kennzahlen wie der Volatilität oder der Korrelation mit anderen Indizes nur mit Abstrichen umsetzbar. Ob eine erkennbare Autokorrelation in den Daten (zu testen z.B. über Durbin-Watson-Test) zu bereinigen ist, hängt vom jeweiligen Risikofaktor ab und ist separat zu überprüfen. Alternativ können bspw. Zeitreihenmodelle zur expliziten Modellierung vorhandener Autokorrelationen ihren Einsatz finden.

Schließlich empfiehlt sich zur Analyse und Plausibilisierung, die Datenhistorien mit verschiedenen Werkzeugen grafisch zu veranschaulichen. Dies kann sowohl bei der Erkennung von Ausreißern als auch bei der Identifizierung von möglichen Strukturbrüchen helfen. Offensichtlich führten in der Vergangenheit schockartige Ereignisse (Lehman-Krise, europäische Staatsschuldenkrise) in vielen Märkten zu einer starken Veränderung der Marktsituation. Als Beispiele für Strukturbrüche können folgende, historische Ereignisse dienen:

- Andere Zusammensetzung des verwendeten Benchmark-Index, z.B. Aufnahme der Covestro AG an Stelle der ProSiebenSat.1 Media SE in den DAX
- Wechsel des Datenproviders
- Technische Veränderungen der Datenanlieferung: Als Beispiel hierfür kann der Umgang mit Swaption-Volatilitäten im Zuge der Finanzkrise dienen. Die Zinsen sanken massiv, was aufgrund der Berechnungsweise von Swaption-Volatilitäten aus Preisen mittels eines Black Scholes Modells (unter Annahme lognormalverteilter Zinsen) zu stark steigenden Volatilitäten geführt hat. Betrachtet man jedoch im Vergleich Normal- oder Basepoint-Volatilitäten die mittels eines Bachelier-Modells (unter Annahme normalverteilter Zinsen) berechnet wurden, so relativierte sich die Volatilitätserhöhung wieder.

Bei der Einschätzung der aktuellen und möglichen künftigen Marktsituationen ist dabei bewusst zu entscheiden, ob die Zeit vor dem Strukturbruch, das Ereignis selbst und die Zeit danach zur Modellierung der Risiken einbezogen werden sollten.

In jedem Fall sind die Identifikation und der Umgang mit Ausreißern, Datenlücken, fehlenden Historien und Strukturbrüchen durch das Unternehmen bewusst zu entscheiden und zu dokumentieren. Eine wichtige Basis dieser Entscheidungen bilden Experteneinschätzungen der Situation und der Mechanismen der jeweiligen Märkte. Auch zur Vervollständigung einer unvollständigen oder Anpassung einer illiquiden Datengrundlage können Expertenschätzungen eine wichtige Rolle spielen. Dies gilt insbesondere für die oben genannten Risikofaktoren, die auf Bewertungen und nicht auf Transaktionen basieren.

Letztlich sollte beim Bezug der Kapitalmarktdaten darauf geachtet werden, dass die Charakteristika der Daten vollends bekannt sind. D.h. es muss sichergestellt werden, um welche Art von Daten es sich jeweils handelt. Dies ist für die korrekte Umsetzung der anschließenden Kalibrierung essenziell. Typische Beispiele solcher Unklarheiten sind:

- Stetige vs. diskrete Darstellung von Zinsen
- Spot Rates (monatliche Zinskurve der EIOPA) vs. Par Yields (Umlaufsrenditen der Bundesbank) bei der Darstellung von Zinsen
- Performanceindex (DAX) vs. Kursindex (EUROSTOXX50) bei Sachtitelindizes

- Passen die Optionen und die daraus gewonnenen impliziten Volatilitäten zu den modellierenden Sachtitelindizes (EUROSTOXX50 ist ein Kursindex, somit beziehen sich Optionen in der Regel auch auf den Kursindex. In der Modellierung werden allerdings i.d.R. Performanceindices modelliert.)
- Risikofreie Basis der Spreadkurven (Swapkurve oder Staatsanleihen)
- Was wird alles in Spreadkurve repräsentiert: Kreditausfallrisiko, Illiquiditätsrisiko, Option-Adjustments, usw.

6. Definition und Konsistenz „risikoneutral" vs. „real-world"

In diesem Abschnitt sollen die bereits mehrfach verwendeten Begriffe „risikoneutral" vs. "real-world" erläutert und gegenübergestellt werden. Darüber hinaus werden der Zusammenhang zwischen risikoneutraler und real-world Modellierung erläutert und grundlegende Konsistenzanforderungen abgeleitet.

Entscheidend für die Wahl der Modellierung ist der Einsatzzweck:

- Bewertung von (bedingten) Zahlungsströmen aus einem Kapitalanlageportfolio oder einem Versicherungsbestand auf Basis einer vorgegebenen Marktsituation ⇒ risikoneutrale Bewertung;
- Prognose von möglichen künftigen Marktsituationen für Risikoabschätzungen und die Unternehmenssteuerung ⇒ real-world Simulation

6.1. Marktkonsistenz und risikoneutrale Modellierung

6.1.1. Grundlegende Begriffserklärung

Als Marktkonsistenz bezeichnet man die Eigenschaft des ESG bzw. des zugrundeliegenden Kapitalmarktmodells, für handelbare Kapitalanlageinstrumente Marktpreise (oder unter gewissen Umständen, implizite Volatilitäten von am Markt gehandelten Optionen) zu reproduzieren. Die Marktkonsistenz stellt bei Bewertungen gemäß den MCEV-Prinzipien (siehe [3.], [46.]) oder gemäß Solvency II (siehe [2.], [30.]) eine zentrale Anforderung dar. Die Berechnung erfolgt dabei also unter Berücksichtigung der von den Finanzmärkten bereitgestellten Informationen und hat mit diesen konsistent zu sein.

Risikoneutrale bzw. marktkonsistente Szenariensätze werden ausschließlich zu Bewertungszwecken genutzt. Deshalb bilden bei der Modellkalibrierung die Arbitragefreiheit und die möglichst exakte Replikation von Marktpreisen der für die Kalibrierung ausgewählten Optionen die Zielgröße. Die resultierenden Verteilungen der Zinsen, Spreads und Renditen von Assetklassen reflektieren die in den Assets enthaltenen Optionalitäten (vgl. (5.2) und (5.3)). Es ist allerdings im risikoneutralen Kontext nicht sinnvoll, aus Verteilungsquantilen und Tail-Eigenschaften Risikomaße herzuleiten. Insbesondere sind Quantile, Value at Risk (VaR) und Tail Value at Risk (TVaR) im risikoneutralen Kontext keine sinnvoll zu betrachtenden Größen.

Aus diesen Gründen ist es unter risikoneutralen Anwendungen auch nicht erforderlich, eine allzu aufwendige Modellierung der Tail-Eigenschaften der generierten Zufallsgrößen zu betreiben. In der Modellierung der Wertentwicklung von Aktien kann je nach Aufgabe die Modellierung als geometrische Brownsche Bewegung ausreichend sein. Hält allerdings beispielsweise ein Lebensversicherungsunternehmen einen großen Bestand an Hybridversicherungen, so kann es zur angemessenen Abbildung der Schichtungsrisiken durchaus erforderlich sein, die Wertentwicklung der Fonds in den Rändern der Verteilung aufwendiger zu modellieren.

Die Bedeutung der Marktkonsistenz für die Festlegung der Kalibrierungsziele wird in Abschnitt 8.2 genauer ausgeführt.

6.1.2. Arbitragefreiheit und Risikoneutralität

Unter „Arbitrage" versteht man in der Finanzmathematik die Möglichkeit, ohne den Einsatz von Kapital durch eine geeignet gewählte Handelsstrategie (d.h. einem Algorithmus zum Kauf und Verkauf unterschiedlicher Finanzinstrumente) mit positiver Wahrscheinlichkeit einen Gewinn zu erzielen, ohne das Risiko eines möglichen Verlusts zu tragen.

Ein Kapitalmarktmodell ist arbitragefrei, wenn es keine solchen Handelsstrategien zulässt.

Eine andere Formulierung von Arbitragefreiheit in vollständigen Märkten lautet, dass zwei Anlageportfolien, die in allen möglichen Fällen zu denselben Zahlungsströmen führen, denselben Preis haben müssen („Law of one price").

Unter dieser Voraussetzung kann nach dem „Fundamentalsatz der Bewertungstheorie" die Bewertung von Kapitalanlagen und Portfolien[6] unter dem sog. „risikoneutralen Maß" erfolgen, d.h. in einem Bewertungsansatz, der die Risikopräferenz oder Risikoaversion der Anleger außer Acht lässt.

Der Wechsel vom „realen" auf das äquivalente risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaß bedeutet, dass alle betrachteten Assets – Anleihen, Aktien, Immobilien etc. – für jeden Betrachtungszeitraum $[t,T]$ im Erwartungswert denselben Ertrag abwerfen, nämlich den vorgegebenen risikofreien Zinssatz $r_{t,T}$. Das bedeutet, dass in einem risikoneutralen Modellansatz das mit einer Anlage in Aktien oder ausfallgefährdete Anleihen verbundene Risiko nur in dem Maße durch einen höheren mittleren Ertrag honoriert wird, wie es zur Kompensation des Verlustrisikos im Vergleich zum risikolosen Zins erforderlich ist.

Die Bedeutung des risikoneutralen Bewertungsansatzes für die praktische Anwendung liegt vor allem darin, dass er es ermöglicht, für die Diskontierung aller künftigen Zahlungen aus einem Portfolio immer den risikolosen Zins zu verwenden, unabhängig von den Risiken der darin enthaltenen Instrumente. Unter dem „realen Maß" hinge der für

---

[6] Auch die Verbindlichkeiten aus einem Versicherungsbestand sind in diesem Sinne „Portfolien"

die Preisbestimmung zu verwendende Diskontierungsfaktor (auch Deflator genannt) vom Risiko des Assets ab, wäre also für jede Anlageklasse separat zu ermitteln.

„Risikoneutralität“ ist eine Eigenschaft der Wahrscheinlichkeitsverteilung für die von einem ESG erzeugten Szenarien, nicht eine Eigenschaft der individuellen Szenarien selbst. D.h. in den einzelnen Szenarien kann die Wertentwicklung der Assetklassen deutlich vom jeweiligen risikolosen Zins abweichen.

Ob ein Szenariensatz bzw. die zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsverteilung diese Eigenschaft erfüllt, wird durch entsprechende Tests geprüft (siehe Abschnitt 18).

6.1.3. Risikoneutrale Bewertung von versicherungstechnischen Verpflichtungen

Die zentrale Anwendung des risikoneutralen Ansatzes im Kontext von Versicherungsunternehmen ist die Bewertung aller Zahlungsströmen (Cashflows), die bei der Abwicklung eines Versicherungsbestands auftreten. Dazu gehören die Prämien- und Leistungszahlungen aus Versicherungsverträgen einschließlich künftiger Überschussbeteiligung sowie alle mit der Abwicklung verbundenen weiteren Zahlungen wie Regulierungs- und Betriebskosten, Steuern, Dividenden usw. Da die Höhe dieser Cashflows von künftigen Kapitalmarktentwicklungen abhängen können, muss der ESG einen hinreichend reichhaltigen Satz an Kapitalmarktszenarien zur Verfügung stellen[7].

Eine versicherungstechnische Bilanzposition wird bewertet, indem man szenarienweise deren Cashflows unter den risikoneutralen ESG-Szenarien ermittelt, nachgelagert davon den Barwert berechnet und anschließend die resultierenden Barwerte über alle Szenarien mittelt. Die bei der Barwertberechnung zu benutzenden pfadabhängigen Diskontierungsfaktoren werden aus dem jeweiligen Zinsmodell abgeleitet und sind Teil des Szenariensatzes.

Die Bewertung erfolgt auf der Basis einer vorgegebenen Marktsituation. Diese kann dem tatsächlichen Kapitalmarkt zum Bewertungsstichtag entsprechen oder eine hypothetische Marktsituation darstellen (z.B. ein Zinsstress oder ein real-world Szenario).

Die oben definierten Eigenschaften „Risikoneutralität / Arbitragefreiheit“ und „Marktkonsistenz“ sind für die Bewertung von Versicherungsbeständen unverzichtbar.

6.2. Real-world Modellierung

Bei der real-world Modellierung besteht die Aufgabe darin, Szenarien für die Verteilung zukünftiger Kapitalmarktsituationen bereitzustellen. Das Ziel ist die realistische Reflektion der möglichen Entwicklungen von relevanten Marktrisikofaktoren über einen für die Anwendung relevanten Zeitraum. Dieser kann dabei von einem Jahr (Bestimmung von Solvenzkapital unter Solvency II) bis hin zu mehreren Jahrzehnten (ALM) reichen.

---

[7] Für die Projektion der Zahlungsströme entlang der Szenarien wird ein stochastisches Unternehmensmodell wie zum Beispiel das Branchensimulationsmodell (BSM) verwendet.

Was dabei als "realistisch" anzusehen ist, hängt vom Kontext der Anwendung ab. "Realistisch" kann u.a. folgende Bedeutungen haben:

- Möglichst so wie in der Vergangenheit bereits aufgetreten;
- Optimistischer oder pessimistischer als in der Vergangenheit erlebt;
- Strukturell anders als in der Vergangenheit erlebt.

Dabei beziehen sich diese Anforderungen etwa auf Fragen nach Extremereignisse, Volatilitäten oder langfristige Mittelwerte.

Eine fundamentale Eigenschaft von real-world Modellen besteht darin, dass Assets unter real-world Verteilung eine Risikoprämie verdienen:

- Dies ist ein Aufschlag auf den „risikolosen" Return, welcher im Mittel verdient werden muss.
- Die Risikoprämie motiviert sich als Aufschlag welchen Investoren als Kompensation für das Risiko, welches aus der im Vergleich zur „risikolosen" Anlage höheren Volatilität resultiert, fordern.

Ferner müssen die Szenarien in ihrer Gesamtheit realistisch sein, d.h. z.B. Situationen wie bei risikoneutralen Szenarien, wo man unrealistisch hohe oder niedrige Zinsen erleben kann, sind zu vermeiden.

Durch eine *Neubewertung* von Kapitalanlagen und/oder Verbindlichkeiten auf Basis der prognostizierten Kapitalmarktsituationen werden danach Risikoeinschätzungen und andere Steuerungsinformationen für das Unternehmen abgeleitet. Hierfür können je nach Anwendungszweck verschiedene Ausschnitte oder Quantile der Verteilung betrachtet werden.

Im Gegensatz zur risikoneutralen Modellierung besteht die Aufgabe eines real-world Modells daher nicht darin, mit Hilfe der erzeugten real-world Szenarien eine Reproduktion von Marktpreisen zum Stichtag zu ermöglichen.

Auch die Forderung nach „Arbitragefreiheit" ist für die real-world Modellierung ohne Belang.

6.3. Konsistenz von risikoneutraler und real-world Modellierung

Sowohl die risikoneutralen als auch die real-world Modelle erzeugen künftige Kapitalmarktsituationen, die als Punkte in einem Wahrscheinlichkeitsraum angesehen werden können. Finanzmathematisch betrachtet besteht der wesentliche Unterschied zwischen „risikoneutral" und „real-world" im Wahrscheinlichkeitsmaß, mit dem dieser Raum ausgestattet wird (siehe oben).

In der Praxis können sich die relevanten Kapitalmarktmerkmale und Assetklassen für die risikoneutrale Bewertung bzw. für die real-world Prognose jedoch erheblich unterscheiden, und damit auch die jeweils verwendeten Modellansätze (siehe Abschnitt 3.1 zu möglichen Unterschieden in den relevanten Assets). Die den unterschiedlichen Modellen zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen sind dann nicht mehr vollständig „äquivalent" im finanzmathematischen Sinn.[8]

Diese Unterschiede sind in der Regel gewollt und resultieren aus den unterschiedlichen Anforderungen der Anwendung der jeweiligen risikoneutralen bzw. real-world Szenarien. Ein zentraler Unterschied zwischen risikoneutralen und real-world Szenarien besteht aus der Tatsache, dass erstgenannten über eine arbitragefreie Projektion der zugrundeliegenden Assets verfügen während letztgenannte u.a. eine Risikoprämie für Assets vorsehen.

Neben Unterschieden in der Modellierung, gibt es ebenfalls Unterschiede in der Kalibrierung von risikoneutralen und real-world Modellen: Die Kalibrierung von real-world Modellen basiert üblicherweise auf historischen Zeitreihen der zu modellierenden Risikofaktoren, während risikoneutrale Modelle in der Regel gegen Kapitalmarktdaten (Marktpreise oder implizite Volatilitäten) zu einem bestimmten Stichtag kalibriert werden.

Die beiden Modelle müssen aber ein Mindestmaß an Konsistenz aufweisen, um im Zusammenspiel anwendbare Ergebnisse produzieren zu können.

- Die Verbindung zwischen real-world und risikoneutraler Modellierung entsteht durch die Neubewertung von Kapitalanlagen und Verbindlichkeiten in den prognostizierten Risikoszenarien. Die Neubewertung der Verbindlichkeiten kann in der Form erfolgen, dass die in einem real-world Szenario prognostizierte Marktsituation als Basis für die Erzeugung eines neuen risikoneutralen Szenariensatzes dient, mit dem eine vollständige Wiederbewertung der passivseitigen Cashflows durch ein stochastisches Unternehmensmodell erfolgt. Daraus lassen sich folgende Konsistenzanforderungen ableiten: Der Ausgangspunkt für die Prognose von künftigen Marktsituationen muss mit der für die Bewertung maßgeblichen, aktuellen Marktsituation im Einklang stehen.
- Die im real-world Modell prognostizierten Größen müssen in die für eine Neubewertung erforderlichen Marktinformationen umgewandelt werden können.

  Sieht das real-world Zinsmodell beispielsweise negative Zinsen bis zu einer gewissen Untergrenze vor, dann muss das darauf aufsetzende risikoneutrale Zinsmodell in der Lage sein, Zinsszenarien zu erzeugen, die um diese Untergrenze herum verteilt sind. Die Zinsuntergrenze des risikoneutralen Modells muss also unter derjenigen des real-world Modells liegen[9].

---

[8] Es gibt ESGs, die sich sowohl im „real-world" als auch im „risikoneutralen" Modus betreiben lassen, d.h. in diesem Fall unterscheiden sich die Modellansätze nicht.

[9] Normale Zinsmodelle wie das Hull-White Modell haben keine vorgegebene Untergrenze

Wenn das real-world Modell andere Assetklassen / Risikofaktoren betrachtet als das risikoneutrale Modell – zum Beispiel, wenn im real-world Modell anstelle der EIOPA-Zinskurve eine andere Ausgangszinskurve angesetzt wird – müssen diese Unterschiede bei der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden.

(Anmerkung: Die Wiederbewertung der Verbindlichkeiten in der oben beschriebenen Form für eine große Zahl an real-world Szenarien („Nested Monte Carlo") führt häufig an technische Grenzen. Daher kommen in der Regel approximative Wiederbewertungsverfahren zum Einsatz[10], bei denen geschlossene Bewertungsformeln verwendet werden können. Dadurch entfällt die Erzeugung risikoneutraler Szenariensätze. Die genannten Konsistenzanforderungen bleiben jedoch auch in diesem Fall prinzipiell gültig.

Risikoneutrale ESGs, vgl. Kapitel IV, basieren in der Regel auf (einem System von) stochastischen Differentialgleichen. Risikoneutrale Szenarien dienen jedoch ausschließlich zur Bewertung von Finanzinstrumenten unter Gewährleistung von Risikoneutralität und Marktkonsistenz und spiegeln damit aktuelle Marktpreise wider. Derartige Modelle bzw. deren zugrundeliegende Differentialgleichungen/Verteilungsannahmen lassen sich durch einen geeigneten „Maßwechsel" in Modelle überführen, deren resultierende Szenarien im Gegensatz zur Risikoneutralität eine gewünschte, mittlere Risikoprämie für risikobehaftete Finanzinstrumente realisieren und damit eher den Charakter eines real-world Szenarios aufweisen. In der Theorie kann ein derartiger Maßwechsel mit Hilfe des Satzes von Girsanov durchgeführt werden. In der Praxis kann dieser Ansatz je nach Einsatzzweck der real-world Szenarien jedoch schnell an die Grenzen der Angemessenheit stoßen. Beispielsweise werden real-world Szenarien für verschiedene Einsatzzwecke ggfs. unterschiedlich parametrisiert. Kapitalmarktszenarien im Rahmen einer strategischen Asset Allokation legen den Fokus verstärkt auf eine plausible mittlere Entwicklung von Renditen sowie deren Schwankungen. Im Gegensatz dazu können Szenarien für eine Risiko/SCR-Berechnung auch unter Berücksichtigung historischer Extremereignisse (Lehmann Krise, europäische Staatenkrise) parametrisiert worden sein, um auch solche adäquat abbilden zu können. Auch eine Abbildung angemessener, historisch beobachteter Korrelationen zwischen den Entwicklungen von Finanzinstrumenten unterschiedlicher Assetklassen kann bei der Verwendung risikoneutraler Modelle aufgrund fehlender Freiheitsgrade problematisch werden. Ein Maßwechsel von risikoneutralen Szenarien in ein real-world Maß führt daher in der Praxis zumeist nicht zur Tauglichkeit für den gewünschten Einsatzzweck und ist eher als theoretisches Konstrukt zu sehen.

[10] Siehe etwa DAV-Hinweis „Proxy-Modelle für die Risikokapitalberechnung" vom 08.07.2015

7. Modellierung

7.1. Zielgrößen und Parametrisierung

Vor der Wahl eines Kapitalmarkmodells ist die genaue Parametrisierung des jeweiligen Risikofaktors sowie die zu modellierende Zielgröße zur Beschreibung der entsprechenden Risikofaktorbewegungen festzulegen. Der Begriff Parametrisierung bezieht sich hierbei auf die genaue Wahl der Beschreibung eines Risikofaktors. So stehen für den Risikofaktor Zins beispielsweise eine Vielzahl an möglichen Parametrisierungen zur Verfügung, denn eine Zinskurve lässt sich u.a. durch die entsprechenden Spot Rates, die Forward Rates oder auch durch die implizierten Zero-Coupon-Bond Preise beschreiben. Aktienkurse lassen sich etwa durch den entsprechenden Total Return Index oder auch durch die eingebettete Risikoprämie (als Aufschlag auf den risikofreien Zins) parametrisieren. Die unterschiedlichen Parametrisierungen in diesem Beispiel lassen sich zwar ineinander überführen, die entsprechenden Zeitreihen an historischen Beobachtungen können jedoch unterschiedlichste Eigenschaften aufweisen und eignen sich daher gegebenenfalls besser oder schlechter zur Modellierung des Risikofaktors.

Weiter ist man in der Regel nicht an der Modellierung eines Risikofaktors selbst, sondern an dessen Veränderung im Laufe einer bestimmten Periode interessiert. Die zu modellierende Zielgröße ist in dem Fall die (Ein-Perioden-) Veränderung des Risikofaktors, wobei wiederum selbst der Begriff der Veränderung nicht eindeutig definiert ist. Gängige Ansätze zur Beschreibung von Risikofaktorveränderungen lassen sich in absolute und relative Änderungen klassifizieren, wie nachfolgend dargestellt.

7.1.1. Absolute Veränderungen

Es werden die absoluten Zuwächse

$$\Delta = rf(1) - rf(0)$$

eines Risikofaktors zwischen den Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$ modelliert. Für die Simulation des Risikofaktors zu $t = 1$ bei gegebenen Startwert $rf(0)$ ergibt sich damit $rf(1) = rf(0) + \Delta$.

Eigenschaften:

- Die simulierten absoluten Veränderungen Δ hängen nicht vom Level der Beobachtung $rf(0)$ ab.
- Bei kleinem Startwert $rf(0)$ führt diese Methode damit zu eher großen impliziten relativen Veränderungen.
- Auch bei positivem Startwert $rf(0)$ kann die simulierte Risikofaktorausprägung $rf(1)$ negativ werden.
- Wird die absolute Veränderung Δ mit Hilfe einer symmetrischen Verteilung modelliert, folgt auch $rf(1)$ einer symmetrischen Verteilung.

7.1.2. *Relative Veränderungen*

Returns

Es werden die relativen Zuwächse

$$\Delta_{rel} = \frac{rf(1)}{rf(0)} - 1$$

modelliert. Damit ergibt sich $rf(1) = rf(0) \cdot (1 + \Delta_{rel})$.

Eigenschaften:

- Die Simulation von relativen Veränderungen ermöglicht eine Level-abhängige Modellierung von Risikofaktorbewegungen: Bei kleinen Beobachtungen $rf(0)$ ergibt sich bei der Simulation eine tendenziell eher kleinere absolute Veränderung, die sich proportional zu $rf(0)$ verhält.
- Bei positivem Startwert $rf(0)$ bleiben auch die simulierten Risikofaktoren $rf(1)$ positiv.

Displaced Returns:

Für ein $\delta > 0$ betrachtet man die relativen Veränderungen der verschobenen Risikofaktoren, d.h.

$$\Delta_{rel,\delta} = \frac{rf(1) + \delta}{rf(0) + \delta} - 1\,.$$

Für die Simulation ergibt sich damit $rf(1) = (rf(0) + \delta) \cdot \left(1 + \Delta_{rel,\delta}\right) - \delta$.

Eigenschaften:

- Displaced Returns führen wie bei Returns zu einer Modellierung von Level-abhängigen absoluten Risikofaktorbewegungen.
- Im Unterschied zu reinen Returns können die simulierten Risikofaktoren $rf(1)$ jedoch negative Werte bis hin zur unteren Schranke $-\delta$ annehmen.
- Die Verwendung von displaced Returns wirkt der Instabilität von Returns bei sehr kleinen Risikofaktorbeobachtungen entgegen.
- Displaced Returns können als Mischung zwischen Returns und absoluten Zuwächsen interpretiert werden: Für $\delta = 0$ erhält man reine Returns, für $\delta \to \infty$ verhalten sich displaced Returns (relativ zu δ) wie absolute Veränderungen, d.h. der Einfluss des aktuellen Levels $rf(0)$ auf die Höhe der absoluten Risikofaktorbewegung verschwindet:

$$\lim_{\delta\to\infty} \delta \cdot \Delta_{rel,\delta} = \lim_{\delta\to\infty} \frac{rf(1) - rf(0)}{1 + \frac{rf(0)}{\delta}} = \Delta$$

Log-Returns:

Zielgröße ist die absolute Veränderung der logarithmierten Risikofaktoren,

$$\Delta_{log} = \log\big(rf(1)\big) - \log\big(rf(0)\big)\,,$$

was eine relative Risikofaktorveränderung der Form $rf(1) = rf(0) \cdot e^{\Delta_{log}}$ impliziert.

Eigenschaften:

- Die meisten Eigenschaften von Returns übertragen sich direkt auf Log-Returns.
- Werden Log-Returns mit Hilfe einer symmetrischen Verteilung modelliert, folgen die simulierten Risikofaktoren $rf(1)$ einer rechtsschiefen Verteilung.
- Die Verwendung von Log-Returns eignet sich daher besonders für nicht-negative Risikofaktoren, bei denen man zusätzlich davon ausgeht, dass möglicher Ausreißer nach oben auftreten können.

Displaced Log-Returns

Analog werden die Log-Returns der verschobenen Risikofaktoren

$$\Delta_{log,\delta} = \log(rf(1) + \delta) - \log(rf(0) + \delta)$$

betrachtet. Man erhält damit $rf(1) = (rf(0) + \delta) \cdot e^{\Delta_{log,\delta}} - \delta$.

Eigenschaften:

- Die meisten Eigenschaften von displaced Returns übertragen sich direkt auf displaced Log-Returns.
- Wie auch displaced Returns können displaced Log-Returns als eine Mischung zwischen Log-Returns und absoluten Veränderungen interpretiert werden: Für $\delta = 0$ erhält man reine Log-Returns, für $\delta \to \infty$ verhalten sich displaced Log-Returns (relativ zu δ) wie absolute Veränderungen:

$$\lim_{\delta\to\infty} \delta \cdot \Delta_{log,\delta} = \lim_{\delta\to\infty} \log\left(\left(1 + \frac{\Delta}{rf(0) + \delta}\right)^{\delta}\right) = \Delta$$

7.2. Periodenlänge, Zeithorizont der Modellierung und Anzahl der zu simulierenden Szenarien

7.2.1. Periodenlänge der Modellierung

Grundsätzlich gilt, dass eine kürzere Periodenlänge die Modellierungsgenauigkeit erhöht, sofern entsprechende Daten verfügbar sind.

Diese Eigenschaft lässt sich sicherlich auch das folgende stochastisches Bewertungsmodell übertragen, in welchem z.B. monatliche Allokationsregeln ein verbessertes Portfolio- und Risikomanagement ermöglichen können. Dieser Effekt muss nicht für alle Anwendungsbereiche eines Kapitalmarktmodells in jedem Fall von Bedeutung sein.

Ein einzelner Simulationslauf unterscheidet sich im Ergebnis, je nachdem, ob mit monatlichen oder jährlichen ESG-Daten gearbeitet wird. Je nach verwendetem Modell kann es notwendig sein, im ESG kürzere Diskretisierungsschritte als die Zeitschritte zu wählen, die bei der Auswertung im Zielmodell später tatsächlich verwendet werden, um Verwerfungen aufgrund von Diskretisierungsfehlern zu vermeiden. Dies bedeutet dann einen höheren Rechenaufwand pro simulierten Pfad und muss daher gegen das Gesamtrechenbudget abgewogen werden. Mehr Informationen zu Diskretisierungsverfahren wie z.B. dem Euler-Schema sind zu finden in [21.].

7.2.2. Zeithorizont der Modellierung

Der notwendige Zeithorizont hängt von der Aufgabenstellung bzw. der Anwendung ab. Konkreter lässt sich Folgendes sagen:

- Für marktkonsistente bzw. risikoneutrale Bewertungen ist theoretisch der Modellierungshorizont so lang zu wählen, wie sich die versicherungstechnischen Verpflichtungen belaufen. In der Schaden- und Unfallversicherung kann dies einige wenige Jahre sein, allerdings kann dieser Zeitraum im Krankenversicherungsbereich sogar 100 Jahre überschreiten. Ein langer Projektionszeitraum birgt vermehrt Unsicherheiten bzgl. der langfristigen Entwicklung der betrachteten Risikofaktoren, da hier aufgrund mangelnder Datenverfügbarkeit auf Annahmen und Expertenschätzungen zurückgegriffen werden muss.
  Daher bleibt dem Anwender die Verantwortung der Prüfung überlassen, ob die versicherungstechnischen Verpflichtungen durch einen verkürzten Zeitraum adäquat abgebildet werden können (siehe auch [30.]).
- Bei Projektionen für die interne Planung werden u.a. die strategische Ausrichtung auf Risiken überprüft und Handlungsalternativen aufgezeigt. Dies erfordert einen Modellierungshorizont, der 3 bis 5 Jahre für eine mittelfristige Planung aber auch bis zu 20 Jahre für eine langfristige Planung betragen kann.
- ALM-Projektionen (z.B. die Projektion der Überschussbeteiligung, HGB-Größen oder anderer Cashflows) zielen eher auf die gesamte Verteilung der betrachteten Größen ab und gehen über einen Mehrjahreshorizont.
- Für die Ermittlung der erforderlichen Höhe der gesetzlichen Kapitalanforderung im Sinne von Solvency II wird ein 1-Jahreshorizont betrachtet.
- Für den ORSA-Bericht im Solvency II Kontext ist es erforderlich, die gesetzlichen Kapitalanforderungen und die zu ihrer Bedeckung zur Verfügung stehenden Eigenmittel in die Zukunft zu projizieren. Der Zeithorizont umfasst dabei einen mehrjährigen Zeitraum, der mindestens dem geschäftlichen Planungszeitraum entspricht. Es wird davon ausgegangen, dass dies in der Regel drei bis fünf Jahre sind (siehe auch [31.])

Zusätzlich ist zu beachten, dass der modellierte Zeithorizont auch Auswirkungen auf die Auswahl von Modellen haben kann. Werden z.B. lognormale Zinsmodelle wie z.B. das LIBOR Market Modell (LMM) verwendet, gibt es eine Tendenz zu Zinspfade, in denen sich im Verlaufe der Projektion sehr hohe Zinsen realisieren.

7.2.3. Anzahl der zu simulierenden Szenarien

Auch die Anzahl der zu simulierenden Szenarien hängt von der Anwendung ab:

Bei der risikoneutralen Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen kommen üblicherweise 1‘000-5‘000 Szenarien zum Einsatz, in real-world Auswertungen je nach Kontext bis zu 1‘000‘000. Die Anzahl hängt stark von der Anwendung (für Anwendungen, wo extreme, aber seltene Tailereignisse eine Rolle spielen – etwa der Risikomessung unter Berücksichtigung von Naturkatastrophen – werden mehr Szenarien erfordert als bei klassischen ALM-Anwendungen) und der akzeptablen Rechendauer ab.

Generell ist es wünschenswert in einer Monte Carlo Simulation, eine möglichst hohe Zahl von Szenarien zu simulieren, um einen möglichst genauen Schätzer zu erhalten. Laufzeitgründe beschränken jedoch das technisch Machbare. Daher hängt die genaue Anzahl an Szenarien stark von der Anwendung ab, von der betrachteten Statistik und von der geforderten Stabilität der Ergebnisse.

Der Vorteil der Monte Carlo Methode ist die Konvergenzrate der Ordnung $O(n^{-\frac{1}{2}})$. Insbesondere gilt diese Konvergenzrate auch für höherdimensionale Probleme, d.h. sie ist unabhängig von der Dimension des Problems und nur durch die Stichprobengröße bestimmt.

Um die Effizienz der Monte Carlo Simulation bei unveränderter Anzahl an Szenarien zu erhöhen, können Verfahren zur Varianzreduktion eingesetzt werden. Diese basieren hauptsächlich auf zwei Strategien, die Anpassung bzw. Korrektur der simulierten Outputs einerseits, bzw. die Reduktion der Variabilität in den Simulationsinputs andererseits. Beispiele sind Verfahren wie antithetische Ziehungen, Control-Variate-Ansätze, Stratified Sampling oder Importance Sampling (vgl. [4.], [5.]).

Bei der internen oder externen Berichterstattung ist es wichtig, die Unsicherheit in der Schätzung („Monte-Carlo-Fehler“) zu kommunizieren. Dadurch wird einerseits die Unsicherheit in den Ergebnissen offengelegt und es werden mögliche Fehlinterpretationen vermieden. Andererseits können insbesondere Ergebnisschwankungen im zeitlichen Ablauf, die auf die Schwankung des Schätzergebnisses zurückzuführen sind, plausibel vermittelt werden. Dies gilt unabhängig vom gewählten Schätzverfahren. Insbesondere die Bildung eines Konfidenzintervalls ist hierfür ein geeignetes Mittel (vgl. [7.]).

***8.* Festlegung von Kalibrierungszielen**

Das vorliegende Kapital widmet sich grundlegenden Fragen und Themen der Kalibrierung, zuerst allgemein und dann kurz im risikoneutralen/marktkonsistenten und dann real-world Kontext. Genauere Details zu den Kalibrierungen in den beiden Anwendungsfällen finden sich in Kapiteln 13 und 17.

8.1. Allgemeines

Unter der Kalibrierung eines Modells versteht man die Schätzung der Modellparameter für eine spezifische Anwendung. Grundsätzlich kann man sagen, dass die Kalibrierung (je nach Modell und Anwendung) auf Basis von historischen oder aktuellen Marktdaten (etwa Marktpreise oder implizite Volatilitäten) und/oder Expertenschätzungen erfolgen kann.

Dabei kann unterschieden werden, ob

a. die Kalibrierung ausschließlich der aktuellen, stichtagsbezogenen, wirtschaftlichen Situation und Kapitalmarktlage widerspiegeln sollte und sich die Kalibrierung damit auch bei kurzfristigen Schwankungen ändern sollte (sogenannte Point-in-Time-Ansätze), oder

b. ob die Kalibrierung sich nur bei fundamentalen Änderungen der Kapitalmärkte ändern soll und kurzfristige Schwankungen und konjunkturelle Zyklen keine Auswirkungen haben sollen (sogenannte Through-the-Cycle-Ansätze).

Es können für eine Kalibrierung sowohl ausschließlich Stichtagswerte als auch geglättete Daten verwendet werden. Die Beantwortung der Frage, ob die Kalibrierung auf Basis von Stichtagswerten oder auf Basis geglätteter Daten erfolgen sollte, hängt von der Zielsetzung und den regulatorischen Vorgaben ab.

Im Kontext der marktkonsistenten Bewertung ist vor allem die Anpassung der Modelle an Kapitalmarktdaten zu einem Stichtag gefordert (Point-in-Time). Im Kontext von Risikokapitalmodellen und Unternehmensprojektionen stehen vor allem die Parameterschätzung zur Abbildung von statistischen Eigenschaften der Assetklassen (wie Immobilien und Aktien) und Risikofaktoren (wie Zinsen und Wechselkursen) im Vordergrund. Dabei sind oft Through-the-Cycle-Ansätze zielführend.

Für die Festlegung des Kalibrierungsansatzes geben die folgenden Prinzipien (vgl. Abschnitt 2) grundsätzliche Hinweise:

- Prinzip 1 (Konsistenz im Anwendungskontext)
- Prinzip 4 (Transparenz)
- Prinzip 10 (Stabilität)

Für Bewertungsfragen im Solvency II Kontext sind vor allem zusätzlich folgende Quellen relevant:

- Solvency-II-Richtlinie 2009/138/EG – insbesondere Art. 75 und 76 [2.]
- Delegierten Verordnung (EU) 2015/35 (DVO).
- EIOPA-Leitlinien zur Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen (EIOPA-BoS-14/166) – insbesondere Leitlinien 55 - 60, 66 [30.]
- Versicherungsaufsichtsgesetz §§ 74 – 88 [25.]

- BaFin-Auslegungsentscheidung „Anforderungen an Kapitalmarktmodelle für die Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen unter Solvency II“ vom 11.11.2016.

8.2. Marktkonsistente Kalibrierung

Wie unter 6 bereits erwähnt, stellt die Marktkonsistenz bei Bewertungen gemäß den MCEV-Prinzipien ([3.]) oder gemäß Solvency II ([2.], [30.]) eine zentrale Anforderung dar. Auf einer Modellebene entspricht dies u.a. der Anforderung, dass die Marktpreise von gehandelten Assets zum Zeitpunkt t=0 korrekt wiedergegeben werden.

In der Praxis bedeutet dies, dass das kalibrierte Kapitalmarktmodelle die Preise (oder im Fall von Optionen, implizite Volatilitäten) einiger repräsentativer Assets wie Bonds, Aktien, Optionen usw. innerhalb eines vorgegebenen kleinen Toleranzbereichs replizieren muss. Die Auswahl der relevanten Assetklassen (siehe auch Abschnitt 4) und die Festlegung der Genauigkeit, mit der ihre Preise repliziert werden müssen, richtet sich nach ihrem Einfluss auf die Bewertung. Eine exakte Bewertung sämtlicher gehandelter Assets innerhalb eines Modells mit endlich vielen Parametern ist hingegen weder erforderlich noch technisch möglich. Grundsätzlich bedeutet damit Marktkonsistenz eine Kalibrierung auf Basis einer Stichtagsbewertung.

Darüber hinaus werden bei einer marktkonsistenten Bewertung entsprechende Preise für Finanzinstrumente, die am Kapitalmarkt nicht ohne weiteres beobachtet werden können (beispielsweise liegen für lange Laufzeiten kaum verlässliche Marktwerte für entsprechende Swapsätze oder Volatilitäten vor), im Modell möglichst konsistent zu ähnlichen Finanzinstrumenten erzeugt.

8.3. Real-world Kalibrierungen

Real-world Kapitalmarktmodelle erfordern die Spezifikation der stochastischen Prozesse, die den Risikofaktoren zugrunde liegen. So ist es beispielsweise eine marktübliche Herangehensweise, sowohl Aktien- als auch Immobilienindizes mittels der Geometrischen Brownschen Bewegung zu modellieren. Die Kalibrierung stellt in diesem Fall die Schätzung der Parameter der stochastischen Prozesse, wie Drift, Volatilität und Korrelation der Störterme, auf Basis der zu einem Stichtag verfügbaren Kapitalmarktdaten dar.

Zur Schätzung wird zumeist auf historische Daten zurückgegriffen. In Abhängigkeit von der Zielsetzung (Point-in-Time oder Through-the-Cycle), von der Länge der verwendeten Zeitreihe sowie von statistischen Methoden zur Glättung bzw. Anreicherung der Daten ergibt sich häufig eine große Bandbreite möglicher (und im Kontext der Daten plausibler) Schätzer. Daher ist auch die Einbeziehung von Expertenschätzungen notwendig, da insbesondere die Relevanz von historischen Daten für die Prognose der zukünftigen Marktentwicklung auch eingeschränkt sein kann.

Auch für real-world Kapitalmarktmodelle ist es notwendig, die Auswahl der Kalibrierungsmethode objektivierbar zu gestalten.

9. Kalibrierung in inaktiven Märkten

Für den überwiegenden Teil der Vermögenswerte der Unternehmen sind in der Regel verlässliche Preisinformationen aus aktiven Märkten verfügbar. Im Gegensatz hierzu liegen für die Bewertung langlaufender Verpflichtungen (wie zum Beispiel Rentenversicherungen) oder für die Bewertung in Versicherungsverträgen eingebettete finanzielle Optionen und Garantien unter Umständen oft nicht für alle benötigten Marktparameter (v.a. Zinsen und Volatilitäten) verlässliche Preise vor.

In diesem Abschnitt werden Kriterien beschrieben, anhand derer inaktive Märkte erkannt werden können, und Methoden dargestellt, wie auch in einer solchen Situation eine angemessene und mit der Anforderung nach Marktkonsistenz konsistente Kalibrierung durchgeführt werden kann.

Der Abschnitt greift die Inhalte des DAV-Fachgrundsatzes „Kalibrierung in inaktiven Marktsegmenten" vom 04.12.2014 auf, der damit im vorliegenden Fachgrundsatz aufgeht.

9.1. *Aktive und inaktive Marktsegmente*

Ein Marktsegment wird im Folgenden als aktiv bezeichnet, wenn

1. die Daten in diesem Marktsegment (Preise, Volatilitäten, Zinssätze, etc.) vollständig verfügbar sind,
2. Transaktionen in jedem Umfang und jederzeit ohne Beeinflussung der Preise ausgeführt werden können und
3. die Anzahl der Kontrahenten und handelbaren Wertpapiere hinreichend groß ist.

Andernfalls wird das Marktsegment als (temporär oder dauerhaft) inaktiv bezeichnet.

Beispielhaft sei auf folgende Marktsituationen verwiesen, die im nächsten Abschnitt noch weiter beleuchtet werden: hohe Bid-Ask-Spreads stellen eine Einschränkung der Liquidität des Marktsegmentes dar, ebenso Beschränkungen der Handelbarkeit auf geringe Volumina oder mit steigenden Transaktionsvolumina deutlich zunehmende Preise.

Die aufgeführten Bedingungen sollen sicherstellen, dass die Daten aus einem funktionsfähigen Preisbildungsprozess stammen. Sie entsprechen im Wesentlichen den in Solvency II für die risikolosen Zinsen verwendeten Eigenschaften „Transparenz", „Liquidität" und „Tiefe", wobei der Begriff Tiefe im Vergleich zu Solvency II hier konkretisiert ist und die Kennzeichnung als aktiv/inaktiv auch für andere Marktsegmente als Zinsen angewendet werden kann – siehe etwa [60.].

Die geforderten Eigenschaften für ein aktives Marktsegment sind in der Praxis niemals vollständig erfüllt, sondern höchstens in ausreichendem Umfang. Oder sie sind so deutlich verletzt, dass sie unter Materialitätsaspekten nicht mehr als erfüllt angesehen werden können. Dazwischen verbleibt eine weite Grauzone von Marktsegmenten, deren Einordnung wesentlich auf Experteneinschätzung beruht; daher ist die Einstufung regelmäßig zu überprüfen.

Man kann zwischen zwei Arten von inaktiven Märkten unterschieden:

- Zum einen gibt es den Fall, dass ein Marktsegment inaktiv oder illiquide wird, das vorher regulär gehandelt wurde und als aktiv eingestuft wurde. Dies kann an einer Vielzahl von Beispielen aus der Finanzkrise 2008 und den Folgejahren verdeutlicht werden. In diesem Fall besteht eine zuverlässige Historie von Daten, die ab einem bestimmten Zeitpunkt stark von der bisherigen Historie abweicht. Diese Events sind in der Regel durch temporäre Effekte wie eine Krisensituation erklärbar.

- Andererseits gibt es Märkte bzw. Marktsegmente, die per Definition und Konstruktion nicht aktiv gehandelt werden. Hierzu zählen beispielsweise Private Equity, Alternative Investments, aber auch komplexe Kredite für den Mittelstand, die wenig bis gar nicht standardisiert sind. Bei solchen Instrumenten im Portfolio muss im Einzelfall über die Modellierung und die benötigten Daten entschieden werden. Beispielsweise kann es in Einzelfällen angemessen sein, ein breites, gut diversifiziertes Private Equity Portfolio über einen gelisteten Index abzubilden. Hat man jedoch ein signifikantes Einzelinvestment, kann dieser Ansatz nicht angemessen sein.

Insgesamt besteht hier jedoch die Notwendigkeit Annahmen bzgl. der zu verwendenden Marktinformationen zu treffen. Dies erfordert insbesondere eine Gesamtbetrachtung der verwendeten Modelle, der relevanten Volumina und ggf. auch der Abbildung im Unternehmensmodell.

9.2. Indikatoren für inaktive Märkte

Nachfolgend werden verschiedene Kriterien beschrieben, die als direkte oder indirekte Indikatoren für ein inaktives Marktsegment herangezogen werden können, und am Beispiel der Entwicklung der Finanzmärkte zum Jahresende 2008 illustriert. Bei den indirekten Indikatoren handelt es sich um auffällige Marktbewegungen, die durch unzureichende Aktivität verursacht sein können, aber im Einzelfall weitere Analysen erfordern.

Die Aufzählung der Kriterien ist nicht abschließend. Die Kriterien sollten auch nicht als „notwendig" oder „hinreichend" für die Einstufung des Marktsegments angesehen werden, da die Klassifikation wie oben beschrieben letztlich eine Experteneinschätzung darstellt.

9.2.1. Geld-Brief-Spannen

Anhand von Geld-Brief-Spannen (Bid-Ask-Spreads) werden die Unterschiede zwischen dem Nachfragepreis und dem Angebotspreis für Finanzinstrumente bestimmt. Eine Ausweitung der Geld-Brief-Spanne kann als direkter Indikator für die Illiquidität eines

Marktsegments angesehen werden.[11] Für den Corporate Bond Markt zum Jahresende 2008 weist der Indikator auf einen inaktiven Markt hin.

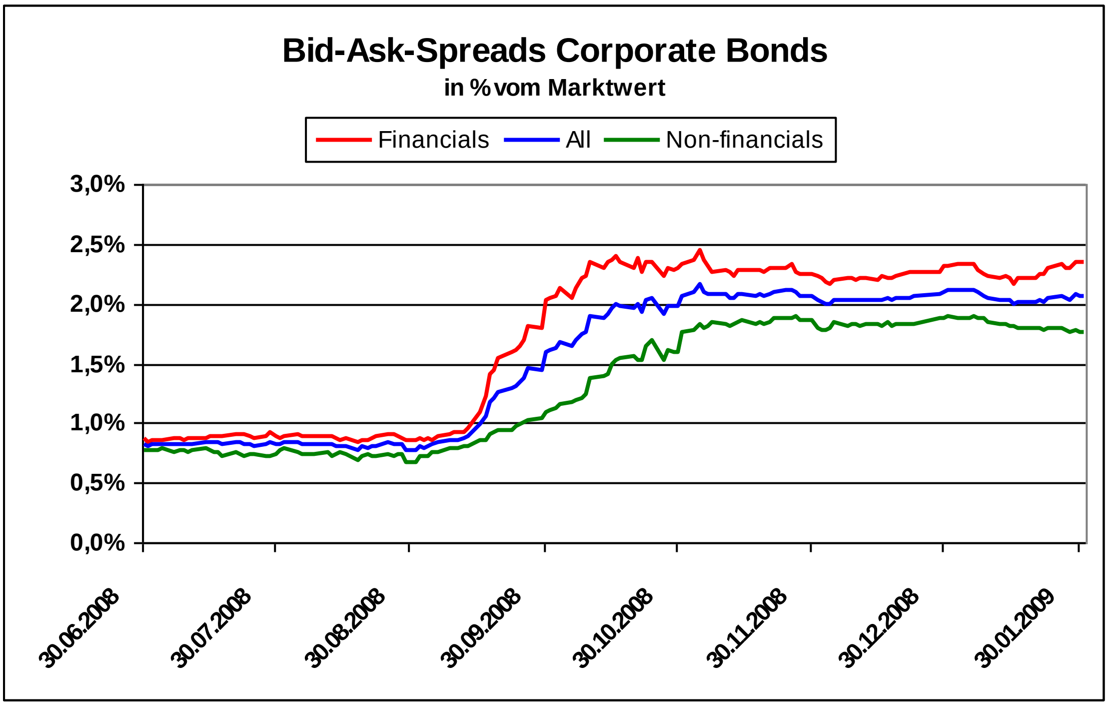


Abbildung 1 Bid-Ask-Spreads im Corporate Bond Markt

In der Abbildung sieht man deutlich, dass die Geld-Brief-Spannen bereits vor dem 31.12.2008 eine deutliche Ausweitung erfahren haben. Hieraus kann geschlossen werden, dass der Corporate Bond Markt zum Jahresende 2008 inaktiv war.

9.2.2. Differenz in Verkaufspreisen (Bid-Bid-Spread)

Als weiteren direkten Indikator für einen inaktiven Markt kann die Spannbreite der gestellten Geldkurse für identische Kontrakte gesehen werden. Auf diese Weise lässt sich beurteilen, wie hoch das Maß an Abwehrpreisen ist, welches auf dem Markt seitens der Market Maker angeboten wird. Dies deutet auf ein inaktives Marktsegment hin.

9.2.3. Transaktionsvolumen

Neben der Differenz zwischen Nachfrage- und Angebotspreis oder der Differenz in verschiedenen Angebotspreisen kann das Transaktionsvolumen, gemessen anhand der Nominalvolumina von Transaktionen, als direktes Kriterium für ein illiquides und daher inaktives Marktsegment herangezogen werden. Ein starker Rückgang des Transaktionsvolumens in einem Marktsegment, welches vorher als aktiv eingestuft wurde, könnte dann als (temporärer) Inaktivitätsnachweis dienen.

---

[11] Es ist allerdings durchaus möglich, dass ein Markt niedrige Bid-Ask-Spreads ausweist, obwohl der Markt als nahezu ausgetrocknet bezeichnet werden kann. Ein solches Phänomen ließe sich dann beobachten, wenn ein Gleichgewicht auf nur wenige Transaktionen zurückzuführen ist.

9.2.4. *Sprunghafter Anstieg der Volatilität*

Die Marktvolatilität zeigt sich einerseits in der impliziten Volatilität als Preisfaktor bei gehandelten Optionen, andererseits in der realisierten Volatilität durch außergewöhnliche Kursausschläge in den Underlying-Preisen.

Zum Jahresende 2008 stiegen die Preise von Zinsoptionen und damit auch die impliziten Zins-Volatilitäten deutlich an. Dies kann als indirekter Indikator für das Vorliegen eines inaktiven Marktsegments gesehen werden.

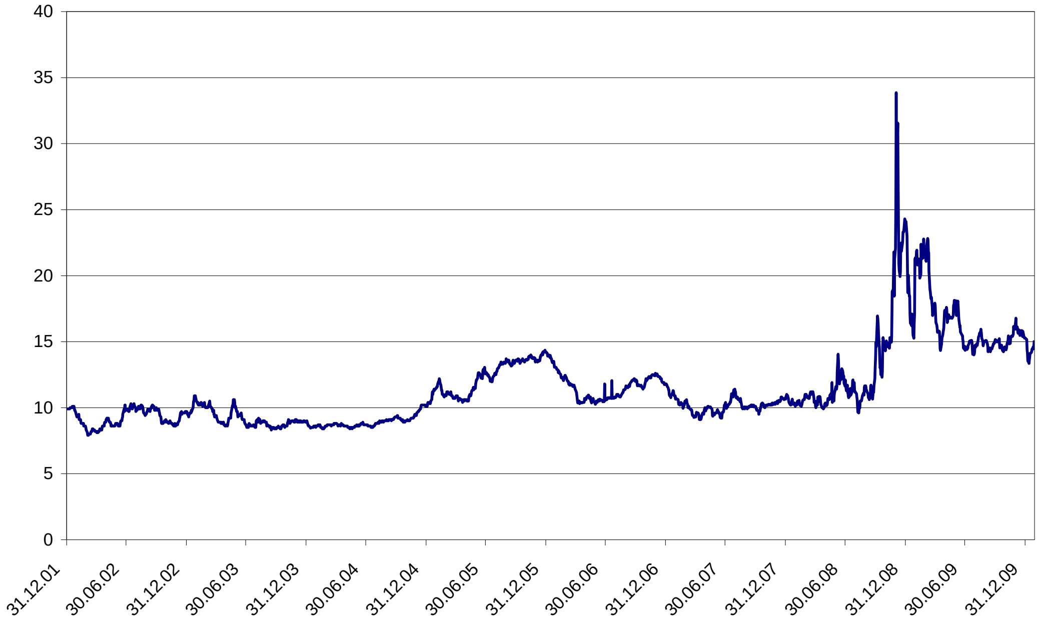


Abbildung 2: Implizite 10-in-20-Swaption-Volatilität

Aber auch in den Preisen von Zinspapieren konnten ungewöhnliche Ausschläge beobachtet werden. Das folgende Beispiel zeigt die Marktentwicklung am Beispiel der Entwicklung des 10-jährigen Nullkupon-Anleihezinssatzes im 4. Quartal 2008. Der 10-Jahreszins schwankt innerhalb des Quartals um mehr als 100 bp. Eine wesentliche Ursache hierfür war die Schließung offener Handelspositionen (sog. Stop-out) bei einer einzelnen amerikanischen Investmentbank in Folge der Lehman-Insolvenz.

Somit ist fraglich, inwieweit zu diesem Zeitpunkt verlässliche Daten vorlagen oder ob es sich um ein inaktives Marktsegment gehandelt hat. Da es sich um einen indirekten Indikator handelt, sind weitere Analysen notwendig, um sich ein abschließendes Urteil über die Inaktivität des Marktsegmentes zu bilden.

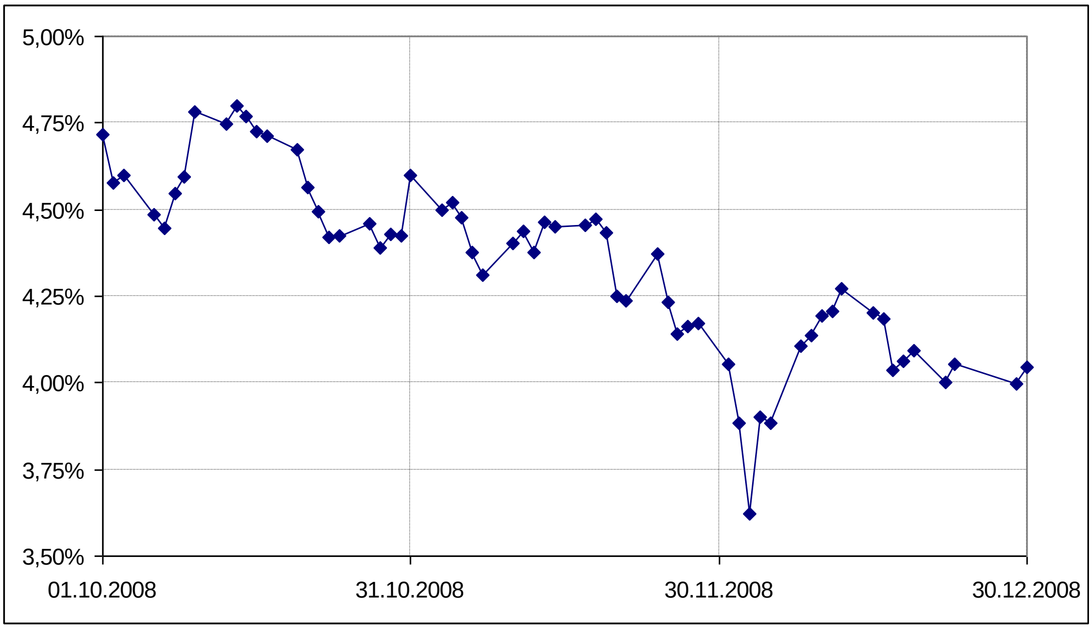


Abbildung 3: Entwicklung des 10-Jahres-Zerozinssatz abgeleitet aus Pfandbriefrenditen von Oktober bis Dezember 2008

9.2.5. Einlagefazilität

Die EZB bietet den Geschäftsbanken die Möglichkeit, kurzfristig nicht benötigtes Geld zum Einlagesatz anzulegen. Diese Einlagefazilität ist ein geldpolitisches Instrument, das dauerhaft und in unbegrenztem Volumen angeboten wird. Damit können Geschäftsbanken Liquidität jederzeit und in beliebigem Volumen sicher anlegen. Große angelegte Volumina deuten auf einen illiquiden Interbankenmarkt hin und sind daher ein indirekter Indikator für die Illiquidität im Bondmarkt. Das Diagramm zeigt Tagesdurchschnittswerte für die Monate Januar 2005 bis November 2009.

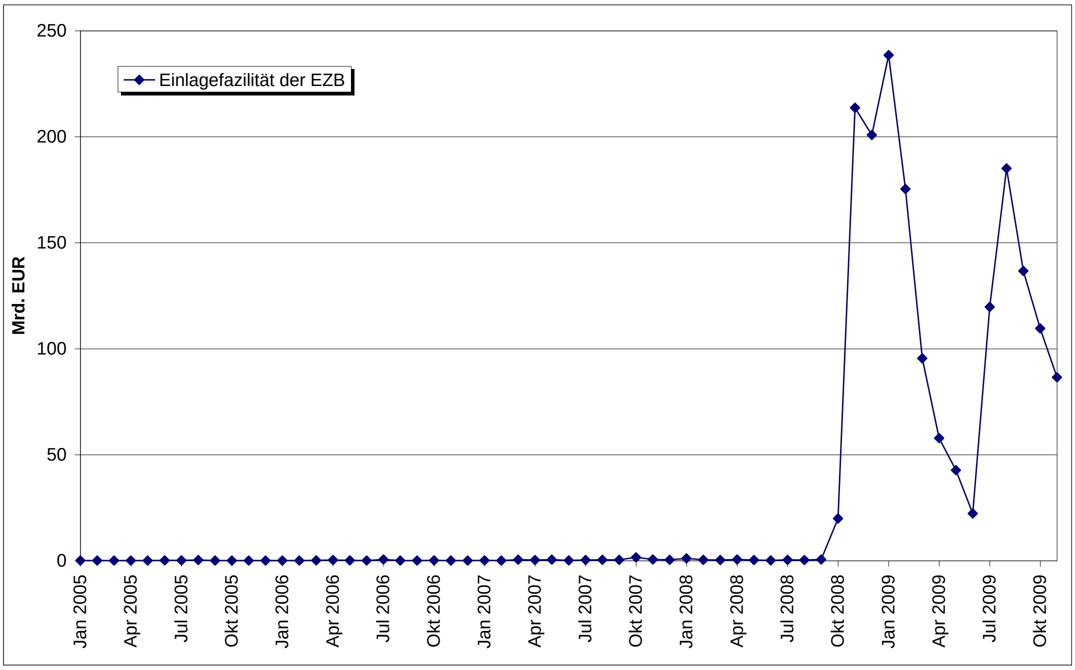


Abbildung 4 Entwicklung der Einlagefazilität von 2005 bis 2009 (Quelle: EZB)

Bis 2008 wurde die Einlagefazilität aufgrund des niedrigen Zinssatzes nur in geringem Umfang genutzt; üblicher waren Übernachtanlagen über den Geldmarkt. Nach der Lehmann-Insolvenz brach das gegenseitige Vertrauen der Geschäftsbanken zusammen, und die Banken wichen auf die EZB als sichere Übernachtanlage aus. Damit kann die Einlagefazilität als Indiz für eine Krisensituation und damit als indirekter Indikator für einen inaktiven Markt herangezogen werden.

9.2.6. Entwicklung der Geldmarktzinsen

Der Beginn der Finanzmarktturbulenzen datiert auf Juni 2007, als erste Hedgefonds aufgrund von umfangreichen Herabstufungen von mit Subprime-Hypotheken unterlegten Wertpapieren in Schwierigkeiten gerieten. Die Krise weitete sich auf andere Marktsegmente aus und erreichte im August 2007 den kurzfristigen Kreditmarkt und den Interbankengeldmarkt, wodurch es bei der Refinanzierung von Verbriefungen zu ersten Liquiditätsengpässen kam. In der Folge griffen die Turbulenzen schließlich auf den gesamten Kapitalmarkt über und brachten zahlreiche Banken in Schwierigkeiten – mit dem Höhepunkt der Lehman-Insolvenz im September 2008. Die Entwicklung des 3-Monats-Euribor im Vergleich zum Overnight-Zinssatz EONIA zeichnet deutlich die Entwicklung der Krise nach.

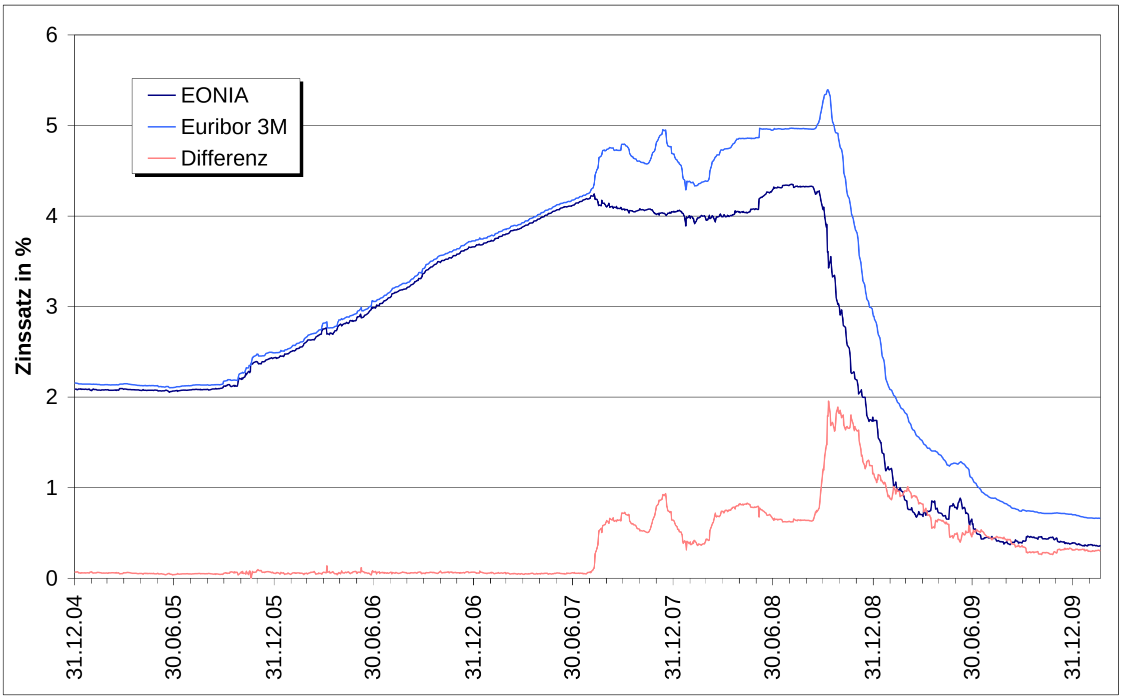


Abbildung 5: Entwicklung des EONIA-Satzes und des 3-Monats-EURIBOR von 2005 bis 2009

Die erste Ausweitung der Zinsdifferenz im August 2007 korrespondiert zeitlich zu den ersten Liquiditätsproblemen, und mit der Insolvenz von Lehman stieg die Differenz nochmals deutlich an – ein weiteres Zeichen für das zusammengebrochene Vertrauen. Die Öffnung der Liquiditätsschleusen durch die Notenbanken zeigt sich im anschließenden deutlichen Zinsrückgang, wenngleich die Zinsdifferenz zunächst bestehen blieb. Erst ab Ende 2008 ist eine Einengung der Zinssätze in Richtung einer Normalisierung bei immer noch erhöhter Zinsdifferenz zu beobachten.

Die Differenz zwischen Tages- und 3-Monats-Zinsen kann daher ebenfalls als Krisenindikator und indirekter Indikator zur Analyse der Inaktivität des Marktes herangezogen werden.

9.3. Grundsätze für die Kalibrierung in inaktiven Marktsegmenten

Bevor im Folgenden einige konkrete Methoden beschrieben werden, die bei festgestellter Inaktivität eines Marktsegments trotzdem eine angemessene Kalibrierung ermöglichen, sollen zunächst einige dabei zu beachtende Grundsätze herausgestellt werden.

9.3.1. Arbitragefreiheit und Konsistenz zu ökonomischen Rahmenbedingungen

Die Kalibrierung des Kapitalmarktmodells im Ganzen – d.h. sowohl der aktiven wie auch der inaktiven im Modell abgebildeten Marktsegmente – ist arbitragefrei und steht nicht im Widerspruch zu den aktuellen ökonomischen Rahmenbedingungen und gängigen ökonomischen Grundannahmen.

Für aktive Marktsegmente beinhaltet dieser Grundsatz die Marktkonsistenz, d.h. die Fähigkeit der Preisreplikation. Bei inaktiven Marktsegmenten führt er zu notwendigen Beschränkungen der Freiheitsgrade von Mark-to-Model Kalibrierungsansätzen.

9.3.2. Stetigkeit der verwendeten Kalibrierungsansätze

Die Forderung nach Stetigkeit der zugrundeliegenden Annahmen und Ansätze ist grundlegend für einen Vergleich von Berechnungen (z.B. Unternehmensbewertung) im zeitlichen Verlauf. Bei der Kalibrierung in inaktiven Märkten sollten diese Annahmen nur bei Vorliegen evidenter Gründe geändert werden (z.B. zur Vermeidung von Arbitrage). Bei temporär inaktiven Märkten ist auf die Stetigkeit beim Übergang von „aktiven" auf „inaktive" Kalibrierungen zu achten.

9.3.3. Transparenz

Die getroffenen Annahmen und die verwendeten Methoden für die Kalibrierung des Kapitalmarktmodells sind transparent und nachvollziehbar zu dokumentieren. Die Einstufung als inaktives Marktsegment ist zu begründen, dabei ist auch darzustellen, ob die Inaktivität als temporär oder dauerhaft angesehen wird, und in welcher Form existierende Marktdaten bei der Kalibrierung des Marktsegments berücksichtigt werden.

9.4. Ansätze zur Kalibrierung in inaktiven Marktsegmenten

Beispielhaft werden einige Lösungsansätze skizziert. Diese Ansätze können prinzipiell auch auf andere Anwendungsgebiete übertragen werden.

9.4.1. Extrapolation des langen Endes der Zinsstrukturkurve

Während für den kurz- und mittelfristigen Laufzeitenbereich in der Regel ein aktiver Markt existiert, liegen für den langen Laufzeitenbereich der Zinsstrukturkurve im Allgemeinen keine liquiden Marktdaten vor. Es handelt sich um ein dauerhaft inaktives Marktsegment.

Sinnvoll und mit den aufgestellten Grundsätzen vereinbar ist eine Extrapolation der Zinskurve auf Grundlage makroökonomischer Fundamentaldaten. Da diese weniger stark schwanken, führt ein darauf aufbauender Extrapolationsansatz zu relativ stabilen und belastbaren Ergebnissen.

Für die marktkonsistente Bewertung unter Solvency II geschieht dies aktuell beispielsweise in der Form, dass die risikolose Zinskurve lediglich bis zum „Last Liquid Point" (LLP) aus den beobachteten Marktdaten zum Bewertungsstichtag abgeleitet wird. Die weitere Entwicklung der Zinskurve – genauer: der Ein-Jahres Forward Rates – geschieht ab dem LLP nach einem festgelegten Extrapolationsverfahren (siehe [60.]) gegen einen makroökonomisch begründeten Langfristwert, der „Ultimate Forward Rate" (UFR). Sowohl der LLP als auch die Höhe der UFR und die Geschwindigkeit der Extrapolation werden währungsabhängig festgelegt.

Anzumerken ist dabei, dass makroökonomische Daten wie Inflationserwartung und zukünftige Realverzinsung nicht direkt beobachtbar sind. Daher wurde die Höhe der UFR von EIOPA im Jahr 2016 einer Überprüfung unterzogen, die zur Einführung einer Formel führte, nach der die UFR seit 2018 jährlich berechnet und ggf. angepasst wird, siehe Abschnitt 14.G in [60.]. Wenn die berechnete UFR hinreichend weit von der dann geltenden UFR abweicht, aktualisiert die EIOPA die UFR zu Beginn des nächsten Jahres. Die aktualisierten UFRs werden jedes Jahr bis Ende März auf der Website der EIOPA bekannt gegeben. Neun Monate nach der Bekanntgabe der aktualisierten UFR verwendet die EIOPA diese zum 1. Januar des darauffolgenden Jahres. Für jede Währung ist die Änderung der UFR so begrenzt, dass sie um 15 Basispunkte steigt oder sinkt, oder unverändert bleibt.

Für Zwecke der Kalibrierung von real-world Zinsmodellen sollte eine Analyse der Liquidität von Swaps der verwendeten Datenquellen vorgenommen werden, unabhängig von den von der EIOPA veröffentlichten DLT-Bereichen („deep, liquid and transparent") (siehe oben „LLP"). Je nach notwendiger bzw. beabsichtigter Historie der Daten besteht die Möglichkeit, dass die Liquidität im gewählten Zeitfenster ggf. nicht für alle benötigten Laufzeiten gegeben war und die Daten dementsprechend geeignet interpretiert werden müssen. Insbesondere bei sehr langen Laufzeiten ist zu erwarten, dass in der längeren Historie die Liquidität geringer als für die marktüblichen Laufzeiten war. Das im Kontext von Swap Rates und Spot Rates am häufigsten verwendete Verfahren ist die Smith-Wilson-Methode. Andere Verfahren, wie bspw. Nelson-Siegel-Svensson oder eine flache Extrapolation, sind jedoch ebenfalls denkbar.

Zum Zeitpunkt der Erstellung dieses Hinweises wurde z.B. in [61.] eine alternative Zinsextrapolation diskutiert. EIOPA schlägt vor, die Zinsstrukturkurve für Laufzeiten zu extrapolieren, bei denen der Markt für die entsprechenden Finanzinstrumente nicht mehr tief, liquide und transparent ist oder bei denen die Verfügbarkeit von Anleihen begrenzt ist („First Smoothing Point"). Die EIOPA empfiehlt die Anwendung einer Extrapolationsmethode, bei der die Zinssätze vom First Smoothing Point (FSP) zur UFR hin mit Hilfe einer Last Liquid Forward Rate (LLFR) extrapoliert werden. Dabei wird die LLFR als gewichteter Durchschnitt der Forward Rates vor und nach dem First Smoothing Point ermittelt. Die Gewichtung hängt dabei von der Liquidität der jeweiligen Forwards Rates entsprechend dem bei einer bestimmten Laufzeit gehandelten Nominalbetrag ab. Die Forward Rates $f_{FSP,FSP+h}$ nach dem First Smoothing Point sollen dann wie folgt extrapoliert werden

$$f_{FSP,FSP+h} = \ln(1+UFR) + \big(LLFR - (\ln 1 + UFR)\big) * \frac{1-e^{-ah}}{ah}.$$

Der Parameter h bezeichnet dabei die Laufzeit, für die die Forward Rate bestimmt wird, und der Parameter a bezeichnet den Konvergenzparameter.

9.4.2. Credit Spreads

Spreadkurven müssen, ähnlich wie Zinskurven, am langen Ende in der Regel extrapoliert werden, da die zugrundeliegenden Finanzinstrumente nicht liquide gehandelt werden. Da die Herleitung von Extrapolationszielen, wie sie bspw. bei der Smith-Wilson-Methode eingehen, nicht ohne Weiteres auf Spreadkurven übertragen werden kann, wird bei Spreads vermehrt auf die flache Extrapolation zurückgegriffen.

Außerdem gibt es typischerweise einzelne Währungs-Sektor-Rating Kombinationen, die nicht ausreichend liquide sind. Beispiele hierfür sind AAA-bewertete Corporate Spreads nach der Finanzkrise, HY Spreads, für die die Datenlage vermehrt nicht ausreichend ist oder auch bestimmte Government Spreads, bei denen die jeweiligen Regierungen die Bedingungen der neu zu emittierenden Anleihen verändert haben. Das Schließen der Lücken in den Zeitreihen oder dem Simulationsoutput kann hier bspw. durch Faktoransätze geschehen, bei denen die fehlenden Spreads als Funktion anderer Spreads erklärt werden. Als ein Spezialfall hiervon kann ein Mapping-Ansatz verwendet werden, um Informationen für die fehlenden Zeitreihen zu übertragen, wie bspw. eine Annahme der Art, dass die Volatilität für bestimmte nicht-USD-Spreads gerade den (typischerweise liquideren) USD-Spreads entspricht, wobei oft auch zusätzlich eine Skalierung der USD-Volatilität vorgenommen wird (vgl. Swiss Solvency Test).

9.4.3. Implizite Swaption- und Aktien-Volatilitäten

Eine Vielzahl von Optionen, z.B. Swaptions, werden nicht an der Börse, sondern nur over-the-counter gehandelt. Für die Ermittlung von Preisen muss daher auf die Informationen entsprechender Anbieter wie bspw. Investmentbanken zurückgegriffen werden. Insbesondere bei Optionen mit langer Laufzeit sowie Optionen, die sich signifikant innerhalb oder außerhalb des Gelds befinden, sind diese Preise kritisch zu hinterfragen. Entsprechend sind bei derartigen Optionen die historischen Zeitreihen impliziter Volatilitäten auf ihre Qualität und Konsistenz zu überprüfen und ggfs., ähnlich wie bei Zinsen und Spreads, im nicht-liquiden Bereich zu extrapolieren. Für die Extrapolation von impliziten Volatilitäten werden häufig Methoden verwendet, welche u.a. in [62.] und [63.] diskutiert wurden:

<u>Extrapolation von impliziten Aktien-Volatilitäten</u>

Impliziten Volatilitäten können generell anhand der aktuellen Preise für Kauf- und Put-Optionen abgeleitet werden. Typischerweise sind implizite Volatilitäten nach Laufzeit und Moneyness verfügbar. Einige implizite Volatilitäten werden von beobachtbaren Preisen abgeleitet (oder zwischen beobachtbaren Werten interpoliert), andere sind extrapolierte (unbeobachtete) Werte. Aufgrund des Mangels an historischen langfristigen impliziten Volatilitätsdaten dient die beobachtete langfristige realisierte Volatilität des Underlyings typischerweise als Ausgangspunkt für die Herleitung der Ultimate Equity Implied Volatility. Ein Übergang zwischen beobachtbaren impliziten Volatilitäten und der Ultimate Equity Implied Volatility kann auf einer Interpolation entweder der Forward-Varianzen (oder Volatilitäten) oder der Spot-Varianzen (oder Volatilitäten) basieren. Beide Ansätze sind gleichermaßen akzeptiert. Im Allgemeinen gibt es keine Marktpraxis, die darauf hindeutet, dass der eine Ansatz dem anderen vorzuziehen wäre, siehe [62.].

<u>Extrapolation von impliziten Swaption-Volatilitäten</u>

Die für implizite Aktien-Volatilitäten entwickelten Verfahren können entsprechend auch für implizite Swaption-Volatilitäten angewendet werden. Insbesondere kann als Ausgangspunkt für Herleitung der Ultimate Swaption Implied Volatility die beobachtete langfristige realisierte Volatilität der entsprechenden Swap-Sätze verwendet werden, siehe [62.].

Darüber hinaus ist zu beachten, dass Resultate, die auf Grund von impliziten Volatilitäten gewonnen wurden, unter Umständen nicht direkt im Kontext der real-world-Simulation von Kapitalmärkten angewendet werden können - dies gilt etwa, falls die Volatilitätskalibrierung der Modelle gegen implizite Volatilitäten erfolgte und man diese als Approximation für historische Volatilitäten verwendet.

9.4.4. Inflationsindexierte Anleihen, Inflation-Swaps

Eine effektive Absicherung gegen Inflationsrisiken mit Inflationsderivaten scheint aktuell wichtiger denn je. Dazu zählen z.B. auch Inflation-Swaps, die aufgrund ihrer individuellen Ausstattungsmerkmale den Vertragsparteien maximalen Gestaltungsspielraum ermöglichen. Die Liquidität dieser Instrumente kann anhand von Geld-Brief-Spannen (Bid-Ask-Spreads) gemessen werden. Während es liquide Inflation Swaps (Underlying z.B. Europäischer HICPxT – hier findet auch ein Clearing an der Eurex statt) gibt, findet in einigen Währungen kein liquider Handel von inflationsbasierten Instrumenten statt. Historische Zeitreihen entsprechender Marktpreise sowie etwaige abgeleitete Inflationserwartungen sind daher kritisch zu bewerten. In solchen Fällen ist meist ein Mapping auf liquide Instrumente (ggf. sogar Instrumente anderer Währungen) notwendig.

9.4.5. Private Equity, Immobilen, Infrastruktur, Hedgefonds, etc.

Private Equity Investments von Versicherern sind ein gutes Beispiel für die langfristigen Investment, die Versicherer tätigen können. Wenn sich z.B. ein Versicherer an einem geschlossenen Private-Equity-Fonds beteiligt, so erfolgt dies für einen festen Zeitraum. Während dieses Zeitraums finanziert der Fondsmanager im Namen der Investoren des Fonds das Wachstum einer Reihe von nicht börsennotierten Unternehmen. Ein solches Finanzierungsmodell wird als "Patient Capital" bezeichnet, weil es eine Kombination aus finanzieller Investition des Managers und aktiver Beteiligung an der Investition erfordert. Diese Art der Finanzierung erfordert auch, dass das Eigenkapital der Investoren während der Zeit, in der der Manager in ein Unternehmen investieren muss, "gesperrt" ist: Erst wenn das Unternehmen die Zeit hatte, zu wachsen, wird der Manager seine Anteile verkaufen und die Gewinne an die Investoren zurückzahlen, während er den Fonds auflöst, siehe [64.]. Typischerweise gibt es keine repräsentativen historischen Zeitreihen, die verwendet werden können, um die Modelle für solche Investments kalibrieren zu können. Daher werden die entsprechenden Investments typischerweise auf andere Risikofaktoren mit ähnlichen Eigenschaften gemappt oder es wird auf Expertenschätzungen zurückgegriffen, wobei diese Expertenschätzungen mit empirischen Analysen auf Basis von Benchmark Indizes wie z.B. S&P Listed Private Equity Index, LPX50 oder LPX Europe unterstützt werden.

Auch für Immobilien gibt es entweder keine repräsentativen historische Zeitreihen oder die entsprechenden Zeitreihen basieren häufig auch auf Gutachterpreisen, was zu einer erhöhten Autokorrelation in den Zeitreihen führt. Bei der Modellierung entsprechender Volatilitäten oder Korrelationen können Entglättungsverfahren (z.B. Blundell-Ward oder AR-Filter) angewandt werden, um den Effekt der Autokorrelation abzumildern. Teilweise muss hier jedoch auch auf Expertenschätzungen zurückgegriffen werden.

Typischerweise können die Modelle für alternative Investments wie z.B. auch Infrastruktur, Hedgefonds oder Investments in Windparks nicht direkt auf Basis historischer

Zeitreihen kalibriert werden, da diese oft nicht repräsentativ für das entsprechende Investment sind oder teilweise die Datenqualität der historischen Zeitreihen nicht ausreichend ist. In diesem Fall müssen die Investments auf andere Risikofaktoren gemappt werden oder auf Expertenschätzungen zur Kalibrierung der Modelle zurückgegriffen werden.

10. Validierung

Für die Validierung von Kapitalmarktmodellen und daraus resultierende Szenarien haben folgende Prinzipien höchste Relevanz (vgl. Abschnitt 2):

- Prinzip 1 (Konsistenz im Anwendungskontext) – Die Validierung muss konsistent mit dem Anwendungskontext sein
- Prinzip 7 (Verantwortung) – Die Verantwortung liegt beim Anwender
- Prinzip 8 (Objektivierbare Modellierung / Zieldefinition) – Die Qualitätskriterien für die Validierung müssen objektiv sein
- Prinzip 9 (Notwendigkeit der regelmäßigen Prüfung) – Regelmäßigkeit der Validierung

Ergänzend dazu werden die folgenden Prinzipien als relevant für die Validierung gesehen:

- Prinzip 3 (Modellverständnis) – Die Validierung basiert auf einem ausreichenden Modellverständnis
- Prinzip 4 (Transparenz) – Die Validierung basiert auf einer ausreichenden Transparenz, ohne die keine sinnvolle Validierung möglich ist

Im Kontext von ESGs ist eine Validierung notwendig, um die Güte der generierten Szenarien zu überprüfen. Durch die Validierung wird sichergestellt, dass die Gültigkeit der Ergebnisse – aus dem ESG aber auch aus der darauffolgenden Berechnungsprozesse – in allen relevanten Aspekten gewährleistet ist.

Auch wenn in Kontext dieses Papiers die Validierung eingeschränkt auf den ESG ist (und nicht ein ganzes Unternehmensmodell), kann diese sehr vielseitig und umfangreich sein. Meistens findet in den Versicherungsunternehmen eine Validierung und Freigabe eines Szenariensatzes in Bezug auf eine konkrete Anwendung des ESGs statt – zum Beispiel im Hinblick auf eine kurz- oder langfristige ökonomische Perspektive (SAA Optimierung oder ALM), regulatorische Anforderungen wie Solvency II, Bewertung von (Teil-)Beständen oder Risikomessung für die Steuerung von (Teil-) Beständen.

Typischerweise werden bei der Validierung von ESGs die Ergebnisse aus dem Szenariensatz mit den entsprechenden Marktdaten verglichen oder – falls nicht ausreichend Marktdaten verfügbar sind – mit den vorhandenen Marktdaten und Experteneinschätzungen.

Unabhängig von der Vielfalt der Anwendungen unterscheiden wir zwei Arten von Szenarien – real-world und risikoneutrale Szenarien – bei denen sich das Vorgehen bei der Validierung grundsätzlich unterscheidet.

- Real-world Kapitalmarktmodelle und resultierende Szenarien basierend häufig auf historischen Kapitalmarktdaten. Experteneinschätzungen werden dazu oftmals eingesetzt, um gewisse Kalibrierungsziele erweitern und Modelleigenschaften anzureichern. Die Validierung solcher Modelle und Simulationen sowohl auf Güte und Relevant der zugrundeliegenden Daten als auch darauf wie gut diese in den Modellen abgebildet bzw. davon reflektiert werden.
- Für risikoneutrale Szenarien ist die Validierung deutlich klarer definiert – hier muss vor allem die Marktkonsistenz und die Risikoneutralität bzw. Arbitragefreiheit nachgewiesen werden.

In der Vergangenheit wurden die Validierungsstandards von den Versicherungsunternehmen selbst ausgearbeitet und festgelegt. In den letzten Jahren jedoch steigen die externen Anforderungen an die Validierung. So zum Beispiel bestehen Validierungsstandards für interne Modelle gemäß Artikel 124 der Richtlinie Solvabilität II [2.] und diese fordern:

- Regelmäßigkeit des Prozesses
- Wirksames statistisches Verfahren, das die Angemessenheit des Modells und der Ergebnisse nachweisen kann
- Stabilität des internen Modells (Nachweis durch Sensitivitätsanalyse)
- Exaktheit, Vollständigkeit und Angemessenheit der Daten.

Dadurch muss die Validierung einerseits die Angemessenheit des ESG-Modells und der produzierten Ergebnisse für die konkrete Anwendung sicherstellen und andererseits alle relevanten regulatorischen Anforderungen erfüllen.

Eine der ersten Fragen, die bei der Gestaltung des Validierungsprozesses beantwortet werden muss, ist: *Was wird validiert*? Bei der Festlegung des Validierungsumfangs sind folgende Bestandteile des ESGs zu berücksichtigen:

- Validierung des Kapitalmarktmodells und der zugrundeliegenden Methodik (Modellfehler);
- Validierung der Daten und der Kalibrierung (Kalibrierungsfehler);
- Validierung der simulierten Szenarien (Simulationsfehler).

10.1. Validierung des Kapitalmarktmodells

ESG-Modelle werden ständig weiterentwickelt, so dass sich Best Practices und Standards mit der Zeit verändern können. So waren etwa Zinsmodelle, die heute als Marktstandard gelten, vor mehr als zehn Jahren deutlich weniger verbreitet. Ein Unternehmen würde nicht bei jeder Erzeugung von Szenarien die zugrundeliegenden Modelle hinterfragen. Es ist jedoch sinnvoll in regelmäßigen Abständen die Modellauswahl und die Angemessenheit des Kapitalmarktmodells zu überprüfen - immer vor dem Hintergrund, ob das Modell noch in der Lage ist aktuelle und zu erwartende Marktgegebenheiten oder Extremereignisse angemessen abzubilden.

10.2. Validierung der Daten

Die in einem ESG benutzten Daten, samt Annahmen und Parameter, spielen eine zentrale Rolle bei der Kalibrierung des Kapitalmarktmodells und der Qualität der Ergebnisse. Die Datenverfügbarkeit ist oft nicht für alle modellierten Größen gegeben. Die Validierung muss sicherstellen, dass der Umgang mit fehlenden Daten zu keinen unplausiblen oder verzerrten Ergebnisse führt.

Besonders herausfordernd ist die Validierung von Größen, für die es keine Referenzdaten gibt, oder die Validierung von Experteneinschätzungen.

10.3. Validierung der simulierten Szenarien

Die Validierung der simulierten Szenarien eines ESGs ist ein unverzichtbarer und integraler Bestandteil des Berechnungsprozesses. Es ist wichtig festzulegen welche Größen gegen welche Ziele getestet werden müssen, z.B. diskontierte Preise, Zinssätze, Renditen, Korrelationen gegen Mittelwerte, Quantile oder historische Extremereignisse. Dafür müssen ausreichend Output-Daten generiert werden, die eine sinnvolle Validierung ermöglichen.

Oftmals existieren mehrere Teilmodelle, die nur ein Teil des gesamten ESGs sind. Ein Teilmodell sollte nie isoliert bewertet werden. Es muss stets ein zusammengehöriger Satz von Szenarien hinsichtlich der Güte getestet werden.

Oft werden direkt bei der Erstellung des Szenariensatzes automatisierte statistische Tests produziert. Eine inhaltliche Beurteilung der Güte vom Fachmann ist trotzdem unverzichtbar.

Es ist sinnvoll in angemessenen Abständen auch andere Bereiche eines ESGs zu validieren – zum Beispiel: Validierung der technischen Umsetzung oder des Programmierungscodes.

In einem Versicherungsunternehmen können unterschiedliche Validierungsprozesse definiert werden, zum Beispiel:

- Regelmäßige Validierung
- Ad-hoc Validierung
- Validierung von Modelländerungen

Generell ist der Validierungsprozess ein iterativer Prozess. Am Anfang des Prozesses stehen die zu validierenden Objekte (Modell, Methodik, Daten, generierter Szenariensatz). Diese werden dann als Input für vorher definierte statistische Tests oder Tools verwendet. Dann kommt der entscheidende Punkt: Anhand vorher definierter Qualitätskriterien werden die Ergebnisse akzeptiert oder verworfen. Dieser Schritt wird wiederholt, bis die Ergebnisse die Qualitätskriterien erfüllen.

Die Kriterien können (und sollten) im Hinblick auf die unternehmensspezifischen Anwendungen formuliert werden.

Es werden quantitative und qualitative Kriterien bei der Validierung definiert. Beispiele für quantitative Kriterien sind oft statistische Größen:

- Teststatistiken
- Genauigkeit der geschätzten Größen (Konfidenzintervalle)
- Monte-Carlo Fehler
- Toleranzgrenze der Abweichung zu Zielgrößen
- Minimierung oder Maximierung von Differenzen

Die quantitativen Qualitätskriterien werden oft anhand bewährter statistischer oder mathematischer Verfahren hergeleitet.

Als Beispiel für qualitative Kriterien können unter anderem genannt werden:

- Robustheit des Modells
- Gewichte von „wichtigeren" Größen

Im Gegensatz zu einem binären „ja/nein" Kriterium, lassen sich für manche Qualitätskriterien unterschiedliche Wesentlichkeitseinstufungen definieren.

Die Validierung eines ESGs findet an unterschiedlichen Stellen im Gesamtberechnungsprozess statt. Eine unmittelbare Validierung des ESG-Outputs ist unverzichtbar. Nach jeder Kalibrierung und Szenariengenerierung wird eine Validierung durchgeführt. Dieser Schritt wird iteriert, bis die Ergebnisse akzeptabel sind.

Eine zusätzliche unabhängige Validierung im Sinne von Funktionstrennung kann je nach Größe des Versicherungsunternehmens sinnvoll und wünschenswert sein, um die Güte und Aussagekraft der Berechnung zu gewährleisten.

Grundsätzlich ist auch eine Ausgliederung der Validierung und der dazugehörigen Dokumentation möglich. Die Verantwortung verbleibt jedoch immer beim jeweiligen Anwender bzw. Unternehmen (vgl. Prinzip 7).

Nicht zuletzt muss die Validierung entsprechend dokumentiert sein, um Revisionssicherheit und Nachvollziehbarkeit zu ermöglichen. Erst dann kann eine Freigabe der Ergebnisse erfolgen.

III. Real-world Modellierung

11. Einleitung

Das Ziel der real-world Modellierung besteht darin, die Verteilung der künftigen Kapitalmarktentwicklung darzustellen, zu simulieren und daraus szenarienabhängige Entwicklungen des Unternehmens abzuleiten. Die real-world Modellierung findet damit überwiegend Anwendung in Bereichen der Risikomessung und Steuerung. Die zu betrachtenden Risikofaktoren ergeben sich typischerweise aus dem Portfolio des Unternehmens. Dabei werden zumeist die Preise der Portfoliopositionen jedoch nicht direkt modelliert, sondern über einen funktionalen Zusammenhang aus entsprechenden Risikofaktoren hergeleitet. Risikofaktoren können beispielsweise Zinskurven, Spreadkurven, Migrationswahrscheinlichkeiten, Aktienindexentwicklungen aber auch ökonomische Größen wie medizinische Inflation oder Gehaltsentwicklung sein.

Real-world ESGs werden für unterschiedliche Zielstellungen wie die Berechnung des Solvenzkapitals bzw. des ökonomischen Risikokapitalbedarfs für Marktrisiken (im Rahmen eines internen Modells), die unternehmenseigene Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung (ORSA), der strategischen Unternehmens- und Bilanzplanung sowie der Bestimmung einer optimalen Assetallokation benötigt. Jede dieser vielfältigen Anwendungen hat besondere Anforderungen an das Kapitalmarktmodell hinsichtlich Modellwahl, Risikofaktoren und Assetklassen sowie deren Kalibrierung. Für die Solvenzkapitalberechnung ist es beispielweise besonders wichtig, dass die Wahrscheinlichkeitsverteilungen der einzelnen Risikofaktoren an ihren Rändern plausibel sind, für die Optimierung der Assetallokation ist ein ökonomisch plausibles Risiko-Rendite-Verhältnis der Assetklassen untereinander von besonderer Bedeutung.

Bei der Berechnung des Solvenzkapitals für Marktrisiken wird im Rahmen von Solvency II ein Betrachtungshorizont von einem Jahr und ein Konfidenzniveau von 99,5% angesetzt. Dem gegenüber erfordern die strategische Unternehmensplanung und damit häufig verbundene Berechnungen zur Ermittlung der optimalen Asset-Allokation eine mehrjährige Szenario-Betrachtung. Der ORSA-Prozess greift diese Berechnungen auf und prüft auf Basis des mehrjährigen Gesamtrisikoprofils, ob die geplanten Gesamtsolvabilitätsmittel jederzeit ausreichen, um die in der eigenen Risikoneigung festgelegten Zielsetzungen zu erfüllen.

Im Folgenden sollen Ansätze zur Modellierung, Kalibrierung und Validierung von real-world ESGs vorgestellt werden. Bei der Beschreibung von Modellierungsansätzen wird dabei detailliert auf die wesentlichen Marktrisikofaktoren und deren Besonderheiten eingegangen. Im Abschnitt Kalibrierung werden darauf basierend für die verschiedenen Modellelemente Methoden für die Herleitung der Parameter gegeben historischen Daten vorgestellt. Tests und Verfahren zur Überprüfung der Modellqualität bietet anschließend der Abschnitt Validierung.

12. Modellierung

Da je nach Wahl des Modells, der betrachteten Risikofaktoren und den vorhandenen Daten unterschiedliche Werkzeuge zur Modellierung Anwendung finden können, soll in folgendem Abschnitt zunächst auf verschiedene, allgemeine Methoden und Modellierungsansätze für die real-world Modellierung eingegangen werden. Diese Werkzeuge können zum Teil auch kombiniert verwendet werden. Im anschließenden Abschnitt Risikofaktoren wird dargestellt, welche der vorgestellten Methoden für die Modellierung der verschiedenen Assetklassen gängig sind und welche Besonderheiten bei den jeweiligen Risikofaktoren zu beachten sind. Dies hängt u.a. von den statistischen Eigenschaften der modellierten Größen und den verfügbaren Daten ab. Bei der Ermittlung integrierter Szenarien der verschiedenen Assetklassen ist spielt zusätzlich die Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Risikofaktoren eine wesentliche Rolle, worauf danach im Abschnitt Abhängigkeiten genauer eingegangen wird.

12.1. Toolbox

12.1.1. Stochastische Differentialgleichungen

Speziell für die mehrperiodige Modellierung spielen stochastische Prozesse als Folgen von Zufallsgrößen $\{X_0, X_1, \ldots, X_t, \ldots\}$ über die Zeit eine große Rolle. Eine einzelne, spezielle Realisation des Zufallsprozesses $\{x_0, x_1, \ldots, x_t\}$ bis zu einem vordefinierten Zeitpunkt t wird dabei als Pfad bezeichnet. Ein stochastischer Prozess kann als Differentialgleichung dargestellt werden, in dem die Änderungen einer Größe sowohl von (mindestens) einer Zufallsgröße als auch von anderen Parametern und Modellgrößen abhängt.

Ein ESG, in dem mehrere ökonomische Variablen[12] auf Basis stochastischer Differentialgleichungen modelliert werden, ist daher oft ein ganzes System von Differentialgleichungen, die gegebenenfalls gekoppelt sind, d.h. die Realisation für eine Variable geht in die Differentialgleichung für eine andere Variable als Parameter ein.

Ein einfacher stochastischer Prozesstyp ist der Diffusionsprozess, bei dem die Änderung der Variable von einerseits ihrer erwarteten Änderung über die Zeit („Drift") und andererseits von einem Zufallsterm („Diffusion") getrieben wird. Drift und Diffusion sind beide in ihrer Höhe abhängig von der zeitlichen Länge des betrachteten Intervalls. Diffusionsprozesse gehören zur Klasse der Markovprozesse, bei denen lediglich der zu einem Zeitpunkt vorhandene Zustand im Prozess von Relevanz für die künftige Entwicklung ist. Ein Markovprozess hat dementsprechend kein „Gedächtnis" über vorangegangene Zustände.

Sind die Zuwächse der modellierten Größe voneinander stochastisch unabhängig und normalverteilt, so handelt es sich um einen Wiener Prozess.

Die Brownsche Bewegung ist dabei ein spezifischer Markov- und Wienerprozess:

$$dx = \mu\, dt + \sigma\, dz$$

[12] Variablen sind im Kontext eines ESG z.B. ein Aktienindex oder Zins einer Laufzeit

mit $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ und $\varepsilon \sim N(0,1)$.

Die Änderung dx für eine Variable ist dabei sowohl über den erwarteten Wert μ für den Zuwachs pro Zeiteinheit als auch den standardnormalverteilten Zufallsterm ε gekennzeichnet.

Die geometrische Brownsche Bewegung

$$\frac{dx}{x} = \mu\, dt + \sigma\, dz$$

mit $dz = \varepsilon\sqrt{dt}$ und $\varepsilon \sim N(0,1)$ wird häufig als Beispiel zur Modellierung von Aktienindexständen bzw. dividendenneutralisierten Aktienkursen angeführt. Dies ist der Eigenschaft der geometrisch Brownschen Bewegung geschuldet, dass bei ihr keine negativen Werte für x entstehen können, so wie auch Aktienkurse nicht negativ werden können.

Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess ist ein Mean-Reversion Prozess,

$$dx = \kappa(\mu - x)dt + \sigma\, dz$$

mit Mean-Reversion Level μ und Mean-Reversion Geschwindigkeit κ, wobei der Parameter μ den langfristig erwarteten Wert und κ die Geschwindigkeit zu diesem darstellt. Die Variable x kehrt dabei über die Zeit zu ihrem Erwartungswert μ zurück.

Der Ornstein-Uhlenbeck Prozess liegt beispielsweise den Vasicek Zinsstrukturmodellen zugrunde, denen gemeinsam ist, dass Zinsen bzw. die modellierten Zinsintensitäten x auch negative Werte aufweisen können. Ein Nachteil des Vasicek Zinsstrukturmodells ist, dass die anfängliche Zinsstrukturkurve von dem Modell nicht exakt repliziert werden kann. Das Modell von Hull-White als Erweiterung des Vasicek-Modells behebt dieses Manko, indem die anfängliche Kurve durch weitere in die stochastische Differentialgleichung eingeführte, zeitabhängige Parameter exakt modelliert werden kann.

In der Modellierungspraxis werden auf die Eigenschaften der einzelnen ökonomischen Variablen jeweils passende stochastische Differentialgleichungen eingesetzt. Für die Aktienindexmodellierung kann beispielsweise ein Poisson-verteilter Jump-Prozess in die Differentialgleichung mit aufgenommen werden, um die Taileffekte von Aktienrenditen wie z.B. Sprünge berücksichtigen zu können. Bei ökonomischen Variablen, die Autokorrelation aufweisen, wie beispielsweise BIP oder die Inflation (bzw. der modellierte Inflationsspread zum Kurzfristzins), gehen die vorangegangen realisierten Werte der Variablen in der stochastischen Differentialgleichung mit ein (siehe hierzu auch Kapitel 12.1.7). Ebenfalls werden in der Praxis z.B. Regime-Switching Ansätze verfolgt, bei denen sich die Parameter der stochastischen Differentialgleichung per Zufallsterm über die Zeit ändern, vgl. Abschnitt 12.1.6.

Da insbesondere in der Mehrperiodenmodellierung eine ökonomische Fundierung des Modellierungsansatzes sinnvoll erscheint, werden neben historisch beobachteten Zusammenhängen insbesondere auch volkswirtschaftlich beschriebene Theoreme wie Zins- und Kaufkraftparitäten, Taylor-Regel, etc. bei der Konstruktion eines gekoppelten Systems von stochastischen Differentialgleichungen berücksichtigt.

Zumeist werden die Ansätze sinnvoll kombiniert, so dass im Gesamtmodell eine plausible und statistisch fundierte Modellierung durch die Modellwahl erzielt wird.

Für Zinsstrukturen (komplette Zinskurven für alle Laufzeiten) und Kreditrisiken (komplette Spreadkurven für alle Laufzeiten und Ratings, Migrationsmatrizen) wird häufig auch eine Hauptkomponentenanalyse zur Vereinfachung vorgeschaltet und nur die Hauptkomponenten werden als Variablen in den stochastischen Differentialgleichungen modelliert.

12.1.2. Dimensionsreduktion durch Hauptkomponentenanalyse

Die Hauptkomponentenanalyse (Principal Component Analysis, PCA) ist ein mathematisches Verfahren, anhand dessen umfangreiche Datensätze vereinfacht werden können, indem eine Vielzahl statistischer Variablen durch eine geringere Zahl möglichst aussagekräftiger Linearkombinationen „dahinterliegender" Variablen (die „Hauptkomponenten") angenähert wird.

Das Verfahren wird oft bei Fragestellungen genutzt, in welchen es eine große Anzahl erklärender Variablen gibt, die hoch korreliert sind.

Algorithmus / Verfahren

Mathematisch gesehen wird eine Hauptachsentransformation (orthogonale Transformation) durchgeführt. Dadurch werden die mehrdimensionalen Daten dekorreliert und die Daten selbst transformiert, indem sie in einen Vektorraum mit neuer Basis überführt werden. Ziel dabei ist es, dass möglichst wenig Information verloren geht und vorliegende Redundanz in Form von Korrelation in den Datenpunkten zusammengefasst wird.

Datensatz

Der zugrundeliegende Datensatz hat typischerweise die Struktur einer Matrix, bspw. die Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$: Wir haben *n* Beobachtungen für *p* Variablen. Ein solcher Datensatz kann als Menge von *n* Punkten im *p*-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^p$ veranschaulicht werden.

Kovarianzmatrix/Korrelationsmatrix

Benötigt wird die empirische Kovarianzmatrix der abhängigen Variablen $\Sigma \in \mathbb{R}^{p \times p}$. Diese wird nach üblichen statistischen Methoden aus den Daten geschätzt.

Eigenvektoren und Eigenwerte

Für die weiteren Schritte werden die Eigenvektoren und Eigenwerte der Kovarianz/ Korrelationsmatrix benötigt. Die Hauptachsentransformation wird durch die orthogonale Matrix angegeben, die aus den Eigenvektoren der Kovarianzmatrix gebildet wird. Die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix bilden die Hauptkomponenten. Die korrespondierenden Eigenwerte weisen darauf hin, wie viel Information in den einzelnen Komponenten enthalten ist. Die Eigenvektoren werden in absteigender Reihenfolge nach den entsprechenden Eigenwerten $\lambda_1 > \cdots > \lambda_n$ geordnet.

Alternativ ist es möglich, in diesem Schritt, anstatt die Kovarianzmatrix zu berechnen, eine Singulärwertzerlegung zu benutzen. Diese liefert besonders bei stark kollinearen Variablen numerisch stabilere Ergebnisse. Auch kann sie sinnvoll sein, wenn so-genannte ill-posed Probleme vorliegen $(n \ll p)$ und die Kovarianzmatrix (mit den einhergehenden Schwierigkeiten) sehr groß wird. Im letzteren Fall kann man jedoch als weitere Möglichkeit auf die Gram-Matrix ausweichen und trotzdem eine Eigenwertzerlegung durchführen.

Auswahl der Komponenten

Jetzt werden die Komponenten ausgewählt, die für den größten Teil der Variation verantwortlich sind, d.h. man bestimmt q derart, dass

$$\frac{\sum_{i=1}^{q} \lambda_i}{\sum_{i=1}^{p} \lambda_i} \geq \alpha$$

für eine vorgegebene Höhe α an erklärter Varianz, z.B. 99%, gerade noch erfüllt ist.

Auf der einen Seite gilt, umso höher α gewählt wird, desto weniger Information geht verloren. Auf der anderen Seite gilt, wenn α zu hoch gewählt wird, werden die Dimensionen des Problems nicht wesentlich reduziert. Wenn die ersten Hauptkomponenten den größten Teil der Variation erklären (z.B. die ersten 3 von insgesamt 30 Komponenten erklären 98% der Varianz), dann kann die Dimension des Problems effektiv verringert werden.

Transformation der originalen Daten

Mit der Auswahl der q Hauptkomponenten, können die originalen Datenpunkte jetzt in einen q-dimensionalen Unterraum $\mathbb{R}^q$ ($q<p$) projiziert werden. Die transformierten Daten sind nicht gleich den Originaldaten, aber entsprechen diesen bis auf einen Fehlerterm, vergleichbar mit einer Linearen Regression ohne Fehlerterm nur mit den Regressoren:

$$A \cdot L = M$$

$$\tilde{A} = \widetilde{M} \cdot \tilde{L}^T$$

Hier ist $A \in \mathbb{R}^{n \times p}$ die Matrix, die die originalen Daten enthält, $L \in \mathbb{R}^{p \times p}$ ist die Matrix mit den Eigenvektoren (als Spalten) der entsprechenden Kovarianzmatrix und $M \in \mathbb{R}^{n \times p}$ ist die resultierende Matrix der Faktoren/Multiplikatoren. Die Dimensionsreduktion und damit die Approximation $\tilde{A} \in \mathbb{R}^{n \times p}$ erhält man nun dadurch, dass nur noch die ersten q Eigenvektoren und die entsprechenden Faktoren/Multiplikatoren in die Linearkombination einbezogen werden (die entsprechend reduzierten Matrizen sind mit $\tilde{L} \in \mathbb{R}^{p \times q}$ und $\widetilde{M} \in \mathbb{R}^{n \times q}$ bezeichnet).

Modellierung

Wenn die Hauptfaktoren einmal identifiziert sind, werden die transformierten Zeitreihen durch die unten angegebenen Modelle abgehandelt. Danach können durch Simulation

(Anzahl Szenarien: m) mögliche zukünftige Realisationen $\widetilde{M}^{Sim} \in \mathbb{R}^{m \times q}$ der Faktoren erzeugt und anschließend zur ursprünglichen Variablen-Dimension zurücktransformiert werden:

$$\tilde{A}^{Sim} = \widetilde{M}^{Sim} \cdot \tilde{L}^{T}$$

Praktische Hinweise

Da bei der Hauptkomponentenanalyse eine Menge korrelierter Variablen in eine Menge unkorrelierter Variablen transformiert wird, ist es naheliegend, vorher zu analysieren, inwiefern die Originalvariablen korreliert sind. Wenn einige der Ursprungsvariablen hochkorreliert sind, sagen sie im Wesentlichen dasselbe aus. Dann ist das Verfahren effektiv, weil die erklärenden Variablen reduziert werden können. Wenn die Originalvariablen schon von vornherein nahezu unkorreliert sind, wird eine Hauptkomponentenanalyse keinen Mehrwert liefern.

Durch die Rotation des Koordinatensystems werden die Daten dekorreliert. Für normalverteilte Datensätze sind dann die einzelnen Komponenten auch unabhängig. Im Gegensatz dazu können für nicht normalverteilte Datensätze die Daten immer noch abhängig sein, obwohl sie nun unkorreliert sind.

Bei der Hauptkomponentenanalyse wird kein statistisches Modell zur Erklärung der Fehlerstruktur vorausgesetzt. Insbesondere werden keine Annahmen über die Verteilungen der Ursprungsvariablen gemacht.

Eine weitere praxisrelevante Frage ist die Interpretation der ausgewählten Hauptkomponenten und wie gut man aus diesen Komponenten die Daten verstehen kann. Rein mechanische Anwendungen mit künstlichen, nicht intuitiv zu verstehenden Komponenten sind schwierig zu vermitteln.

Vor der tatsächlichen Implementierung einer Hauptkomponentenanalyse stellen sich darüber hinaus eine Reihe weiteren Fragen bzgl. der Aufbereitung der zu transformierenden Daten wie z.B. die Handhabung von Ausreißern, der Umgang mit fehlenden Daten, einer möglichen Glättung und/oder Standardisierung[13] der Inputdaten. Die jeweils gewählte Vorgehensweise ist so gut wie möglich zu motivieren und falls vom Aufwand her vertretbar die Unterschiede zu quantifizieren.

Vorteile

- Ein mehrdimensionales Problem wird auf ein einfacher zu handhabendes Problem mit einer niedrigeren Dimension zurückgeführt.
- Das Verfahren ist relativ einfach zu implementieren. Mit weniger Rechenaufwand kann eine hoch-dimensionale Simulation angenähert werden.

---

[13] Werden die Inputdaten derart standardisiert, dass sie vor Anwendung der PCA je Dimension eine Varianz von 1 besitzen, spricht man auch von einer PCA unter Verwendung der Korrelationsmatrix.

- Oft kann eine sinnvolle und intuitive Interpretation der Komponenten gefunden werden. Zum Beispiel lassen sich bei der Zerlegung einer Zinsstrukturkurve die ersten drei Hauptkomponenten als Level (Niveau), Slope (Steigung) und Curvature (Krümmung) interpretieren.

Nachteile

- Das Verfahren ist sensitiv gegenüber den gewählten Daten – z.B. Ausreißer, fehlende Datensätze, Glättung, Interpolation, Extrapolation.
- Außer bei Verwendung einer elliptischen Verteilung (wie bspw. der Normalverteilung) zur Simulation der Faktoren sind i.d.R. sowohl die gemeinsame Verteilung als auch die Randverteilungen der rücktransformierten Variablen analytisch unzugänglich.
- Wird keine sinnvolle und intuitive Interpretation der Komponenten gefunden, können diese kaum für die Steuerung verwendet werden.
- Die Ergebnisse der Autokorrelation sind stark vom Datensatz abhängig – für jeden Datensatz muss eine eigene Transformationsmatrix berechnet werden.

12.1.3. Bootstrapping / nichtparametrische Verteilungsmodelle

Das Bootstrapping (auch „historische Simulation") stellt eine Methode zur Szenariengenerierung ohne Verteilungsannahmen dar. Per Bootstrapping wird aus historischen Daten eine Verteilungsfunktion für zukünftige Ereignisse konstruiert.

Methode

Für einen Datenvektor $X_t = \left(x_t^{(1)}, \dots, x_t^{(n)}\right)$ aus Zeitreihen $x_t^{(i)}$, $i = 1, \dots, n$ mit historischen Beobachtungen zu den äquidistanten Zeitpunkten $t = 0, \dots, T$ werden die Veränderungsvektoren $\Delta X_t = \left(\Delta x_t^{(1)}, \dots, \Delta x_t^{(n)}\right)$ je Zeitperiode $[t-1; t]$ berechnet. Die zugrundeliegenden Zeitreihen können dabei direkt Finanzmarktzeitreihen wie Zinsen oder Aktienkurse sein, aber auch bereits transformierte Daten wie zum Beispiel die Hauptkomponenten der Zinskurve aus einer PCA. Im zweiten Fall müssen die simulierten Variablen X dann zurücktransformiert werden, um simulierte Finanzmarktzeitreihen zu erhalten. Transformationen können insbesondere auch benutzt werden, um Unter- oder Obergrenzen in den Zeitreihen zu garantieren, eine Transformation eines in Prozent gelieferten Indikators (z.B. Anteil der Bankkredite in Default) mit Wertebereich $[0\%, 100\%]$ in einen unbegrenzten Wertebereich erlaubt ein Bootstrapping der transformierten Daten ohne spezielle Behandlung von Werten nahe den Grenzen 0% oder 100%.

Basierend auf der Menge der historischen Veränderungen werden für eine historische Simulation über k Zeitschritte ausgehend vom Zeitpunkt T historische Zeitperioden $\tilde{t}_1, \dots, \tilde{t}_k$ zufällig mit Zurücklegen gezogen (Bootstrapping). Ein simuliertes Szenario über k Zeitschritte ergibt sich dann durch

$$X_T + \Delta X_{\tilde{t}_1} + \cdots + \Delta X_{\tilde{t}_k}\,.$$

Implizit werden hier additive Veränderungen $\Delta x_t^{(i)} := x_t^{(i)} - x_{t-1}^{(i)}$ angenommen. Analog könnten etwa für Aktien- und Immobilienindices, die in den Simulationen auch exponentielles Wachstum aufweisen sollen, auch relative Veränderungen $\Delta x_t^{(i)} := \ln\left(x_t^{(i)}/x_{t-1}^{(i)}\right)$ verwendet werden, bzw. äquivalent dazu für Aktienkurse die Transformation $Y = \ln(X)$ für das Bootstrapping verwendet werden.

Parametrische Bootstrap-Verfahren

Parametrische Bootstrap-Verfahren kombinieren parametrische Annahmen mit der Bootstrapping-Methode.

Ein Beispiel für die Kombination von Veränderungen ΔX_s gemäß Bootstrap mit parametrischen Modellen ist die nachträgliche Einarbeitung von Mean-Reversion. Bootstrapping geht implizit davon aus, dass die historischen Veränderungen ΔX_t unabhängig sind. Abhängigkeiten über die Zeit wie Mean-Reversion werden im einfachen Bootstrapping nicht berücksichtigt. In Anlehnung an das Euler-Maruyama-Verfahren lässt sich Mean-Reversion im Nachhinein wie folgt mit historischer Simulation kombinieren,

$$x_t^{(i)} := x_{t-1}^{(i)} + \kappa\left(\mu - x_t^{(i)}\right)\Delta t + \Delta x_s^{(i)},$$

wobei die Parameter κ und μ geschätzt werden müssen. Analog lassen sich auch Korrekturterme in Abhängigkeit von mehreren Risikofaktoren definieren, zum Beispiel um die Abweichungen zwischen zwei Risikofaktoren zu begrenzen. Ein Beispiel wäre etwa die Begrenzung der Abweichung zwischen Inflationsrate und Nominalzinsen durch die Modellierung des Realzinses mittels historischer Simulation mit Mean-Reversion-Effekt.

Alternativ lassen sich auch zunächst parametrische Modelle auf Zeitreihen anwenden, um erst danach Veränderungen bedingt auf diese Modelle zu bootstrappen. Schätzt man beispielsweise ARMA oder GARCH Modelle für eine Zeitreihe, lassen sich die historischen Residuen in einem Bootstrapping des ARMA oder GARCH-Prozesses verwenden. Wendet man Vektor-ARMA oder -GARCH Modelle an, enthalten die Residuen für das Bootstrapping auch die historisch realisierten Abhängigkeiten zwischen verschiedenen Risikofaktoren. Das gleiche Verfahren lässt sich auch zum Bootstrappen von diskretisierten stochastischen Differentialgleichungen anwenden, etwa einem Ornstein-Uhlenbeck-Prozess, oder zum Bootstrappen einer PCA, z.B. zum Bootstrappen der bekannten drei wichtigsten Hauptkomponenten der Zinsstrukturkurve.

Eine weitere Technik, zeitliche Abhängigkeiten zwischen den Veränderungen zu berücksichtigen, stellt Blocked Bootstrapping dar. Beim Blocked Bootstrapping wird immer ein Block von Innovationen gezogen, die in der gleichen Reihenfolge angewendet werden müssen. Die Länge eines Blocks (d.h. die Anzahl der Beobachtungen) kann als fix angenommen oder selbst stochastisch sein. Für das zu Anfang vorgestellte Modell eines Bootstrappings absoluter oder relativer Returns ist die fixe Blocklänge gleichbedeutend mit dem Bootstrapping längerfristiger Returns. In Kombination mit parametrischem Bootstrapping lassen sich so zeitliche Abhängigkeiten in der Simulation erhalten, die im parametrischen Modell nicht abgedeckt sind.

Datengrundlage

Für das Bootstrapping ist zu jedem Beobachtungszeitpunkt t ein vollständiger Datenvektor X_t notwendig. Damit werden beim Bootstrapping für alle Risikofaktoren Daten mit gleichem Beobachtungszeitraum und gleicher Beobachtungsfrequenz benötigt.

Je höher die gewählte Datenfrequenz der für das Bootstrapping verwendeten Veränderungen ΔX, je größer das Sample für das Bootstrapping. Allerdings führt die Aggregation vieler kurzfristiger Veränderungen zu einer „Normalisierung" der gesampelten Werte. In diesem Fall ist zu untersuchen, ob Abhängigkeiten über die Zeit wie Autokorrelation oder Mean Reversion eine Rolle spielen. Bei geringerer Datenfrequenz werden längere, gemeinsame Marktbewegungen und damit realisierte Abhängigkeiten erhalten, allerdings benötigen größere Samples entsprechend weiter zurückreichende Zeitreihen. Hier muss dann die Eignung der älteren Daten für aktuelle Simulationszwecke diskutiert werden.

Dem generellen Problem der Repräsentativität älterer historischer Marktveränderungen kann beim Bootstrapping auch mit einer Gewichtung begegnet werden, d.h. aktuellere Daten werden im Bootstrapping mit höherer Wahrscheinlichkeit gezogen als ältere Daten. Die Gewichte stellen dann Expertenschätzungen dar.

Vorteile

- Die historische Simulation ist in ihrer Grundform technisch schnell und einfach umzusetzen.
- Das Modell benötigt keine Verteilungsannahmen für die Risikofaktoren. Soweit in den Samples vorhanden, werden „Heavy Tails", asymmetrische Returns und stochastische Volatilität für die Simulation übernommen.
- Die historische Abhängigkeitsstruktur der Risikofaktoren wird direkt aus den Daten übernommen.

Nachteile

- Implizit wird beim Bootstrapping davon ausgegangen, dass alle historischen Beobachtungen aus der Sample-Menge in der Zukunft mit gleicher Wahrscheinlichkeit wieder vorkommen können.
- Historische Simulation in ihrer Grundform berücksichtigt nicht die historische Abhängigkeit über die Zeit.
- Extremereignisse können beim Bootstrapping auch nur in dem Maße auftreten, wie sie historisch beobachtet wurden. Noch nicht realisierte große Risiken können durch die Prognose nicht abgedeckt werden.

12.1.4. Parametrische Verteilungsmodelle

In diesem Abschnitt konzentrieren wir uns auf Modelle, die die Verteilung der Risikotreiber mit Hilfe von endlich vielen Parametern darstellen.

Sei X ein u.U. multivariater Risikofaktor. Parametrische Verteilungsmodelle erheben die Annahme

$$X \sim F_\theta, \qquad \theta \in \Theta$$

d.h. die Verteilung der Zufallsvariable X ist $F_\theta(x) := \mathrm{P}_\theta(X \leq x)$, wobei diese von Parametern θ abhängt und der Parameterraum Θ hier in Abgrenzung zu nichtparametrischen Verteilungsmodellen eine endliche Dimension besitzt.

Die Bestimmung der Parameter kann auf Basis der historisch beobachteten Daten des Risikofaktors erfolgen. Hierzu stehen verschiedene Methoden zur Verfügung, darunter die Momenten- sowie die Maximum-Likelihood Methode. Darüber hinaus existieren statistische Tests, um die Güte der Schätzung zu bestimmen.

Für die Wahl einer geeigneten Verteilung F_θ stehen viele Optionen offen. Dies umfasst die breite Exponentialfamilie, u.a. mit Verteilungen wie der Normal- oder Gammaverteilung, aber auch die Familie der elliptischen Verteilungen, u.a. mit wiederrum der Normal-, oder auch der t-Verteilung. Weitere flexible Familien sind Johnson-SU bzw. EGB2 (exponential generalized Beta). Im Folgenden wollen wir drei fundamentale Prinzipien festhalten, um die Wahl einer geeigneten Verteilung zu konkretisieren:

- Historische Realisierungen des Risikofaktors X sollen beschreibbar sein
- Die Parameter der Verteilung müssen bestimmbar sein
- Aus der Verteilung muss simuliert werden können

Dies hat folgende (nicht abschließende) Implikationen an die Verteilungswahl:

- Schiefe und Wölbung müssen zu den Daten passen
- Tail der Verteilung muss adäquat sein
- Bei Nutzung der Momentenmethode muss die Anzahl endlicher Momente mindestens der Anzahl der zu schätzenden Parameter entsprechen
- Bei Nutzung von Maximum-Likelihood muss die Dichte f_θ (bzw. der Logarithmus hiervon) existieren und auswertbar sein.
- Die Inverse von F_θ muss bestimmbar sein, um mit Hilfe der Inversionsmethode Zufallszahlen simulieren zu können. Andernfalls sollte ein Algorithmus hierfür existieren.
- Wir unterliegen außerdem einem Trade-Off zwischen genügend guter Parameterschätzung und Komplexität der Verteilungsannahme (siehe Abschnitt Kalibrierung).

Das generelle Prinzip soll nachfolgend anhand zweier Verteilungen skizziert werden:

Normalverteilung

Für die Parameterbestimmung per Maximum-Likelihood ist die analytische Form der Dichte bekannt:

$$f_{N(\mu,\sigma^2)}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right)$$

Der Weg über die Momentenmethode benötigt die Schätzung des Erwartungswertes und der Varianz. Beide stehen bei dieser Verteilung in einer Eins-zu-eins-Beziehung zu den Parametern:

$$\mu = \mathrm{E}[X]$$

$$\sigma^2 = \mathrm{E}[(X-\mu)^2]$$

Johnson's SU

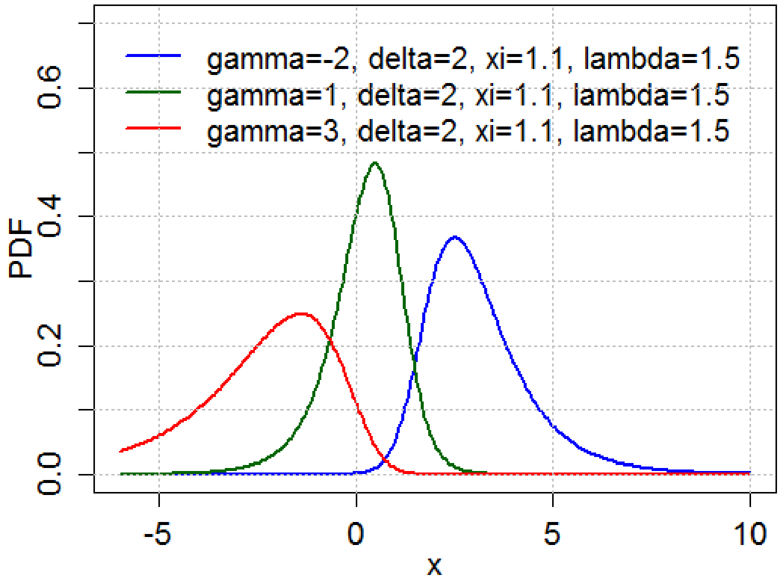
Um auch schiefe Verteilungen mit verschiedenen Tailausprägungen flexibel erzeugen zu können, ohne dabei die Verteilungsfamilie zu verlassen, eignet sich z.B. die Johnson-SU Verteilungsfamilie. Diese kann über folgende stochastische Repräsentation mit Hilfe einer standardnormalverteilten Zufallsvariable $Z \sim N(0,1)$ definiert werden:

$$X = \lambda \sinh\left(\frac{Z-\gamma}{\delta}\right) + \xi, \theta = (\gamma, \xi, \delta, \lambda), \delta > 0\,, \lambda > 0.$$

Die Dichtefunktion ist damit geben durch

$$\begin{aligned} f_\theta(x) &= \frac{\delta}{\lambda\sqrt{1+\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)^2}} f_{N(0,1)}\left(\gamma + \delta \sinh^{-1}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)\right) \\ &= \frac{\delta}{\lambda\sqrt{1+\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)^2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\gamma + \delta \sinh^{-1}\left(\frac{x-\xi}{\lambda}\right)\right]^2\right), \end{aligned}$$

wobei $f_{N(0,1)}$ der Dichte der Standardnormalverteilung entspricht. Die verschiedenen Verteilungsformen sind folgendem Schaubild zu entnehmen:



Hier wird deutlich, dass vielseitige Ausprägungen der Schiefe und Wölbung abgebildet werden können.

Für die Momentenmethode lauten der Erwartungswert und die weiteren drei zentralen Momente unter Zuhilfenahme von $b := \exp(\delta^{-2})$:

$$\mu = \mathrm{E}[X] = \xi - \lambda\sqrt{b}\sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)$$

$$\mu_2 = \mathrm{E}[(X-\mu)^2] = \frac{\lambda^2}{2}(b-1)\left(b\cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right)+1\right)$$

$$\mu_3 = \mathrm{E}[(X-\mu)^3] = \frac{\lambda^3}{4}\sqrt{b}(b-1)^2\left(b(b+2)\sinh\left(\frac{3\gamma}{\delta}\right)+3\sinh\left(\frac{\gamma}{\delta}\right)\right)$$

$$\mu_4 = \mathrm{E}[(X-\mu)^4]$$

$$= \lambda^4(b-1)^2\left(\frac{(b^6+2b^5+3b^4-3b^2)}{8}\cosh\left(\frac{4\gamma}{\delta}\right) + \frac{(b^3+2b^2)}{2}\cosh\left(\frac{2\gamma}{\delta}\right) + \frac{3(2b+1)}{8}\right)$$

Für Simulationen kann auf die stochastische Repräsentation zurückgegriffen werden.

Vorteile

- Flexible Beschreibung der Daten durch geeignete Wahl der Verteilung möglich.
- In simulationsbasierten Modellen stehen Zustände des Risikofaktors X auch außerhalb der beobachteten Realisierungen zur Verfügung: extreme, nie beobachtete Ausprägungen können simuliert werden.
- Die Schätzmethoden sind gut untersucht und es stehen viele Ansätze zur Güteabschätzung als auch für Konfidenzintervalle zur Verfügung. Letzter Punkt kann für die Abbildung einer „Secondary Uncertainty" verwendet werden, indem zuerst die Parameter aus dem Konfidenzintervall und erst darauf basierend die eigentlichen Zufallszahlen simuliert werden.

Nachteile

- Das Modell benötigt eine Verteilungsannahme für die Risikofaktoren, die durch die Wahl einer bestimmten Verteilungsfamilie mehr oder weniger stark sein kann.
- Historische Abhängigkeiten über die Zeit sind nicht abgebildet, da eine unkonditionierte Verteilung modelliert wird. Dieser Umstand kann durch eine Kombination mit Zeitreihenmethoden geheilt werden.

12.1.5. Zeitreihenmodelle

Ein Zeitreihenmodell eines Risikofaktors ist ein stochastischer Prozess $(X_t)_{t\in Z}$, dessen Zufallsvariablen zeitlich geordnet sind (vgl. bspw. [32.]). Eine empirische Zeitreihe („Pfad") stellt eine mögliche Realisation dieses stochastischen Prozesses dar.

Stylized Facts

Empirische Zeitreihen („Pfade") von Finanzmarkdaten weisen sehr häufig ähnliche empirische Phänomene auf. Diese werden in der Literatur als „stylized facts" bezeichnet (vgl. [32.], S. 125f):

- Returns sind nicht identisch und unabhängig verteilt (i.i.d.), sondern weisen Autokorrelationen auf.
- Quadrierte Returns oder Absolutwerte von Returns weisen hohe Autokorrelationen selbst für weiter in der Vergangenheit zurückliegende Beobachtungen auf.
- Die Volatilität der Returns ist nicht konstant. Ihre Verteilung ist leptokurtisch („heavy-tailed").

Die in diesem Kapitel vorgestellten ARIMA-GARCH Modelle machen sich diese Eigenschaften in der Modellierung einer Zeitreihe zunutze. Wir stellen zunächst reine GARCH Prozesse vor und betrachten dann ARIMA Prozesse. Anschließend setzen wir diese zu ARIMA-GARCH Prozessen zusammen.

GARCH: Generalized Autorregressive Conditional Heteroskedasticity

Z_t seien i.i.d. Zufallsvariablen mit Erwartungswert Null und Varianz 1 („strict white noise process"). Dann wird ein GARCH(p,q)-Prozess definiert als:

$$X_t = \sigma_t Z_t$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

wobei $\alpha_0 > 0$ und $\alpha_i,\ \beta_i \geq 0$ sind.

Die bedingte[14] Varianz von X_t ist durch σ_t^2 gegeben. Die empirische Motivation für das GARCH Modell liegt im Stylized Fact (2): Die heutige bedingte Varianz wird als eine Funktion von quadrierten Beobachtungen von X_t in der Vergangenheit modelliert. Es hat sich als zweckmäßig erwiesen, zusätzlich vergangene Werte der bedingten Varianz selbst mit aufzunehmen.

Wir haben zunächst angenommen, dass der bedingte Erwartungswert von X_t null ist. Auf diese Restriktion verzichten wir im unten beschriebenen ARMA-GARCH Modell.

ARMA: Autoregressive Moving Average

Zur Modellierung der Autokorrelation (Stylized Fact (1)) von stationären Daten kann ein ARMA(r,s)-Prozess verwendet werden. Dieser ist definiert als

$$X_t = \mu + \sum_{i=1}^{r} \varphi_i (X_{t-i} - \mu) + \sum_{i=1}^{s} \theta_i \varepsilon_{t-i} + \varepsilon_t ,$$

wobei die ε_t ein „white noise" Prozess mit Erwartungswert Null und Varianz σ^2 und einer Autokorrelationsfunktion von 0 sind. Der Prozess X_t hat den (unbedingten) Erwartungswert μ.

Ökonomisch bedeutet dies, dass X_t durch vergangene Werte seiner selbst sowie „Innovationsterme" ε_t bestimmt wird, die z.B. als neue Information, die den Kurs einer Aktie bestimmen, aufgefasst werden können.

ARIMA(r,d,s): Integrated ARMA

Im Abschnitt über ARMA wurde unterstellt, dass die zu modellierenden Daten stationär[15] sind. Betrachtet man Kurse von Finanzmarktdaten, ist dies häufig nicht der Fall. Oft kann jedoch durch die Bildung von „Lag Differences" eine stationäre Zeitreihe erzeugt werden. Unter einer Lag Difference versteht man die Differenz von $(X_t - X_{t-1})$. Diese sind im Zweifel d-fach anzuwenden, bis eine stationäre Zeitreihe entsteht. Der (Augmented-) Dickey-Fuller Test, sowie der Phillips-Perron und Kwiatkowski-Phillips-Schmidt-Shin (KPSS) Test können verwendet werden, um zu testen, ob die Zeitreihe stationär ist.

ARMA(r,s)-GARCH(p,q)

ARMA und GARCH Modelle können auch kombiniert werden, um gleichzeitig den bedingten Erwartungswert und die bedingte Varianz zu modellieren. Das Modell schreibt sich dann:

$$X_t = \mu_t + \sigma_t Z_t$$

---

[14] Bedingt auf die bis t-1 vorhandenen Informationen.

[15] Der (unbedingte) Erwartungswert, die (unbedingte) Varianz und die Autokorrelationsfunktion eines stationären ARMA-Prozesses sind konstant über die Zeit, daher sollte dies auch für die Ausgangsdaten gelten.

$$\mu_t = \mu + \sum_{i=1}^{r} \varphi_i (X_{t-i} - \mu) + \sum_{i=1}^{s} \theta_i (X_{t-i} - \mu_{t-i})$$

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i (X_{t-i} - \mu_t)^2 + \sum_{i=1}^{q} \beta_i \sigma_{t-i}^2$$

Simulation der Modelle

Für Simulation eines GARCH Modells muss eine geeignete Verteilung für die Z_t gewählt werden. Da die Z_t nicht beobachtbar sind, kann zur Schätzung die Backout Methode von McNeil und Frey [37.] verwendet werden. Hierzu wird das GARCH Modell zunächst mithilfe von Quasi-ML geschätzt und die geschätzten Innovationsterme $\breve{Z}_t = \frac{X_t}{\widehat{\sigma_t}}$ berechnet. Nun wird für die $\breve{Z}_t$ eine angemessene Verteilung (häufig t- oder Normalverteilung) gefittet. Mithilfe diagnostischer Tools wie QQ-Plots oder statistischer Test kann die Angemessenheit des Fits überprüft werden (siehe auch den Abschnitt zu parametrischen Verteilungen).

Zur Simulation von ARMA Modellen muss zunächst die Verteilung der ε_t bestimmt werden und entsprechende Pseudo-Zufallszahlen müssen erzeugt werden. Anschließend können die Gleichungen im Abschnitt unter Wahl geeigneter Startwerte simuliert werden. Aufgrund der Abhängigkeit der ersten Simulationsschritte von den Startwerten empfiehlt es sich, mehr Zeitpunkte als die gewünschte Stichprobengröße zu simulieren und die ersten Werte pro Pfad aus der Simulation zu entfernen.

Erweiterungen

In Erweiterung des hier vorgestellten GARCH-Standardmodells gibt es verfeinerte Modelle wie Exponential-GARCH (in diesem Modell wird der Logarithmus der bedingten Varianz modelliert, dadurch sind die Positivitätsrestriktionen der Parameter nicht notwendig), Threshold GARCH (modelliert asymmetrische Reaktion der Volatilität auf positive und negative Returns) und IGARCH (lang anhaltende Volatilitätsschocks können modelliert werden). In diesem Zusammenhang sei auf Hansen [38.] verwiesen. In diesem Aufsatz werden 330 verschiedene GARCH Spezifikationen miteinander verglichen. Die Spezifikationen werden zur Volatilitätsvorhersage von Aktien- und Wechselkursen verwendet. Es zeigt sich, dass kein Modell besser als ein GARCH(1,1) Modell abschneidet. Dies muss selbstverständlich nicht für jede Stichprobe gelten.

Außerdem existieren für ARIMA-GARCH Prozesse in der Literatur diverse multivariate Erweiterungen. Die größte Herausforderung hierbei ist die Spezifizierung der Abhängigkeitsstruktur zwischen den einzelnen Zeitreihen. Diese kann beispielsweise mithilfe einer Copula modelliert werden. Zu beachten ist, dass die Anzahl der zu schätzenden Parameter stark zunimmt. Multivariate ARMA Modelle werden in Lütkepohl [41.] diskutiert.

Auch für GARCH Modelle gibt es multivariate Erweiterungen wie BEKK- und CCC Modelle.

Vorteile

- Zeitreihenmodelle ermöglichen die Modellierung der aufgeführten „stylized facts".
- Historisch nicht beobachtete Extremereignisse können simuliert werden.
- In den Standard-Statistiktools ist die Schätzung und die Simulation der bekannten Zeitreihenmodelle bereits implementiert (R, Python, Matlab).
- Erweiterungen ermöglichen dezidierte Modellierung von weiteren Eigenschaften von Finanzmarktzeitreihen.

Nachteile

- Die Parameterschätzung ist, wie auch bei einfachen parametrischen Modellen, sensitiv gegenüber Ausreißern in den Daten.
- Eine ökonomische Interpretation ist für große p und q schwierig.

12.1.6. Regime-Switching Modelle

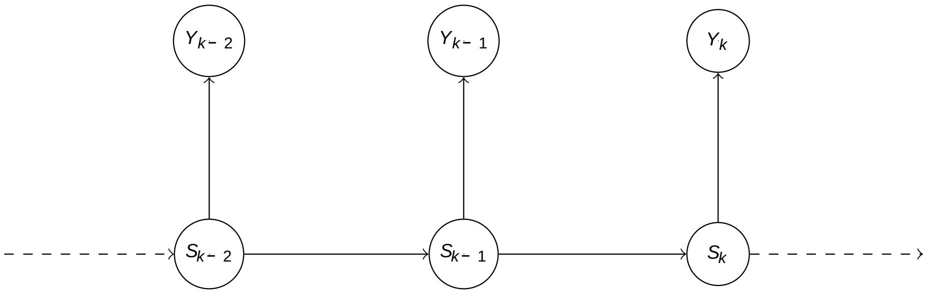
Modelle mit Regime Switch bieten (als Erweiterung zu den Modellen aus den Kapiteln 12.1.4 und 12.1.5) die Möglichkeit, Modellcharakteristika wie Verteilungsparameter oder die Parameter eines Zeitreihenmodells in Abhängigkeit eines zugrundeliegenden Regimes zu definieren. Ein Regime ist dabei ein latenter, interpretierbarer Zustand wie bspw. eine gerade anhaltende Konjunkturphase. Die Ausprägung eines Regimes ist in der Regel nicht direkt beobachtbar, hat jedoch wesentlichen Einfluss auf die Verteilungseigenschaften der Risikofaktoren wie bspw. Volatilität oder Autokorrelation.

Neben dem eigentlichen, beobachteten Risikofaktor Y_t umfasst ein Modell mit Regime Switch demnach immer einen weiteren Prozess S_t, der das zu jedem Zeitpunkt t aktive Regime beschreibt. Zwei verbreitete Varianten, einen solchen Zustandsprozess S_t in ein Risikofaktormodell zu integrieren, sind Threshold- und Markov-Switching Modelle. Ein Hidden Markov Modell, beispielhaft im Folgenden näher konkretisiert, stellt dabei eine der einfachsten Formen eines Markov-Switching Modells dar.

Ein Hidden Markov Modell (HMM) ist ein bivariater stochastischer Prozess $(Y_t, S_t)_t$ mit Zeitindex $t = 0, 1, \dots$ und den drei folgenden Eigenschaften:

1. Y_t ist eine Folge beobachtbarer Zufallsvariablen.
2. S_t ist eine zeithomogene, in der Regel nicht beobachtbare Markov-Kette erster Ordnung mit endlichem Zustandsraum $\mathcal{M} = \{1,2, \dots, m\}$ und zugehörigen Übergangswahrscheinlichkeiten $p_{i,j} = \mathrm{P}(S_t = j \mid S_{t-1} = i)$.
3. Bedingt auf die Folge S_t sind die Risikofaktoren Y_t stochastisch unabhängig. Außerdem besitzt Y_t bedingt auf das Ereignis $S_t = s$ die Verteilungsfunktion F_s bzw. Dichte f_s und ist von den vergangenen Zuständen $S_{t-1}, S_{t-2}, \dots$ stochastisch unabhängig.

Die Abhängigkeitsstruktur eines HMMs lässt sich durch folgendes Diagramm veranschaulichen:



Die beobachteten Zufallsgrößen Y_t eines HMMs sind nicht stochastisch unabhängig, sondern sind über die latenten Regime S_t miteinander verknüpft.

Historisch aufgetretene Regime

Die zu den historisch beobachteten Daten Y_t gehörenden Regime S_t sind in der Regel nicht beobachtbar. Nach Kalibrierung des HMMs lassen sich jedoch genauere Rückschlüsse auf die Verteilung möglicher Zustandsabfolgen ziehen. Von besonderem Interesse ist dabei die Sequenz $s_1, \ldots, s_n$ der Markov-Kette S_t, die gegeben aller Beobachtungen mit größter Wahrscheinlichkeit eigetreten ist:

$$\arg \max_{s_1,\ldots,s_n \in \mathcal{M}} \mathrm{P}(S_1 = s_1, \ldots, S_n = s_n \mid Y_0 = y_0, \ldots, Y_n = y_n, S_0 = s_0)$$

Für großes n ist es nicht praktikabel, dieses diskrete Optimierungsproblem durch explizite Berechnung aller möglichen Wahrscheinlichkeiten zu lösen. Mit Hilfe des Viterbi-Algorithmus lässt sich die optimale Sequenz jedoch effizient mit linearem Aufwand bestimmen, siehe bspw. Zucchini and MacDonald [44.].

Vorhersageverteilung

Die Vorhersageverteilung zur Simulation innerhalb eines HMMs ist gegeben durch das Mischungsmodell

$$\mathrm{P}(Y_{t+1} \leq y \mid Y_t = y_t, \ldots, Y_0 = y_0, S_0 = s_0) = \sum_{s \in \mathcal{M}} \alpha_s F_s(y)$$

mit den Mischungsgewichten

$$\alpha_s = \mathrm{P}(S_{t+1} = s \mid Y_t = y_t, \ldots, Y_0 = y_0, S_0 = s_0)\,.$$

Ähnlich wie bei der Log-Likelihood-Funktion $L(\theta)$ verwendet man ein dynamisches Berechnungsverfahren zur numerisch stabilen Bestimmung der Gewichte α_s.

Erweiterungen

Eine Erweiterung eines einfachen HMMs erhält man durch die Annahme, dass die Beobachtungen Y_t gegeben den Zuständen S_t nicht länger unabhängig sind, sondern wiederrum einem Zeitreihenmodell folgen, bspw.

$$Y_t = \varphi_{S_t} Y_{t-1} + \theta_{S_t} \varepsilon_t\,.$$

Auf diese Weise erhält man ein switching autoregressives Modell, dessen Parameter φ_{S_t} und θ_{S_t} von der Realisation des Regimes S_t abhängen. Für die Anwendung ist jedoch zu beachten, dass auch die Komplexität der Log-Likelihood-Funktion, der Vorhersageverteilung und des Viterbi-Algorithmus je nach Umfang der zusätzlichen Abhängigkeitsstruktur weiter zunehmen.

Vorteile

- Regime-Switching Ansätze sind flexibel anwendbar, lassen sich mit den meisten parametrischen Modellen wie bspw. parametrischen Verteilungsmodellen, Zeitreihenmodellen oder stochastischen Differentialgleichungen kombinieren und stellen eine echte Erweiterung dieser da.
- Historisch beobachtete Veränderungen im Verhalten eines Risikofaktors lassen sich durch Regime-Switching Modelle angemessener abbilden.
- Unterschiedliche Regime lassen sich i.d.R. gut interpretieren, bspw. als Phasen hoher und niedrigerer Volatilität.

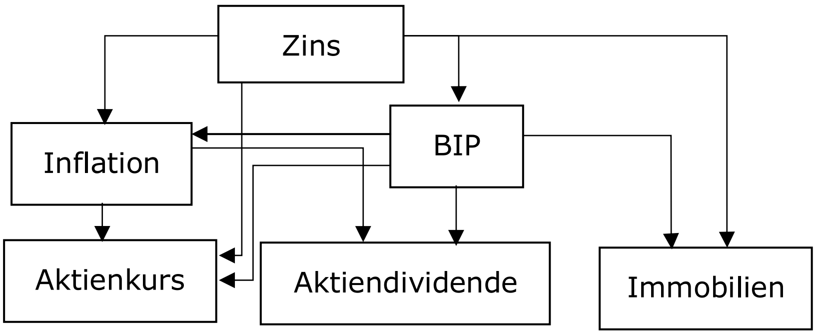
Nachteile

- Die Komplexität der Modellkalibrierung kann beträchtlich steigen. Es existieren i.d.R. keine geschlossenen Formeln für die Parameterschätzung. Daher sollte immer auch die Stabilität der Schätzung analysiert werden.

12.1.7. Kaskadenmodelle

Kaskadenmodelle sind derart aufgebaut, dass Teilmodelle für einzelne ökonomische Variable aufeinander aufbauen können. Das bedeutet, dass pfadweise der zum jeweiligen Projektionszeitpunkt realisierte Wert für eine Größe (z.B. Kurzfristzins) als ein Parameter in die Modellierung einer anderen Größe eingeht (z.B. Inflation). Derart ist ein Zusammenhang zwischen den ökonomischen Größen bereits durch das Modelldesign möglich und Stylized Facts der Zusammenhänge können direkt reflektiert werden. Häufig finden auch in der ökonomischen Literatur beschriebene und plausible Zusammenhänge (z.B. Zins- und Kaufkraftparitäten bei Wechselkursen) Eingang in das Modelldesign, ohne dass ein empirischer Nachweis der Zusammenhänge statistisch gesichert ist.

Ausgangspunkt der Kaskade bildet in der Praxis zumeist das Zinsmodell.



Die Grafik zeigt ein mögliches Kaskadenmodell. Beispielsweise kann in obiger Kaskade die Inflation als Spread oberhalb des Kurzfristzinses modelliert sein, wobei je nach Konjunkturzyklus ein unterschiedliches Regime angenommen wird. Die Inflation selbst entspricht dann dem Kurzfristzins plus dem modellierten Inflationsspread. Damit ist inhärent durch das Modelldesign ein pfadweiser Zusammenhang zwischen der Inflation und dem im Pfad vorliegenden Zinsniveau sowie dem Konjunkturzyklus und damit auch der Aktien- und Immobilienentwicklung gegeben, da Aktien und Immobilien ebenfalls von der BIP Entwicklung direkt abhängen. Im Rahmen der Modellkalibrierung muss diese Eigenschaft bei der Kalibrierung der Zufallsterme (lineare Korrelation sowie nichtlineare Zusammenhänge über z.B. Copula) berücksichtigt werden.

Vorteile

- Ökonomischer Zusammenhänge werden unmittelbar in der Modellstruktur abgebildet.

Nachteile

- Steuerung von Korrelationen auf Risikofaktorebene nicht direkt durch Setzung von Korrelationen zwischen den Zufallsvariablen der Differentialgleichungen möglich.

12.2. Risikofaktoren

Nachdem in Kapitel 12.1 zunächst eine Vielzahl an gängigen Methoden und Hilfsmitteln zur real-world Modellierung von Risikofaktoren vorgestellt wurden, soll im Folgenden genauer auf die unterschiedlichen, relevanten (Markt-) Risikotreiber selbst und deren Charakteristika eingegangen werden.

12.2.1. Zinsen

In der Zinsmodellierung können in der Praxis viele der oben beschriebenen Methoden angewendet und kombiniert werden.

Vor etwaigen Transformationen bietet es sich an, am Markt nicht beobachtete Punkte der Zinskurve durch Intra- und Extrapolationsverfahren, wie z.B. Smith-Wilson, zu vervollständigen. Somit erhält man eine Zinsstrukturkurve in beliebiger Granularität und Länge. Bereits ohne diese Behandlung ist die Dimension der als Vektor dargestellten

Zinskurve nicht klein und es bieten sich auch im Folgenden dargestellte Dimensionsreduktionsmethoden an, um die statistische Schätzgüte zu verbessern.

Erste Prozessschritte umfassen oft die Transformation der am Markt beobachteten Zinsstände in absolute oder logarithmische Zinsveränderungen, wobei für letztere insbesondere bei negativen Zinsen noch ein sogenanntes Displacement, d.h. eine Verschiebung der Zinskurven in den positiven Wertebereich durchgeführt werden muss. Diese Verschiebung ist nicht nur hilfsweise notwendig, damit sich die Daten im Definitionsbereich des Logarithmus befinden, sondern kann auch dazu genutzt werden, einen Floor in die Zinsprojektionen einzubauen. Denn nach Simulation und Rücktransformation der Risikofaktoren in Zinsstände definiert der Displacementparameter eine Untergrenze der Zinsstände. Dieser Parameter muss nicht zwingend konstant sein und kann als Vektor laufzeitabhängige Floors definieren.

Ob eine Modellierung der Zinsen anhand (displaced) log-returns sinnvoll ist, ist zu validieren, denn es lassen sich historisch beide Regime (absolut bzw. log) ausmachen. Hier bietet sich die inverse-call Transformation an, die Eigenschaften von absoluten und logarithmischen Zinsbewegungen fließend kombiniert und zusätzlich eine Floorkomponente durch ein Displacement erlaubt [38.].

Der nächste Prozessschritt umfasst in der Regel eine Anwendung der Hauptkomponentenanalyse. Diese hat den Vorteil, die funktionale Struktur einer Zinskurve in klassische Zufallsvariablen zu überführen. Oft beschränkt man sich auf die ersten drei Hauptkomponenten, da diese den Großteil der Zinskurvenvariabilität beschreiben. Eine etwas andere Möglichkeit, eine Dimensionsreduktion durchzuführen, setzt direkt bei Zinsstrukturmodellen wie Nelson-Siegel an, indem die dortigen Modellparameter als Risikofaktoren modelliert werden. Letztere Methode beschreibt die Zinskurve beispielsweise über ein Triplet von Shift, Twist und Butterfly, die auch nach Anwendung einer PCA sehr gut wiedererkannt werden können.

Nach der Transformation und Dimensionsreduktion erhält man die eigentlichen Risikofaktoren, die anschließend mit Hilfe der anderen Modelle der Toolbox behandelt werden können. Zum einen können diese Risikofaktoren direkt über eine parametrische Verteilung oder ein Bootstrapping modelliert werden. Die Risikofaktoren können aber auch über ein Zeitreihenmodell abgebildet werden, wobei anschließend die Residuen wieder über parametrische bzw. nicht-parametrische Verteilungen modelliert werden können.

Nachdem die Verteilungen bzw. deren Parameter sowie diejenigen der Zeitreihenmodelle bestimmt sind und man anschließend Simulationen erzeugt hat, müssen die obigen Transformationsschritte in umgekehrter Reihenfolge rückgängig gemacht werden, um wieder Zinsstände aus den Risikofaktoren abzuleiten.

Bei der Anwendung von Bootstrap-Methoden für Zinsen sind zeitliche Abhängigkeiten zu beachten. Ein einfaches Bootstrap-Verfahren der Returns ist dafür zumeist ungeeignet, parametrische Bootstrap Modelle sind zu bevorzugen. Bei der Auswahl des verwendeten Modells sollten Effekte wie Mean-Reversion und Autokorrelation von Zinsraten, aber auch Eigenschaften der Zinsstrukturkurve (z.B. Mean-Reversion der Steigung der Zinskurve) beachtet werden. Auch ökonomische Zusammenhänge mit anderen Zeitreihen, insbesondere Inflation, sind nicht zu vernachlässigen.

12.2.2. Aktien

Bewegungen von Aktienkursen werden in der Regel über logarithmische Returns modelliert, da das Ausmaß von Kursschwankungen typischerweise stark vom aktuellen Niveau einer Aktie abhängt. Auch weisen historische Zeitreihen von Aktienkursen deutliche Heteroskedastizität auf, d.h. es lassen sich Regime ausmachen, die durch sogenanntes Volatility-Clustering gekennzeichnet sind. Daher sind ARMA-GARCH Zeitreihenmodelle für die Modellierung von Aktienkursen prädestiniert. Die Residuen können anschließend über parametrische Verteilungen sowie Bootstrapping modelliert und simuliert werden. Alternativ können Regime-Switching Modelle zur Beschreibung der Volatility Cluster verwendet werden. Insbesondere bei mehrjährigen Anwendungen mit Fokus auf Cashflows lassen sich auch Dividendenmodelle anwenden, die den Wert einer Aktie auf Basis abdiskontierter erwarteter Dividendenzahlungen bestimmen, z.B. das Gordon-Growth Modell.

Außerdem oft verwendetet Modelle für das Aktienrisiko sind die so genannten Jump-Diffusion Modelle. Bei diesen folgt der Aktien-(Log-)Return einer Brownschen Bewegung kombiniert mit z.B. einem Poisson Prozess, der unerwartete und instantane Sprünge modelliert. Damit erlauben diese Modelle die Abbildung von Ausreißern und „Heavy Tails‟, wie sie bei empirischen Daten von Aktien-Renditen beobachtet werden können.

Aufgrund der geringen Autokorrelation, insbesondere bei täglichen Renditen, kann es sinnvoll sein, ein reines GARCH Modell mit einem über die Zeit konstanten Erwartungswert zu schätzen. Die Schätzung von Autokorrelationsfunktionen kann bei dieser Entscheidung hilfreich sein.

Bei der Betrachtung von Aktienportfolien stellt Diversifikation einen wesentlichen Treiber des Erfolgs dar. Die Abhängigkeitsstruktur zwischen Aktienkursen am Markt ist jedoch über die Zeit nicht konstant und insbesondere in Krisenzeiten steigt die Korrelation deutlich an. Um diese variablen Diversifikationseffekte im Aktienmarkt abzubilden, sind Block-Bootstrapping-Verfahren gut geeignet, da direkt aus der historisch beobachteten Kurskonstellation vieler Einzeltitel oder Teilindizes Zufallszahlen generiert werden. Auch auf Ebene von Einzelaktien bietet Bootstrapping den Vorteil historisch realisierte stochastische Volatilitäten, Skewness und Kurtosis abzubilden, ohne diese explizit modellieren zu müssen.

Ein weitverbreiteter ökonomischer Ansatz zur Dimensionsreduktion ist die Unterscheidung in systematisches Marktrisiko und idiosynkratisches Einzeltitel-Risiko, zum Beispiel in den bekannten CAPM Modellen. Modelliert wird dann lediglich das systematische Risiko, gegebenenfalls unterteilt in verschiedene Regional- oder Branchenindices. In der Praxis ist es weiter eher unüblich, statistische Dimensionsreduktionsverfahren wie eine PCA für Aktien anzuwenden, was jedoch im Hinblick auf die vielen Abhängigkeiten zwischen Einzeltiteln dennoch sinnvoll sein kann. Insbesondere bei Anwendung von nicht-parametrischen Modellen, wie Bootstrapping, wird so dem "Curse of Dimensionality" entgegengewirkt.

12.2.3. *Immobilien*

Modelle für Immobilienerträge orientieren sich häufig an den für Aktien eingesetzten Modellen. Ebenfalls werden Zeitreihenmodelle eingesetzt, da die bei Immobilienerträgen aus verschiedenen Gründen (u.a. stabiler Mietenertrag aber auch Bewertungsbedingt s.u.) vorhandene Autokorrelation dann direkt im Modellaufsatz berücksichtigt werden kann.

In Kaskadenmodellen findet für die Immobilienmodellierung wie bei Aktien häufig ein Risikoprämienansatz Anwendung, darin wird pfadweise die Immobilienrendite oberhalb der Cash-Rendite modelliert.

In Mehrperiodenmodellen können auch Abhängigkeiten des Immobilienertrags von anderen ökonomischen Variablen wie Wirtschaftswachstum und Inflation berücksichtigt werden.

Weiterhin sind als Teilmodellkomponente Approximationen eines Bewertungsverfahrens im Einsatz, in dem eine Wertkomponente des Immobiliengesamtertrags als zinssensitiv mit Duration einer marktüblichen, mittleren Mietvertragsrestlaufzeit angenommen wird.

In der Praxis wird oftmals eine Unterscheidung in Bezug auf die Modellierung von direkt gehaltenen Immobilien im Gegensatz zu Immobilien in Fonds vorgenommen. Bei den direkt gehaltenen Immobilien kann auf individuelle Bestandsdaten zurückgegriffen werden und die aggregierten künftigen Mieterträge des Portfolios werden als Ertragskomponente direkt berücksichtigt. Dazu ist modelltechnisch allerdings eine Aufteilung in Gesamtertrag und laufenden Ertrag notwendig. Für Immobilienfonds findet dagegen häufig eine marktorientierte Modellierung mit Fokus auf die Gesamtertragssicht Verwendung.

Die Datengrundlage für Immobilien schließt eine Anwendung von einfachen Bootstrapping-Methoden zumeist aus. Bereits die Messung von Renditen für den Immobilienmarkt gestaltet sich in der Praxis schwierig, da jede Einzelimmobilie heterogene Eigenschaften hat. Zudem finden Transaktionen in den Einzelimmobilien selten statt und Transaktionspreise sowie Rendite sind nicht einfach öffentlich zugänglich. Zur Messung transaktionsbasierter Immobilienmarktrenditen müssen daher zunächst individuelle Einzelobjekteigenschaften korrigiert werden, bevor diese als repräsentativ für den Immobilienmarkt gelten können. Da institutionelle Immobilienbestände, sowohl im Direktbestand als auch in Fonds, jedoch regelmäßig bewertet werden müssen, werden zumeist Aggregate aus Bewertungswertveränderungen sowie im jeweiligen Zeitraum aufgelaufene Cashflow wirksame Nettoerträge als Datengrundlage für Immobilienmarktrenditen verwendet. Den verwendeten Bewertungsverfahren ist allerdings je nach Verfahren eine mehr oder weniger starke zeitliche Glättung immanent, zudem findet eine Objektbewertung üblicherweise nur einmal jährlich statt. Daher erfolgt auch oftmals eine Entglättung der Zeitreihen mit Verfahren wie Blundell-Ward oder AR-Filter, um die darunterliegende Ertragscharakteristik der Immobilienzeitreihe direkt abbilden zu können. Die Veröffentlichung von aus Direktbestandsdaten oder Fonds aggregierten Immobilienrenditen durch die Datenanbieter findet dann häufig lediglich in vierteljährlicher Frequenz statt. Soll ein Bootstrapping Verfahren eingesetzt werden, so wäre aufgrund der geglätteten Immobilienzeitreihe eine parametrische Bootstrapping-Methode erforderlich. Expertenschätzung spielen naturgemäß aufgrund der fehlenden Daten eine große Rolle in der Parametrisierung. Beispielsweise ist bei langfristigen Mehrperiodensimulationen der Zusammenhang zwischen Inflationsentwicklung und Immobilienrendite durch Expertenschätzungen zu hinterlegen, da historische Marktdaten nur schwer eine stabile Schätzung erlauben.

12.2.4. Kredit- und Spreadrisiko

Im Rahmen der real-world Modellierung versteht man unter dem Begriff Kreditrisiko in der Regel den potenziellen Marktwertverlust eines festverzinslichen Wertpapiers, der aus einer Bonitätsverschlechterung (Downgrade) des Emittenten bzw. auch aus dessen kompletten Ausfalls (Default) resultieren kann. Im Gegensatz dazu beschreibt das Spreadrisiko eine potenzielle Schwankung (insb. Ausweitung) des dem Wertpapier zugrundeliegenden Spreads[16], die bspw. aus einer veränderten Risikoeinschätzung bzw. -aversion der Marktteilnehmer resultiert. Das Spreadrisiko wird damit insb. den Marktrisiken zugeordnet, wohingegen das Kreditrisiko als separates Risiko zählt. Außerdem sei erwähnt, dass eine Kreditrisikomessung, d.h. die Simulation von Kreditereignissen, typischerweise auf Granularität von Einzeltiteln bzw. Emittenten stattfindet. Im Gegensatz dazu wird bei der Modellierung des Spreadrisikos i.d.R. eine für Marktrisiken typische Benchmarksicht eingenommen, d.h. Bewegungen von Spreads werden nicht auf Einzeltitelsicht, sondern auf Granularität von ausgewählten Assetklassen simuliert.

In der Praxis werden die Begriffe Kreditrisiko und Spreadrisiko nicht einheitlich verwendet und lassen sich auch nicht immer klar voneinander trennen. Für eine ausführlichere Darstellung dieser Risiken und insb. einer Auswahl an verwendeten, über viele Jahre hinweg weiterentwickelten Modellen verweisen wir auf den DAV Ergebnisbericht „Kreditrisikomodellierung von ausfallbehafteten Kapitalanlagen in Versicherungsunternehmen“ [33.].

Aus ökonomischer Sicht stehen Credit Spreads und Migrationswahrscheinlichkeiten in engem Zusammenhang miteinander, da der Credit Spread im Wesentlichen (bis auf eventuelle weitere Spreadkomponenten wie bspw. dem Liquiditätsspread, auf die hier nicht weiter im Detail eingegangen wird) die erhöhte Verzinsung darstellt, die den Investor für das in Kauf genommene Ausfallrisiko entschädigen soll. Die Modellierung von Kredit- und Spreadrisiko und insb. die Anwendung in Projektionsrechnungen erfordert daher notwendigerweise die konsistente Projektion von Credit Spreads und den Migrationswahrscheinlichkeiten zwischen vorgegebenen Ratingklassen und sollte idealerweise simultan und in Interaktion miteinander geschehen, um eine realistische Einschätzung des aggregierten Risikos für ein zugrundeliegendes Portfolio vornehmen zu können. Zusätzlich lassen sich Kredit- und Spreadeffekte auch in historischen Daten oft nicht eindeutig voneinander trennen, was die Kalibrierung entsprechender Modelle erschweren kann.

---

[16] Der Spread bezeichnet die Differenz zwischen dem tatsächlich gezahlten Zins eines festverzinslichen Wertpapiers und dem Zins eines als risikofrei angesehenen Wertpapiers derselben Laufzeit.

Bei der Modellierung von Kreditrisiko unterscheidet man grundsätzlich zwischen zwei Modelltypen: Den sogenannten Default-only Modellen, bei denen lediglich Ausfallwahrscheinlichkeiten modelliert werden, und den umfassenderen Migrationsmodellen, in denen ein Emittent in unterschiedliche Ratingklassen (einschließlich Ausfall) migrieren kann. Außerdem ist zwischen Modellen zu unterscheiden, bei denen (nur) die Migrationsereignisse eines Emittenten unter Zufall gestellt werden und denjenigen Modellen, bei denen zusätzlich oder ausschließlich die Projektion der Migrationswahrscheinlichkeiten selbst stochastisch geschieht. Sollen bei letzteren Modellen keine Migrationsereignisse auf Emittentenebene modelliert werden, können Marktwertveränderungen für ein gegebenes Portfolio bspw. durch anteilige Migrationen gemäß simulierter Migrationswahrscheinlichkeiten bestimmt werden, um das Kreditrisiko des Portfolios zu bewerten.

Außerdem werden Migrationsereignisse in der Regel nicht direkt, sondern basierend auf einem stetig verteilten Prozess modelliert, der die Kreditwürdigkeit des Emittenten beschreiben soll. Die genaue Interpretation und damit auch die Datengrundlage für die Kalibrierung dieses Prozesses hängt ganz von dem verwendeten Modell ab. Oft wird dieser Prozess mit Hilfe eines Faktoransatzes zusätzlich in systematische und idiosynkratische Komponenten den Kreditrisikos zerlegt, um eine angemessene Korrelation der Migrationsereignisse zwischen unterschiedlichen Emittenten abbilden zu können.

Eine weitere Komponente der Kreditrisikomodellierung ist der sog. „Loss given default", d.h. der Anteil des investierten Kapitals, der im Falle eines Ausfalls des Emittenten tatsächlich verloren geht. Auch dieser kann prinzipiell stochastisch modelliert werden, wird jedoch der Einfachheit halber häufig als eine fixe Quote angenommen.

Credit Spreads sind geprägt durch komplexe Abhängigkeitsstrukturen, stochastische Volatilität und steigende Korrelationen in Krisenzeiten. Außerdem weisen Credit Spreads eine natürliche Hierarchie auf: Bedingt durch die höhere Ausfallwahrscheinlichkeit eines Wertpapiers mit niedrigerer Kreditwürdigkeit, erwartet man tendenziell höhere Kompensationen und damit steigende Credit Spreads bei fallendem Rating (zu jeder festen Laufzeit). Historische Spread-Zeitreihen weisen zwar Verletzungen dieser Eigenschaften auf, man fordert sie oft trotzdem von einem real-world Spreadmodell. Eine Möglichkeit zur Einhaltung der Hierarchie der Spreadkurven besteht bspw. darin, nicht die Spreadkurven selbst sondern die jeweiligen Inkremente zur Spreadkurve des nächstgelegenen schlechteren Ratings durch einen nicht-negativen Prozess zu modellieren. Zu beachten ist, dass in dem Falle Hierarchieverletzungen innerhalb der historischen Spreadzeitreihen bei der Kalibrierung des Modells ggfs. bereinigt werden müssen.

Historisch lässt sich außerdem beobachten, dass der implizit gezahlte Credit Spread eines risikobehafteten, festverzinslichen Wertpapiers den erwarteten Verlust durch Ausfall in der Regel überkompensiert. Den Anteil des Spreads, der diese Überkompensation abdeckt, nennt man auch die Risikoprämie, die aus marktwirtschaftlicher Sicht die Risikoaversion eines durchschnittlichen Anlegers bei der Preisgestaltung des Wertpapiers widerspiegelt. Die Risikoprämie stellt einen der wesentlichen Unterschiede zur risikoneutralen Modellierung von Kreditrisiko dar, wo die Forderung nach Risikoneutralität die Existenz einer Risikoprämie per se ausschließt.

Ähnlich wie bei Zinskurven kommen bei der Modellierung von Credit Spreads häufig Techniken zur Dimensionsreduktion wie eine PCA zum Einsatz. Im Unterschied zu Zinsen werden jedoch aufgrund der höheren Dimension (Laufzeiten und Ratingklassen) des Risikofaktors oft mehr als nur drei Hauptkomponenten zur Approximation verwendet. Die final betrachteten Größen (Spreads, Inkremente oder entsprechende Hauptkomponenten) lassen sich schließlich mit den gängigen, oben beschriebenen Ansätzen modellieren. Insbesondere bei mehrperiodigen Simulationsmodellen sind Ornstein-Uhlenbeck oder CIR-Prozesse mit ihrer Mean-Reversion Eigenschaft für die Modellierung von Credit Spreads geeignet. Auf Grund ihrer Positivität werden letztere gerade für die Modellierung positiver Inkremente oder die Projektion (der Eigenwerte) von Migrationsmatrizen verwendet. Auch parametrische und nicht-parametrische Bootstrapping Modelle werden bei der Modellierung von Spreads angewandt. Regime-Switching Modelle stellen schließlich eine Möglichkeit dar, die stochastische Volatilität von Spreads und die Regime-abhängigen Korrelationen von Spreads und Migrationen abzubilden.

12.2.5. Wechselkurse

Wechselkurse (Foreign Exchange Rates) werden 24h am Tag an internationalen Devisenmärkten mit einem Tagesvolumen von mehr als 5 Bio. USD gehandelt und stellen somit die meist-gehandelte Assetklasse dar. Im Rahmen der real-world Modellierung steht die Modellierung von Fremdwährungsrisiken bei der Bewertung von ausländischen Beteiligungen oder Fremdwährungsanleihen im Vordergrund. Dabei sollten auch längerfristige makroökonomische Abhängigkeiten wie (Covered oder Uncovered) Interest Rate Parity oder Purchasing Power Parity berücksichtigt werden, zum Beispiel über die Modellierung entsprechender Mean Reversion Effekte.

Die Besonderheit dieses Marktes ist, dass Spot- und Forward-Geschäfte nahezu ausschließlich over-the-counter (OTC) erfolgen und kein Handel an Börsenplätzen stattfindet. Marktakteure sind Zentralbanken, Finanz- und Kreditinstitute, Wirtschaftsunternehmen, etc.

Obwohl die Assetklasse FX ausschließlich OTC gehandelt wird, quotieren Informationsdienstleistungsunternehmen weltweit an verschiedenen Orten Wechselkurse. Hierbei existiert neben der sogenannten L130, d.h. 13:00 Uhr Quotierung, ebenfalls ein Tagesendkurs für die Haupthandelsplätze New York, London und Tokio. Die verschiedenen Wechselkurse werden immer in Bezug auf die weltweiten Hauptwährungen USD, EUR und GBP quotiert.

In der Vergangenheit griffen Zentralbanken punktuell in das Marktgeschehen am Devisenmarkt per Marktintervention ein. Aufgrund des mittlerweile enormen Handelsvolumens ist lediglich eine konzertierte Aktion zahlreicher Zentralbanken vorstellbar. Ein bedeutendes Beispiel für Interventionen von Zentralbanken ist die Einführung einer Untergrenze von 1.20 CHF für den Schweizer Franken zum EUR durch die Schweizer Nationalbank SNB am 06. September 2011. Zur Einhaltung dieser Untergrenze kaufte die SNB unbegrenzt ausländische Devisen auf, um diese zu verteidigen. Überraschend für alle Marktteilnehmer wurde diese Untergrenze am 15.01. 2015 aufgehoben. Der Wechselkurs EUR/CHF stürzte tagsüber von 1.20 zeitweise unter 0.90.

Grundsätzlich sind Eingriffe von Zentralbanken nicht angemessen in Kapitalmarktmodellen abbildbar und derartige Artefakte in Zeitreihen entsprechend zu würdigen. Abgesehen von den geschilderten Besonderheiten sind Wechselkurse ohne Besonderheiten einfach modellierbar, da die Datenverfügbarkeit, -qualität und -granularität sehr gut ist.

In ESG-basierten Systemen werden Wechselkurse vorwiegend als einfache geometrisch Brownsche Bewegung oder als Heston Modell mit stochastischer Volatilität abgebildet. Entsprechend hierzu ist nach Auswahl von Frequenz und Länge der historischen Zeitreihe die Kalibrierung einfach durchzuführen.

Alternativ zur Modellierung in ESG-basierten System können Bootstrapping-Verfahren ein einfaches Mittel sein, Besonderheiten wie Eingriffe von Zentralbanken in Simulationen abzubilden, ohne sie in konkrete parametrische Modelle betten zu müssen. Längerfristige makroökonomische Abhängigkeiten wie (Covered oder Uncovered) Interest Rate Parity oder Purchasing Power Parity lassen sich allerdings nur mit parametrischen Bootstrap-Methoden umsetzen.

12.2.6. Inflation

Die Inflation ist eine der am besten untersuchten ökonomischen Größen. Die Erkenntnisse der Volkswirtschaftslehre können daher für die Modellwahl des ESG gewinnbringend genutzt werden.

Zu bemerken ist, dass häufig nicht die interessierende Variable selbst (z.B. die „medizinische Inflation“) modelliert wird, sondern „Marktinflation“ sowie eine damit zusammenhängende, einfacher zu modellierende Variable („medizinischer Inflationsspread zur allg. Preisinflation“) abgebildet wird.

Zwischen Inflation und Marktrisikofaktoren existieren fundamentale ökonomische Beziehungen, so zum Beispiel die Fisher-Gleichung für den Zusammenhang zwischen Inflation, Realzins und Nominalzins, die Taylor-Regel für den Zusammenhang zwischen Geldpolitik, Inflation und Wirtschaftswachstum oder die Purchasing Power Parity für den Zusammenhang zwischen Wechselkursen und Inflationsraten verschiedener Länder. Wird ein Modellansatz auf Basis dieser ökonomischen Zusammenhänge für den ESG gewählt, gehen diese Zusammenhänge direkt in das Modelldesign ein. Dass diese ökonomischen Zusammenhänge typischerweise nur im längerfristigen Mittel gelten, lässt sich durch kurzfristige stochastische Störterme oder auch durch Mean-Reversion Funktionalitäten im ESG berücksichtigen. Insbesondere der Realzins weist ein stärkeres Mean-Reversion Verhalten auf als Inflation oder Nominalzinsen.

Weiterhin können Dimensionsreduktionsverfahren verwendet werden, um gemeinsame Treiber verschiedener Größen mit Störtermen zu modellieren, etwa von Nominalzinsen und Inflation, und so die Abhängigkeitsstruktur abbilden. Ein Beispiel findet sich in [39.].

Bei der Anwendung von stochastischen Differentialgleichungen greift man typischerweise auf Systeme von Differentialgleichungen mit Mean-Reversion Termen zurück wie zum Beispiel in [32.], in dem mehrdimensionale affine Termstruktur Modelle um Inflationserwartungen erweitert werden.

Auch autoregressive Modelle werden zur Projektion von Inflation verwendet, wie sich zum Beispiel [42.] entnehmen lässt. Wie oben beschrieben, lassen sich derartige Modelle auch zur Simulation in einem ESG verwenden. Vektor-AR Modelle bilden dabei die Abhängigkeiten zwischen Inflation und anderen Größen ab. Bootstrapping-Methoden für makroökonomische Variablen wie Inflation können die Abhängigkeitsstrukturen über die Zeit bei Inflation sowie die Abhängigkeitsstrukturen zu anderen Zeitreihen in aller Regel nur durch parametrische Bootstrapping-Verfahren abbilden, etwa Bootstrapping der Residuen in Vektor-ARMA-Prozessen.

Inflation wird anhand der Preisänderung von repräsentativen Warenkörben über die Zeit gemessen. Der für die Modellierung passende Inflationsindex ergibt sich über den Warenkorb, etwa medizinische Inflation für die Krankenversicherung oder Baupreisindizes für die Gebäudeversicherung. Die Messung findet typischerweise monatlich statt, wird nur mit Verzögerung veröffentlicht und wird gegebenenfalls im Nachhinein nochmals korrigiert. Daher können Glättungsverfahren für die Daten nützlich sein. Inflationsdaten werden zum Beispiel von Notenbanken, Statistikämtern oder internationalen Organisationen wie der Weltbank oder der OECD zumeist kostenlos bereitgestellt. Zusätzlich lassen sich Inflationserwartungen aus Marktpreisen von inflationsindexierten Bonds (Breakeven-Inflation) oder Inflations-Derivaten (Inflation-Swaps) ableiten. Dabei ist zu beachten, dass Marktpreise ggf. eine Risikoprämie für Absicherung beinhalten und die Angebots- Nachfragestruktur am Markt widerspiegeln, daher können diese nicht direkt als Best Estimate für die künftige Entwicklung verwendet werden. Für die kurze und mittlere Frist bis 5 Jahre bieten sich dagegen als real-world Schätzer die Inflationsprognosen der Wirtschaftsinstitute oder z.B. der Consensus Forecasts des Weltwährungsfonds an.

12.2.7. Alternative Assetklassen

Alternative Assetklassen wie Private Equity und Infrastruktur Investments stellen illiquidere Assetklassen dar. Die Assetklasse Infrastruktur ist in den letzten Jahren populärer geworden und stellt ein breit diversifiziertes Investitionsfeld dar. Für die Modellierung von Infrastruktur-Eigenkapitalinvestments sollte Bezug auf das jeweilige Anlageportfolio genommen werden. Durch die Unterschiede alternativer Assetklassen im Hinblick auf Regulierung der Investments (z.B. Einspeisevergütung), Alter (Vintage Year), verwendete Technologien, Leverage, Verfügbarkeit von Investments etc. ist es häufig nicht möglich, analog zu gehandelten Aktien einen repräsentativen marktbreiten Index zu finden. Gegebenenfalls lassen sich öffentliche Daten zu Investmentfonds mit entsprechendem Profil verwenden.

Die Modellierung von Private Equity Investitionen wird an dieser Stelle lediglich für Investments in Funds dargestellt, die einzelne Private Equity Unternehmen kaufen.

Historischen Zeitreihen oder Indizes von Private Equity Funds weisen hinsichtlich der Datenverfügbarkeit ähnliche Charakteristiken wie Immobilienzeitreihen auf. Einerseits sind entsprechend verfügbare Indizes maximal quartärlich verfügbar und weisen aufgrund von zugrundeliegenden Cash-Flow Modellen ein deutliches Maß an Autokorrelation innerhalb einer Zeitreihe auf. Zusätzlich definieren Indexanbieter gewisse Kriterien für die Zugehörigkeit zum Index, so dass sich rückwirkend die Historie aufgrund der schwankenden Indexzusammensetzung Indexstände ändern können. Insofern müssen diese Charakteristika bei der rein analytischen Auswertung historischer Zeitreihen beachtet werden. Insbesondere ist dabei Autokorrelation in den Zeitreihen zu beachten, die ähnlich wie bei Immobilienindices mit Entglättungsverfahren wie zum Beispiel AR-Filtern oder dem Verfahren nach Blundell-Ward.

In ESG-basierten System können Alternative Assetklassen als geometrisch Brownsche Bewegung oder im Heston Modell mit stochastischer Volatilität abgebildet werden. Alternativ hierzu ist eine Modellierung als autoregressiver Prozess aufgrund der vorliegenden Autokorrelation denkbar.

Analog zu Immobilien spricht gegen eine Anwendung von Bootstrapping-Verfahren für Alternatives im Wesentlichen die Datenbasis aus niedrig-frequenten Beobachtungen von Gutachterpreisen bzw. Cash-Flow Modellen. Bei guter Datenbasis können Bootstrapping-Verfahren allerdings wichtige Einblicke in die Diversifikationseffekte von Alternatives geben, gerade in Krisenzeiten.

12.2.8. Makroökonomische Faktoren

Es existiert eine große Anzahl makroökonomischer Faktoren, die für einen ESG verwendet werden können, etwa Wirtschaftswachstum (z.B. für die Neugeschäftsskalierung) oder Arbeitslosigkeit (z.B. für das Stornoverhalten). Eine besondere Rolle können makroökonomische Variablen allerdings als gemeinsame stochastische Treiber für eine Vielzahl von Marktrisikofaktoren oder für Abhängigkeiten spielen. Beispiele hierfür wären ein langfristiger Zusammenhang zwischen Aktienrenditen und Wirtschaftswachstum, kurzfristige Nominalzinsen als Funktion von Inflation und Wirtschaftswachstum wie in der Taylor-Regel, der Zusammenhang zwischen Nominalzins, Realzins und Inflation in der Fisher Equation oder Purchasing Power Parity als Abhängigkeit des Wechselkurses von der jeweiligen Inflation je Land. Diese Beziehungen sind zumeist nicht exakt, sondern müssen über Mean-Reversion oder Noise-Terme in den ESG integriert werden.

Zentralbanken, Statistikämter oder internationale Organisationen wie die OECD bieten eine Vielzahl makroökonomischer Daten zum Download an. Häufig liegen verschiedene Zeitreihen vor, die ähnliche Effekte abdecken; Wirtschaftswachstum zum Beispiel lässt sich messen auf realer oder nominaler Basis, auf Basis des Bruttosozialproduktes oder des Bruttoinlandsproduktes, usw., so dass die Auswahl geeigneter Zeitreihen entscheidend ist. Hierbei können auch Techniken der Dimensionsreduktion verwendet werden. Makroökonomische Daten sind häufig auch nur in monatlicher oder quartärlicher Frequenz verfügbar. Wie bei öffentlichen Inflationsdaten werden diese makroökonomischen Daten häufig mit Verzögerung veröffentlicht und können auch im Nachhinein korrigiert werden, teilweise aufgrund von Methodenänderungen in der Messung auch längerfristig. Kurzfristig können sich leicht Sondereffekte in der Volatilität ergeben, so kann die Zahl der gesetzlichen Feiertage in einem Quartal das Wirtschaftswachstum in diesem Quartal signifikant beeinflussen. Auch saisonale Effekte sind zum Beispiel im Wirtschaftswachstum oder in der Arbeitslosigkeit zu beachten. Datenvorbereitungsschritte wie Glättung oder die Entfernung von Sondereffekten können daher sinnvoll sein.

Wenn makroökonomische Variablen als gemeinsame Treiber oder im Rahmen eines Systems von Risikofaktoren verwendet werden, muss dies in den angewendeten Modellen berücksichtigt werden. Systeme von stochastischen Differentialgleichungen mit

Mean-Reversion kommen dafür in Frage. Im Bereich der Zeitreihenmodelle werden Vektor-Autoregressive Modelle verwendet, um Interdependenzen von makroökonomischen Größen zu untersuchen und Vorhersagen über konjunkturrelevante Variablen zu treffen. Beispiele finden sich im Lehrbuch von Lütkepohl [41.]. Im Rahmen dieser Modelle können auch Bootstrapping-Verfahren angewendet werden, um Abweichungen von den Verteilungsannahmen der Residuen zu berücksichtigen. Parametrische Bootstrapping-Verfahren ermöglichen zusätzlich die Abbildung von zeitlichen Abhängigkeitsstrukturen wie z.B. Mean Reversion.

12.3. Abhängigkeiten

Für eine adäquate Gesamtrisikomessung innerhalb eines Unternehmensmodells spielt neben der Einführung der einzelnen Risikofaktormodelle, wie bspw. in den vorangehenden Kapiteln beschrieben, die Modellierung einer angemessenen Abhängigkeitsstruktur zwischen den Risikofaktoren eine zentrale Rolle. Es stellt sich daher die Frage, wie sich die einzelnen Risikofaktormodelle in ein integriertes Modell überführen bzw. eingliedern lassen.

Eine Möglichkeit zur Modellierung entsprechender Interaktionen zwischen den Risikofaktoren bilden Kaskadenmodelle mit ihrer strukturellen Verzahnung wie in Kapitel 12.1.7 beschrieben. Dabei nimmt die Realisierung eines in der Kaskade übergeordneten Risikofaktors direkten Einfluss auf die Simulation aller nachgelagerten Risikofaktoren. Kennzahlen der multivariaten Verteilung zwischen den Risikofaktoren wie bspw. Korrelationen sind hierbei kein Input des Modells. Diese können nur indirekt durch die Kaskadenstruktur und deren Parameter beeinflusst werden und sollten daher nach der Simulation auf Plausibilität überprüft werden.

Alternativ lassen sich Abhängigkeiten zwischen den Risikofaktoren bereits auf Verteilungsebene durch die Festlegung einer gemeinsamen, multivariaten Verteilung für die zu simulierenden Faktoren beschreiben. Eine mögliche Variante hierfür ist eine bekannte, leicht zugängliche Verteilung zu verwenden, wie beispielsweise der multivariaten Normal- oder t-Verteilung mit (u.a.) der Varianz-Kovarianz Matrix als Inputparameter zur Beschreibung der Abhängigkeiten. Diese sind verhältnismäßig einfach zu kalibrieren und Simulationen können oft ohne großen Implementierungsaufwand erzeugt werden. Jedoch stößt man hier auch schnell an die Grenzen bei der Angemessenheit, falls komplexere Abhängigkeitsstrukturen modelliert und/oder ggfs. zuvor kalibrierte Verteilungsannahmen an die einzelnen Risikofaktoren in die Gesamtverteilung eingebettet werden sollen. Eine deshalb mittlerweile sehr populäre, flexiblere Methodik zur Generierung multivariater Verteilung ist die Verwendung von Copulas, mit deren Hilfe beliebige univariate Verteilungen zu einer gemeinsamen, multivariaten Verteilung mit einer gewünschten Abhängigkeitsstruktur verknüpft werden können.

Der nachfolgend dargestellte Satz von Sklar bildet hierbei die wesentliche theoretische Grundlage:

Eine Copula $C: [0,1]^d \to [0,1]$ ist eine d-dimensionale Verteilungsfunktion auf dem Einheitswürfel $[0,1]^d$, deren eindimensionale Randverteilungen jeweils die Gleichverteilung auf dem Einheitsintervall $[0,1]$ sind, d.h. es gilt $C(1, \dots, 1, u, 1, \dots, 1) = u$. Der Satz von Sklar besagt nun, dass für jeden Zufallsvektor $X = (X_1, \dots, X_d)'$ mit gemeinsamer Verteilungsfunktion F_X und eindimensionalen Randverteilungen $F_{X_1}, \dots, F_{X_d}$ eine Copula C existiert, so dass für $x_1, \dots, x_d \in \mathbb{R}$ gilt

$$F_X(x_1, \dots, x_d) = C\left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)\right).$$

Die Copula C ist in diesem Fall auf dem Bild $Ran(F_{X_1}) \times \dots \times Ran(F_{X_d})$ eindeutig bestimmt. Andererseits ist für jede gegebene Copula C und beliebige Randverteilungen $F_{X_1}, \dots, F_{X_d}$ die Funktion $F_X: \mathbb{R}^d \to [0,1]$, falls wie oben definiert, die Verteilungsfunktion eines d-dimensionalen Zufallsvektors X. Ist X stetig verteilt mit Dichtefunktion f_X, so besitzt auch die Copula C eine Dichte c und es gilt

$$f_X(x_1, \dots, x_d) = c\left(F_{X_1}(x_1), \dots, F_{X_d}(x_d)\right) \cdot f_{X_1}(x_1) \cdot \dots \cdot f_{X_d}(x_d).$$

Beispiele

- Gaußcopula – Die Gaußcopula ist die bekannteste und in der Praxis wohl am häufigsten verwendete Copula. Sie ist implizit über die multivariate Normalverteilung definiert. Ist P eine gegebene Korrelationsmatrix und bezeichnen Φ_P die Verteilungsfunktion der multivariaten Normalverteilung mit Kovarianzmatrix P sowie Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung, so ist die Gaußcopula gegeben durch

  $$C_\mathrm{P}^G(u_1, \dots, u_d) = \Phi_\mathrm{P}\left(\Phi^{-1}(u_1), \dots, \Phi^{-1}(u_d)\right).$$

  Wie der Satz von Sklar zeigt, ist die Gaußcopula diejenige, eindeutig bestimmte Copula, die die multivariate Normalverteilung mit ihren normalverteilten Rändern verbindet: Ist X ein d-dimensionaler, normalverteilter Vektor mit Erwartungswertvektor μ und Kovarianzmatrix $\Sigma = \left(\sigma_{i,j}\right)_{i,j=1,\dots d}$, dann folgt X gerade der Gaußcopula mit Φ_P^G mit Korrelationsmatrix

  $$\mathrm{P} = \left(\frac{\sigma_{i,j}}{\sqrt{\sigma_{i,i}\sigma_{j,j}}}\right)_{i,j=1,\dots,d}.$$

- t-Copula – Analog zur Gaußcopula, ist die t-Copula implizit über die multivariate t-Verteilung definiert,

  $$C_{\nu,\Sigma}^t(u_1, \dots, u_d) = t_{\nu,\Sigma}\left(t_\nu^{-1}(u_1), \dots, t_\nu^{-1}(u_d)\right),$$

  wobei $t_{\nu,\Sigma}$ die Verteilungsfunktion der multivariaten t-Verteilung mit Skalierungsmatrix Σ und ν Freiheitsgraden und t_ν die Verteilungsfunktion der eindimensionalen t-Verteilung mit ν Freiheitsgraden bezeichnet. Im Gegensatz zur Gaußcopula erlaubt die t-Copula eine Modellierung von Tail-Abhängigkeiten, d.h. das vermehrte Auftreten von gemeinsamen Extremereignissen in mehreren Dimensionen. Der zusätzliche Parameter ν regelt dabei die Schwere der Tail-Abhängigkeit. Sowohl der Gauß- als auch der t-Copula folgende Zufallszahlen lassen sich in einfacher Weise entlang deren impliziter Definition erzeugen.

- Individuated t-Copula – Eine weitere Verallgemeinerung ist die individuated t-Copula, die einen individuellen Freiheitsgradparameter ν_i pro Dimension $i = 1, \dots, d$ zulässt. Die individuated t-Copula ist nicht mehr implizit über eine bekannte multivariate Verteilung definiert und lässt sich daher nicht in kurzer analytischer Form wie die Gauß- oder die t-Copula schreiben. Sie ergibt sich vielmehr aus einer natürlichen Verallgemeinerung der Simulationsmethodik für die t-Copula. Durch die größere Zahl an Freiheitsgraden, kann man die individuated t-Copula insbesondere dafür verwenden, um Risikofaktor-Abhängigkeitsstrukturen zu modellieren, bei denen unterschiedliche Untergruppen an Risikofaktoren unterschiedliche Stärken an Tail-Abhängigkeiten aufweisen.
- Archimedische Copulas – Ist $\varphi: (0,1) \to [0, \infty)$ eine monoton fallende Funktion, die sog. Generatorfunktion, so wird durch

$$C_\varphi(u_1, \dots, u_d) = \varphi^{-1}\big(\varphi(u_1) + \dots + \varphi(u_d)\big)$$

  eine Copula definiert. Auf diese Weise erzeugte Copulas heißen Archimedische Copulas. Die Familie der Archimedischen Copulas beinhaltet u.a. die Gumbel, Clayton und die Frank Copula-Familien. Die Generatorfunktion φ hängt typischerweise jedoch nur von einem niedrigdimensionalen Parametervektor ab, so dass Korrelationsstrukturen zwischen einer Vielzahl von Risikofaktoren nur ungenügend repliziert werden können. Daher sind archimedische Copulas für die Praxis von untergeordneter Relevanz.

- Empirische Copulas – Vergleichbar mit eindimensionalen empirischen Verteilungsfunktionen, sind empirische Copulas mehrdimensionale Treppenfunktionen, die an beliebige multivariate Inputdaten kalibriert werden können. Damit sind empirische Copulas universell einsetzbar, die Güte der Kalibrierung hängt jedoch stärker als bei parametrischen Copulas von der Qualität der Daten ab. Insbesondere in hohen Dimensionen stößt man leicht auf Stabilitätsprobleme, weshalb auch empirischen Copulas zur Modellierung der Abhängigkeitsstruktur von einer Vielzahl an Risikofaktoren, wie zur Beschreibung der Risiken eines Versicherungsunternehmens i.d.R. benötigt, in der Praxis selten verwendet werden.

Vorteile

- Der Copula-Ansatz ist eine sehr flexible Methodik, um multivariate Verteilungen zu definieren und damit Abhängigkeitsstrukturen zu modellieren, da sich Copula und Randverteilungen beliebig miteinander kombinieren lassen. Insbesondere müssen die einzelnen Randverteilungen nicht derselben Wahrscheinlichkeitsfamilie angehören.

- In der Regel lassen sich die Parameter der Copula und die der Randverteilungen unabhängig voneinander schätzen, was die Komplexität des Schätzproblems für die Kalibrierung der gemeinsamen Risikofaktorverteilung deutlich reduziert.
- Bei der Gauß-, t- und individuated t-Copula gehören u.a. die Korrelationen zwischen den Risikofaktoren zu den Copulaparametern. Trotz der potenziell hohen Anzahl sind diese Parameter gut zu interpretieren und lassen sich i.d.R. aus historischen Daten ableiten.

Einschränkungen und Schwächen

- Per Definition ist die Copula von Risikofaktoren $X_1, \ldots, X_d$ die multivariate Verteilungsfunktion der uniformierten Zufallszahlen $F_{X_1}(X_1), \ldots, F_{X_d}(X_d)$. Realisierungen einer Copula, bspw. zum Schätzen von Parameter, lassen sich daher nicht unmittelbar aus historischen Beobachtungen ableiten, insbesondere dann, wenn die Randverteilungen $F_{X_1}, \ldots, F_{X_n}$ nicht bekannt sind. Bei gegebenen Beobachtungen $x_{i,1}, \ldots, x_{i,n}$ von X_i lassen sich als Pseudobeobachtungen der Copula bspw. die auf das Intervall (0,1) skalierten Rangstatistiken

  $$r_{i,j} = \frac{\#\{k : x_{i,k} \leq x_{i,j}\}}{n+1}$$

  verwenden.

- Im Unterschied zu Rangkorrelationen (Spearman's Rank Correlation Coefficient) bleiben lineare Korrelationen (Pearson Correlation Coefficient) unter monotonen Transformationen der zugrundeliegenden Zufallszahlen nicht erhalten. Daher stimmen die Inputkorrelationen (bei bspw. Gauß- oder t-Copula) im Allgemeinen nicht mit den sich für die multivariate Abhängigkeitsstruktur der Risikofaktoren ergebenen Korrelationen überein. Bei Verwendung eines Copulaansatzes für die Modellierung und Simulation von multivariaten Risikofaktoren sollte man daher nach der Simulation die empirischen Korrelationen auf große Abweichungen überprüfen und ggfs. bei den Inputparametern nachjustieren.

12.4. Expertenschätzungen

In der Praxis stellt sich die Frage, ob für die Modellierung zukunftsbezogener Verteilungen einer ökonomischen Größe repräsentative Marktinformationen wie z.B. Indizes zur Verfügung stehen, die repräsentativ für die künftige Entwicklung sind. Ebenfalls muss entschieden werden, ob in den vorhandenen Daten ausreichend Informationen zur Schätzung repräsentativer Modelle beinhaltet sind. Nur wenn dies der Fall ist, d.h. sich beispielsweise Marktstruktur, ökonomisches Regime, Zusammenhänge mit anderen Marktgrößen, Marktschätzungen mit Blick auf die Zukunft nicht geändert haben, kann auf vorhandenen, historischen Informationen sowohl die zur Repräsentation geeignete Modellwahl als auch dessen Parameterkalibrierung begründet werden. Dies ist insbesondere für längerfristige („Mehrperioden") real-world Projektionen jedoch selten der Fall und es müssen sowohl bei Modellwahl als auch bei dessen Parametrisierung Expertenschätzungen in eine real-world Modellierung einbezogen werden. Oftmals ergänzen bzw. substituieren die Expertenschätzungen dabei die historischen Informationen in

Teilen. Ein Beispiel dafür ist die Übernahmen der höheren Momente (Volatilität) einer Assetklasse aus der Historie, jedoch Verwendung einer Expertenschätzung für den erwarteten Ertrag. Für Assetklassen, für die keine lange Historie besteht bzw. nur wenig Daten verfügbar sind, z.B. Infrastruktur, muss berücksichtigt werden, dass eventuelle Tailrisiken ggf. noch nicht beobachtet werden konnten. Sei es, weil diese bisher nicht aufgetreten sind oder aufgrund von Glättungseffekten in Bewertungen (noch) nicht sichtbar wurden. Expertenschätzungen müssen daher in der Praxis häufig einbezogen werden, um ein aus heutiger Sicht für die Projektion der Verteilungen in der Zukunft repräsentatives Modell aufzustellen und zu parametrisieren. Gerade in der Modellwahl spielt häufig auch die ökonomische Theorie eines als plausibel erachteten Zusammenhangs eine Rolle, selbst wenn dieser Zusammenhang in vorhandenen Daten empirisch nicht signifikant verifiziert werden konnten. Häufig genannte Beispiele dafür sind Zins- und Kaufkraftparitätentheoreme.

Implizit finden Expertenschätzungen bereits bei der notwendigen Bereinigung von Marktdaten Eingang in die Modellierung, beispielsweise ab welcher Grenze ein Datenpunkt noch als valide berücksichtigt wird bzw. welches Vorgehen für die Substitution invalider Datenpunkte gewählt wird. Einige Modellparameter werden zudem gerade bei Mehrperioden Modellen für langfristige Projektionen bewusst nicht auf Basis von historischen Daten, sondern von als stabil und für die Zukunft repräsentativen Zusammenhängen zwischen ökonomischen Größen definiert. Gerade in Kaskadenmodellen, bei denen die Kaskadenstruktur an ökonomischen Zusammenhängen orientiert wurde, passt diese Vorgehensweise zur Modellstruktur. So können z.B. Zins und Inflation in diesen Modellen als direkte wechselseitige Treiber zusammenhängen und Erträge für Assetklassen finden anstatt als absolute Ertragserwartung auf Ebene von geschätzten Risikoprämien Eingang in die Modellparametrisierung.

Expertenschätzungen sind naturgemäß subjektiv und hängen von dem Erfahrungshorizont und der Marktkenntnis des Experten ab, die jedoch jeder Experte subjektiv anders deuten und in Annahmen übersetzen kann. In der Praxis ist daher darauf zu achten, dass bei Verwendung von Expertenschätzungen

- vollständig transparent gemacht wird, an welcher Stelle der Modellierung und für welche Parameter diese eingehen
- nicht ein einzelner Experte allein Modellparameter festlegt, sondern eine unabhängige Kontrolle stattfindet bzw. in einem Komitee festgelegt werden

eine Begründung der Experten für die jeweils gewählte Ausprägung und eine Dokumentation der Expertenschätzung stattfindet.

13. Kalibrierung

Für die in Abschnitt 12.1 vorgestellten Risikofaktormodelle soll im Folgenden auf verbreitete Ansätze zur Kalibrierung dieser eingegangen werden. Insbesondere wird hierbei davon ausgegangen, dass hinreichende historische Daten zur Verfügung stehen und die Kalibrierung der Modelle somit ohne subjektive Einflüsse und Expertenschätzungen (siehe Abschnitt 12.4) geschieht.

13.1. Parametrische Verteilungsmodelle

Für die Notation und die Anforderungen an die Verteilungsfunktion sei auf den Abschnitt 12.1.4 verwiesen. Um die Parameter θ der Verteilung F_θ zu bestimmen, wird oft auf die Momenten- oder die Maximum-Likelihood-Methode zurückgegriffen. Es sind jedoch auch Verfahren wie Quantile-Matching möglich.

13.1.1. Momentenmethode

Die Idee bei der Momentenmethode ist die Darstellung der theoretischen Momente der Verteilungsfunktion als Funktion g der Parameter θ:

$$\mu_k = \mathrm{E}[X^k] = g(\theta)$$

Anschließend schätzt man die Momente z. B. durch die empirischen Momente:

$$\hat{\mu}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i^k$$

Die geschätzten Werte werden nun in obige Gleichung eingesetzt und es muss nach θ aufgelöst werden. Oft ist dies analytisch nicht möglich, so dass auf numerische Verfahren zurückgegriffen wird.

13.1.2. Maximum-Likelihood

Für diese Methode wird die Dichte f_θ der Verteilungsfunktion benötigt und es werden diejenigen Parameter aus dem endlich-dimensionalen Parameterraum Θ gesucht, die die Likelihood-Funktion gegeben den beobachteten Daten maximieren:

$$\hat{\theta} = \underset{\theta \epsilon\, \Theta}{\operatorname{argmax}}\, L(\theta | x_1, \dots, x_n)$$

Die Likelihood-Funktion ist gegeben durch

$$L(\theta | x_1, \dots, x_n) \; = \prod_{i=1}^{n} f_\theta(x_i)$$

und die Idee dahinter ist, dass die "Wahrscheinlichkeit" der beobachteten Realisation $x_1, \dots, x_n$ maximiert werden soll, wobei der intuitive Ansatz bei diskreten Verteilungen über die Dichte auf stetige Verteilungsfunktionen übertragen wird:

$$L(\theta | x_1, \dots, x_n) \; = \prod_{i=1}^{n} \mathrm{P}_\theta(X = x_i)$$

Aus analytischen sowie numerischen Gründen wird oft die Log-Likelihood-Funktion betrachtet:

$$\log L(\theta | x_1, \dots, x_n) \; = \sum_{i=1}^{n} \log\left(f_\theta(x_i)\right)$$

wobei zur Lösung des obigen Maximierungsproblems verschiedene Methoden zur Verfügung stehen.

13.2. Bootstrapping / Nichtparametrische Verteilungsmodelle

Nichtparametrisches Bootstrapping kommt ohne eine Verteilungsannahme aus und damit ohne explizite Kalibrierung.

Parametrisches Bootstrapping benötigt eine Kalibrierung der Parameter. Das Vorgehen hierbei ist immer gleich:

1. Kalibrierung des parametrischen Modells, z.B. eines Zeitreihenmodells oder eines Ornstein-Uhlenbeck Prozesses,
2. Verwendung der kalibrierten Modelle auf historische Daten zur Ableitung historisch realisierter Änderungen, z.B. Residuen bei Zeitreihenmodellen oder historischer Innovationen für einen Ornstein-Uhlenbeck Prozess, aus denen anschließend für den Bootstrap gezogen werden kann.

13.3. Zeitreihenmodelle

13.3.1. GARCH

Die Parameter α_i und β_i des GARCH Modells können mithilfe der Maximum Likelihood Methode unter einer geeigneten Verteilungsannahme (z.B. Normalverteilung, t-Verteilung) für die Innovationsterme Z_t geschätzt werden.

Hierbei muss auch entschieden werden, wie viele Parameter das Modell enthalten soll und damit welche Werte p und q annehmen. Wie so häufig in der Statistik gilt auch hier, dass mehr Parameter (und damit ein großes p oder q) einen besseren Fit innerhalb der Stichprobe erlauben. Um Overfitting zu vermeiden und ein sparsames Modell zu erhalten, sollte die Anzahl der Parameter so groß wie nötig, aber so klein wie möglich gehalten werden.

Hierfür liefern Informationskriterien wie das AIC (Akaike Information Criterion) und BIC (Bayesian Information Criterion) statistische Anhaltspunkte. Sie messen die Anpassungsgüte innerhalb der Schätzstrichprobe mithilfe der Likelihood, wobei eine höhere Likelihood eine bessere Anpassung bedeutet. Die Anzahl der verwendeten Parameter wird mit einem Strafterm belegt. Die Informationskriterien unterscheiden sich im Wesentlichen in der Art des Strafterms. Alternativ können auch Variablenselektionsverfahren wie LASSO angewendet werden.

Ob in empirischen Daten ARCH Effekte vorliegen, lässt sich mit dem LM (Lagrange-Multiplier) Test von Engle feststellen. Alternativ kann ein Ljung-Box Test auf die quadrierten Zeitreihen angewendet werden.

13.3.2. ARMA

Auch ARMA Modelle können mit der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt werden. Für die Bestimmung von r und s sowie der Verteilung von ε_t gelten dieselben Grundsätze wie für das GARCH Modell.

Möchte man testen, ob in der vorliegenden Stichprobe ARMA Effekte auftreten, so kann man einen Ljung-Box Test durchführen. Die Teststatistik prüft, ob signifikante Autokorrelationseffekte vorliegen. Weitere Alternativen sind der Beusch-Godfrey und Durbin-Watson Test.

Die Anzahl der zu verwendenden Lags r und s lässt sie ebenfalls mit Informationskriterien bestimmen. Alternativ können die empirische Autokorrelations- und partielle Autokorrelationsfunktion zu Rate gezogen werden: Für einen reinen AR-Prozess konvergiert die Autokorrelationsfunktion exponentiell gegen null, während die partielle Autokorrelationsfunktion unmittelbar nach der Anzahl der Lags r abbricht und den Wert null annimmt. Analog konvergiert bei einem reinen MA-Prozess die partielle Autokorrelationsfunktion gegen Null, während die Autorkorrelationsfunktion nach Lag s abbricht. Es ist zu beachten, dass sich bei einem ARMA-Prozess beide Effekte überlagern.

13.3.3. ARMA-GARCH

Die Schätzung erfolgt erneut per Maximum-Likelihood-Methode. Zur Schätzung werden Startwerte für die ε_t und σ_t^2 benötigt. Meist ist hierfür die Wahl von 0 für die ε_t, des arithmetischen Stichprobenmittels für die X_t und μ, und der unbedingten Stichprobenvarianz für die σ_t^2 geeignet. Alternativ können die ersten Werte der Stichprobe für X_t verwendet werden. Die Schätzung beginnt dann entsprechend später in der Stichprobe.

13.4. Regime-Switching Modelle

Die Hidden-Markov Modelle, wie in Kapitel 12.1.6 vorgestellt, lassen sich mittels Maximum-Likelihood-Schätzung bei gegebenen Realisierungen von $Y_1, \dots, Y_n$ parametrisieren. Der Parametervektor θ umfasst dann sowohl die Parameter der zustandsabhängigen Verteilungen der Y_t sowie die Übergangswahrscheinlichkeiten der Markov-Kette S_t. Ohne Einschränkung kann das Startregime S_0 fest gewählt werden. Die Log-Likelihood-Funktion des HMMs ist dann gegeben durch

$$L(\theta) = L(\theta; Y_1, \dots, Y_n | S_0 = s_0) = \log\left(\sum_{i_1=1}^{m} \cdots \sum_{i_n=1}^{m} \left(\prod_{k=1}^{n} p_{i_{k-1},i_k} \prod_{k=1}^{n} f_{i_k}(Y_k)\right)\right).$$

Beim Auswerten der Log-Likelihood-Funktion $L(\theta)$ stößt man für zunehmende Anzahl an Beobachtungen n sehr schnell auf numerische Probleme, was sich auf Grund der speziellen Gestalt der Funktion nicht durch das übliche „Hineinziehen“ des Logarithmus in das Produkt über die Beobachtungen umgehen lässt. Das Problem lässt sich in der Regel jedoch durch geeignete Skalierung und die Anwendung eines dynamischen Auswertungsalgorithmus beheben.[17]

Alternativ lässt sich der EM-Algorithmus (Expectation-Maximization Algorithm) anwenden, der speziell auf das Bestimmen von Maximum-Likelihood Schätzern bei nur teilweise beobachtbaren Daten abzielt [44.].

Zu beachten ist, dass die Anzahl an Regimen, d.h. die mögliche Anzahl an Zuständen, die die latente Markov-Kette annehmen kann, kein Modellparameter im engeren Sinne ist. Insbesondere wird sie nicht durch obige Optimierung mitgeschätzt, sondern muss zum Aufstellen der Maximum-Likelihood Funktion bereits fest vorgegeben werden. Wie bspw. bei den Zeitreihenmodellen kann auch hier auf Informationskriterien wie das AIC oder das BIC zurückgegriffen werden. Außerdem existieren Likelihood-basierte Hypothesentests, mit deren Hilfe darauf getestet werden kann, ob eine gewählte Anzahl an Zuständen ausreichend zur Beschreibung der gegebenen Daten ist. Auf Grund von Nichtidentifizierbarkeitsproblemen innerhalb der Klasse der HMMs sind die asymptotischen Verteilungen der entsprechenden Teststatistiken in der Regel jedoch nicht bekannt und müssen durch Bootstrapping angenähert werden.

13.5. Copula

Bei einer Copula handelt es sich, wie in Abschnitt 12.3 beschrieben, um eine multivariate Verteilungsfunktion. Das Schätzen der Copula bzw. deren Parameter lässt sich daher prinzipiell mit den gängigen Verfahren wie bspw. Maximum-Likelihood-Schätzern oder Momentenmethode durchführen. Die Komplexität kann dabei jedoch stark mit der Wahl der zugrundeliegenden Copulafamilie variieren, insbesondere wenn die Dichtefunktion oder die Momente der Copula analytisch nicht oder nur schwer zugänglich sind. Außerdem ist zu beachten, dass evtl. vorliegende Beobachtungen der zu modellierenden Risikofaktoren keine Beobachtungen der Copula selbst darstellen. Um die Informationen über die Abhängigkeitsstruktur aus den Beobachtungen zu extrahieren, betrachtet man deshalb meist die entsprechenden Rangstatistiken, die keine weiteren Informationen über die Randverteilungen der Beobachtungen besitzen.

Viele in der Praxis verwendete Copulas, wie bspw. die Gauß-, die t- und die individuated t-Copula, besitzen als Parameter u.a. eine Korrelationsmatrix für die zu modellierenden Risikofaktoren. Vorteil hierbei ist, dass sich diese ohne weitere Informationen über die zu verwendende Copula direkt und ohne großen Aufwand aus gegebenen Daten ableiten lässt. Außerdem lassen sich Korrelationen aus unterschiedlichen Quellen zu einer gemeinsamen Korrelationsmatrix zusammenfassen, wobei in dem Fall darauf zu achten ist, dass die resultierende gemeinsame Korrelationsmatrix positiv semi-definit ist bzw. dass dies durch nachträgliche Korrektur[18] garantiert wird.

[17] Siehe hierzu bspw. Zucchini and MacDonald [44.].

[18] Hierfür kann bspw. der Algorithmus von Higham (1988)[40.] verwendet werden.

Zur Schätzung weiterer Copula-Parameter lassen sich Momentenschätzer unter Einbeziehung höherer Momente verwenden. Mit Hilfe des sog. Arachnitudes, das im Wesentlichen das zweite Moment einer Copula darstellt, lassen sich so bspw. angemessene Freiheitsgrade für die t- oder die individuated t-Copula herleiten.[19]

Generell ist zu beachten, dass Verfahren zum Schätzen der Parameter einer Copula in höheren Dimensionen, d.h. bei einer großen Anzahl an zu modellierenden Risikofaktoren, schnell an ihre Grenzen stoßen, d.h. technisch nicht mehr umsetzbar sind bzw. zu instabilen Ergebnissen führen. In diesem Fall ist zu überlegen, die entsprechenden Schätzverfahren zunächst auf kleineren Teilmengen der Risikofaktoren oder sogar paarweise für jede Kombination an Risikofaktoren anzuwenden und die resultierenden Parameterschätzungen erst anschließend durch bspw. Exposure-basierte Mittelung zu aggregieren.

14. Validierung

Abschließend sollen mögliche Ansätze zur Validierung der Angemessenheit bzgl. Wahl und Kalibrierung der beschriebenen Risikofaktormodelle vorgestellt werden. In Abschnitt 14.1 werden dabei zunächst allgemeine Fragenstellen zur Validierung von real-world Modellen diskutiert. Die anschließenden Abschnitte gehen danach auf spezielle Validierungsmethoden und -ansätze ein.

14.1. Allgemeine Validierungshinweise

Für allgemeine Hinweise bzgl. Validierung verweisen wir auf Kapitel 10.

Im Gegensatz zur risikoneutralen Simulation, wo die Qualität der Szenarien durch klar definierte Tests validiert werden kann (siehe Abschnitt 18), gibt es bei der Generierung von real-world Szenarien mehr Ermessungsspielräume, sodass die Vorgehensweise bei der real-world Validierung vielfältig sein kann. Auch die Tests, welche die Güte der real-world Szenarien zeigen, können durchaus sehr unterschiedlich sein. Die Validierung muss auf jeden Fall die Angemessenheit des Modells sowie eine hohe Aussagekraft der Ergebnisse sicherstellen. Als Gütekriterien für die real-world Szenarien werden in der Regel diverse statistische Tests, oft in Kombination mit fachlichem Ermessen benutzt. Dafür müssen bei der Validierung die Unzulänglichkeiten der Daten sowie des Modells verstanden werden.

Bei real-world Simulationen tauchen andere Problemfelder als bei risikoneutralen Simulationen auf. So sind die Daten für die Kalibrierung der real-world Modelle zum Beispiel oft unvollständig, können nicht beobachtet werden oder es besteht höhere Unsicherheit über die zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen und Korrelationen. Dies führt zu häufigerem Einsatz von Experteneinschätzungen – manchmal um fehlende Daten zu behandeln, oder aber auch um gewisse Modellparameter, die nicht direkt aus

[19] Eine detaillierte Erläuterung findet sich bspw. in [32.].

historischen Daten abgeleitet werden können, festzulegen. Die Validierung von Experteneinschätzungen erweist sich als besonders schwierig, zumal es keine Erfahrung gibt, die die getroffenen Annahmen bestätigen oder widerlegen kann.

Die Validierung von real-world Szenarien kann in Abhängigkeit der betrachteten Zeitabschnitte und der einbezogenen Daten in unterschiedliche Kategorien unterteilt werden:

- Validierung zum Stichtag: Validierung, ob die real-world Szenarien die Ausgangsmarktsituation, wie bspw. beobachtete Zins- und Spreadkurven zum Stichtag/Projektionsstart, ausreichend gut wiedergeben. Dies kann insb. dann relevant werden, wenn Techniken zur Dimensionsreduktion angewandt oder nicht der Risikofaktor selbst sondern zugrundeliegende Größen[20] modelliert wurden. Bei der Verwendung von Ansätzen wie (nicht-) parametrischen Verteilungsmodellen oder Bootstrapping für eine direkte Modellierung von Risikofaktorbewegungen ist wiederrum ein perfekter Fit an die Ausgangsmarktsituation konstruktionsbedingt garantiert.
- In-sample Validierung: Hier werden die Modellergebnisse mit den vorhandenen Daten, die für die Kalibrierung verwendet wurden, verglichen, um zu überprüfen, ob das Modell für das gewünschte Verhalten repräsentativ bzw. ausreichend komplex ist – zum Beispiel bei Verteilungsanpassung, aber auch bei Curve Fitting, Regressionen und Zeitreihen Modellen.
- Out-of-Sample Validierung: Durch das Einbeziehen von beobachteten Daten, die nicht für die Kalibrierung des Modells verwendet wurden, wird bei der out-of-Sample Validierung die Güte der Vorhersage des Modells validiert, z.B. beim Backtesting.

Außerdem können auch im Rahmen der Validierung Informationskriterien wie AIC und BIC Aufschluss über die getroffene Modellwahl und Parametrisierung geben. Analyseverfahren wie zum Benchmarking, Sensitivitäten oder Veränderungsanalysen können dafür verwendet werden, um die Robustheit und den Einfluss von Modellierungsentscheidungen und Parametrisierungen zu quantifizieren.

14.2. Anpassungstest bei parametrischen Verteilungsmodellen

Bei der Verteilungsanpassung werden geeignete Verteilungen an einen vorhandenen Datensatz angepasst, um danach eine real-world Simulation zu erzeugen. Die Anpassungsgüte (Goodness-of-Fit) misst, inwiefern sich die theoretischen Werten der untersuchten Zufallsvariablen von den tatsächlichen oder simulierten Werten unterscheiden.

[20] Ähnlich wie bei der risikoneutralen Modellierung können auch hier bspw. short-rate-ähnliche Modelle für die Simulation von Zinsen oder Migrationswahrscheinlichkeiten verwendet werden.

Bekannte Anpassungstests, die Aufschluss darüber geben, ob eine beobachtete Zufallsvariable einer zuvor angenommenen Wahrscheinlichkeitsverteilung folgen könnte, oder ob diese Annahme eher verworfen werden sollte[21], sind zum Beispiel:

- der Chi-Quadrat Anpassungstest
- der Kolmogorow-Smirnow Anpassungstest
- der Anderson-Darling-Anpassungstest
- der Shapiro-Wilk Test (nur für Normalverteilung)
- der Jarque-Bera Test (nur für Normalverteilung)

Zur qualitativen Beurteilung der Anpassungsgüte ist es außerdem möglich, die theoretische, angepasste Verteilung und die Verteilung der historischen Risikofaktorrealisierungen anhand eines Dichteplots oder QQ-Plots miteinander zu vergleichen. Diese qualitativen Tests geben sehr schnell Aufschluss darüber, ob die beiden Verteilungen große Ähnlichkeiten aufweisen.

Nähere Beschreibungen der oben aufgelisteten Tests findet man in der einschlägigen Literatur.

14.3. Bootstrapping / Nichtparametrische Verteilungsmodelle

Die Validierung von nicht-parametrischen Bootstrap-Methoden selbst sollte sich auf die Prüfung der zentralen i.i.d.-Annahme[22] an die historischen Realisierungen/Residuen konzentrieren. Dafür bieten sich Autokorrelationsplots und statistische Tests (z.B. Pearson's Chi-Squared Test) an. Kann die i.i.d.-Annahme bei nichtparametrischen Bootstrap-Methoden nicht gerechtfertigt werden, bieten sich im allgemeinen parametrische Bootstrap Modelle an, bei denen das zugrundeliegende parametrische Modell die Abweichung von der i.i.d.-Annahme roher Veränderung abdeckt, z.B. ARMA Modelle oder Mean-Reversion Modelle.

Da Bootstrapping direkt historische Änderungen in die Zukunft fortsetzt und neu zusammensetzt, muss eine Analyse der simulierten Szenarien durchgeführt werden. Ein typisches Beispiel, das zu ökonomisch unsinnigen Szenarien führen könnte, ist ein nicht abgedeckter Regime-Shift in den historischen Daten, etwa wenn Rezessions-Perioden mit Boom-Perioden kombiniert werden oder wenn beim Bootstrapping von Government-Spreads Daten vor der Europäischen Schuldenkrise mit Daten danach kombiniert werden. Beim Bootstrapping mehrerer Risikofaktoren muss dabei auch die Abhängigkeitsstruktur beachtet werden. Für diese Analysen lassen sich parametrische Verfahren anwenden, etwa eine Schätzung von Volatilitäten und Korrelationen auf Basis gesampelter Daten und ihr Vergleich mit historischen Volatilitäten oder Korrelationen.

---

[21] Ein statistischer Test kann eine Hypothese im Allgemeinen lediglich signifikant verwerfen (unter einem vorgegebenen Konfidenzniveau). Ein Nichtverwerfen einer Hypothese sollte nicht automatisch als deren Gültigkeit interpretiert werden.

[22] Stochastisch unabhängig und identisch verteilt.

Zu beachten ist, dass Bootstrapping selbst wiederum sehr gut als Validierungsmethode für parametrische Modelle verwendet werden kann. Die historischen Residuen, die für ein gegebenes Modell aus historischen Daten abgeleitet werden können, enthalten alle Abweichungen vom Modell. Ein Bootstrapping dieser Residuen enthält auch die Eigenschaften historischer Zeitreihen, die im parametrischen Modell fehlen.

14.4. Zeitreihenmodelle

Im Wesentlichen sollten im Rahmen einer Validierung die Annahmen der Zeitreihenmodelle überprüft werden:

Die geschätzten Residuen eines reinen ARMA Prozesses $\hat{\varepsilon}_t = X_t - \hat{\mu}_t$ geben Auskunft über den Fit des Modells in der Stichprobe. Die Autokorrelationsfunktion sollte 0 betragen. Ob Autokorrelationen signifikant von Null verschieden sind, lässt sich mit den oben erwähnten Tests (z.B. Ljung-Box) überprüfen.

Des Weiteren können Autorkorrelationsfunktionen und partielle Autorkorrelationsfunktonen in der Simulation und der realen Stichprobe verglichen werden.

Bei einem ARMA-GARCH Prozess hingegen verhalten sich die Residuen $\hat{\varepsilon}_t$ wie ein reiner GARCH Prozess. Die standardisierten Residuen $\hat{Z}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{\sigma}_t^2$ sollten sich wie ein starker White Noise Prozess verhalten (i.i.d. mit Erwartungswert 0 und Varianz 1). Zur Untersuchung dieser Eigenschaft eignen sich Autokorrelationsplots und -test der standardisierten Residuen selbst und ihrer Quadrate.

14.5. Backtesting

Als Backtesting bezeichnet man Validierungsverfahren, bei welchen die Vorhersage aus einem Modell mit den vorliegenden, sich in der Vergangenheit tatsächlich realisierten Daten verglichen werden. Diese Form der Validierung lässt sich auf alle hier betrachteten Modellklassen (parametrische und nicht-parametrische Verteilungsmodelle, Zeitreihenmodelle, usw.) anwenden.

Das Grundsätzliche Vorgehen ist dabei immer wie folgt: Bei vorgegebenem Projektionshorizont h und einer gegebenen Zeitreihe $x_1, \dots, x_n$ an historischen Beobachtungen vergleicht man zu jedem Zeitpunkt t die Beobachtung x_{t+h} mit der aus dem zugrundeliegenden Modell abgeleiteten Risikofaktorverteilung bzw. abgeleiteten Größen wie bspw. dem 99.5% Quantil, die sich basierend auf der Beobachtung x_t zum Stichtag t und einer gewählten Kalibrierung des Modells ergeben.

Bei der Anwendung eines Backtests, insb. bei der Wahl der Daten für die Kalibrierung des Modells sowie der Art und Weise der Neukalibrierung der Modellparameter pro Anwendungszeitschritt t, gibt es jedoch unterschiedlichste Varianten. Mögliche Unterscheidungen können z.B. sein:

- Inputdaten:

- In-Sample:
  Der Backtest zum Testen der Modellgüte basiert auf genau der Zeitreihe $x_1, \dots, x_n$, die auch für die Kalibrierung des Modells verwendet wurde.
- Out-of-Sample:
  Die betrachtete Zeitreihe $x_1, \dots, x_n$ ist nicht oder nur teilweise in die Kalibrierung des Modells eingeflossen, d.h. die Daten für die Kalibrierung des Modells stammen z.B. aus einer anderen Quelle oder liegen weiter in der Vergangenheit als die zu testenden Daten.

- Kalibrierung
  - Through-the-Cycle:
    Das Modell wird vor dem Test der gesamten vorliegenden Zeitriehe initial kalibriert und diese Kalibrierung für jeden Zeitschritt t beibehalten.
  - Point-in-Time:
    Das Modell wird in jedem Zeitschritt t für den Test von x_{t+h} unter Einbeziehen aller vorhanden Daten bis zu diesem Zeitpunkt, also bspw. $x_1, \dots, x_t$, neu kalibriert.

Ein through-the-cycle Backtest testet damit insb. die Güte des kalibrierten Modells, die man nach heutigem Wissensstand erreicht hat und ob man mit diesem vergangene Extremereignisse hätte vorhersagen können. Der point-in-time Backtest überprüft dahingegen, wie gut das verwendete Modell tatsächlich in der Vergangenheit zur jährlichen Vorhersage geeignet gewesen wäre.

Ein prominentes Beispiel für einen trough-the-cycle out-of-sample Backtest findet sich bspw. in [35.], siehe Abbildung unten, bei dem historische 1-Jahres-Schwankungen der 10Y EUR Swap Rate gegen die sich jeweils realisierten Stresse gemäß Standardformel für Zinsanstieg und Zinsrückgang verglichen wurden.

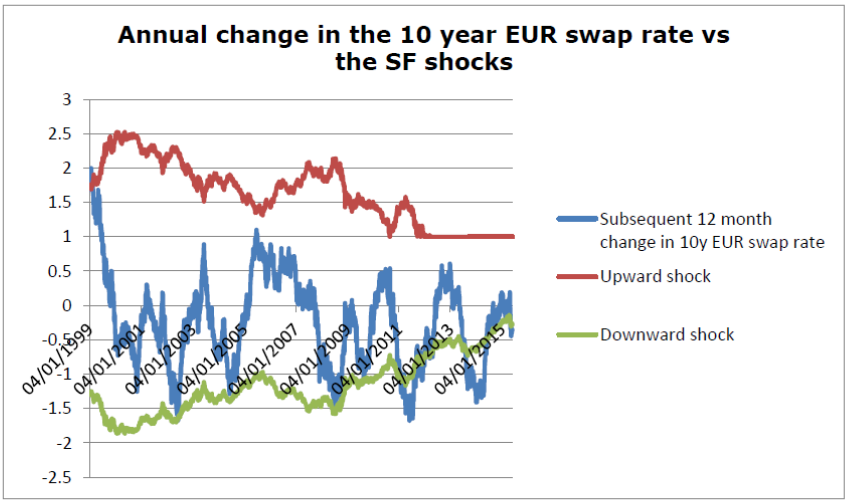


Abbildung 6: Beispiel für Backtesting von 10-jährigen Swap Rates.

IV. Risikoneutrale Modellierung

15. Einleitung und Anforderungen

Die marktkonsistente Bewertung eines Bestandes an versicherungstechnischen Verpflichtungen, insbesondere unter entsprechender Bewertung des Zeitwertes der in den Bestand eingebetteten Optionen und Garantien, wie diese unter Solvency II erfolgt, erfordert in der Regel den Einsatz von risikoneutralen Kapitalmarktszenarien. Diese Szenarien zeichnen sich durch die Arbitragefreiheit sämtlicher darin projizierter Kapitalanlagenpreise aus und dienen als Inputgröße für das nachfolgende Bewertungsmodell, in dem die Projektion und damit die Bewertung der versicherungstechnischen Cashflows erfolgt.

Die vorliegende Ausführung beschäftigt sich mit den in der Praxis relevanten Anforderungen an die Arbitragefreiheit von Kapitalmarktmodellen und daraus resultierenden Kapitalmarktszenarien. Wenngleich das nachgelagert eingesetzte Bewertungsmodell im Folgenden nicht weiter erwähnt wird, so ist dennoch hervorzuheben, dass Anpassungen an den Kapitalmarktszenarien oder Erweiterungen des Kapitalmarktmodells, falls diese im Bewertungsmodell durchgeführt werden (z. B. eine Investitionsmöglichkeit in unverzinste Bargeldbestände), genau denselben nachfolgend dargestellten Anforderungen unterliegen müssen.

Zunächst soll zwischen der theoretischen Arbitragefreiheit (Modellarbitrage) und der realisierten Arbitragefreiheit unterschieden werden. Ein Modell wird als arbitragefrei bezeichnet, wenn das theoretische Modell mathematisch bewiesen arbitragefrei ist. Ein realisiertes Szenarienset unterliegt dagegen einem Monte-Carlo-Fehler und gegebenenfalls einem Implementierungs-/Diskretisierungsfehler. Die Unterscheidung, auf welche der beiden Ursachen eine von den Tests aufgezeigte Arbitragestrategie zurückgeführt werden kann, kann durch empirische Untersuchungen (Veränderung des Seeds, Erhöhung der Anzahl an Pfaden) herausgefunden werden.

Im Hinblick auf die Anforderungen an einen ökonomischen Szenariengenerator und daraus resultierende Bewertungsszenarien in Bezug auf deren Arbitragefreiheit gelten folgende Grundsätze:

1. Das Kapitalmarktmodell an sich muss nachweislich arbitragefrei sein. Diese Anforderung geht im Kontext von Solvency II neben Art. 22 DVO auch aus der Auslegungsentscheidung der BaFin vom 10.11.2016 klar hervor.
2. Nachträgliche Anpassungen an den Bewertungsszenarien (z.B. Capping, Flooring, Freezing, auch mit/nach einer möglichen Umgewichtung) sollten vermieden werden. Sie können gerechtfertigt sein, sofern sie nachweisbare Verzerrungen der Ergebnisse durch einzelne Ereignisse verhindern bzw. makroökonomische Überlegungen zu den Verteilungen der im ESG projizierten Risikofaktoren dies notwendig machen und die unter nachfolgend beschriebenen Tests immer noch bestanden werden. Bei der Beurteilung der Frage, ob ein

einzelnes Simulationsergebnis eine Verzerrung des Gesamtergebnisses darstellt, sind explizit die Varianz des Samples und die damit zu erwartenden statistischen Eigenschaften der Simulationsergebnisse zu berücksichtigen. Es ist weiterhin abzuwägen, ob die mit den Anpassungen verfolgten Ziele auch durch andere Maßnahmen erreicht werden können, die keine potenzielle Beeinträchtigung der Arbitragefreiheit bewirken.

Zentrales Kennzeichen solcher erlaubten Anpassungen und deren Parametrisierung ist, dass diese nicht dazu dienen, eine Arbitragestrategie einzuführen, welche in der nachfolgenden Projektion explizit ausgenutzt wird. Arbitragemöglichkeiten, welche der vorangegangenen Bedingung nicht genügen, sind per se nicht zulässig; unabhängig davon, ob diese die nachfolgend beschriebenen Tests bestehen. Beispiele dafür sind etwa die Projektion von Aktien- oder Immobilientiteln unter Verwendung einer Risikoprämie oder die Vermeidung der negativen Verzinsung von Festgeldbeständen („Bargeldhaltung").

Die hier genannten Anforderungen erlauben explizit die Möglichkeit nachträglich in ein bewiesen arbitragefreies Zinsmodell einen Floor für die Zinsprojektion einzuführen – gegebenenfalls unter weiteren Anpassungen wie Umgewichtung – sofern dies nicht dem Zwecke der Ausnutzung der daraus resultierenden theoretischen Arbitragemöglichkeiten dient, sondern nachweislich Verzerrungen der Ergebnisse verhindert und die nachfolgend genannten Tests weiterhin bestanden werden sowie die geforderte Marktkonsistenz weiterhin gewahrt wird. Letzteres impliziert insbesondere, dass die Wahl des Floors nicht dazu führen darf, dass im Portfolio enthaltene Optionen und Garantien systematisch unterbewertet oder gar wertlos werden.

Es sei darauf hingewiesen, dass die hier genannten ex-post Anpassungen neben der potenziellen Einführung von Arbitragemöglichkeiten auch einen Einfluss auf die Güte der Kalibrierung und damit der Marktkonsistenz haben können. Diese Aspekte sind ebenfalls zu berücksichtigen bei der Durchführung solcher Anpassungen, aber nicht weiter Gegenstand dieser Ausführungen.

3. Neben den weiter oben genannten Anforderungen muss der aus dem Kapitalmarktmodell resultierende Szenariensatz mindestens nachfolgende Tests im weiter unten spezifizierten Sinn bestehen:
   a. Martingaltest:
      i. 1=1-Tests für jede relevante (Unter-)Assetklasse.
      ii. 1=1=1-Test für relevante Umschichtungen zwischen den einzelnen (Unter-) Assetklassen, d.h. Umschichtungen, die sich an der in den Managementregeln hinterlegten Investitionsstrategie orientieren.

iii. 1=1-Test für repräsentatives Portfolio an Kapitalanlagen, das sich an den Laufzeiten der versicherungstechnischen Cashflows orientiert[23].

b. Leakagetest: Projektion des Leakages[24] über alle Projektionsjahre; hierbei sollte ferner zunächst der Leakage auf einem sogenannten Certainty Equivalent Szenario[25] ermittelt werden, um die Fehler der Leakages und deren zeitliche Entwicklung auf den stochastischen Kapitalmarktpfaden von dem grundlegenden Leakage des Projektionsmodells abzugrenzen.

Die Toleranzgrenzen für die Tests in a. und b. sind unternehmensindividuell und jeweils unter der Prämisse festzulegen, dass sich der aus der aufgezeigten Arbitragemöglichkeit ergebende Bewertungsfehler innerhalb des Bereiches bewegt, welcher vom Unternehmen für die Bewertung der Eigenmittel als noch tolerabel angesehen wird. Dies ist insbesondere für a.iii. und b. relevant und entsprechend anwendbar. Die Tests aus a.i. und a.ii. sollen darüber hinaus sicherstellen, dass sich nicht verschiedene Einzelfehler, d. h. Arbitragemöglichkeiten innerhalb verschiedener Assetklassen gegenseitig in einer Portfoliosicht aufheben. Ferner helfen die Tests a.i. und a.ii. beim Verständnis von potenziellen Abweichungen in a.iii. und b.

Zu berücksichtigen ist zudem die bei einer stochastischen Simulation zu erwartende Simulationsvarianz. Abweichungen in Martingal- oder Leakagetests sind, selbst wenn sie die gesetzten Toleranzgrenzen überschreiten, für sich genommen noch kein Hinweis auf eine problematische Konstellation, sondern im Rahmen einer Monte-Carlo-Simulation in gewissem Maße sogar zu erwarten. Sofern die gemäß der Theorie zu erwartenden Konvergenzeigenschaften (insbesondere die Abnahme der statistischen Schwankung mit der Wurzel der Anzahl der Pfade) erfüllt sind, kann der Bewertungsfehler durch geeignete Maßnahmen (Varianzreduktion, Erhöhung der Anzahl von Pfaden) auf ein gefordertes absolutes Maß reduziert werden.

---

[23] z.B. Wiederanlagen in Zinstitel gemäß einer Durationssteuerung

[24] Auch „Modellunschärfe" genannt; darunter versteht man pro Projektionsjahr T die Abweichung des initialen Marktwertes sämtlicher Kapitalanlagen MV_A von dem über alle Pfade gemittelten Barwert der passivseitigen Cashflows der ökonomischen Bilanz zu T sowie dem ökonomischen Restwert der Assets nach T; formal gilt $Leakage(T) = MV_A(0) - \sum_{pfad=1}^{n} [\sum_{tau=1}^{T} CF(\tau, pfad) \cdot Disc(\tau, pfad) + MV_A(T, pfad) \cdot Disc(T, pfad)]$ wobei n die Anzahl der Pfade des Szenarios darstellt und pro Zeitpunkt τ auf Pfad $pfad$, $CF(\tau,\ pfad)$ / $disc(\tau,\ pfad)$ / $Marktwert\ Assets(\tau,\ pfad)$ die Summe aller passivseitigen Cashflows / den Diskontfaktor / den Marktwert der Assets darstellen.

[25] Dies ist ein Einzelpfad des ESG, bei dem alle Kapitalanlagen und zugehörige Risikofaktoren mit Volatilität Null projiziert werden und auf dem per Konstruktion alle assetseitigen Martingaltests (im Sinne von 3.a.i und ii.) bis auf potenzielle Diskretisierungsfehler perfekt erfüllt werden.

16. Modellierung

16.1. Modellrahmen

Um zuverlässige Aussagen über Preise komplexer Finanzderivate zu liefern, müssen die verwendeten Modelle die grundlegenden Eigenschaften der Marktkonsistenz und Risikoneutralität erfüllen. Die Konsequenzen für den verwendeten Modellrahmen sollen im Folgenden kurz diskutiert werden.

16.1.1. Risikoneutralität

Die Bedingung der Risikoneutralität ist gleichbedeutend mit der Forderung, dass keine der modellierten Anlageklassen eine systematisch höhere Wertsteigerung als eine beliebige andere Klasse aufweisen darf. Das Beispiel eines Terminkontrakts auf eine dividendenlose Aktie veranschaulicht dieses Prinzip: Der Terminpreis muss durch den heutigen Stand der Aktie und den aktuellen risikolosen Zinssatz gegeben sein, die Wertsteigerung der Aktie also exakt dem risikolosen Zins entsprechen. Andernfalls bietet sich einem der Marktteilnehmer eine Arbitragemöglichkeit.

Die Anforderung gleicher Wertsteigerungen bedeutet, dass sich das Verhältnis von Preisen handelbarer Derivate im Erwartungswert über die Zeit nicht ändern darf. Dies ist die Basis für die mathematische Formalisierung, die besagt, dass das Verhältnis der Preise V und $\mathcal{N}$ zweier gehandelter Derivate im Erwartungswert konstant, also ein Martingal, sein muss[26]:

$$\frac{V(s)}{\mathcal{N}(s)} = \mathbb{E}\left[\frac{V(t)}{\mathcal{N}(t)}\,\middle|\,\mathcal{F}_s\right], \quad s < t. \tag{1}$$

Die durch Gleichung (1) formulierte Bedingung stellt strikte Anforderungen an risikoneutrale ESGs. Sie ist für alle modellierten handelbaren Anlagen sowohl per Konstruktion der Modelle theoretisch zu gewährleisten als auch für eine konkrete numerische Simulation durch geeignete Tests zu überprüfen (siehe auch Abschnitt 18.1).

Gleichung (1) erlaubt aber auch die Bestimmung des Barwerts $V(0)$ eines komplexen Zahlungsstromes $V(t)$. Um den Barwert $V(0)$ eines solchen Zahlungsstromes zu berechnen, wird $V(t)$ bei Fälligkeit t abhängig von den simulierten ökonomischen Variablen bestimmt und ins Verhältnis zu einer geeignet zu wählenden Referenzanlage $\mathcal{N}(t)$ gesetzt. Bildung des Erwartungswertes, in der Regel durch Mittelung über mehrere simulierte Pfade, liefert dann gemäß Gleichung (1) den gesuchten Barwert $V(0)$, vorausgesetzt der heutige Wert $\mathcal{N}(0)$ der Referenzanalage ist bekannt.

---

[26] Der Erwartungswert muss hierbei bedingt auf die Filtration $\mathcal{F}_s$ berechnet werden, die Gesamtheit der zur Zeit $s < t$ vorliegenden Informationen.

16.1.2. Numéraire und Wahrscheinlichkeitsmaß

Für die Referenzanlage $\mathcal{N}(t)$ in (1) hat sich die Bezeichnung Numéraire eingebürgert. Neben der Bedingung, dass $\mathcal{N}(0)$ bekannt sein muss, impliziert der oben skizzierte Modellrahmen (insbesondere Gleichung (1)) eine weitere wesentliche Bedingung an das Numéraire: Sein Wert muss zu allen Zeitpunkten positiv sein.

Diese beiden Bedingungen sind keine allzu starken Einschränkungen, und dementsprechend kommt prinzipiell ein sehr breites Spektrum von Anlageklassen als Numéraire in Frage. Es ist zum Beispiel theoretisch durchaus denkbar, Aktienindizes als Numéraire zu verwenden.

In der Praxis hat sich jedoch das Geldmarktkonto als Standard etabliert, also ein mit dem risikolosen Zinssatz akkumulierendes Investment mit Startwert 1. Die spezielle Wahl des Geldmarktkontos als Numéraire wird im Folgenden mit $C(t)$ bezeichnet (angelehnt an die englische Bezeichnung „Cash Account“). Das mit dieser Festlegung gewählte Wahrscheinlichkeitsmaß, das sog. Spot-Maß, wird aus historischen Gründen im allgemeinen Sprachgebrauch oft auch als das risikoneutrale Maß bezeichnet. Diese Bezeichnung ist zwar üblich, allerdings leider irreführend, da auch für jedes andere Numéraire, das die beiden Bedingungen erfüllt, ein risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß existiert. Ein ebenfalls häufig benutztes Maß ist das sog. Forward-Maß (im Englischen „T-Forward Measure“), das mit der Wahl einer Nullkuponanleihe mit Fälligkeit T als Numéraire verbunden ist.

Der Übergang zwischen verschiedenen Wahrscheinlichkeitsmaßen wird durch das Verhältnis der beiden Numéraire vermittelt. Nach Gleichung (1) kann der Preis eines gehandelten Derivats für beliebige Numéraire $\mathcal{N}(\mathrm{t})$ und $\mathcal{M}(\mathrm{t})$ berechnet werden:

$$V(0) = \mathcal{N}(0) \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{N}}\left[\frac{V(t)}{\mathcal{N}(t)}\right] = \mathcal{M}(0) \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\left[\frac{V(t)}{\mathcal{M}(t)}\right] \tag{2}$$

Der Erwartungswert der stochastischen Variablen $H(t) = \frac{V(t)}{\mathcal{N}(t)}$ kann damit alternativ in beiden Wahrscheinlichkeitsmaßen berechnet werden. Es gilt:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}^{\mathcal{N}}[\,H(t)\,] &= \frac{\mathcal{M}(0)}{\mathcal{N}(0)} \cdot \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\left[H(t) \cdot \frac{\mathcal{N}(t)}{\mathcal{M}(t)}\right] = \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\left[H(t) \cdot \frac{\mathcal{N}(t) \cdot \mathcal{M}(0)}{\mathcal{M}(t) \cdot \mathcal{N}(0)}\right] \\ &= \mathbb{E}^{\mathcal{M}}\left[H(t) \cdot \frac{dQ^{\mathcal{N}}}{dQ^{\mathcal{M}}}\right], \end{aligned} \tag{3}$$

wobei das Verhältnis $dQ^{\mathcal{N}}/dQ^{\mathcal{M}}$ die sog. Radon-Nikodym-Dichte ist. Der Maßwechsel nach (3) ist ein oft genutzter Zusammenhang und u.a. für die risikoneutrale Formulierung des LIBOR-Marktmodels (LMM) von entscheidender Bedeutung [47.]**.**

16.2. Stochastische Diskontierung

Ein weiterer häufig verwendeter Begriff ist der des stochastischen Diskontfaktors oder Deflators. Man erhält diesen bei Betrachtung einer Nullkuponanleihe mit Endfälligkeit t. Der Wert $P(s,t)$ dieser Nullkuponanleihe zu einem beliebigen Zeitpunkt $0 < s < t$ wird in der Regel stochastisch und zunächst unbekannt sein. Er kann allerdings unabhängig vom konkreten stochastischen Zinsmodell zu zwei Zeitpunkten exakt angegeben werden:

Zum einen muss der Wert zu $s = 0$ mit den am Markt beobachteten Preisen B_t von Nullkuponanleihen übereinstimmen, d.h. $P(0,t) = B(t)$. Zum anderen zahlt die Anleihe bei Endfälligkeit t eine Einheit der Währung und hat dementsprechend einen Wert von exakt eins: $P(t,t) = 1$. Mit dem Geldmarkkonto $C(t)$ als Numéraire liefert Gleichung (1) damit (wegen $C(0) = 1$) unmittelbar die Bedingung:

$$B(t) = P(0,t) = \frac{P(0,t)}{C(0)} = \mathbb{E}\left[\frac{P(1,t)}{C(t)}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{1}{C(t)}\right] \tag{4}$$

Für den deterministischen Preis B_t der Nullkuponanleihe mit Endfälligkeit t ist auch die Bezeichnung Diskontfaktor gebräuchlich. In Anlehnung daran wird der Kehrwert $1/C(t)$ des Numéraires in Gleichung (4) oft auch als stochastischer Diskontfaktor oder Deflator bezeichnet.

16.2.1. Konstruktionsprinzipien

Aus der Anforderung der Risikoneutralität lässt sich für die Anlageklassen Aktien, Inflation und Wechselkurse ein allgemeines Konstruktionsprinzip ableiten. Dieses soll im Folgenden am Beispiel des stochastischen Wechselkurses X_t erläutert werden.

Ausgangspunkt der Überlegungen ist die deterministische Modellierung eines Termingeschäfts auf den Wechselkurs. Der faire Ausübungspreis $F(t)$ eines solchen Terminkontraktes, d.h. der Ausübungspreis, für den das Termingeschäft mit Endfälligkeit t bei Abschluss zu Null bewertet, kann aus grundlegenden Arbitrage-Überlegungen (analog zum Terminkurs auf Aktien) bestimmt werden. Man erhält folgenden Zusammenhang zwischen $F(t)$, dem Spot-Wechselkurs $X(0)$, sowie den Werten $B^{d/f}(t)$der deterministischen Preise von risikolosen Nullkuponanleihen in Basis- („d"=domestic) und Fremdwährung (f=„foreign"):

$$F(t) = X(0) \cdot \frac{B^f(t)}{B^d(t)} \tag{5}$$

Der nach (5) bestimmte Terminkurs F_t schließt Arbitragemöglichkeiten aus, das heißt ein Termingeschäft mit diesem Ausübungspreis muss bei Abschluss zu Null bewerten. Dies gilt selbstverständlich auch bei stochastischer Modellierung des Wechselkurses $X(t)$. Man erhält daher aus der allgemeine Bewertungsformel (1) mit dem Geldmarkkonto $C(t)$ als Numéraire:

$$0 = \mathbb{E}\left[\frac{(X(t) - F(t))}{C^d(t)}\right] = \mathbb{E}\left[\frac{X(t)}{C^d(t)}\right] - \mathbb{E}\left[\frac{F(t)}{C^d(t)}\right] \tag{6}$$

Mithilfe der Beziehungen (4) und (5) lässt sich daraus (der Terminkurs $F(t)$ ist deterministisch) folgende Bedingung herleiten:

$$\mathbb{E}\left[\frac{X(t)}{C^d(t)}\right] = F(t) \cdot \mathbb{E}\left[\frac{1}{C^d(t)}\right] = F(t) \cdot B^d(t) = X(0) \cdot B^d(t) \tag{7}$$

Um diese Bedingung zu erfüllen, wird der stochastische Wechselkurs als Produkt dreier Prozesse beschrieben, nämlich den Werten $C^{d/f}(t)$von stochastischen risikolosen Geldmarktkoten und einem zusätzlichen Prozess Y_t:

$$X(t) = Y(t) \cdot \frac{C^d(t)}{C^f(t)} \tag{8}$$

Setzt man den so modellierten Wechselkurs in Gleichung (6) ein, kürzt sich das heimische Geldmarktkonto $C^d(t)$ aus dem Erwartungswert auf der linken Seite der Gleichung und man erhält:

$$\mathbb{E}\left[\frac{Y(t)}{C^f(t)}\right] = X(0) \cdot B^f(t). \tag{9}$$

Unter der zusätzlichen Annahme, dass die stochastischen Prozesse für das Geldmarktkonto in Fremdwährung und den Prozess Y_t statistisch unabhängig sind, faktorisiert der Erwartungswert auf der linken Seite. Die Zinsen in Fremdwährung werden nach den gleichen Prinzipien modelliert wie die in Basiswährung. Damit kann nach Gleichung (4) der Erwartungswert $\mathbb{E}[1/C^f(t)]$ mit dem Preis $B^f(t)$ der stochastischen Nullkuponanleihe identifiziert werden. Wir erhalten schließlich:

$$\mathbb{E}[\,Y(t)] = X(0) \tag{10}$$

Der Erwartungswert des Add-on-Prozesses muss in allen Zeitpunkten dem Startwert entsprechen, d.h. der Prozess muss ein Martingal sein. Ist diese Bedingung erfüllt, ist ein nach (8) konstruierter stochastischer Prozess für Wechselkurse frei von Arbitrage.

Die Konstruktionsvorschrift (8), (10) ist ein Ausdruck der Zinsparität, siehe auch Abschnitt 16.8. Im Erwartungswert ist die Entwicklung des Zinsprozesses durch die beiden Zinsprozesse bestimmt, darüber hinaus können zusätzliche Effekte (der Prozess $Y(t)$) zwar zur Volatilität, nicht aber zum Mittelwert beitragen. Dementsprechend werden die beiden Zinsprozesse häufig zum „erwarteten Anteil" des (Wechselkurs-)Prozesses zusammengefasst und das Martingal $Y(t)$ als „unerwarteter Anteil" bezeichnet.

Der oben beschriebene Modellansatz über zwei Zinsprozesse, die den erwarteten Anteil beschreiben, und ein zusätzliches Martingal kann auf die Modellierung von Aktien und Inflationsindizes übertragen werden. Die Herleitungen verlaufen prinzipiell analog, und in allen Fällen geht der Nominalzins auf jeweils gleiche Art ein. Dagegen beschreiben die zweiten jeweils beteiligten Zinsprozesse naturgemäß andere Größen: Ist es beim Wechselkurs der Zins in Fremdwährung, so beschreibt der zweite Prozess bei Aktienmodellen die, potenziell stochastische, Dividende bzw. bei Inflationsindizes den Realzins.

Die unterschiedlichen ökonomischen Hintergründe dieser Prozesse begründen weitere Unterschiede in den verwendeten Modellkomponenten. So wird man insbesondere für Realzinsen, und in der Regel auch für Fremdwährungsprozesse, Modelle verwenden, die negative Zinsen zulassen, wohingegen Dividenden als positiver Prozess modelliert werden. Auch für den unerwarteten Anteil $Y(t)$ existiert eine breite Palette möglicher Ansätze, siehe Abschnitte 16.5, 16.8 und 16.9.

Erwähnt sei an dieser Stelle nochmals die oben getroffene vereinfachende Annahme der statistischen Unabhängigkeit zwischen den Prozessen $Y(t)$und $C^f(t)$. Es ist im Prinzip möglich, diese Annahme aufzugeben und ein arbitragefreies Modell des Wechselkurses zu definieren, in dem diese beiden Prozesse korreliert sind. Allerdings muss, um die Bedingung (9) zu erfüllen, in diesem Fall ein Korrekturterm in die Modellgleichungen des Fremdwährungsprozesses eingeführt werden, das sogenannte Quanto-Adjustment [47.].

16.2.2. Marktkonsistenz

Neben der Eigenschaft der Risikoneutralität müssen die verwendeten Modelle auch die wichtige Bedingung der Marktkonsistenz erfüllen: Modelle sind so zu konstruieren und zu parametrisieren, dass sie an den Finanzmärkten beobachtete Preise von gehandelten Finanzderivaten reproduzieren.

Hinsichtlich der Modellierung kann man in diesem Kontext zwei Fälle unterscheiden: Die Abbildung deterministischer Instrumente mit verbindlich definierten Zahlungsströmen (wie festverzinslicher Anleihen, Zins- und Inflationsswaps) einerseits und stochastischer Instrumente mit Wahlrechten (Optionen auf Zins, Aktien, etc.) andererseits.

Die Modellierung deterministischer Instrumente erfolgt über den im vorangegangenen Kapitel eingeführten „erwarteten Anteil" der stochastischen Prozesse, d.h. über die verwendeten Zinsmodelle. Diese müssen gemäß Gleichung (4) sicherstellen, dass der Erwartungswert ihres Deflators eine gegebene Auswahl von gehandelten Instrumenten wie Anleihen und Swaps korrekt wiedergibt. In Märkten mit geringer Handelsaktivität und einer daher kleinen Anzahl von gehandelten Derivaten kann hierfür ein Zinsmodell adäquat sein, das über eine begrenzte Anzahl von freien Parametern verfügt (z.B. Vasicek, Cox-Ingersoll-Ross). In liquiden Märkten, oder bei vorgegebener Zinskurve wie im Kontext von Solvency II, wird man hingegen in der Regel ein Modell wählen, das eine gegebene Zinsstrukturkurve in Gänze abbilden kann (z. B. Hull-White, LIBOR-Marktmodelle).

Die Abbildung von Instrumenten mit Wahlrechten, d.h. Optionen, erfordert die Wahl geeigneter stochastischer (oder Diffusions-) Terme, zum einen in den Zinsmodellen selbst, zum anderen in den sog. „unerwarteten Anteilen" in Gleichung (8). Für beide Zwecke existiert eine breite Palette möglicher Ansätze, von einfachen Prozessen mit konstantem Volatilitätsparameter bis hin zu komplexen Modellen mit Sprungprozessen oder sog. lokaler (zustandsabhängiger) und selbst stochastischer Volatilität. Details hierzu werden in den folgenden Kapiteln behandelt.

16.3. Abhängigkeiten

Die Modellierung von Abhängigkeiten in risikoneutralen Modellen weist eine wichtige Eigenheit auf: Im Gegensatz zu real-world Modellen, in denen Korrelationen in der Regel direkt gesetzt werden (meist über Copulas), ist die Modellierung von Abhängigkeiten in risikoneutralen Modellen oft auch wesentlich durch funktionale Abhängigkeiten bestimmt.

So basieren zum Beispiel risikoneutrale Zinsmodelle in den wenigsten Fällen auf Größen, die direkt am Markt beobachtbar wären und für die Korrelationen empirisch bestimmt werden könnten. Eine weit verbreitete Klasse etwa modelliert die sog. Short Rate, also den hypothetischen risikolosen Zins über ein infinitesimales Intervall. Nochmals unanschaulicher ist ein um einen zweiten stochastischen Faktor erweitertes Short-Rate Modell. Die Erweiterung um einen zweiten Faktor geschieht in der Regel dadurch, dass man auch den langfristigen Durchschnitt der Short Rate stochastisch modelliert. Um nun aus den modellierten Größen tatsächlich beobachtbare Zinssätze wie die Renditen von Swaps oder Nullkuponanleihen, und deren Korrelationen zueinander, bestimmen zu können, muss die entsprechende Modellgleichung zuerst gelöst und integriert werden. Die auf Ebene dieser Modellgleichungen für die Short Rate und ihren langfristigen Durchschnitt gesetzten Korrelationen werden dabei im Allgemeinen Veränderungen erfahren und sich nicht eins zu eins im Ergebnis wiederfinden lassen.

Anzumerken ist auch, dass die Modellierung von Abhängigkeiten stark von der konkreten Wahl des Modells abhängt. Auch dies unterscheidet risikoneutrale von real-world Modellen, wo über den zumeist verwendeten Copula-Ansatz die Setzung der Abhängigkeitsstruktur von der Wahl des Modells für die einzelnen Risikofaktoren (d.h. von der verwendeten Randverteilung) getrennt wird. Im Gegensatz dazu modellieren die gängigsten risikoneutralen Modellklassen für Zinsen, Short-Rate- und Libor-Market Modelle, stark unterschiedliche Größen. Dementsprechend haben die Korrelationen zwischen den stochastischen Treibern dieser Prozesse auch stark unterschiedliche Bedeutungen und Auswirkungen.

In noch stärkerem Maße finden sich diese Effekte bei Modellen für Aktien, Inflation und Wechselkursen. Diese werden, um die Arbitragefreiheit zu garantieren, als abhängige Add-Ons zum zugrunde liegenden Zinsprozess modelliert (siehe Gleichungen (8) und (10)). Es ist, auch ohne Details der beteiligten Prozesse näher zu spezifizieren, ersichtlich, dass dieser Ansatz bereits eine starke Abhängigkeitsstruktur zwischen dem Wechselkurs und den beteiligten Zinsprozessen impliziert. Insbesondere ist die resultierende Abhängigkeit des Wechselkurses von den Zinsprozessen abhängig von seiner Volatilität. Das verdeutlicht der Spezialfall einer Volatilität von Null für den Prozesses Y_t: In diesem ist der Wechselkurs identisch mit dem Verhältnis der beiden stochastischen Geldmarktkonten, d.h. die Abhängigkeit ist vollständig durch die funktionale Abhängigkeit bestimmt.

16.4. Zins

Ein Zinsstrukturmodell soll die mögliche zukünftige Entwicklung der Zinsen für verschiedene Laufzeiten (sogenannte Zinsstrukturkurve) gemeinsam beschreiben. Dabei geht es im Kontext der risikoneutralen Bewertung vor allem darum, dass Marktpreise von liquiden Instrumenten reproduziert werden und weniger um eine Prognose von zukünftigen Zinsen. Mathematisch kann ein Zinsstrukturmodell als eine Familie mehrdimensionaler stochastischer Prozesse aufgefasst werden. Die Darstellungen in diesem Abschnitt orientieren sich hauptsächlich an [47.] und [49.]. Eine gute Einführung von Zinsmodellen für die marktkonsistente Bewertung von Versicherungsbeständen (inklusive Kalibrierungsfragen) findet sich auch in [50.].

16.4.1. Wünschenswerte Eigenschaften von Zinsstrukturmodellen

Im Kontext der risikoneutralen Bewertung dürfen in einem Kapitalmarktmodell keine Arbitragemöglichkeiten bestehen. Für markkonsistente Bewertungen ist insbesondere eine genaue Anpassung des Modells an die Ausgangszinsstrukturkurve erforderlich. Zusätzlich sollten am Markt beobachtete Preise für Derivate (Swaptions) bestmöglich getroffen werden können.

Des Weiteren sind praktische Erwägungen für die Bewertung eines Zinsstrukturmodells zu erwähnen, wie die analytische Handhabbarkeit des Modells, insbesondere für Kalibrierung und für die Preisbestimmung von Derivaten. Aufgrund der aktuell beobachtbaren negativen Zinsen ergibt sich auch die Anforderung, dass ein Zinsstrukturmodell negative Zinsen abbilden kann.

Modell	**Negative Zinsen darstellbar**	**Ausgangszinskurve replizierbar**	**Verteilung**	**Analytische Bondpreise**	**Analytische Optionspreise**
Vasicek	Ja	Nein	Normal	Ja	Ja
Hull-White	Ja	Ja	Normal	Ja	Ja
Cox-Ingersoll-Ross (CIR)	Nein	Nein	Chi^2	Ja	Ja
Verschobenes Cox-Ingersoll-Ross (CIR++)	Ja	Ja	Verschoben Chi^2	Ja	Ja
Black-Karasinski	Nein	Ja	Lognormal	Nein	Nein
LIBOR-Marktmodell (LMM)	Nein	Ja	Lognormal	Ja	Ja
Verschobenes LIBOR-Marktmodell	Ja	Ja	Verschoben Lognormal	Ja	Ja
Verschobenes LIBOR Marktmodell mit stochastischer Volatilität (LMM+)	Ja	Ja	Verschoben Lognormal	Ja	Nein

Abbildung 7: Übersicht über häufig verwendete Zinsmodelle

16.4.2. Grundsätzliche Modellierungsansätze

Für die Frage, wie eine Modellierung von Zinsstrukturkurven über die Zeit hinweg durchgeführt wird, lassen sich zunächst drei grundsätzliche Modellansätze unterscheiden.

- Short-Rate Modelle (Momentanzins): Es wird die Entwicklung **einer** Zinsrate über die Zeit hinweg als stochastischer Prozess modelliert. Aus der Short Rate wird dann zu jedem Zeitpunkt die Zinsstrukturkurve abgeleitet.
- Forward-Rate Modelle (Terminzins): Es wird die heute beobachtete Zinsstrukturkurve als Ausgangspunkt verwendet und die zeitliche Entwicklung der **kompletten** Terminzinskurve als stochastischer Prozess fortgeschrieben.
- Markt Modelle: Es wird die zeitliche Entwicklung einfacher, am Markt beobachtbarer Zinsraten über stochastische Prozesse modelliert (LIBOR-Marktmodelle).

Die Modellansätze bauen aufeinander auf und entsprechen in der aufgeführten Reihenfolge dem historischen Ablauf der Entwicklungen. Im Allgemeinen werden in allen Modellansätzen zeitstetige stochastische Prozesse verwendet, deren Verteilungseigenschaften aus einer Driftkomponente und einer Diffusionskomponente bestehen. Grundsätzlich ist auch eine zusätzliche Sprungkomponente für die Abbildungen von abrupten Zinsänderungen denkbar.

16.4.3. Anzahl der Stochastischen Faktoren

Eine grundsätzliche Frage ist die geeignete Anzahl der verwendeten stochastischen Faktoren eines Zinsstrukturmodells. Sogenannte Ein-Faktor Modelle sind im allgemein leichter handhabbar (insbesondere in Bezug auf Implementierung, Kalibrierung und Anwendung), können jedoch im Allgemeinen nur eine eingeschränkte Vielfalt und Dynamik von möglichen Zinsstrukturkurven über die Zeit abbilden. Für eine realistische Abbildung von Zinskurven sind gemäß [51.] mindestens drei Faktoren erforderlich, um Level (Zinsniveau), Slope (Differenz von langfristigem und kurzfristigem Zins) und Curvature (Krümmung) der Zinsstrukturkurve zu modellieren. Bei mehreren stochastischen Faktoren ist insbesondere eine flexiblere Modellierung möglich. Allerdings steigt die Komplexität deutlich, welches die Handhabbarkeit reduziert. Im Extremfall kann bei Mehrfaktormodellen der Aufwand der Kalibrierung unter Umständen deutlich höher sein als die tatsächliche Verbesserung im Modell. Mehrheitlich werden in der Praxis aktuell Ein- und Zwei-Faktor Modelle angewandt.

16.4.4. Beispiele der Verschiedenen Modellierungsansätze

Im Folgenden sollen einige Beispiele für die oben genannten Modellansätze vorgestellt werden. Für Einzelheiten sei insbesondere auf [48.] und [49.] verwiesen.

Die Auswahl der vorgestellten Modelle stellt weder eine Empfehlung dar, noch soll der Eindruck erweckt werden, dass nicht erwähnte Modelle damit als nicht adäquat angesehen werden. Es soll lediglich ein Überblick über die besonderen Eigenschaften und Besonderheiten der verschiedenen Modellansätze und damit die Bandbreite der Modellierungsmöglichkeiten illustriert werden. Mit all diesen Modellen können Zinskurven beliebiger Fälligkeitsdauer modelliert werden.

Short-Rate Modelle

Eine Reihe von Zinsmodellen beruht auf der Short Rate $r(t)$, der Zeitintensität der Zinsen. Die Short Rate $r(t)$ entspricht dem risikolosen Zinssatz über das infinitesimale Intervall $[t, t+dt]$. Die Short Rate wird mit Hilfe einer stochastischen Differentialgleichung modelliert. Die Preise von Nullkuponanleihen $P(t,T)$ (Zero Bonds) ergeben sich aus dieser Short Rate mittels Integration.

$$P(t,T) = \mathbb{E}\left(exp\left(-\int_t^T r(s)ds\right)\middle|\mathcal{F}_t\right)$$

Die Short Rate $r(t)$ besitzt demnach die komplette Information der gesamten Zinsstrukturkurve. Short Rates sind am Markt nicht beobachtbar.

Prominente Vertreter von Short-Rate Modellen sind

- Vasicek: $dr(t) = k\big(\mu - r(t)\big)dt + \sigma dW(t)$
  Erweiterung durch Hull-White (HW): $dr(t) = k\big(\mu(t) - r(t)\big)dt + \sigma dW(t)$
- Cox-Ingersoll-Ross (CIR): $dr(t) = k\big(\mu - r(t)\big)dt + \sigma\sqrt{r(t)}dW(t)$
- Verschobenes Cox-Ingersoll-Ross (CIR++):
  $$r(t) = x(t) + \varphi(t), dx(t) = k\big(\mu - x(t)\big)dt + \sigma\sqrt{x(t)}dW(t)$$
- Black-Karasinski (BK): $dln\big(r(t)\big) = k\left(\mu - ln\big(r(t)\big)\right)dt + \sigma dW(t)$

Die Formeln stellen beispielhaft die jeweiligen Ein-Faktor Modelle dar, alle Modelle existieren auch als Zwei- oder Mehr-Faktor Modelle. Dabei ist

$r(t)$	aktuelle Short Rate,
μ, $\mu(t)$	Mean-Reversion Level,
k	Mean-Reversion Geschwindigkeit,
σ	Volatilität,
$W(t)$	Wiener-Prozess.

Als „Mean-Reversion" bezeichnet man die Annahme, dass die Zinsen langfristig einen Trend zu einem langfristigen Durchschnitt bzw. zu einer Art „Mittelwert" μ aufweisen. Dabei kann μ als konstant, als deterministisch und zeitabhängig oder als stochastischer Prozess modelliert werden.

Vasicek- und CIR-Modelle haben die angenehme Eigenschaft, dass die Integration bei der Preisermittlung von Nullkuponanleihen analytisch erfolgen kann. Dies erlaubt eine einfache funktionale Berechnung der gesamten Zinsstrukturkurve, während Black-Karasinski Modelle über die gesamte Laufzeit numerisch integriert werden müssen.

Die Short Rate der Vasicek-Modelle ist normalverteilt, daher treten negative Zinsen auf. Die Short Rate der klassischen CIR-Modelle ist chi-quadrat-verteilt, und negative Zinsen sind theoretisch ausgeschlossen. Die Short Rate der klassischen BK-Modelle ist lognormalverteilt und immer positiv.

Displacement oder Shift-Parameter (sogenannte „verschobene" Modelle)

Klassische Zinsmodelle, die keine negativen Zinsen darstellen können (z.B. Modelle mit lognormalen Verteilungsannahmen), lassen sich durch die Einführung eines zusätzlichen Displacement- oder Shift-Parameters $\delta > 0$ erweitern. Dadurch können auch negative Zinsen bis zu einer unteren Zinsschranke abgebildet werden können.

Ein verschobenes Modell ersetzt die Simulation von $r(t)$ durch $r(t) + \delta$. Dadurch wird die Untergrenze der darstellbaren Zinsen von 0 auf $-\delta$ nach unten verschoben.

Im Beispiel des BK-Modell gilt dann für die Short Rate folgende Entwicklung

$$dln(r(t) + \delta) = k\big(\mu - ln(r(t) + \delta)\big)dt + \sigma dW(t)$$

Der Ansatz von Displacement- oder Shift-Parametern ist nicht nur auf Short-Rate Modelle begrenzt; entsprechende Ansätze können auch in den weiteren Modellansätzen eingeführt werden.

Forward-Rate Modelle (Terminzins)

Bei Forward-Rate Modellen modelliert man die Dynamik der momentanen Forward Rates $f(t,T)$ für alle Fälligkeiten simultan. Die momentane Forward Rate $f(t,T)$ ist dabei der risikolose Zinssatz über das infinitesimale Intervall $[T, T + dT]$, festgelegt zum Zeitpunkt t. Demgegenüber ist in diesem Ansatz die oben genannte Short Rate $r(T)$ der zum Zeitpunkt T festgelegte risikolose Zinssatz über das infinitesimale Intervall $[T, T + dT]$. Die Forward Rate $f(t,T)$ ist damit der Terminpreis der zukünftigen Short Rate $r(T)$ bezüglich des Termins T zum Zeitpunkt t.

Wichtigstes Beispiel ist dabei der allgemeine Modellrahmen von Heath, Jarrow und Morton (HJM-Modell)

$$df(t,T) = \alpha(t,T)dt + \sigma(t,T)dW(t)$$

Die Bondpreise ergeben sich dann aus

$$P(t,T) = exp\left(-\int_t^T f(t,u)du\right)$$

Durch die simultane Modellierung unendlich vieler Bonds sind für eine Arbitragefreiheit des Modells zusätzliche Bedingungen an die Koeffizienten α und σ notwendig. Die entscheidende Driftbedingung des HJM-Modells fordert einen direkten Zusammenhang zwischen Drift und Volatilität der Forward-Rates:

$$\alpha(t,T) = \sigma(t,T)\int_t^T \sigma(t,u)\,du$$

Da die am Markt beobachtbare anfängliche Zinskurve eine Anfangsbedingung des Modells ist, ist das HJM-Modell per Konstruktion konform zu einer gegebenen Zinsstrukturkurve. Die Wahl einer geeigneten Volatilitätsfunktion, um ein konkretes Modell zu erhalten, stellt im Allgemeinen keine triviale Aufgabe dar.

Das HJM Modell stellt eine wesentliche Verallgemeinerung von arbitragefreien Short-Rate Modellen dar. Durch die Wahl einer geeigneten Volatilitätsstruktur im HJM-Modell können Short-Rate Modelle als Spezialfälle dargestellt werden. Beispielsweise wird in [49.] als explizites Beispiel für eine Realisierung eines Forward-Rate Modells im Heath-Jarrow-Morton Modellrahmen das zeitstetige Ho-Lee Modell ausführlich dargestellt.

Marktmodelle

Die bisher erläuterten Ansätze entwickeln Zinsstrukturmodelle auf Basis der infinitesimalen Zinsen (Short Rate oder momentane Forward Rate). Diese Zinssätze sind jedoch am Markt nicht beobachtbar.

Marktmodelle betrachten und modellieren am Markt beobachtbare Zinssätze. Dies stellt einen großen praktischen Vorteil dar. Prominente Beispiele sind das lognormale Forward-LIBOR Modell (LIBOR Marktmodell) sowie das lognormale Forward-Swap Model. Beide Ansätze führen entweder für Caps (LIBOR Modelle) oder für Swaptions (Swap-Rate Modelle) zu Bewertungsformeln, die mit der klassischen Bewertungsformel von Black übereinstimmen.

LIBOR-Marktmodelle

Das LIBOR-Marktmodell ist eines der bekanntesten Marktmodelle, es ist auch nach dem Namen der ersten Autoren als Brace-Gatarek-Musiela Modell (BGM) bekannt. Im LIBOR-Marktmodell betrachtet man anstelle der infinitesimalen Zinsen den LIBOR. Dieser stellt einen Zinssatz dar, der tatsächlich am Markt beobachtbar ist. Die Libor-Rate $L(t,T)$ bezeichnet den Forwardzins über das Intervall $[T, T+\delta]$ aus der Sicht zum Zeitpunkt t:

$$L(t,T) = \frac{1}{\delta}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,T+\delta)} - 1\right)$$

Die zu einer gegebenen Zahlungsstruktur gehörenden LIBOR-Raten werden lognormal verteilt modelliert. Im klassischen LIBOR-Marktmodell werden für jede zu modellierende Forward-Rate für die Zeitspanne $[i, i\ +\ 1]$ eine zeitabhängige Volatilität und eine zeitabhängige Korrelation zwischen den jeweils anderen Forward-Rates angesetzt:

$$dL_i(t) = L_i(t)\sigma_i(t)dW_{i+1}(t)$$

$Wi(.)$: Brownsche Bewegung unter dem jeweiligen t_i-Forward-Maß

Anmerkung: Gemäß Modellansatz entspricht zunächst die Anzahl der Brownschen Bewegungen der Anzahl der simulierten LIBOR-Raten. Grundsätzlich ist jedoch für eine sachgerechte Abbildung eine geringere Anzahl von stochastischen Faktoren ausreichend.

Dieser Ansatz ist folgendermaßen charakterisiert:

- Bei der Modell-Kalibrierung kann die Startzinskurve konstruktionsbedingt exakt getroffen werden (Zinsen sind direkte Modellparameter).
- Die Verteilung ist lognormal und positiv.

- Bewertung von Caplets, einem der am häufigsten gehandelten Zinsderivate, führt im LMM zu einer Bewertungsformel, die mit der Formel von Black übereinstimmt.

Die Abbildung einer negativen Zinsuntergrenze kann durch die Einführung entsprechender Shift- bzw. Displacement-Parameter ermöglicht werden.

Zusammenhang zwischen dem HJM-Modell und dem LIBOR-Marktmodell

Ein LIBOR-Markmodell kann aus dem HJM-Modellrahmen hergeleitet werden kann. Grundsätzlich kann jedoch ein LIBOR-Marktmodell auch unabhängig von einem HJM-Modellrahmen konstruiert werden [52.].

16.4.5. Volatilitätsannahmen

In allen oben betrachteten Modellansätzen ergeben sich bei der Modellierung der Volatilität (grundsätzlicher Modellparameter σ) zusätzliche Wahlmöglichkeiten. Neben der Annahme einer konstanten Volatilität sind auch zeitabhängige oder niveauabhängige Volatilitätsannahmen denkbar. Das Ziel einer gleichzeitigen Anpassung von Preisen von Derivaten an eine Vielzahl von Laufzeiten (Volatilitätsfläche) kann die Verwendung eines Modells mit komplexeren Volatilitätsannahmen erforderlich machen. Ebenfalls möglich ist die Modellierung einer stochastischen Volatilität. Insbesondere die Abbildung des sogenannten „Volatility Smile“[27] erfordert die Modellierung von stochastischen Volatilitäten.

Beispielsweise kann im klassischen LMM Modell ein Volatility Smile/Skew nicht abgebildet werden. Für deren Abbildung kann das LMM jedoch entsprechend erweitert werden:

- (Verschobenes) lognormales LIBOR-Marktmodell mit „Constant Elasticity of Variance” (Skew-Effekt abbildbar)
- (Verschobenes) lognormales LIBOR-Marktmodell mit stochastischer Volatilität (Smile-Effekt abbildbar)

Im Folgenden werden kurz häufige Verallgemeinerung für die Volatilitätsmodellierung vorgestellt (vgl. z.B. auch [53.]).

Lokale Volatilitäten

Wenn die Volatilität nicht als konstant angenommen wird, sondern vom aktuellen Preis des Basiswerts sowie von der Zeit abhängt, spricht man von lokaler Volatilität. Beispielsweise gelten im klassischen LIBOR-Marktmodell für die zu modellierenden Forward-Rates:

$$dL_i(t) = L_i(t)\sigma_i\big(t, L_i(t)\big)dW_{i+1}(t)$$

---

[27] D.h. die implizite Volatilität ist umso niedriger ist, je mehr die Option „am Geld“ ist.

$\sigma_i(t, L_{i(t)})$ ist weiterhin eine deterministische Funktion, welche jedoch neben der Zeit auch vom Niveau der Forward-Rate abhängt. Bekanntes Beispiel ist hier der „Constant Elasticity of Variance"-Ansatz, die sogenannten CEV Modelle:

$$\sigma_i(t, L_i(t)) = L_i(t)^{\gamma_i - 1}\sigma_{i,\gamma}$$

$$dL_i(t) = [L_i(t)]^{\gamma_i}\sigma_{i,\gamma} dW_{i+1}(t)$$

mit $0 \leq \gamma_i \leq 1$. Für einem Wert von $\gamma = 1$ ergibt sich das klassische LIBOR-Marktmodell.

Stochastische Volatilitäten

Hier wird angenommen, dass die Volatilität zufällig beeinflusst wird. Beispielsweise gilt für das LIBOR-Marktmodell mit stochastischer Volatilität:

$$\sigma_i(t) = \sqrt{V(t)}\gamma_j(t)$$

$$dV(t) = \kappa(\theta - V(t))dt + \xi\sqrt{V(t)}dB(t).$$

Die Volatilität besteht aus einer deterministischen Komponente γ_j und einer stochastischen Komponente *V*. Für die stochastische Komponente wird in diesem Fall ein CIR-Prozess verwendet. Damit kann V einerseits keine negativen Werte annehmen und unterliegt andererseits einem langfristigen Gleichgewichtsniveau (Mean-Reversion Level).

Sprungprozesse

Sind für die Modellierung der Zinsentwicklung nicht nur stetige Änderungen, sondern auch abrupte Zinsänderungen maßgeblich, so lässt sich dies mithilfe der Erweiterung um eine Sprungkomponente erreichen. Insbesondere kurzfristige Zinsen können beispielsweise durch Zentralbankaktivitäten deutliche Sprünge aufweisen. Im Versicherungskontext mit langlaufenden Verbindlichkeiten ist die Modellierung der Zinsentwicklung mittels Sprungprozessen bisher nicht weit verbreitet.

Erstmalig wurden Sprungprozesse von Merton für die Aktienpreismodellierung 1976 eingeführt. Dabei wird die klassische geometrische Brownsche Bewegung um lognormalverteilte Sprünge erweitert. Die Zeitpunkte der Sprünge werden anhand der Zuwächse eines Poisson-Prozesses modelliert. Eine entsprechende Erweiterung des LIBOR-Marktmodells stellt das Modell von Glassermann und Merener dar [54.].

16.4.6. Zusammenspiel zwischen Managementregeln des Bewertungsmodells und Bewertungsszenarien

Grundsätzlich erwartet man oft von Zinsstrukturmodellen, dass sie eine möglichst „realistische" Dynamik der Zinsen über die Zeit abbilden sowie auch „realistische" Formen der möglichen Zinsstrukturkurven aufweisen. Es ist jedoch darauf hinzuweisen, dass im Kontext einer risikoneutralen Bewertung zunächst (nur) die Arbitragefreiheit, die Anpassung an die Ausgangszinsstrukturkurve sowie die Replikation von am Markt beobachteten Derivatepreisen maßgebend sind (Marktkonsistenz). Die „Formen" und die „Vielfalt" der erzeugten Szenarien sind nur dahingehend entscheidend, dass die jeweiligen zu bewertenden Derivate sachgerecht bewertet werden.

Demgegenüber orientieren sich Managementregeln von Bewertungsmodellen oft an historischen real-world Entwicklungen. Dieser Ansatz stößt jedoch beispielsweise bei sehr hohen oder deutlich negativen modellierten Zinsen in den Bewertungsszenarien an Grenzen. Hier sind ggf. Festlegungen auf Basis von Expertenschätzungen erforderlich. Ähnliche Probleme können sich bei der Kalibrierung von Modellparametern an empirische Targets (z.B. Korrelationen) ergeben. Weitergehend ist es aufgrund der hohen Projektionsdauer bei der Bewertung versicherungstechnischer Rückstellungen im Allgemeinen auch notwendig, die Zinskurve und die Kalibrierungsziele der Volatilitätsfläche über den liquiden Bereich hinaus fortzusetzen. Auch hier kann sich die Anwendung von Expertenschätzungen als notwendig erweisen.

16.4.7. Nachträgliche Anpassungen von Zinsszenarien: Flooring / Capping / Freezing

Bei lognormalen Verteilungen treten konstruktionsbedingt in manchen Szenarien sehr hohe Zinsen auf. Bei der Normalverteilung hingegen kommen negative Zinsen ohne theoretische Untergrenze vor. Einzelne Szenarien mit extremen Zinsentwicklungen können ggf. in nachfolgend angewandten Bewertungsmodellen zu technischen Problemen oder zu deutlichen Verzerrungen der Ergebnisse führen. Grundsätzlich denkbar sind in diesen Fällen nachträgliche Anpassungen an den Bewertungsszenarien, an welche jedoch hohe Anforderungen gestellt werden sollten.

Denkbare Anpassungen sind beispielsweise:

- Flooring: Zinssätze unterhalb einer unteren Grenze werden durch einen minimalen zulässigen Wert ersetzt.
- Capping: Zinssätze über einer oberen Grenze werden durch einen maximalen zulässigen Wert ersetzt.
- Freezing: Ab einer definierten Stoppzeit (z.B. modellierte Zinssätze über- oder unterschreiten eine festgelegte Schranke) entwickeln sich die Zinsen deterministisch entsprechend der zum Stoppzeitpunkt gültigen Zinsstrukturkurve (d.h. im weiteren Projektionsverlauf wird die Volatilität auf null reduziert). Durch diesen Ansatz wird beispielsweise die Martingal-Eigenschaft des Bewertungsszenariensatzes erhalten.

Derartige nachträgliche Anpassungen führen potenziell zur Einführung von Arbitragemöglichkeiten und haben in der Regel Einfluss auf die Güte der Kalibrierung und auch auf die Marktkonsistenz der Bewertungsszenarien. Demgegenüber können beispielsweise durch eine Umgewichtung ggf. theoretische Arbitragemöglichkeiten bei der Einführung eines Floors oder Cap vermieden werden. Nachträgliche Anpassungen können grundsätzlich sinnvoll sein, sofern nachweisbare Verzerrungen der Ergebnisse durch einzelne Ereignisse verhindert und entsprechende – ggf. erweiterte – Validierungstests immer noch bestanden werden. Zur weiteren Einordnung sei auf Kapitel 15 verwiesen.

16.5. Aktien

Die Modellierung von Aktien oder aktienähnlichen Investments umfasst üblicherweise zwei Aspekte: die Modellierung der Entwicklung des Marktwerts des Investments (d.h.

die Modellierung der Veränderung eines Aktienkurses oder des Zählerstands eines Index) und die Modellierung von Dividendenzahlungen aus dem Aktieninvestment, die bei einem Performanceindex – im Gegensatz zu einem Kursindex – den Zählerstand erhöhen.

Um beide Aspekte abzubilden, sind mindestens zwei der drei folgenden Größen zu modellieren: die Wertentwicklung auf Total-Return-Basis (Performanceindex), die Entwicklung des Aktienkurses (Kursindex) und Dividendenzahlungen. Ist eine explizite Modellierung von Dividenden nicht notwendig, da diese z.B. innerhalb eines Fonds kontinuierlich reinvestiert werden (Thesaurierung), ist die alleinige Modellierung der Kursentwicklung ausreichend.

Wir beschreiben im Folgenden zunächst die Modellierung der Aktienkursentwicklung und gehen anschließend auf die Modellierung von Dividenden ein. Aspekte der Parametrisierung bzw. Kalibrierung der Modelle werden im zugehörigen Abschnitt in Kapitel 17 behandelt.

16.5.1. Modellierung der Aktienkursentwicklung

Im Rahmen der risikoneutralen Bewertung wird die Aktienkursentwicklung üblicherweise durch zeitstetige stochastische Prozesse beschrieben, deren Verteilungseigenschaften aus mehreren Komponenten zusammengesetzt werden: einer Driftkomponente, einer Diffusionskomponente und ggf. einer Sprungkomponente, mit der sich abrupte Kursänderungen abbilden lassen. Die verschiedenen Modelle unterscheiden sich im Wesentlichen in der Modellierung der Volatilität der Diffusionskomponente und der Existenz sowie Ausgestaltung der Sprungkomponente.

$S(t)$ bezeichne im Folgenden den Aktienkurs zum Zeitpunkt t und $\mu(t)$ die Driftrate nach Abzug von Dividenden, ebenfalls zum Zeitpunkt t. Da die Driftrate $\mu(t)$ unter einem risikoneutralen Bewertungsmaß bei kontinuierlicher Reinvestition der Dividenden dem unmittelbaren Zins $r(t)$ entsprechen muss, kann der Aktienprozess als Add-on zu einem mit der Short Rate verzinsten Geldmarktkonto aufgefasst werden und entsprechend in der Implementierung des Modells abgebildet werden. In dieser Betrachtungsweise erweitert das Add-on die Fortschreibung des Geldmarktkontos um eine Diffusionskomponente, Dividendenzahlungen und ggf. eine Sprungkomponente.

Konstante Volatilität (Geometrische Brownsche Bewegung)

Ein einfaches Modell zur Beschreibung eines zufälligen Aktienkursverlaufs ist die Geometrische Brownsche Bewegung, die z.B. auch im Black-Scholes Modell Verwendung findet. Die Entwicklung des Aktienkurses wird dabei wie folgt modelliert:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma S(t)dW(t)\,, \tag{11}$$

wobei $W(t)$ einen Wiener-Prozess und σ die (annualisierte) Volatilität bezeichnet. Die Volatilität wird in diesem Modell konstant modelliert, weshalb man mit der Geometrischen Brownschen Bewegung im Allgemeinen nur den Marktpreis einer einzelnen Option replizieren kann.

Zeitabhängige Volatilität

Sollen stattdessen die Marktpreise von Optionen mit unterschiedlichen Fälligkeitszeitpunkten getroffen werden, so ist das mit einer Erweiterung des Modells möglich, bei der die Volatilität zeitabhängig modelliert wird:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma(t)S(t)dW(t)\,. \tag{12}$$

Die Werte für $\sigma(t)$ sind dabei für den gesamten Projektionszeitraum vorzugeben.

Zeit- und kursabhängige Volatilität

Eine weitere Erweiterung macht die Volatilität nicht nur abhängig von der Zeit, sondern auch vom Aktienkurs. Damit kann z.B. abgebildet werden, dass sich die Volatilität in Crash-Phasen erhöht oder – im Kontext der Replikation von Marktpreisen – für die Replikation von Optionen mit niedrigen Ausübungskursen (Strikes) tendenziell höhere Volatilitäten notwendig sind als für Optionen mit hohen Ausübungskursen. Bei dem so erweiterten Modell spricht man von einem „Local Volatility" Modell, bei dem sich der Aktienkurs wie folgt entwickelt:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma\big(t, S(t)\big)S(t)dW(t)\,. \tag{13}$$

Mit diesem Modell lassen sich prinzipiell Marktpreise einfacher Call- und Put-Optionen mit beliebiger Laufzeit und Ausübungskursen replizieren. Marktpreise komplexerer Instrumente, die sensitiv bzgl. der bedingten Verteilung zwischen zwei zukünftigen Zeitpunkten reagieren, lassen sich damit aber ggf. nicht ausreichend gut treffen.

Constant Elasticity of Variance

Eine Abhängigkeit zwischen Aktienkurs und Volatilität lässt sich auch mit dem CEV Modell (Constant Elasticity of Variance) abbilden, bei dem der Aktienkurs wie folgt modelliert wird:

$$dS(t) = \mu(t)S(t)dt + \sigma S(t)^{\gamma} dW(t). \tag{14}$$

Im Vergleich zur Geometrischen Brownschen Bewegung ist also der Parameter γ hinzugekommen, mit dem sich eine Abhängigkeit der Volatilität vom Aktienkurs modellieren lässt. Mit einem Wert $\gamma < 1$ lässt sich dabei z.B. eine bei fallenden Aktienkursen steigende Volatilität abbilden.

Stochastische Volatilität

In den bisher vorgestellten Modellen ändert sich die Volatilität nur in Abhängigkeit der Zeit und des Aktienkurses. Soll die Volatilität im Modell auch eine eigenständige zufällige Komponente haben, kann z.B. das Heston Modell verwendet werden. Darin wird neben dem stochastischen Prozess des Aktienkurses auch ein Prozess der unmittelbaren Varianz geführt, der über einen Cox-Ingersoll-Ross-Prozess abgebildet wird:

$$
\begin{aligned}
dS(t) &= \mu(t)S(t)dt + \sqrt{V(t)}S(t)dW^S(t) \\
dV(t) &= \kappa(\theta - V(t))dt + \xi\sqrt{V(t)}dW^V(t).
\end{aligned} \tag{15}
$$

$W^S(t)$ und $W^V(t)$ bezeichnen dabei Wiener-Prozesse, die eine Korrelation ρ aufweisen. Ist ρ negativ, so bildet das wiederum einen negativen Zusammenhang zwischen Aktienkurs und Volatilität ab. Mit den Parametern κ und θ lässt sich die Mean-Reversion-Eigenschaft des Varianzprozesses steuern, und ξ ist der Parameter für die Volatilität der Varianz („vol of vol").

Sprünge

Soll die modellierte Entwicklung des Aktienkurses nicht nur stetige Änderungen, sondern auch abrupte Kursänderungen aufweisen, so lässt sich das mithilfe der Erweiterung um eine Sprungkomponente erreichen. Gründe dafür können z.B. ein besserer Fit der Modellpreise an Marktpreise (insbesondere bei kurzen Laufzeiten) sein oder die geplante Verwendung des Modells für die Bewertung von Verbindlichkeiten, die eine hohe Sensitivität bzgl. plötzlicher, starker Kursänderungen aufweisen können (z.B. bei Garantien, die über ein tägliches CPPI abgesichert werden).

Eine Erweiterung der Geometrischen Brownschen Bewegung um lognormalverteilte Sprünge stellt z.B. das Merton Modell dar, bei dem die Zeitpunkte der Sprünge anhand der Zuwächse eines Poisson-Prozesses modelliert werden. Eine entsprechende Erweiterung des Heston Modells ist in Form des Bates Modells zu finden, das auch unter der Bezeichnung „SVJ" (für „Stochastic Volatility Jump Model") verwendet wird.

Bei beiden Modellen werden Sprünge, die den Aktienkurs erhöhen, genauso behandelt wie Sprünge, die den Aktienkurs reduzieren. Eine getrennte Behandlung der zwei Sprungrichtungen ist z.B. beim Kou Modell möglich, bei dem sich neben dem Verhältnis von positiven und negativen Sprüngen auch die jeweiligen Verteilungen der Sprunghöhe separat parametrisieren lassen.

16.5.2. Modellierung von Dividenden

Unter einem risikoneutralen Bewertungsmaß ist die erwartete Wertentwicklung des Aktieninvestments bei einer kontinuierlichen Reinvestition der Dividenden vorgegeben: Die Driftrate muss der Short Rate $r(t)$ entsprechen. Bei der Modellierung von Dividendenzahlungen muss diese Driftrate des Gesamtinvestments geeignet auf die Aktienkursentwicklung $\mu(t)$ und die Dividendenzahlung $D(t)$ aufgeteilt werden. Die Driftrate $\mu(t)$ ergibt sich somit als Differenz aus $r(t)$ und $D(t)$:

$$
\mu(t) = r(t) - D(t)\,. \tag{16}
$$

In der Regel ist eine deterministische Modellierung von $D(t)$ ausreichend. Soll eine stochastische Modellierung von $D(t)$ erfolgen, z.B. weil die modellierten Erträge aus Dividenden einen wesentlichen Einfluss auf die Bewertung haben, können prinzipiell alle Zinsmodelle, die für die Entwicklung von $r(t)$ verwendet werden, auch für die Modellierung von $D(t)$ verwendet werden, sofern die Modelle negative Werte von $D(t)$ ausschließen. Es kommen in diesem Fall also nur Zinsmodelle in Frage, die keine negativen Zinsen zulassen.

Sowohl im deterministischen als auch im stochastischen Fall lassen sich mittels D_t – falls dies notwendig oder gewünscht sein sollte – auch zeitdiskrete Dividendenzahlungen abbilden. Der Modellierungsansatz ähnelt dabei der Modellierung von Sprüngen, wobei eine Dividendenzahlung in diesem Kontext einen Sprung darstellt, dessen Zeitpunkt in der Regel feststeht, dessen Höhe aber – zumindest im stochastischen Fall – vorab nicht bekannt ist.

16.6. Immobilien

Bei der Modellierung von Immobilien und zugehörigen Mieteinnahmen können dieselben Modelle wie bei der Aktienmodellierung verwendet werden. Wesentliche Unterschiede ergeben sich erst bei der Kalibrierung des gewählten Modells. Hierzu verweisen wir auf den entsprechenden Abschnitt im Kalibrierungsteil.

16.7. Spreads

Unter Spreadmodellierung verstehen wir die Preismodellierung in Abhängigkeit von Spreads bei Zinsinstrumenten. Arbitragefreie Spreadmodellierung bedeutet, dass diese Spreads – gegeben ein arbitragefreies Zinsmodell – weiterhin arbitragefreie Preise liefern. Sie werden hier, wie üblich, als Credit Spreads interpretiert und entsprechend kalibriert. Die Instrumente zur formalen Einführung von Spreads sind ausfallgefährdete Zerobonds, angewendet werden die Spreads dann auf beliebige Zinsinstrumente.

Aufgrund der Arbitragefreiheit gibt es einen sehr engen Zusammenhang zwischen Spreads und Ausfällen. Formal müssen hierzu die aus den Spreads vermeintlich resultierenden Überrenditen durch entsprechende Ausfälle so kompensiert werden, dass diskontierte Preisprozesse von entsprechenden Anleihen weiterhin die Martingaleigenschaft (1) erfüllen. Eine entsprechende stochastische Spreadmodellierung muss daher einhergehen mit einer konsistenten Modellierung der entsprechenden Ausfälle (und ggf. Ratingmigrationen). Daraus resultiert eine relativ hohe Modellkomplexität aufgrund der wir auf eine konkrete Vorstellung solcher Modelle an dieser Stelle verzichten - des Weiteren ist es aufgrund mangelnder Verbreitung dieser Modelle schwer von einem Marktstandard zu sprechen. Stattdessen verweisen wir auf nachfolgende Referenzen: [55.], [56.], [57.], [58.], [65.], [66.], [67.], [68.].

Viele dieser Modelle basieren auf dem Ansatz der stochastischen Modellierung einer Migrationsmatrix, die ebenfalls Ausfälle abbildet, aus der dann über geschlossene Formeln entsprechende konsistente Spreadkurven hergeleitet werden, so dass sich bei gleichzeitiger Verwendung der Migrationen und Spreads ein arbitragefreies Pricing ergibt.

Hingewiesen sei ferner auf den DAV Ergebnisbericht zur „Kreditrisikomodellierung von ausfallbehafteten Kapitalanlagen in Versicherungsunternehmen" vom 5.2.2014 [33.]. Darin werden, mit deterministischem Fokus, weitere Aspekte diskutiert.

16.8. Wechselkurse

Zur Begründung von Wechselkursschwankungen bestehen mehrere Theorien, die einen Zusammenhang zwischen dem Wechselkurs auf der einen sowie dem Preisniveau, dem Einkommen oder dem Zinssatz zwischen der Basis- und der Fremdwährung auf der anderen Seite herstellen. Diese Theorien sind in der Regel partialanalytisch, d.h. sie fokussieren auf die Veränderung einer oder weniger den Wechselkurs bestimmenden Größe(n). Unter der Zinsparität trifft der Unterschied zwischen Terminkurs und Kassakurs lediglich eine Aussage über die unterschiedlichen Zinssätze in der Basis- und Fremdwährung. Würden die Terminkurse nicht das wahre Zinsgefälle zwischen zwei Währungen widerspiegeln, so wäre es möglich, risikolosen Profit aus den Preisunterschieden zwischen dem Devisenmarkt und dem Geldmarkt zu erwirtschaften. Dies ist insbesondere im risikofreien Bewertungskontext per Definition ausgeschlossen. Der faire Terminkurs $E(t)$ kann daher unter der Annahme eines arbitragefreien Marktes über die folgende Formel hergeleitet werden:

$$E(t) = E(0)\frac{P^{B,N}(0,t)}{P^{F,N}(0,t)}$$

$P^{B,N}(0,t)$ bzw. $P^{F,N}(0,t)$ stellen die jeweiligen Diskontfaktoren (Basis- und Fremdwährung) dar. Die Darstellung folgt der sogenannten Mengennotierung, bei der die Menge der zu beziehenden Währung pro Geldeinheit der Grundwährung dargestellt wird (z.B. EUR/USD 1,1045). Alternativ wird bei der Preisnotierung der Preis einer Geldeinheit der zu beziehenden Währung in der Grundwährung dargestellt wird (z.B. USD/EUR 0,9054). Die Preisnotierung lässt sich allerdings als Inverse der Mengennotierung leicht berechnen. In folgender Beschreibung wird die im Devisenhandel gebräuchliche Mengennotierung genutzt.

16.8.1. Ein stochastischer Zinsparitätenansatz

Der Wechselkurs X_t lässt sich zerlegen in

$$X(t) = E(t) \cdot S(t),$$

wobei $E(t)$ den erwarteten Anteil des Wechselkurses und $S(t)$ den unerwarteten Anteil des Wechselkurses darstellen.

Ein einfaches Modell zur Modellierung des unerwarteten Wechselkursanteils ist die bekannte Geometrische Brownsche Bewertung ohne Driftkomponente. Dieser Ansatz wird ebenfalls bei der Modellierung der Entwicklung von Aktienkursen im Black-Scholes Modell genutzt (dort mit Driftkomponente). Die Volatilität wird in diesem Modell als konstant angenommen. In der Praxis wird jedoch häufig aus Vereinfachungsgründen der Spezialfall $\sigma = 0$ betrachtet; hierbei ist der modellierte Wechselkurs nur durch die Entwicklung der Zinsprozesse determiniert, was dem Zinsparitätenansatz entspricht

$$E(t_n) = E(t_n - 1)\frac{P^{B,N}(t_{n-1}, t_n)}{P^{F,N}(t_{n-1}, t_n)}$$

Die Volatilität des Wechselkurses ergibt sich hier allein aus den beiden stochastischen Zinsprozessen.

Wir bestimmen S_t über die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = \sigma S(t) dW^{\mathbb{Q}^{F,N}}(t)\,,$$

wobei $W^{\mathbb{Q}^{F,N}}(t)$eine Brownsche Bewegung unter $\mathbb{Q}^{F,N}$ist. Das Modell ist dann arbitragefrei, da $S(t)$ ein Martingal ist. Zur Simulation des Wechselkurses müssen nun nur noch die konstante Volatilität σ sowie die Korrelationen zwischen den Zinsprozessen und dem Wechselkursprozess kalibriert werden. Prinzipiell lassen sich weitere Verallgemeinerungen aus der Modellierung von Aktien (siehe 16.5) auf die Modellierung des Wechselkurses übertragen.

16.9. Inflation

In der Vergangenheit wurden Inflationsschwankungen nur selten in der risikoneutralen Bewertung berücksichtigt. Abgesehen von der zusätzlichen methodischen Komplexität, sowohl in Bezug auf Modellierung als auch Kalibrierung (siehe Abschnitt 17.8), führten

Inflationsschwankungen nach allgemeiner Auffassung nur zu beschränkte Bewertungskorrekturen. Die Nicht-Berücksichtigung der risikoneutralen Simulation von Inflationsschwankungen und deren nachgelagerten Einflusses auf die Bewertung von versicherungstechnischen Verpflichtungen wird oft mit folgenden Argumenten untermauert:

- Besonders im Bereich der Krankenversicherung ist die (medizinische) Inflation der relevant. Allerdings wird gerade hier die sogenannte Inflationsneutrale Bewertung genutzt, die auf eine explizite Modellierung der Inflation verzichtet. Dem zugrunde liegt die Annahme, dass höhere Leistungen aufgrund medizinischer Inflation durch entsprechende Beitragsanpassungen bereits auf der Passivseite exakt ausgeglichen werden können.
- Seit Mitte der 1990er Jahre waren insbesondere in Deutschland und den USA nur kleine bis moderate Schwankungen der Inflationsrate um den jeweiligen Zielwert der Geldmarktpolitik zu beobachten. Diese Stabilität kann bei der Kalibrierung auf historischen Daten zu einer entsprechend geringen Volatilität des Risikofaktors führen, sodass eine Approximation durch das langfristige Inflationslevel angemessen erscheint.
- Berücksichtigung des langfristige Inflationslevels ist durch die Konstruktion der risikolosen Zinskurve gemäß der EIOPA-Methodik bereits gegeben. Das Extrapolationsziel der Ultimate Forward Rate beruht auf den historisch beobachteten Realzinsen und dem Inflationsziel der Geldmarktpolitik. Über die Diskontierung der projizierten Cashflows mittels dieser Zinskurve ist eine Best-Estimate Inflationsbereinigung berücksichtigt.
- Zudem haben die moderaten Schwankungen dazu geführt, dass eine Absicherung gegenüber Inflationsrisiken am Kapitalmarkt nur in begrenztem Maße vorgenommen wurde. Dementsprechend ist das Volumen von inflationsabhängigen Anleihen (ILBs) typischerweise gering und die aktivseitige Sensitivität unwesentlich.

Der starke Anstieg der Inflation in der jüngeren Vergangenheit kann allerdings eine Überprüfung der Angemessenheit für eine Vernachlässigung der Inflationsschwankungen notwendig machen.

Wird Inflation explizit als Teilkomponente der Szenarien zur marktkonsistenten Bewertung modelliert, so erfolgt dies oft vermittels der Fisher-Gleichung, die Inflation i als Differenz der Nominalzinsen r^N und der Realzinsen r^R darstellt:

$$r^R = r^N - i \tag{17}$$

Folglich wird in der praktischen Umsetzung neben dem Zinsmodell für Nominalzinsen ein weiteres für Realzinsen betrieben, sodass der stochastische Inflationsindex $I(t)$ residual als pfadweises Verhältnis zwischen nominalem und realem Geldmarktkonto resultiert:

$$I(t) = \frac{C^N(t)}{C^R(t)} \tag{18}$$

Dies entspricht einer Modellierung des Inflationsindexes in Form eines Zinsparitätsansatzes zwischen Nominal- und Realzins, analog der Modellierung eines Wechselkurses zwischen Fremdwährungen. Somit folgt dieser Ansatz unmittelbar dem im Abschnitt 16.2.1 erläuterten Konstruktionsprinzip und impliziert somit – wie dort ebenfalls dargelegt – die Martingaleigenschaft für den resultierenden Inflationsindex.

Die Wahl des Realzinsmodells ist im Allgemeinen beliebig und eine Abwägung der gewünschten Komplexität. Im einfachsten Fall kann zum Beispiel ein Vasicek Modell als Realzinsmodell gewählt werden. Im Hinblick auf die Modellkalibrierung kann es allerdings vorteilhaft, sein, wenn Nominal- und Realzinsmodell konsistent zueinander gewählt werden. Verschiedene Verteilungseigenschaften – z.B. lognormale Nominalzinsen und normmalverteilte Realzinsen – können zu unerwünschten Effekten, verstärkter Stichtagsabhängigkeit und Schwierigkeiten in der marktkonsistenten Kalibrierung führen.

16.9.1. Stochastische Forward Inflation

Bei genauerer Betrachtung der Fisher-Gleichung stellt man fest, dass sich die Zeitindizes zwischen Nominalzins und Realzins bzw. Inflationsrate unterscheiden. Dies liegt darin begründet, dass der ein-periodischen Nominalzinsen bereits zum Anlagezeitpunkt t als Spot Rate feststeht wohingegen sich die Inflationsrate und damit der Realzins erst im Rückblick messbar ist.

Im vorgenannten pfadweisen Modell (17) entspricht der modellierte Realzins dem erwarteten Inflationslevel, welches durch entsprechende handelbare Marktinstrumente – zum Beispiel Inflation Swaps – abgesichert werden kann. Das tatsächlich realisierte Inflationslevel unterliegt weiterhin Schwankungen, die in einem Modell höherer Komplexität mittels eines zusätzlichen stochastischen Prozesses modelliert werden.

Entsprechende Modelle folgen typischerweise aus der Analogie des Inflationsindex als Wechselkurs zwischen Nominal- und Realökonomie. Dementsprechend basieren Sie auf dem stochastischen Zinsparitätsansatz, der in Abschnitt 16.8.1 vorgestellt wurde. Im Jarrow-Yildirim Modell (siehe z. B. [48.]) werden beispielsweise reale und nominale Short Rate gemäß einem Hull-White Prozess normalverteilt projiziert (siehe Abschnitt 16.4.2). Zudem wird der Inflationsindex separat vom Realzins modelliert

$$I(t) = I(0) \cdot \frac{C^R(t)}{C^N(t)} \cdot S(t).$$

Hier ist der stochastische Prozess $S(t)$ ein Martingalprozess, der die unerwartete Inflation darstellt. Die stochastische Differentialgleichung für den Inflationsprozess ist ein lognormaler Diffusionsprozess, dessen Drift durch die Differenz zwischen der realen Short Rate (r^R) und der nominalen Short Rate (r^N) entspricht:

$$\frac{dI(t)}{I(t)} = [r^N(t) - r^R(t)]\, dt + \sigma_I \cdot dW_I(t),$$

Alternativ zum Jarrow-Yildirim Modell kann die Inflationsmodellierung auch auf Basis von lognormalverteilten Zinsprozesse entwickelt werden. Diese Lognormale Forward

Rate Modelle (LFM) modellieren häufig nicht direkt den Inflationsindex, sondern – analog zum simulierten Forward Rate– den Forward Inflationsindex

$$FI_i(t) = I(t) \cdot \frac{P^R(t\,T_i)}{P^N(t,T_i)}.$$

Da der inflationierte Realzinsbond $I(t)\,P^R(t\,T_i)$ eine durch Marktinstrumente erzielbare Rendite darstellt, ist der Forward Inflationsindex ein Martingal unter einem geeigneten Maß.[28] Daher kann die stochastische Differentialgleichung geschrieben werden als

$$\frac{dFI_i(t)}{FI_i(t)} = \sigma_{FI,i} \cdot dW_{I,i}(t),$$

Unter dieser Modellierung – in Kombination mit lognormalen Zinsmodellen wie dem LIBOR Marktmodell für nominalen und erwartetem realen Forward Rates – kann eine Bewertung von inflationsabhängigen Instrumenten vorgenommen werden [48.].

16.10. Alternative Assetklassen

Unter alternativen Assetklassen („Alternatives") ist nicht eine spezielle Anlageklasse zu verstehen. Ferner werden alternative Anlageformen werden von unterschiedlichen Marktteilnehmern auch nicht einheitlich definiert. Hier sollen deshalb prinzipiell alle nicht in den vorangegangenen Kapiteln erwähnten Anlageformen als Alternatives angesehen werden. Deshalb ist die folgende Beschreibung beispielhaft und nicht abschließend zu sehen. Die aufgeführten Prinzipien können aber durchaus auf weitere zu modellierende Anlageformen des Kapitalmarktes übertragen werden.

Das Prinzip 5 aus diesem Hinweis, die Sparsamkeit auch im Hinblick auf die Bedeutung im Portfolio, ist bei der Modellierung von Alternatives besonders zu beachten, weil diese auf Grund des Volumens im gesamten Portfolio oft eine stark untergeordnete Rolle spielen. Andererseits kann der Einfluss auf die Risikosituation des Unternehmens durchaus größer sein, als es die reine Volumenbetrachtung nahelegt und damit eine gesonderte Modellierung angezeigt sein. In vielen Fällen stellt die Modellierung von Alternatives aber sehr hohe Anforderungen, da oft nicht auf lange historische Zusammenhänge, liquide Marktinformationen und weit verbreitete Standardmodelle zurückgegriffen werden kann.

Vor der Aufnahme einer Modellierung von Alternatives in das Gesamtmodell ist deshalb eine sorgfältige Auswahl darüber zu treffen, für welche Klassen von Vermögenswerten mit dem Modell Szenarien erzeugt werden sollen.

Bei der Aufnahme von Alternatives in das Modell ist es grundsätzlich möglich, ein Mapping auf eine bereits modellierte Anlageklasse, z.B. Aktien, vorzunehmen. Gegebenenfalls muss in diesem Fall noch ein zusätzlicher Risikoaufschlag vorgenommen werden, um die gegenüber der bereits modellierten Anlageklasse erhöhten Risiken abzubilden.

[28] Dieses geeignete Maß ist das T_i-Forward Maß, dass mit dem Numéraire $P^N(t,T_i)$ assoziiert ist.

Eine weitere Modellierungsoption kann ein Mapping auf spezifische Indizes der Anlageklasse sein, sofern solche Indizes verfügbar sind und das Investment Index-nah erfolgt.

Schließlich kommt als komplexeste Form der Modellierung noch eine eigene Preisbildung der Anlageklasse über eine oder mehrere individuelle Einflussfaktoren, die weder auf bisher betrachtete Anlageklassen noch Indizes der Anlageklasse zurückgreifen, in Betracht.

Im Folgenden werden drei alternative Anlageklassen und ihre Modellbildung beispielhaft beschrieben. Die Modellierung erfolgt je nach Ansatz entweder im ESG oder erst im Bewertungsmodell.

Private Equity

Bei der Aufnahme von Private Equity in die Kapitalmarktsimulation kann aufgrund der geringen Liquidität der Anlageklasse, der Unterschiedlichkeit der Investment-Segmente (Venture Capital, Expansion Capital, Buy-Out, Distressed) sowie der Tatsache, dass man nicht immer in marktbreite Portfolios investiert, oft nicht ohne Weiteres auf Indizes als Basis der Modellierung zurückgegriffen werden. In diesem Fall kann, wie oben skizziert, ein Mapping auf bereits modellierte Kapitalmarktgrößen, wie beispielsweise Aktienindizes, sinnvoll sein. Allerdings muss dann darauf geachtet werden, dass durch das Mapping das Risiko (im Sinne der Volatilität) des Private Equity Investments nicht unterschätzt wird.

Alternativ zum Mapping kommt eine eigene Modellierung der Anlageklasse über werttreibende Faktoren oder Anlageklassen-spezifische Indizes in Betracht. Zur Modellierung werttreibender Faktoren existieren Modelle, die Umsatzwachstum, Umsätze und Kosten eines Unternehmens, in das investiert wurde, abbilden, um daraus Cashflow-Entwicklungen zu modellieren. Aus diesen lassen sich dann in weiteren Modellschritten Unternehmenswerte und mit Hilfe der Optionspreistheorie schließlich Beteiligungswerte bestimmen. Diese sehr detaillierte Modellierung erfordert allerdings ein hohes Modellverständnis, sowohl bei der Modellierung der Private Equity Investments als auch bei der Einbettung in das Gesamtmodell.

Commodities

Bei Commodities handelt sich um eine sehr heterogene Anlageklasse, die in Hard und Soft Commodities, also nicht nachwachsende, begrenzte und verderbliche, nachwachsende Commodities unterschieden wird. Typische Commodities sind Metalle, Öl, Gas und Agrarrohstoffe.

Auch bei Commodities kann bei der Modellierung ein Mapping auf bereits modellierte Anlageklassen, gegebenenfalls mit zusätzlichem Risikozuschlag, in Frage kommen.

Da Rohstoffindizes am Markt, teilweise auch mit langer Historie, verfügbar sind, kommt für Commodity-Investments ein Mapping auf Rohstoffindizes durchaus in Frage, sofern die Investments Index-nah erfolgen.

Bei der individuellen Modellierung von Commodities ist die Unterscheidung von Kassa- und Termingeschäften zu beachten. Man spricht in diesem Zusammenhang von Spot-und Forwardpreisen, die sich in der Regel unterscheiden. Je nach Laufzeit der Termingeschäfte und der Marktphase können Preise längerfristiger Termingeschäfte über den Kassapreisen bzw. Preisen kurzfristiger Termingeschäfte liegen (Contango) oder auch darunter (Backwardation). Erklärt werden diese Unterschiede durch die sogenannten Convenience Yield, die bei einer individuellen Modellierung von Commodities als weitere Modellgröße modelliert werden muss. Der Kassa-Preis von Commodities kann wiederum über ökonomische Modelle zu Angebot, Nachfrage und Lagerhaltung abgebildet werden. Diese sehr detaillierte Modellierung erfordert allerdings ein hohes Modellverständnis, sowohl bei der Modellierung der Commodites als auch bei der Einbettung in das Gesamtmodell.

Hedge Fonds

Besonderheiten von Hedge Fonds gegenüber anderen Anlageklassen sind gehebelte Investments und die Möglichkeit, Short-Positionen einzugehen. Hegde Fonds investieren grundsätzlich in Anlageklassen am Kapitalmarkt, so dass bei einer theoretischen Sicht auf die Modellbildung ein Hedge Fonds als Zusammensetzung von Anlageklassen, die bereits im Modell vorhanden sind oder ergänzt werden können, angesehen werden kann.

Damit ist ein Mapping auf im Modell bereits vorliegende Anlageklassen eine Modellierungsoption, wenngleich Hedge Fonds aufgrund ihrer sehr unterschiedlichen Stile (Event Driven, Tactical, Relative Value) ihre Portfoliozusammensetzung in kurzer Zeit deutlich verändern können, so dass eine Abbildung über historisch hergeleitete Zusammenhänge besonders kritisch zu hinterfragen ist. Zudem fehlt in aller Regel auch die Transparenz hinsichtlich der Portfoliozusammensetzung, so dass eine fundierte Herleitung historischer Zusammenhänge zusätzlich erschwert wird.

Aber auch ein Mapping auf einzelne oder zusammengesetzte Hegde-Fonds-Indizes kommt bei der Modellierung von Hedge Fonds grundsätzlich in Betracht. Wichtig ist es jedoch, auch hierbei darauf zu achten, dass Stabilität und Transparenz in aller Regel nicht gegeben sind.

17. Kalibrierung

Für die Kalibrierung risikoneutraler ESG-Modelle im Kontext der marktkonsistenten Bewertung versicherungstechnischer Verpflichtungen ist das entscheidende Kriterium die Marktkonsistenz. Ein Modell zur marktkonsistenten Bewertung ist so zu kalibrieren, dass am Kapitalmarkt beobachtete Preise (oder im Fall von Optionen, implizite Volatiltäten) für Finanzinstrumente zu einem bestimmten Stichtag möglichst genau getroffen werden

Die Bestimmung der Modellparameter, die die beste Übereinstimmung mit beobachtbaren Preisen aufweisen, wird in der Regel nicht direkt erfolgen können. Vielmehr müssen zu diesem Zweck die Modellgleichungen für gegebene Parameter gelöst und die in Frage stehenden Finanzinstrumente mit dem resultierenden Modell bewertet werden. Aus dem Abgleich der so gewonnenen Modellpreise mit den beobachteten Werten kann dann eine Aussage über die Adäquanz der gewählten Parameter getroffen werden. Ist der Fit an die gegebenen Marktpreise/implizite Volatilitäten nicht ausreichend, müssen die Modellparameter über ein iteratives Optimierungsverfahren angepasst werden.

Dieses Vorgehen unterscheidet sich insbesondere von der Kalibrierung von Risikokapitalmodellen, deren Parameter (wie Volatilitäten und Korrelationen) meist direkt aus historisch beobachteten Daten geschätzt werden. Um die Frage nach dem Wert eines Portfolios unter aktuellen Marktbedingungen beantworten zu können, werden marktkonsistenten Modelle zudem an stichtagsbezogenen Daten kalibriert. Historische Daten, wie sie zur Kalibrierung von Risikokapitalmarktmodellen herangezogen werden, spielen auch vor diesem Hintergrund eine nachgeordnete Rolle.

Einschränkend muss an dieser Stelle aber auch erwähnt werden, dass das hier beschriebene Vorgehen einen in der Regel unrealistischen Idealfall voraussetzt, nämlich die Verfügbarkeit hinreichend liquider und transparenter Marktdaten. Diese Voraussetzung ist, insbesondere bei der Bewertung langlaufender Verbindlichkeiten aus der Lebensversicherung, nicht überall gegeben. In inaktiven Marktsegmenten, d.h. Märkten, in denen keine liquiden und transparenten Preise für relevante Finanzinstrumente verfügbar sind, wird in der Praxis häufig auf historische Daten oder Expert Judgment zurückgegriffen.

17.1. Abhängigkeiten

Die Anforderung der Marktkonsistenz erstreckt sich zunächst auch auf die Kalibrierung der Abhängigkeitsstrukturen. Das bedeutet im Prinzip, dass Korrelationsparameter in risikoneutralen Modellen an beobachtbaren Preisen von Finanzderivaten zu kalibrieren sind.

In der Praxis jedoch erweist sich das oft als schwer bis nicht durchführbar. Wo geeignete, d.h. korrelationssensitive, Instrumente (z.B. Spreadoptionen) überhaupt existieren, ist die Liquidität oftmals fraglich. Darüber hinaus kann der Aufwand, sowohl was finanzielle (Marktdatenlizenzen) als auch operationelle, technische Aspekte angeht, beträchtlich werden. Häufig werden Korrelationen daher auch in risikoneutralen Modellen aus empirischen Daten bestimmt.

Eine gewisse Sonderstellung nehmen hier Short-Rate Modelle mit mehreren stochastischen Faktoren ein. Bei diesen werden die Korrelationen zwischen den (meist zwei) stochastischen Faktoren üblicherweise als Freiheitsgrade für die Kalibrierung der Volatilitätsfläche eingesetzt. Dies ist gängige Praxis für Short Rate Modelle mit ihrer vergleichsweisen geringen Anzahl von freien Parametern, wird für Modelle mit einer größeren Anzahl von Freiheitsgraden (wie dem LMM) aber allgemein nicht empfohlen [48.], [59.].

Bei Modellen für Aktien, Wechselkurse und Inflation sind überdies die konstruktionsbedingten funktionalen Abhängigkeiten vom Nominalzinsprozess zu beachten (siehe Gleichung (8)). Diese können, abhängig vom gewählten Modell, zu hoher Komplexität und unerwarteten Wechselwirkungen führen. So hängt insbesondere die im Modell realisierte Korrelation zwischen dem Nominalzins und einem nach (8) und (10) konstruierten (Aktien-) Prozesses X_t auch von der Volatilität des unerwarteten Anteils Y_t ab: Ist die Volatilität diese Prozesses etwa Null, so ist die Abhängigkeit zwischen X_t und dem

Nominalzinsprozess vollständig über die funktionale Abhängigkeit (8) bestimmt. Es ist in diesem Fall schwierig, wenn nicht unmöglich, an einen vorgegebenen Zielwert für die Korrelation zwischen diesen beiden Größen zu kalibrieren.

Zu fragen ist allerdings, ob dies für solche, per Konstruktion vom Nominalzinsprozess abhängige Prozesse tatsächlich überhaupt erforderlich ist. Diese Prozesse entsprechen in einem risikoneutralen Modellrahmen ihrer Natur nach (siehe Gleichung (8)) eher Termingeschäften als direkt am Markt quotierten Spot-Werten. Die in einer Simulation realisierten Korrelationen werden und müssen daher in der Regel nicht den aus empirischen Daten direkt bestimmten Korrelationen zwischen Spot-Quotierungen entsprechen.

17.2. Kalibrierungsziele: Referenzinstrumente und deren Werte

Die Kalibrierung von Volatilitätsparametern von Kapitalmarktmodellen im risikoneutralen/marktkonsistenten Kontext erfordert in der Regel das Vorliegen von Marktinformationen über für die Volatilität der zugrundeliegenden Risikofaktoren. Hierfür werden zunächst Referenzinstrumente, welche Optionalitäten aufweisen, sowie deren Marktpreise bzw. implizite Volatilitäten hergezogen. Die Referenzinstrumente sollten dabei zwei zentrale Eigenschaften erfüllen:

i. Die Marktinformationen hierzu (Preise, implizite Volatilitäten) sind möglichst verlässlich, d.h. stammen idealerweise aus einem Markt hinreichender Tiefe, Liquidität und Transparenz.

ii. Die Eigenschaften der Referenzinstrumente sind denen der zu bewertenden Exposures möglichst nahe.

Aspekt ii. ist wichtig, da die marktkonsistente Bewertung versicherungstechnischer Verpflichtungen im Wesentlichen dadurch geschieht, dass durch deren simulationsbasiert Cashflow Projektion von den Marktpreisen/-informationen der Referenzinstrumenten eine interpolative /extrapolative Bewertung erfolgt.

In Bezug auf die zu betrachtende Zielgröße der Referenzinstrumente, stehen zwei Möglichkeiten zur Auswahl:

- Preise

- Implizite Volatilitäten

Während für Referenzinstrumente ohne Optionalität (etwa Anleihen) in der Regel Preise als Zielgröße verwendet werden und (Markt-)Preise im marktkonsistenten Umfeld naheliegend erscheinen, so haben diese jedoch gewissen Nachteile bei Vorliegen von Referenzinstrumenten mit Optionalitäten, welche durch den Einsatz impliziter Volatilitäten umgangen werden: Als implizite Volatilität bezeichnet man den Volatilitätsparameter in einem Standard-Pricingmodell für Optionen/Derivate (etwa Black-Scholes-Modell für Index-Optionen oder Black- bzw. Normal-Modell für Swaptions), der dafür sorgt, dass dieses Modell unter Verwendung der Marktzinskurve den Marktpreis repliziert. Implizite

Volatilitäten ermöglichen aus dem Preis eines Instruments die Volatilität und damit einen der wesentlichen preistreibenden Faktoren zu extrahieren und den Einfluss der Zinskurve auszuschließen. Vor dem Hintergrund, dass marktkonsistente Bewertungen oft in einem Umfeld vorgenommen werden, wo die verwendete Startzinskurve nicht mit der reinen Marktzinskurve übereinstimmt, ist es daher angebracht, Kapitalmarktmodelle so zu kalibrieren, dass die sich darin realisierten impliziten Volatilitäten bestimmter Referenzinstrumente mit deren Marktvorgaben decken (Volatilitätsreplikation), anstelle deren Preise zu replizieren – Letztgenannte werden ggf. stark von der zum Markt abweichenden Zinskurve beeinflusst. Eine Preisreplikation in der Kalibrierung ist analog möglich, sollte aber dann nicht auf den Marktpreis, sondern den Preis, welcher sich aus der vom Markt abweichenden Zinskurve und der impliziten Volatilität ableitet, abzielen.

17.3. Zins

Vereinfacht dargestellt erfordert die Kalibrierung von Zinsmodellen in risikoneutralen Kontext zwei Aspekte:

1. Die Replikation der Startzinskurve

2. Die Kalibrierung der Volatilitätsparamter des Modells

Die Replikation der Startzinskurve bzw. der Marktpreise von Bonds ist bei den meisten Zinsmodellen leicht möglich und ergibt sich oft bereits konstruktionsbedingt aus dem Zinsmodell.

Zur Kalibrierung der Volatilitätsparameter werden in der Regel implizite Volatilitäten von Swaptions und Zinscaps als Zielvorgabe verwendet, so dass eine „Volatilitätsreplikation" erfolgt, d.h. die Zielfunktion für die Kalibrierung basiert auf impliziten Volatilitäten. Insbesondere für entsprechende europäische Optionen (ATM) existiert hierfür ein liquider, tiefer und transparenter Markt. Dabei wird abhängig vom zugrundeliegenden Optionspreismodell hauptsächlich zwischen sogenannten Black-Volatilitäten und Normal-Volatilitäten unterschieden, wobei sich in den letzten Jahren das Normal-Modell zum Marktstandard etabliert hat.

Im Idealfall sollten im Sinne der Marktkonsistenz alle am Markt verfügbaren impliziten Volatilitäten für Swaptions verschiedener Ausprägung möglichst gut getroffen werden. Je nach verwendetem Modell und dem Verhältnis der impliziten Volatilitäten zueinander (also der Form der sogenannten Volatilitätsoberfläche) ist dies aber nicht oder nur eingeschränkt möglich. In diesem Fall ist eine Auswahl an Kalibrierungsinstrumenten zu treffen, die am relevantesten für die vorgesehene Bewertung (im vorliegenden Kontext: der versicherungstechnischen Rückstellungen) sind. Bei der Auswahl der für die Kalibrierung gewählten Referenzinstrumente sind die Merkmale der zu bewertenden Größen (beispielsweise versicherungstechnische Verpflichtungen aus einem Lebensversicherungsvertrag), insbesondere Laufzeit, Höhe und Art der eingebetteten Optionen und Garantien, zu berücksichtigen. Die gewählten Referenzinstrumente sollten ähnliche optionale Charakteristika wie die zu bewertenden Größen haben.

Aufgrund des im Allgemeinen vorhandenen „Volatilitäts-Smile“ ist bei der Kalibrierung idealerweise die „Moneyness“ („Geldnähe“) der Optionen zu berücksichtigen. Die „Geldnähe“ einer Option gibt an, wie der aktuelle Preis des Basiswertes sich zum Ausübungspreis verhält. Eine Option ist „am Geld“ („at the money“, ATM), wenn der Marktpreis des Basiswertes gleich oder nahezu gleich dem Ausübungspreis ist. Im Geld („in the money“) ist eine Option, die einen inneren Wert besitzt. Aus dem Geld („out of the money“, OTM) ist eine Option, die keinen inneren Wert besitzt. Die meisten am Markt quotierten Optionen sind sogenannte „at the money“-Optionen. Demgegenüber sind jedoch die in Versicherungsverträgen eingebetteten Optionen und Zinsgarantien selten direkt „at the money“.

Bei der Kalibrierung einiger Modelle (z.B. Local Volatility und CEV) ist zu beachten, dass die Kalibrierung an das absolute Niveau gebunden ist. Wird diese Kalibrierung z.B. auf eine beliebig gesetzte Startzinskurve im Modell übertragen, ergeben sich daraus andere, womöglich fehlerhafte Volatilitäten.

Für eine effiziente Kalibrierung sind analytische Preisfunktionen oder gut kontrollierbare Näherungen für die Referenzinstrumente vorteilhaft. Anderenfalls müssen numerische Näherungsverfahren eingesetzt werden, welches die Handhabbarkeit einschränken kann.

17.4. Aktien

Vor der Kalibrierung ist festzulegen, mithilfe welcher stochastischen Prozesse Aktieninvestments im Modell abgebildet werden sollen. Dies betrifft die Auswahl der Modelle für die Aktienkursentwicklung und die Dividendenzahlungen sowie die Zuordnung einzelner Anlageklassen zu den modellierten stochastischen Prozessen. Die Wertentwicklung der jeweiligen Anlageklasse wird in der Projektion dann an die Entwicklung des zugeordneten stochastischen Prozesses gekoppelt sein. Die Auswahl des Modells für den jeweiligen stochastischen Prozess sollte sich daran orientieren, welche Vorgabe im Zuge der Kalibrierung zu erfüllen ist. Ziel der Kalibrierung ist anschließend, die Parameter des jeweiligen stochastischen Prozesses so zu bestimmen, dass diese Vorgabe möglichst gut erfüllt wird.

Im Kontext der risikoneutralen Bewertung besteht die Vorgabe an die Kalibrierung üblicherweise in einer möglichst guten Replikation von Marktpreisen bzw. impliziter Volatilitäten ausgewählter Referenzinstrumente. Wie auch bei Zinsderivaten werden Marktpreise von Aktienderivaten üblicherweise in Form ihrer impliziten Volatilität quotiert bzw. darin überführt: Es wird derjenige Volatilitätsparameter σ quotiert, der im Black-Scholes Modell zum beobachteten Marktpreis führen würde. Im Idealfall sollten im Sinne der Marktkonsistenz alle verfügbaren Marktpreise möglichst gut getroffen werden. Je nach verwendetem Modell und dem Verhältnis der impliziten Volatilitäten zueinander – also der Form der sogenannten Volatilitätsoberfläche – ist dies aber nicht oder nur eingeschränkt möglich. In diesem Fall ist eine Priorisierung der Kalibrierungsinstrumente oder eine Auswahl an Referenzinstrumenten zu treffen, die sicherstellt, dass die impliziten Volatilitäten der Instrumente, die am relevantesten für die vorgesehene Bewertung, z.B. der versicherungstechnischen Rückstellungen, sind, ausreichend gut getroffen werden. Hierbei ist, neben der Optionslaufzeit, der Strike der Optionen (bzw. die sogenannte Moneyness) relevant.

Bei der Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen unter Solvency II sind für die Kalibrierung pro modellierter Anlageklasse Referenzinstrumente auszuwählen, deren implizite Volatilitäten vom Modell möglichst gut repliziert werden sollen. Dabei sollte nachzuweisen sein, dass die Wahl dieser Referenzinstrumente angesichts der Merkmale der Versicherungs- oder Rückversicherungsverpflichtungen sachdienlich ist (vgl. BaFin-Auslegungsentscheidung [31.] bzw. Leitlinie 57 der EIOPA [30.]). Zum Beispiel haben die modellierten Aktieninvestments bei der Bewertung von Verträgen mit Überschussbeteiligung im Wesentlichen Einfluss auf die modellierten zukünftigen Kapitalerträge des Kapitalanlagebestands des Sicherungsvermögens und damit insbesondere auf die modellierte zukünftige Überschussbeteiligung der Versicherungsverträge. Die Referenzinstrumente sollten daher Charakteristika der projizierten zukünftigen Aktienanlage möglichst gut widerspiegeln.

Damit eine sinnvolle Kalibrierung möglich ist, müssen die Referenzinstrumente, deren implizite durch Modellpreise möglichst gut getroffen werden sollen, sensitiv bzgl. des zu kalibrierenden Parameters sein. Die einfachsten Instrumente, deren Modellpreise eine Abhängigkeit von der modellierten Volatilität aufweisen, sind dabei auf den relevanten Basiswert (Aktie oder Index) laufende Call- und Put-Optionen mit europäischer Ausübungsart. Je nach Komplexität des verwendeten Modells kann es sinnvoll oder notwendig sein, zusätzliche Instrumententypen zur Kalibrierung zu verwenden.

Werden im Modell nur wenige oder sogar nur eine „Aktie" abgebildet, ist dies entsprechend auch bei den verwendeten Daten für die Kalibrierung zu berücksichtigen. Die zu treffenden Marktpreise bzw. Volatilitäten können in diesem Fall als gewichtetes Mittel hergeleitet werden, das die als „Aktie" modellierten Anlagen möglichst gut repräsentiert.

Soll eine möglichst exakte Replikation von Marktpreisen bzw. implizite Volatilitäten erreicht werden, ist bei der Kalibrierung auch diejenige Volatilität zu berücksichtigen, die sich durch den stochastischen Zinsprozess und damit durch die stochastische Driftkomponente des Aktienprozesses ergibt. Hierbei kann es sich ergeben, dass die Volatilität, die aus der stochastischen Driftkomponente, also der Zinsmodellierung, stammt, höher ist als diejenige Volatilität, die der Prozess replizieren soll. In diesem Fall kann die Volatilität des Prozesses reduziert werden, indem eine negative Korrelation zwischen Zinsprozess und Diffusionskomponente des Aktienprozesses angenommen wird. Dies führt jedoch dazu, dass die Ziel-Korrelationen nicht mehr getroffen werden können. Hierbei ist abzuwägen, was für den Anwendungsfall wichtiger ist.

Bei der Kalibrierung einiger Modelle ist zu beachten, dass die Kalibrierung an das absolute Niveau des Aktienkurses gebunden ist, da sich die Volatilität nicht proportional zum Aktienkurs ändern muss. Beispielsweise kann das der Fall beim „Local Volatility" oder CEV Modell der Fall sein (vgl. zugehörige Diffusionsterme $\sigma(t, S_t)\, S_t \cdot dW_t$ bzw. $\sigma \cdot S_t^\gamma \cdot dW_t$). Wird diese Kalibrierung z.B. auf einen beliebig zu setzenden Startkurs im Modell übertragen, ergeben sich daraus andere, womöglich fehlerhafte Volatilitäten.

17.4.1. Unzureichende Marktdaten

Für die Kalibrierung im Rahmen der Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen unter Solvency II sind grundsätzlich Marktpreise für die betrachteten Finanzinstrumente zum Bewertungsstichtag zu berücksichtigten (vgl. BaFin-Auslegungsentscheidung vom 10.11.2016). In Ermangelung geeigneter Marktdaten sind jedoch zusätzliche Vorgaben im Sinne einer Expertenmeinung notwendig. Die Kalibrierung basiert dann auf einer Kombination aus Marktdaten und Annahmen oder allein auf Annahmen, falls keine verwendbaren Marktdaten verfügbar sind.

So sind Marktpreise üblicherweise nur bis zu einer im Vergleich zu der für die Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen notwendigen Projektionsdauer sehr kurzen Laufzeit verfügbar. Für längerfristige Volatilitätsvorgaben müssen daher Schätzungen verwendet werden. Bezüglich der Laufzeit der Optionen ist dies bei der Bewertung versicherungstechnischer Rückstellungen üblicherweise der Fall, da hier jahrzehntelange Cashflows bewertet werden müssen, Marktdaten für so lange Zeiträume aber üblicherweise nicht, zumindest nicht in ausreichender Qualität, verfügbar sind.

Schätzungen können zum Beispiel auf Marktdaten eines Referenzwertes basieren, der ausreichende Ähnlichkeit zu der zu modellierenden Aktie oder dem zu modellierenden Index aufweist. Außerdem kann die Schätzung auf der *realisierten Volatilität* basieren, die aus historischen Kursverläufen der Aktie oder des Index berechnet wurde. Diese kann insbesondere als Basis für die Festlegung langfristiger Volatilitätsvorgaben dienen.

17.4.2. Dividenden

Die Kalibrierung der Dividendenmodellierung umfasst die Festlegung erwarteter zukünftiger Dividendenraten und, falls eine stochastische Modellierung der Dividenden erfolgen soll, die Bestimmung entsprechender Volatilitätsparameter. Im Idealfall sind diese Parameter ebenfalls aus Marktpreisen abzuleiten und entsprechend implizite Dividendenraten und implizite Volatilitätsparameter in der Bewertung zu verwenden. Die Ableitung impliziter Dividendenraten aus den Forwardpreisen von Aktien bzw. Indizes oder aus den Preisen von Call- und Put-Optionen ist möglich (mithilfe der Put-Call-Parität). Allerdings ist sie an das Vorhandensein und die Laufzeit der entsprechenden Märkte gebunden, die für eine Kalibrierung der gesamten Projektionsdauer in der Regel nicht ausreichen. Auch ist eine Ableitung impliziter Volatilitätsparameter der Dividendenmodellierung aufgrund fehlender gehandelter Instrumente in der Regel nicht möglich. In beiden Fällen sind fehlende Parameter daher als Expertenschätzungen herzuleiten. Gegebenenfalls kann hierzu auf Zeitreihen vergangener Dividendenzahlungen zurückgegriffen werden.

Werden unterschiedliche Komponenten als „Aktie" modelliert, muss – analog zur Kalibrierung der Aktienvolatilität im vorangegangenen Kapitel – eine gewichtete Mittelung der Dividendenraten und ggf. Dividendenvolatilitäten erfolgen.

Bei der Festlegung der Dividendenrate im Modell kann ein Konflikt daraus entstehen, dass die Dividendenraten anhand tatsächlicher, also in der „realen Welt" erfolgter Dividendenzahlungen hergeleitet werden und in den Werten entsprechende Risikoprämien enthalten sind. In der risikoneutralen Bewertung entspricht die Driftrate des thesaurierten Aktieninvestments aber lediglich dem risikolosen Zins r_t. Übersteigt die Dividendenrate den risikolosen Zins, wird die Driftrate des Aktienkurses, also $\mu_t = r_t - D_t$, entsprechend negativ, was zu im Modell systematisch stark fallenden Aktienkursen führen kann. Dies kann wiederum Komplikationen in der Modellierung und Unschärfen, u.a. bei der Abbildung von Investmentstrategien und Managementregeln, verursachen. Hier ist eine auf die Güte des schlussendlichen Bewertungsergebnisses ausgerichtete Abwägung zu treffen und gegebenenfalls die Parametrisierung anzupassen.

Bei der Herleitung der Parameter ist zu beachten, was genau als „Dividende" modelliert werden soll: die tatsächlichen Dividendenzahlungen direkt gehaltener Aktien bzw. Beteiligungen oder die Ausschüttungen eines Publikums- oder Spezialfonds, über den Aktien lediglich indirekt gehalten werden. Im Falle von indirekt gehaltenen Aktien kann es anstelle einer reinen Herleitung auf Basis von historischen Werten empfehlenswert sein, auch Vorgaben an das Fondsmanagement, also eine prospektive Sicht, zu berücksichtigen und die Ausschüttungsrate als Managementregel abzubilden.

17.5. Immobilien

Bei Immobilien sind in der Regel keine Daten eines liquiden Derivatemarkts verfügbar, sodass die Kalibrierung in inaktiven Märkten der Regelfall ist. Für die Kalibrierung steht dann lediglich die realisierte Volatilität historischer Wertentwicklungen von Immobilieninvestments oder Referenzindizes zur Verfügung. Dabei sind mehrere Aspekte zu beachten. Den ausgewiesenen historischen Werten können jeweils Gutachten zugrunde liegen, die seit dem letzten Beobachtungszeitpunkt nicht aktualisiert wurden, woraus sich eine ausgeprägte Autokorrelation der Wertentwicklung ergeben kann. Ein ähnlicher Effekt entsteht dadurch, dass Bewertungen das Ergebnis der vorangegangenen Bewertung mit einbeziehen. Solche Effekte können z.B. mithilfe des Blundell-Ward-Verfahrens aus der Zeitreihe bereinigt werden.

Des Weiteren ist bei der Kalibrierung zu berücksichtigen, welcher Fremdkapitalanteil der historischen Wertentwicklung zugrunde lag und welcher Fremdkapitalanteil in dem zu modellierenden Investment abgebildet werden soll. Unterscheiden sich die beiden Fremdkapitalanteile, ist eine entsprechende Bereinigung durchzuführen, sodass die schlussendlich modellierte Volatilität zu dem modellierten, durch Fremdkapital gegebenenfalls gehebelten Immobilienexposure passt.

17.5.1. Mieteinnahmen

Für die Modellierung der Mieteinnahmen sind im Wesentlichen dieselben Aspekte wie bei der Modellierung von Dividenden zu berücksichtigen.

17.6. Arbitragefreie Spreadmodellierung

Für die Kalibrierung müssen zuerst geeignete Indizes gefunden werden, welche die abzubildenden Spreadklassen repräsentieren. Dies ist bereits eine Herausforderung, weil Liquidität nicht durchgehend in hinreichendem Maße und in den relevanten Laufzeiten sichergestellt ist.

Geeignete liquide Derivatemärkte sind noch schwieriger zu finden, diese müssen dann auch den gewählten Index als Underlying haben. Deshalb wählt man für die Volatilitätskalibrierung in der Regel historischen Daten. Ebenso werden Korrelationen, wie üblich, an historischen Daten kalibriert.

Einige Spreadmodelle haben nicht ausreichend Kalibrierungsparameter, um die initialen Spreadkurven aller Ratings und Laufzeiten exakt zu replizieren. Dies sollte bei der Modellwahl berücksichtigt werden. In solchen Fällen wird die Kalibrierung aufwendiger, da eine Abwägung erfolgen muss für welche Ratings und Laufzeiten eine exakte Replikation des Startspreads notwendig ist und welche Abweichungen bei anderen Ratings und Laufzeiten zu tolerieren sind.

Dabei ist jedoch zu betonen, dass die Materialität eines guten Fits der bezüglich der initialen Spreadkurven eine ganz andere als im Fall des risikofreien Zinses: dieser wird zur Diskontierung der Zahlungen verwendet, deshalb können Kalibrierungsschwächen eine große Auswirkung haben. Spreads gehen nicht in die Diskontierung ein. Sie fließen zwar in die Berechnung der Startmarktwerte, diese müssen aber nachträglich im Bewertungsmodell kalibriert werden, um Marktkonsistenz herzustellen. Einzig in der Neuanlage im Bewertungsmodell wird dann auf der reinen Spreadkurve investiert. Hierbei verlieren Kalibrierungsschwächen an Materialität. Volatilitäten und Korrelationen werden in der Regel einen wichtigeren Effekt haben als kleinere Abweichungen in den Startspreadkurven.

17.7. Wechselkurse

Für den in der Praxis gängigen Spezialfall $\sigma = 0$ in Abschnitt 16.8 ist der modellierte Wechselkurs nur durch die Entwicklung der Zinsprozesse determiniert, und die Kalibrierung für den Wechselkurs entfällt.

Falls dieser vereinfachte Ansatz nicht ausreichend ist, müssen zur Simulation des Wechselkurses die (Excess-)Volatilität σ sowie die Korrelationen kalibriert werden. Die Korrelationen zwischen Short Rate der Basis- bzw. Fremdwährung und Wechselkurs können jeweils aus historischen Marktdaten geschätzt werden. Die Datengrundlage hierfür sind jeweils ein Zinssatz und ein Wechselkurs. Als Annäherung an die Short Rate kann z.B. der verfügbare Zinssatz mit der kürzesten Laufzeit verwendet werden. Es ist dann die absolute Änderung des Zinssatzes zu berechnen. Da die Simulation für die Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen über sehr lange Projektionsdauern läuft, sollten die Parameter ebenfalls anhand eines langen Zeitraums geschätzt werden. Wenn die Kalibrierung der Volatilität des Wechselkurses für einen langen Zeitraum schwierig ist, da keine liquiden Marktpreise vorliegen, kann es auch angemessen sein, ausschließlich die historische Volatilität zu verwenden. Die historische Volatilität wird anhand eines hinreichend langen Zeitraums, z.B. 20 Jahre oder länger, geschätzt.

17.8. Inflation

A priori kann bei der Modellierung von Realzinsen das gleiche Zinsmodell zur Anwendung kommen wie bei der Nominalzinsmodellierung. Die Kalibrierung des Realzinsmodells stellt jedoch eine besondere Herausforderung dar. Auch im Falle einer indirekten

Inflationsmodellierung über Nominal- und Realzins bildet die Inflationskurve die Grundlage der Kalibrierung. Die erwartete Inflationskurve kann aus direkt am Markt beobachtbare Preisen abgeleitet werden.

Dies kann beispielsweise durch ein Bootstrapping von inflationsindexierten Anleihen verschiedener Laufzeiten erreicht werden. Alternative können auch Zero-Coupon Inflation-Indexed Swaps (ZCIIS) herangezogen werden, bei denen zum Laufzeitende eine fixe Zahlung gegen die kumulierte Inflationsrate getauscht wird. Da ZCIIS in Form der impliziten Breakeven Inflationsrate quotiert werden, mache sie einen direkten Zugang zur Inflationserwartung verfügbar. Weiterhin ist im Solvency-II-Kontext ein Anchoring der Inflation auf den von EIOPA angenommenen makroökonomischen Zielwert anzustreben. Zudem sollte das kalibrierte Modell grundsätzlich das Auftreten von Hyperinflation erlauben.

Insbesondere bei der Kalibrierung von Volatilitäten für Realzins und Inflation liegen die erforderlichen Kapitalmarktdaten in der Regel nicht in der gleichen Qualität vor wie für die Nominalzinskalibrierung, so dass oft auf empirische Daten (beispielsweise die historische Volatilität eines Inflationsindex) oder Expertenschätzungen zurückgegriffen werden muss; die Kalibrierung von Korrelationen erfolgt in der Regel bereits für Nominalzinsen in der Regel anhand empirischer Daten. Aus diesem Grund kann für die Realzinsmodellierung die Verwendung eines Zinsmodells mit einer geringeren Anzahl freier Kalibrierungsparameter vorteilhaft sein.

Auch in dem Fall, dass sich die externen Kalibrierungsziele unmittelbar auf Inflationsgrößen beziehen, erfordert die Modellierung über Nominal- und Realzins die Vorgabe von Zielgrößen für diese internen Modellparameter. (Im konkreten Fall des Jarrow-Yildirim Modells vereinfacht sich diese Beziehung erheblich.) Hier muss ein angemessenes Vorgehen gewählt werden: Kalibriert man beispielsweise bereits die Volatilitätsparameter des Realzinsprozesses an empirische Werte, so kann dies dazu führen, dass die Zielgrößen der eigentlich angestrebten Inflationskalibrierung gar nicht mehr erreicht werden können.

Die dargestellten Probleme im Zusammenhang mit der Verfügbarkeit von Marktdaten können eine vereinfachte Modellierung motivieren, sofern der konkrete Anwendungskontext dies zulässt. Dazu zählen insbesondere Ansätze, die Inflation nicht als Teil des Szenariengenerators, sondern stattdessen über eine direkte Inflationierung passivseitiger Zahlungsströme darstellen. Allerdings muss natürlich auch in diesem Fall eine Kalibrierung der Modellparameter an extern vorgegebene Zielgrößen erfolgen. Denkbar sind hier volkswirtschaftliche Größen wie ein Verbraucherpreisindex oder die Beitragsbemessungsgrenze (zur Inflationierung zukünftiger Prämien). Solche makroökonomischen Parametrisierungen erfordern jedoch in jedem Fall ein Backtesting gegen die tatsächliche Entwicklung der betrachteten Größe. Geeigneter ist daher eine Kalibrierung solcher vereinfachten Ansätze anhand empirischer Zeitreihen, beispielsweise bei Unternehmenskosten. Natürlich sind derartige Ansätze im Allgemeinen nicht mehr marktkonsistent, insofern sie nicht die zum betreffenden Stichtag bestehende Markterwartung bezüglich Inflation reproduzieren. Ein Backtesting, das empirisch nachweist, dass zwischen der modellierten Größe (beispielsweise Inflation von Unternehmenskosten) und der Marktinflation kein unmittelbarer quantitativer Zusammenhang besteht, würde dieses Vorgehen jedoch begründen. Schließlich kann eine vereinfachte Modellierung auch aus Materialitätsgründen angemessen sein.

Insbesondere der Ansatz der inflationsneutralen Bewertung erfordert keine Inflationskalibrierung.

17.9. Alternative Assetklassen

Bei der Kalibrierung von Alternatives kann grundsätzlich auf dieselben Vorgehensweisen wie bei der Kalibrierung von Aktien und Immobilien zurückgegriffen werden. Wie auch dort sind für die Kalibrierung für die Bewertung von versicherungstechnischen Rückstellungen unter Solvency II grundsätzlich Marktpreise für die betrachteten Finanzinstrumente zum Bewertungsstichtag zu berücksichtigten (vgl. BaFin-Auslegungsentscheidung vom 10.11.2016). In Ermangelung geeigneter Marktdaten sind jedoch zusätzliche Vorgaben im Sinne einer Expertenmeinung notwendig. Je nach zu modellierender Anlageart ist aber besondere Vorsicht geboten, falls die Schätzung auf historischen Kursentwicklungen basieren soll, da diese, z.B. bei Hedge-Fonds, keine ausreichende Aussagekraft hinsichtlich der zukünftig zu erwartenden Eigenschaften haben können. Siehe dazu auch die Ausführungen im Modellierungsteil.

Erfolgt wie im Modellierungsteil beschrieben ein Mapping auf eine oder mehrere bereits modellierte Anlageklassen, entfällt eine spezifische Kalibrierung. Hier besteht die Kalibrierung im weiteren Sinne darin, ein geeignetes Mapping festzulegen. Dies kann quantitativ, z.B. mittels einer Regressionsanalyse, oder auf Basis qualitativer Merkmale des abzubildenden Investments erfolgen.

18. Validierung

Für marktkonsistente Szenariensätze existieren Marktstandards für Validierungstests. Als Minimumstandards werden die Anforderungen an das risikoneutrale Maß gesehen. Diese marktüblichen Anforderungen zu Tests auf Marktkonsistenz bzw. Martingaleigenschaften werden im Folgenden dargelegt. Darüber hinaus können auch weiterführende Untersuchungen angestellt werden. Hierzu sind sowohl absolute als auch relative Gütevergleiche zu nennen.

Zu beachten ist dabei, dass stets nur ein zusammengehöriger Satz von Szenarien hinsichtlich der Güte getestet werden kann.

Der Anwender formuliert ein Set von Kriterien für den Szenariensatz, die Gütekennzeichen im Hinblick auf die unternehmensspezifischen Anwendungen enthalten. Diese werden für jeden Szenariensatz getestet.

Inputgrößen für die marktkonsistente Validierung sind:

- Simulierte Szenarien des parametrisierten ESG („Szenariensatz")
- Marktdaten,

- die zur Kalibrierung verwendet wurden. Diese sollten per Konstruktion in den Szenarien reflektiert werden, wenn das Zinsmodell angemessen ist, d.h. die Anzahl der Freiheitsgrade ausreichend für die Beschreibung des Bestands ist
- die nicht zur Kalibrierung verwendet, aber dennoch von Relevanz sind. Ein Beispiel sind Swaptionlaufzeiten, die wegen einem Mangel an Freiheitsgraden des Zinsmodells nicht zur Kalibrierung verwendet wurden, aber dennoch für die Laufzeitstruktur des Passivmodells von Bedeutung sind.

Im Hinblick auf die Methodik bei einem Test von ökonomischen marktkonsistenten Szenariensätzen wird zwischen dem Szenariensatz selbst und der Kalibrierungsgüte des Generators unterschieden.

18.1. Standard-Tests

Die im Folgenden dargestellten Tests beziehen sich auf eine Überprüfung eines Szenariensatzes im marktkonsistenten Kontext. Die unten beschriebenen Tests sind konsistent zu den Anforderungen an einem ESG zur Arbitragefreiheit in Abschnitt 6.1. Des Weiteren sei auf die Ausführungen in Abschnitt 15 verwiesen.

Für detaillierte Formeln zu den nachfolgenden Tests sein auf Kapitel 3 von [69.] verwiesen.

Man unterscheidet an dieser Stelle zwischen verschiedenen Fehlern, die zusammen den Szenarienfehler ergeben:

- Modellfehler: Fehler, die sich aus der Wahl des Modells ergibt
- Kalibrierungsfehler: Fehler, die sich aus der Kalibrierung ergeben. Beispielsweise ist es gerade bei komplexeren Zinsmodellen möglich, dass die Kalibrierung in einem lokalen Minimum endet. Zur Analyse dieses Fehlers bietet es sich an die Kalibrierung mit verschiedenen Startwerten zu starten.
- Simulationsfehler: Fehler auf Grund der
  - Implementierung des Modells zum Beispiel Diskretisierungsfehler, die sich über eine granulare Implementierung untersuchen lassen.
  - Stochastik, der sich daraus ergibt, dass es sich um einen zufälligen, unsicheren Prozess handelt. Dieser Fehler kann über die Seedauswahl bzw. einer Variation der Anzahl der Szenarien analysiert werden.

Für einen Szenariensatz im marktkonsistenten Kontext wird die Konsistenz mit Marktpreisen und Annahmen getestet. Zusätzlich muss die Risikoneutralität validiert werden. Dazu sollten mindestens die folgenden Tests durchgeführt werden:

1. Test der Konsistenz des Szenariensatzes zur initialen Marktzinskurve
2. Test der Konsistenz des Szenariensatzes zu Marktpreisen bzw. implizite Volatilitäten für Derivate (üblicherweise für Swaptions und Optionen)

3. Test der Konsistenz der Korrelation zwischen den Assetklassen im Szenariensatz mit den Annahmen
4. Test des Szenariensatzes im Hinblick auf seine Martingaleigenschaft: "Martingaltest" oder "1=1 Test" für jede relevante Assetklasse sowie für repräsentatives Portfolio an Kapitalanlagen
5. Test des Szenariensatzes im Hinblick auf seine Martingaleigenschaft bei Reinvestitionen oder „1=1=1 Test"

Die Tests adressieren zwei für marktkonsistente Szenariensätze spezifische Themenkomplexe:

- Tests 1-3 beziehen sich auf die Kalibrierungsannahmen der Szenarien, d.h. es wird überprüft, inwieweit die Marktkonsistenz gegeben ist.
- Tests 4-5 überprüfen die Arbitragefreiheit (Risikoneutralität)

Wichtig für einen Szenarientest ist, dass neben der Dokumentation der Testergebnisse selbst, bereits im Vorfeld die Datenherkunft und die Werte der Zielgrößen (Anfangszinskurve, Volatilitätsannahmen etc.) dokumentiert werden. Generell werden Fehlergrenzen im unternehmensindividuellen Kontext im Hinblick auf die angestrebte Genauigkeit bei der Bestimmung der Zielgröße festgesetzt. Dazu können ggf. auch Fehlerabschätzungen der Zielgröße dienen.

Die nachfolgenden Gütetests werden jeweils in der Währung des Investors durchgeführt. Dies bedeutet, dass Veränderungen der Währungskurse in den Szenariensätzen bei der Berechnung der Gesamterträge berücksichtigt werden.

18.1.1. Konsistenz der Szenarien zur initialen Zinskurve

Die Szenarien eines risikoneutralen ESG sind üblicherweise derart generiert, dass die Diskontfaktoren des jeweiligen Währungsraums äquivalent zum inversen jeweiligen Cash Return sind[29]. Ebenfalls ist für alle Projektionszeitpunkte der mittlere Diskontfaktor konsistent zur initialen Zinskurve.

Die Initialzinskurve stammt zumeist von einem Datenanbieter oder wie im Rahmen von Solvency II Bewertungen von EIOPA und wird dokumentiert.

Die vorliegende Validierung testet, ob im Mittel die Diskontfaktoren den Preisen der Zero-Coupon-Bonds aus der Startzinskurve entsprechen, d.h. ob Gleichung (4) empirisch erfüllt ist.

[29] Je nach Bewertungsmaß (Numeraire) im Szenariengenerator kann dies auch abweichen – dann ist statt des Cash Returns der jeweilige Modellnumeraire (z.B. 30-Jahres Zero-Bond Return etc.) zu verwenden.

18.1.2. Konsistenz des Szenariensatzes zu Marktpreisen bzwl. impliziten Volatilitäten von Derivaten

Dieser Teil der Tests befasst sich mit der Replikation von Marktpreisen bzw. in der Regel eher impliziten Volatilitäten für Derivate auf Basis der Szenarien.

Dazu werden mit den zu validierenden Szenarien Derivate (z.B. Swaptions oder Index-Optionen) via Monte-Carlo Simulation bewertet und aus dem ermittelten Preis die implizite Volatilität abgeleitet. Diese wird dann mit den Marktvorgaben vergleichen. Die erhaltenen Abweichungen werden dann entsprechend der Materialität und Relevanz begutachtet. Dabei kann es Sinn machen zwischen Instrumenten, die zur Kalibrierung verwendet wurden und Instrumenten, die nicht zur Kalibrierung verwendet wurden, zu unterscheiden. Für Erstgenannte erwarte man in der Regel eine bessere Replikation der Marktvorgaben durch due Szenarien als für Letztgenannte. Bei der Einschätzung der Abweichungen sind das unternehmenseigene Profil zu berücksichtigen.

18.1.3. Konsistenz der Korrelation zwischen den Assetklassen im Szenariensatz mit den Annahmen

Korrelationsziele werden häufig in Form von historischen Korrelationen zwischen Assetklassen dem Modell vorgegeben, da eine verlässliche Datenbasis für Derivate auf Korrelationen nur sehr begrenzt zur Verfügung steht. Je nach Kapitalanlagen im Unternehmensmodell sind insbesondere die Korrelationen zwischen Bonds und Aktien sowie zwischen Aktien und Immobilien die wesentlichen zu prüfenden Szenario-korrelationen. Die Korrelationen zwischen diesen Assetklassen/Risikofaktoren werden empirisch auf dem Szenariensatz ermittelt und mit den Zielwerten verglichen. Bezüglich Gütekriterien sind hier ebenfalls unternehmensspezifische Kriterien und Schwellen festzulegen.

18.1.4. Martingaltest

Von einem marktkonsistenten Szenariensatz wird verlangt, dass dieser arbitragefrei ist, d.h. dass es keine Investmentstrategie gibt, die einen risikofreien Ertrag über den risikofreien Zins hinaus generiert. Im Fall einer risikoneutralen Bewertung bedeutet dies insbesondere, die diskontieren Preisprozesse aller projizierten Assets ein Martingal sind. In der Praxis wird dies dadurch überprüft, dass der sog. "Martingaltest" durchgeführt wird. Dieser Test verlangt, dass für alle Assetklassen und alle Projektionszeitpunkte $t = 1, 2 \ldots T$ der Erwartungswert der diskontierten Cashflows/Preise von einem in $t=0$ investierten Euro wiederum 1 Euro beträgt. Daher wird dieser Test auch "1=1"-Test genannt. In der Praxis bedeutet dies, dass die in einzelnen Assetklassen (und damit auch die für die gesamte Kapitalallokation) im Modell projizierten und diskontierten Cashflows den anfänglichen Marktwerten der Kapitalanlage entsprechen. Um den Test gegen Neu- und Desinvestments zu neutralisieren, wird dieser üblicherweise nicht auf absolute Werte, sondern stets auf Gesamtertragsbasis (Total Return) durchgeführt.

Ein auf absoluten Werten im Unternehmensmodell durchgeführter Test wird dagegen um Zahlungsströme neutralisiert und als "Leakage Test" bezeichnet.

Die Ergebnisse des Tests sollten symmetrisch sein, d.h. negative und positive Abweichungen von dem theoretisch erwarteten Wert 1 gleichmäßig auftreten. Falls dies nicht der Fall ist, kann dies ein Hinweis auf einen systematischen Fehler im Szenariengenerator sein, der sich durch Erhöhung der Szenarienanzahl nicht vermindern lässt und separat untersucht muss.

Insbesondere ist es zu empfehlen standardmäßig auch einen Martingaltest (1=1-Test) für repräsentatives Portfolio an Kapitalanlagen, das sich an den Laufzeiten der versicherungstechnischen Cashflows orientiert, durchzuführen (Portfoliotest).

18.1.5. Reinvestitionstests

Im Rahmen der marktkonsistenten Prüfung von Szenarien kann als weiterer Test der 1=1=1 Test durchgeführt werden, bei dem während der Projektion der Cashflows eine Umschichtung zwischen Assetklassen vorgenommen wird. In $t_1 = 1, \dots, T_1$ erfolgt eine Investition von einem Euro in eine Assetklasse$_1$. Nach T_2 Jahren erfolgt eine Umschichtung von Assetklasse (1) in eine Assetklasse (2). Der von t über den Zeitraum T_2 erzielte Total Return wird auf den Zeitpunkt t diskontiert. Auf Grund der Risikoneutralität erwartet man das der diskontierte Total Return über den Zeitraum T_2 in jedem Zeitpunkt t einem Euro entspricht.

Besonders in Modellen, in denen die Investitionsstrategie auf die Szenarien reagiert, d.h. eine Umschichtung zwischen den Assetklassen durchgeführt wird, sind Reinvestitionstests sinnvoll. Durch eine Wahl der Investionsstrategien in den Reinvestionstests, die den realen Strategien in den verschiedenen Kapitalmarktszenarien entsprechen, kann die Arbitragefreiheit des Szenariensatzes validiert werden.

19. Anwendungshinweise

19.1. Managementregeln

Mithilfe von Managementregeln werden zukünftige Handlungen des Managements oder der Versicherungsnehmer im Bewertungsmodell über den Projektionsverlauf abgebildet. Diese sind abhängig von der Situation des Unternehmens und der Marktsituation im jeweiligen Projektionszeitpunkt und im jeweiligen Pfad. Ein zentrales Kriterium zur Beurteilung dessen, ob Managementregeln adäquat modelliert sind, erwächst aus dem Vergleich mit der realen Steuerung des Unternehmens. In die Modellierung und Parametrisierung der Managementregeln sollten im Allgemeinen sowohl historische Managemententscheidungen als auch die aktuelle und zukünftige Unternehmensstrategie, z.B. anhand der mittel- und langfristigen Unternehmensplanung, einfließen. Von besonderer Bedeutung ist die Realitätsnähe der Managementregeln speziell dann, wenn das Regelwerk im Rahmen eines internen Modells im Rahmen von Solvency II genutzt wird.

Die mathematischen Funktionen, welche die Managementregeln im Modell beschreibenden, können dabei direkt oder indirekt von Größen („Treibern“) anhängen, die durch den ESG bereitgestellt werden. Moderne stochastische Unternehmensmodellen enthalten jeweils eine Vielzahl unterschiedlichster Managementregeln. In der folgenden Tabelle sind exemplarisch einige solcher Regeln skizziert.

Steuergröße	Einflussgröße im Modell	Treiber im ESG
Investmentstrategie, Asset-Allocation (SAA)	Risikotragfähigkeit (Dotierung der (freien) RfB, Höhe der Bewertungsreserven auf Kapital-anlagen)	Kapitalmarktverlauf (Zins, Spreads, Aktienreturns, etc.)
Gesamtverzinsung der Versichertenguthaben (Rechnungszins + Überschussbeteiligung + Schlussüberschussanteile)	Dotierung der (freien) RfB, Höhe der Bewertungsreserven auf Kapitalanlagen	Kapitalmarktverlauf (Zins, Spreads, Aktienreturns, etc.)
Stornoquote, Verrentungsquote, Dynamische Vertragserhöhungen, Neugeschäftsvolumina	Gesamtverzinsung der Versichertenguthaben im Vergleich zu Renditen von Alternativanlagen auf dem Kapitalmarkt (Wettbewerber)	Kapitalmarktverlauf (Zins, Spreads, Aktienreturns, etc., evtl. geglättet über die Zeit)
Verwaltungskosten bzw. Verwaltungskosten für Kapitalanlagen	Größe des Versicherungsbestandes bzw. des Bestandes an Kapitalanlagen	Inflation, Arbeitslosenquote
Rückgewährquote (Aufteilung des Rohergebnisses auf Versicherungsnehmer und Eigentümer)	Strategische Zielvorgaben für den Jahresüberschuss, Mindestzuführung (MindZV), Dotierung der (freien) RfB	Kapitalmarktverlauf (Zins, Spreads, Aktienreturns, etc.)
Zinssatz für die Zinszusatzreserve	historische Swapsätze	Swapkurve
Diskontsatz für den Schlussüberschussanteilfonds	historische Renditen risikofreier Anlagen	risikofreier Zins

Abbildung 8: Beispiele für Managementregeln

19.1.1. Anforderungen an Managementregeln und ESG

Um eine realitätsnahe und damit aussagekräftige Abbildung eines Regelwerkes von Managementregeln zu erreichen, sind einige Anforderungen an den Szenariengenerator zu stellen. Eine Grundbedingung ist z. B., dass der ESG die für die Managementregeln wesentlichen Treiber zur Verfügung stellt und dass die Modellierung dieser Treiber innerhalb des ESGs angemessen ist und im Einklang mit den verwendeten Kapitalmarktmodellen steht.

Managementregeln müssen auch in extremen Kapitalmarktszenarien (z. B. extrem hohe oder extrem niedrige Zinsen) noch sinnvolle und nachvollziehbare Ergebnisse liefern. Darüber hinaus muss das Zusammenspiel von Managementregeln und Treibern aus dem ESG eine gewisse Robustheit aufweisen. Geringfügige Änderungen in der Kalibrierung des ESG dürfen nicht zu stark abweichenden Entscheidungen aus Managementregeln führen. Generell darf die Aufstellung von Managementregeln nicht davon abhängen, ob mit real-world Anwendungen oder nach einem risikoneutralen Bewertungsansatz gearbeitet wird. Im real-world Kontext und im risikoneutralen Umfeld sind die gleichen Managementregeln zu nutzen.

Bezüglich Managementregeln zum Kundenverhalten (Stornoneigung, Wahl von Verrentung oder Kapitalabfindung bei anwartschaftlichen Rentenversicherungen etc.) ist zu bemerken, dass auch im Rahmen risikoneutraler Anwendungen keineswegs von einem hundertprozentig rationalen Kundenverhalten ausgegangen werden muss, sondern dass hier die Formeln zur Abbildung der Managementregeln nach Best Estimate parametrisiert werden sollten. Falls kein hinreichendes Datenmaterial vorliegt, um die Parametrisierung quantitativ herzuleiten, kann auch eine qualitative Begründung der getroffenen Annahmen angemessen und ausreichend sein.

19.2. Seedauswahl

Ein wichtiger Schritt in der Anwendung eines ESG ist der Übergang vom theoretisch fundierten und softwaremäßig implementierten Kapitalmarktmodell zum konkreten Szenariensatz. In diesem Diskretisierungsschritt wird im Allgemeinen ein als Softwaremodul hinterlegter „Zufallszahlengenerator" benutzt, der Stichproben einer Sequenz $\{X_1,..,X_n\}$ unabhängiger Zufallsvariablen mit uniformer Wahrscheinlichkeitsverteilung auf dem Einheitsintervall $[0,1]$ simuliert; diese werden dann entsprechend weitertransformiert um letztendlich zur Simulation verwendet werden, etwa als multivariate, korrelierte, normalverteilte Größen. Da es auch theoretisch nicht möglich ist, mittels eines Computers wirklich zufällig ausgewählte Stichprobensequenzen zu generieren, spricht man auch von „Pseudo-Zufallszahlen".

In der Praxis werden (Pseudo-)Zufallsgeneratoren so implementiert, dass in Abhängigkeit von einer „Seed" genannten vorzugebenden Zahl Startwerte und Parameter definiert werden. Diese bestimmen dann via entsprechender Formeln für die deterministische Berechnung einer Sequenz von Pseudo-Zufallszahlen. Wie „zufällig" eine solche Sequenz von Pseudo-Zufallszahlen ist, lässt sich anhand von Standardtests prüfen (vgl. [2]).

Mit der Auswahl der Pseudo-Zufallszahlen bestimmt der Seed auch die mit dem Diskretisierungsschritt der Szenarioerzeugung generierten diskreten Verteilungen. Da bei risikoneutralen Ansätzen die Arbitragefreiheit des zugrundeliegenden Modells gegeben sein muss, kann das Bestehen von Martingaltests an dieser Stelle als Gütekriterium bei der Seedauswahl betrachtet werden. Bei nicht bestandenen Tests sollte ein alternativer Seed gewählt werden.

Dabei kann eine solche Seedauswahl sich durchaus recht aufwendig gestalten. Allerdings erzwingt die Anwendung sophistizierter Kapitalmarktmodelle zusammen mit technischen Restriktionen (Begrenzung der Anzahl der Szenarien pro Szenariensatz) manchmal ein solches Vorgehen.

Dabei ist die Seedauswahl kein Versuch, Schwächen oder Fehler der Modellierung und Simulation zu überdecken, sondern rein der hohen Simulationsvarianz geschuldet, die eine hochgradige Güte der zugrundeliegenden Zufallszahlen erfordert, damit sich die

Zieleigenschaften der Szenarien in Bezug auf deren Verteilung auch empirisch realisieren. Dabei darf das Ziel einer Seedauswahl nur die Verbesserung der Qualität der diskreten Verteilung und nicht die Optimierung der Endergebnisse sein.

19.3. Konvergenz und Varianzreduktion

Sollten die im Rahmen der Validierung des Szenariensatzes durchgeführten Tests unbefriedigende Ergebnisse zeigen, so kann ggf. durch eine Erhöhung der Anzahl der Szenarien eine Qualitätsverbesserung erreicht werden. Dabei setzen in der Regel die zur Verfügung stehende Soft- und Hardware Grenzen. Die Anzahl der Szenarien sollte aber mindestens so hoch gewählt werden, dass Konvergenzeffekte eintreten, d.h. die Projektions- und Validierungsergebnisse müssen in dem Sinne stabil und robust sein, dass eine weitere Erhöhung der Szenarienanzahl keine wesentliche Änderung der Ergebnisse bewirkt.

Um Robustheit und Stabilität der Simulationsergebnisse zu verbessern, können mathematische Methoden zur Varianzreduktion angewandt werden (vgl. etwa [21.]). Beispielhaft seien hier die Methode der Antithetischen Variablen und auch das Stratified Sampling genannt, welche beide modelltechnisch recht einfach zu realisieren sind.

Antithetische Variablen

Die Idee der antithetischen Variablen soll hier kurz skizziert werden: Sind $\{X_1,..,X_n\} \in [0,1]^n$ gleichverteilte unabhängige Zufallsgrößen und ist $f: [0,1] -> \mathbb{R}$ eine Funktion, so sind die Zufallsgrößen $(Y_i := f \circ X_i)_{i=1,..,n}$ und $(Y_i' := f \circ (1 - X_i))_{i=1,..,n}$ jeweils identisch verteilt und unabhängig. Y_i und Y_i' sind dagegen identisch verteilt, aber nicht unabhängig. Man hat den antithetischen Schätzer

$$Y = \frac{1}{2n} \cdot \sum_{i=1}^{n} Y_i + Y_i'$$

mit der Varianz

$$Var(Y) = 1/2 \cdot Var(Y_i + Y_i').$$

Wegen $Var(Y_i + Y_i') = 2 \cdot Var(Y_i) + 2 \cdot Cov(Y_i, Y_i')$ reduzieren antithetische Variablen die Varianz genau dann, wenn $Cov(Y_i, Y_i') < 0$.

Stratified Sampling

Bei dieser Methode wird die Grundgesamtheit der Monte-Carlo-Simulation in Schichten, sogenannte „Strata" unterteilt, wobei jedes Stratum gemäß seiner Wahrscheinlichkeit gewichtet wird. Die Stichproben werden gemäß dieser Gewichtung auf die Strata verteilt und für jedes Stratum einzeln gezogen.

Konkret bedeutet dieses für die Pseudo-Zufallszahlen aus $[0,1]$, dass n Strichproben aus $[0,1]$ in der Weise gezogen werden, dass das Intervall in m Teilintervalle der Länge $1/m$ unterteilt wird und dass aus jedem Teilintervall jeweils n/m Stichproben gezogen werden. Hierbei sollte die natürliche Zahl m ein Teiler von n sein.

19.4. Certainty-Equivalent-Pfad

Im Kontext der marktkonsistenten Bewertung versicherungstechnischer Verpflichtungen unterteilt man diesen Wert – in Anlehnung an die Theorie der Optionsbewertung – oft in den „inneren Wert“ und den „Zeitwert“. Dazu wird der sogenannte "Certainty-Equivalent-Pfad" ("CE-Pfad") benötigt. Dieser entspricht der risikoneutralen Realisierung der initialen, d. h. bei Projektionsbeginn geltenden Zinskurve ohne Volatilität, so dass insbesondere sämtliche Assets zukünftig exakt gleich rentieren (Total Return) wie die risikofreie Anlage. Annahmen zu Dividenden und Mieten können davon unabhängig getroffen werden. Konkret wird ein solcher CE-Pfad erstellt, indem man sämtliche zukünftigen Zinskurven des betrachteten Projektionsintervalls als Forwards der initialen Zinskurve berechnet. Für sämtliche als Index modellierte Asset-Klassen wird der Total Return gleich dem der risikofreien Anlage angesetzt. Der Income Return kann dann freier modelliert werden ohne Gefahr zu laufen, dass Arbitragefreiheit verletzt wird. So könnte man etwa bei Bond-Indizes den Income Return unter Berücksichtigung der für das betreffende Portfolio zu erwartenden Kuponerträge ansetzen. Für Aktien- oder Immobilienindizes würde sich eine Modellierung des Income Returns gemäß der zu erwartenden Dividenden und Mieten anbieten.

Charakteristische Eigenschaft des CE-Pfades ist, dass die Projektion sämtlicher Assets darauf den Martingaltest perfekt besteht.

Die Bewertung der versicherungstechnischen Verpflichtungen auf dem CE-Pfade entspricht einer deterministischen Bewertung, d.h. dem Fall Volatilität = 0. Insbesondere ist sie somit nicht marktkonsistent, da sie keine (Markt-)Volatilität enthält. Auf ihrer Grundlage kann jedoch der Zeitwert der Optionen und Garantien separat bewertet werden, indem man die Barwerte, die sich aus einer vollen stochastischen Projektion ergeben, von dem deterministischen Wert subtrahiert.

A. Literaturhinweise

[1.] Etheridge, A. (2002), A course in financial calculus, Cambridge Press

[2.] Europäische Kommission (2009), Richtlinie Solvabilität II, http://ec.europa.eu/

[3.] CFO-Forum (2009), Market Consistent Embedded Value Principles, http://www.cfoforum.eu

[4.] Glasserman, P., Heidelberger, P. und Shahabuddin, P. (2000), Efficient Monte Carlo Methods for Value-at-Risk, In: Mastering Risk, Band 2, Financial Times – Prentice Hall

[5.] Szechtman (2003) Control Variates Techniques for Monte Carlo Simulation, Proceedings of the 2003 Winter Simulation Conference, Hrsg. S. Chick, P.J. Sánchez, D. Ferrin and D.J. Morris

[6.] Rinne (2003), Taschenbuch der Statistik, Verlag Harri Deutsch

[7.] Hartung, J., Elpelt, B., Klösener, K.-H. (2002), Statistik, Lehr- und Handbuch der angewandten Statistik, S. 236, 13. Auflage, Oldenbourg Verlag

[8.] Thorsten Schmidt, Zinsstrukturmodelle, Vorlesungsskript Universität Leipzig, Wintersemester 2004-2005, www.math.uni-leipzig.de/~tschmidt/FM_skriptWS04_05.pdf, Seite 10 ff

[9.] Man, Tin-Kwai (2007), Neue Aspekte der Portfolio-Optimierung und der Modellierung von Bondindizes, Dissertation der TU Kaiserslautern, http://kluedo.ub.uni-kl.de/volltexte/2007/2106/, Seite 95 ff

[10.] Blanchard, O. (2006), Macroeconomics, 4. Auflage, Prentice Hall Businness Publishing

[11.] Nitsch, V., Graff, M., Müller, C. (2007), Aussenwirtschaft, ETH Zürich Sommersemester 2007, Foliensatz zur Vorlesung, http://www.vwl.ethz.ch/Aussenwirtschaft/Folien/070320Aussenwirtschaft.ppt, Abschnitt Bestimmungsgründe des Wechselkurses II

[12.] Lütkepohl, H., et. al. (2004), Applied Time Series Econometrics, Cambridge University Press

[13.] Davidson, R., MacKinnon, J.G. (2004), Econometric Theory and Methods, Oxford University Press

[14.] Solvabilitätsverordnung (2006) Verordnung über die angemessene Eigenmittelausstattung von Instituten, Institutsgruppen und Finanzholding-Gruppen. Bundesministerium der Finanzen

[15.] Corradi, V., Swanson, N.R. (2006) Predictive Density Evaluation, Handbook of Economic Forecasting, Chapter 5, vol.1, pp. 197-284.

[16.] Bafin (2017), Rundschreiben R 2/2017 (VA) (MaGo), http://www.bafin.de

[17.] Androschucks, T., et.al. (2016), Simulation based capital models – testing, justifying and communicating choices – a report from the life aggregation and simulation techniques working party, Institute and Faculty of Actuaries.

[18.] Diebold, F.X., T. Gunther and A.S. Tay (1998) Evaluating Density Forecasts with Applications to Finance and Management, International Economic Review, 39, 863-883

[19.] Diebold, F.X., Hahn, J. and Tay, A.S. (1999) Multivariate Density Forecast Evaluation and Calibration in Financial Risk Management: High Frequency

Returns on Foreign Exchange, Review of Economics and Statistics, 81, 661-673

[20.] Diebold, F. X., Tay, A.S. and Wallis, K.D. (1998) Evaluating Density Forecasts of Inflation: The Survey of Professional Forecasters, in Festschrift in Honor of C.W.J. Granger, eds. R.F. Engle and H. White, Oxford University Press, Oxford.

[21.] Glasserman P. (2003), Monte Carlo Methods in Financial Engineering, Springer

[22.] Zenger, C. (1991), Sparse Grids. In Parallel Algorithms for Partial Differential Equations (W. Hackbusch, ed.), Vol. 31 of Notes on Numerical Fluid Mechanics, Vieweg Verlag.

[23.] CEIOPS (2008), Quantitative Impact Study 4, http://www.ceiops.eu

[24.] Jaquemod R. et. al. (2005), Stochastische Unternehmensmodelle für deutsche Lebensversicherungen, Abschlussbericht der DAV-Arbeitsgruppe, Verlag Versicherungswirtschaft GmbH Karlsruhe

[25.] Versicherungsaufsichtsgesetz (VAG), http://www.bafin.de

[26.] Cottin, C. et al. (2007), „Auf was reagieren die Kunden wirklich - eine empirische Analyse des Einflusses der Überschussbeteiligung auf Neugeschäft und Storno. Versicherungswirtschaft 21, 1772-1774 und 22, 1876-1880]

[27.] Hull, J. C., (2009), Optionen, Futures und andere Derivate 7. Aufl., Pearson Studium, München.

[28.] DAV Fachgrundsatz (Hinweis, 27. Januar 2011) „Kalibrierung in inaktiven Marktsegmenten"

[29.] DAV Fachgrundsatz (Hinweis, 26. Januar 2010) „Best Estimate in der Lebensversicherung"

[30.] EIOPA (2015), EIOPA-BoS-14/166 DE: Leitlinien zur Bewertung Versicherungstechnischer Rückstellung, Leitlinie 82, (April 2015), https://eiopa.europa.eu/publications/eiopa-guidelines/guidelines-on-valuation-of-technical-provisions

[31.] BaFin (2015) Auslegungsentscheidung ORSA

[32.] Androschucks, T., et.al. (2016), Simulation based capital models – testing, justifying and communicating choices – a report from the life aggregation and simulation techniques working party, Institute and Faculty of Actuaries.

[33.] DAV (2014), Kreditrisikomodellierung von ausfallbehafteten Kapitalanlagen in Versicherungsunternehmen, Ergebnisbericht der Deutschen Akruarvereinigung e.V.

[34.] Dewachter, H., Lyrio, M. (2006), Macro Factors and the Term Structure of Interest Rates, Journal of Money, Credit, and Banking, vol. 38, issue 1, 119-140

[35.] EIOPA (2016), Discussion Paper on the review of specific items in the Solvency II Delegated Regulation.

[36.] Frey, R., McNeil, A., Embrechts, P. (2005), Quantitative Risk Management, Princeton University Press[41.]

[37.] Frey, R., McNeil, A. (2000), Estimation of tail-related risk measures for heteroscedastic financial time series: An extreme value approach, Journal of Empirical Finance, 7(3-4):271–300

[38.] Hansen, P. R., Lunde, A. (2005), A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1), Journal of Applied Econometrics

[39.] Haubrich, J., Pennacchi, G., Ritchken, P. (2012), Inflation Expectations, Real Rates, and Risk Premia: Evidence from Inflation Swaps, The Review of Financial Studies, Volume 25, Issue 5, 1588-1629

[40.] Higham, N.J. (1988), Computing a nearest symmetric positive semidefinite matrix, Linear Algebra and its Applications, Vol 103, 103-118

[41.] Lütkepohl, H. (2005), New Introduction to Multiple Time Series Analysis, Springer

[42.] Meucci, A., Loregian, A. (2016), "Neither "Normal" nor "Lognormal": modeling interest rates across all regimes." Financial Analysts Journal 72.3: 68-82

[43.] Stock, J.H., Watson, M.W. (2008), Phillips curve inflation forecasts, Working Paper des amerikanischen National Bureau of Economic Research, No. 14322

[44.] Zucchini, W., MacDonald, I.L. (2009), Hidden Markov Models for Time Series, An Introduction Using R, Chapman & Hall/CRC

[45.] Culver, Q., et al. (2018), The Influence of Seed Selection on the Solvency II Ratio, Der Aktuar 01.2018

[46.] Becker, T. et al. (2014), Market Consistent Embedded Value - Eine praxisorientierte Einführung, Der Aktuar 01.2014

[47.] Fries, C. (2007), Mathematical Finance, Wiley

[48.] Brigo, D., Mercurio, F. (2006), Interest Rate Models – Theory and Practice, Springer

[49.] Desmettre, S., Korn, R. (2018), Moderne Finanzmathematik – Theorie und praktische Anwendung Band 2, Springer

[50.] Kraus, I. (2016), Zinsmodelle in der marktkonsistenten Bewertung von Versicherungsbeständen, Der Aktuar 02.2016 und 04.2016

[51.] Litterman, R., Scheinkman, J. (1991), Common Factors Affecting Bond Returns, Journal of Fixed Income 1

[52.] Ostwald ,A. (2010), Das HJM-Modell und das LIBOR Markt Modell zur Beschreibung von Zinsstrukturkurven, Diplomarbeit

[53.] Meister, M. (2010), Smile Modeling in the LIBOR Market Model, Diploma Thesis

[54.] Glasserman, P., Merener, N., (2003), Numerical solution of jump-diffusion LIBOR market models, Finance Stochast. 7, 1–27

[55.] Jarrow, R., Turnbull, S. (1995), Pricing Derivatives on Financial Securities Subject to Credit Risk, Journal of Finance, 1, 53-85.

[56.] Jarrow, R., Lando, D., Turnbull, S. (1997), A Markov Model for the Term Structure of Credit Risk Spreads, Review of Financial Studies, 10, 481-523.

[57.] Lando, D. (1998), On Cox Processes and Credit Risky Securities, Review of Derivatives Research, Vol. 2, 2-3, pp. 99-120.

[58.] Duffie, D. and Singleton, K. (1999),[58.] Modeling Term Structures of Defaultable Bonds, Review of Financial Studies, 12, 687-720.
[59.] Rebonato, R. (1996), Interest-rate option models: understanding, analysing and using models for exotic interest-rate options, Wiley
[60.] EIOPA (2021), EIOPA-BoS-21/475, Technical documentation of the methodology to derive EIOPA's risk-free interest rate term structures, November 2021
[61.] EIOPA (2020), EIOPA-BoS-20/749, Opinion on the 2020 review of Solvency II, December 2020
[62.] IFRS 17 Market Consistent Valuation of Financial Guarantees for Life and Health Insurance Contracts, Canadian Institute of Actuaries, 2020
[63.] CRO-Forum (2010), Extrapolation of Market Data, http://www.cfoforum.eu
[64.] Invest Europe (2020), Response to EC Consultation on the review of prudential rules (Solvency II Directive)
[65.] Homrighausen J. (2015), „Ein integrierter Ansatz zur Modellierung von Kreditrisiken im internen Modell einer Lebensversicherung", Aktuar 04.2015, S. 188 ff.
[66.] Leitschkis, M., Hrabovszki, L. (2090), " Die Kreditrisiken – ein (un)wichtiges Thema für stochastische Unternehmensmodelle? ", qx-Club
[67.] Arvanitis A., Gregory J., Laurent J.-P. (1996), Building Models for Credit Spreads, The Journal of Derivatives Spring 1999, 6 (3) 27-43
[68.] Stephan V. (2011), "Modelling Credit Risk in the Solvency II Framework"
[69.] DAV Ergebnisbericht (9. November 2015) „Zwischenbericht zur Kalibrierung und Validierung spezieller ESG unter Solvency II"