



DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Fachgrundsatz der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen

Richtlinie

Köln, 28. Juni 2023

Präambel

Die Deutsche Aktuarvereinigung (DAV) e. V. hat entsprechend dem Verfahren zur Feststellung von Fachgrundsätzen vom 25. April 2019 den vorliegenden Fachgrundsatz festgestellt.¹ Fachgrundsätze zeichnen sich dadurch aus, dass sie

- aktuarielle Fachfragen behandeln,
- von grundsätzlicher und praxisrelevanter Bedeutung für Aktuare sind,
- berufsständisch durch ein Feststellungsverfahren legitimiert sind, das allen Aktuaren eine Beteiligung an der Feststellung ermöglicht, und
- ihre ordnungsgemäße Verwendung seitens der Mitglieder durch ein Disziplinarverfahren berufsständisch abgesichert ist.

Dieser Fachgrundsatz ist eine *Richtlinie*. Richtlinien sind Fachgrundsätze, von deren Bestimmungen bis auf begründbare Einzelfälle nicht abgewichen werden darf und die konkrete Einzelfragen normieren.

Anwendungsbereich

Der sachliche Anwendungsbereich dieser Richtlinie umfasst die Lebensversicherungsunternehmen. Sie gelten aber entsprechend den Grundsätzen der Richtlinie *Biometrische Rechnungsgrundlagen und Rechnungszins bei Pensionskassen und Pensionsfonds* der DAV vom 5. Dezember 2012 gleichermaßen für Pensionskassen und Pensionsfonds, sofern und soweit gleiche Voraussetzungen wie bei Lebensversicherungsunternehmen gegeben sind, insbesondere die Leistungen und Beiträge ohne jede Einschränkung garantiert werden. Sie gelten außerdem für Schaden- und Unfallversicherungsunternehmen bei der Berechnung der Deckungsrückstellung für Alters- und Hinterbliebenenrenten in der Unfallversicherung mit garantierter Beitragsrückzahlung.²

Inhalt der Richtlinie

Die Arbeitsgruppe *Biometrische Rechnungsgrundlagen* des Ausschusses Lebensversicherung der DAV hat in den Jahren 2003 und 2004 Untersuchungen über die

¹ Der Vorstand dankt der Unterarbeitsgruppe *Rentersterblichkeit* ausdrücklich für die geleistete Arbeit, namentlich Holger Bartel, Marcus Bauer, Bärbel Michaeli, Werner Mörtlbauer, Eberhard Münzmay, Gabriele Nagel, Kornelia Nolle, Catherine Pallenberg, Ulrich Pasdika, Volker Priebe, Michael Rösger, Esther U. Schütz, Jürgen Wolff.

² Dieser Fachgrundsatz ist an die Mitglieder der DAV gerichtet; seine sachgemäße Anwendung erfordert aktuarielle Fachkenntnisse. Dieser Fachgrundsatz stellt deshalb keinen Ersatz für entsprechende professionelle aktuarielle Dienstleistungen dar. Aktuarielle Entscheidungen mit Auswirkungen auf persönliche Vorsorge und Absicherung, Kapitalanlage oder geschäftliche Aktivitäten sollten ausschließlich auf Basis der Beurteilung durch eine(n) qualifizierte(n) Aktuar DAV/Aktuarin DAV getroffen werden.

Sterblichkeit bei Rentenversicherungen durchgeführt. Dazu ist sowohl das Sterblichkeitsniveau als auch die zu erwartende Sterblichkeitsverbesserung in der Zukunft anhand von Daten aus Rentenversicherungsbeständen deutscher Lebensversicherungsunternehmen sowie anhand von Daten der deutschen Bevölkerungsstatistik und der Gesetzlichen Rentenversicherung untersucht und mit internationalen Entwicklungen verglichen worden. Das Ergebnis dieser Untersuchungen wurde am 14. September 2005 als Richtlinie der DAV verabschiedet. Damit wurde ein System von Generationensterbetafeln mit der Bezeichnung *Sterbetafel DAV2004R* zur Verwendung für die Reservierung der ab Anfang 2005 neu abgeschlossenen Lebensversicherungen mit Erlebensfallcharakter (insbesondere Rentenversicherungen) vorgelegt. Diese Richtlinie gilt für die Reservierung ab dem Bilanztermin 2005. Die Sterbetafel DAV2004R ist auch für die Beitragskalkulation von Lebensversicherungen mit Erlebensfallcharakter geeignet.³

Im Zuge des turnusgemäßen Revisionsverfahrens für Fachgrundsätze wurde die Sterbetafel DAV2004R in den Jahren 2016 und 2017 überprüft. Die Untersuchung hat ergeben, dass die Tafel als Reservierungstafel für das Neugeschäft beibehalten werden kann. Die Ergebnisse dieser Analyse wurden zudem im Ergebnisbericht *Turnusgemäße Überprüfung der DAV2004R für Rentenversicherungen* vom 10. Mai 2023 zusammengefasst.

Selbstverständlich muss jeder Verantwortliche Aktuar überprüfen, ob unternehmensindividuelle Sachverhalte bestehen, die gegen eine unveränderte Übernahme der in den Richtlinien hergeleiteten Sterbetafeln für die Reservierung eines bestimmten Unternehmens sprechen. Gegebenenfalls muss der Verantwortliche Aktuar geeignete Anpassungen der Sterbetafeln vornehmen. Für einige dabei zu beachtende Gesichtspunkte vergleiche Kapitel 7 („Anwendungsbereich“) der vorliegenden Richtlinie.

Verabschiedung

Die unverändert zutreffende Richtlinie ist durch den Vorstand der DAV am 28. Juni 2023 erneut verabschiedet worden. Sie ersetzt die gleichnamige und identische Richtlinie vom 14. September 2005.

³ Für die Reservierung des bis Ende 2004 abgeschlossenen Bestands an Lebensversicherungen mit Erlebensfallcharakter ist die Verwendung anderer Sterbetafeln mit geringeren Sicherheitsmargen ausreichend, die in einer weiteren Richtlinie *Reservierung und Überschussbeteiligung von Rentenversicherungen des Bestandes* abgeleitet wurden.

Inhaltsverzeichnis

1	Einleitung und grundsätzlicher methodischer Ansatz.....	7
1.1	Ausgangssituation	7
1.2	Periodentafeln und Generationentafeln.....	8
1.3	Basistafeln	9
1.4	Sterblichkeitstrend	10
1.5	Altersverschiebung als Näherungsverfahren.....	11
2	Datenmaterial	13
2.1	Versichertendaten	13
2.2	Bevölkerungsdaten.....	15
2.3	Daten der gesetzlichen Rentenversicherung.....	15
3	Basistafeln	17
3.1	Bezugsjahr für die Basistafel	17
3.2	Selektionstafel 2. Ordnung für die Rentenbezugszeit	17
3.2.1	<i>Selektionsfaktoren</i>	<i>18</i>
3.2.2	<i>Rohe Sterbewahrscheinlichkeiten.....</i>	<i>18</i>
3.2.3	<i>Ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeiten</i>	<i>19</i>
3.2.4	<i>Extrapolation.....</i>	<i>19</i>
3.3	Aggregattafel 2. Ordnung	20
3.3.1	<i>Aufschubzeit</i>	<i>20</i>
3.3.2	<i>Rentenbezugszeit.....</i>	<i>22</i>
3.3.3	<i>Stetiger Übergang für niedrige Alter.....</i>	<i>22</i>
3.3.4	<i>Extrapolation.....</i>	<i>22</i>
3.4	Basistafeln 1. Ordnung	24
3.4.1	<i>Abschlag für statistisches Schwankungsrisiko</i>	<i>24</i>
3.4.2	<i>Abschlag für Irrtumsrisiken.....</i>	<i>27</i>
3.4.3	<i>Gesamtabschlag auf die Basistafeln</i>	<i>28</i>
3.4.4	<i>Darstellung der Ergebnisse</i>	<i>28</i>

4	Projektion des Sterblichkeitstrends	31
4.1	Sterblichkeitstrend 2. Ordnung	31
4.1.1	<i>Auswahl des Modells für Sterblichkeitsprojektionen</i>	31
4.1.2	<i>Sterblichkeitstrend der Bevölkerung</i>	31
4.1.3	<i>Lineare Trenddämpfung</i>	33
4.1.4	<i>Versichertentrend 2. Ordnung</i>	36
4.1.5	<i>Formeln</i>	43
4.1.6	<i>Vergleich mit Ergebnissen des IBS</i>	44
4.2	Sterblichkeitstrend 1. Ordnung	44
4.2.1	<i>Zuschlag für Modellrisiko</i>	44
4.2.2	<i>Änderungszuschlag</i>	44
4.2.3	<i>Andere Irrtumsrisiken</i>	45
4.2.4	<i>Monotonieverhalten</i>	46
4.2.5	<i>Darstellung der Ergebnisse</i>	46
5	Altersverschiebung als Näherungsverfahren.....	49
5.1	Grundtafel.....	49
5.2	Altersverschiebung	50
5.3	Vergleiche	50
6	Zusammenfassung	52
7	Anwendungsbereich.....	54
8	Literatur.....	56
Anhang 1	Tabellen zur DAV 2004 R.....	58
Teil A	Selektionsfaktoren und Basistafeln	58
Teil B	Trendfunktionen.....	61
Teil C	Grundtafel und Altersverschiebung	64
Anhang 2	Tabellen zu Vergleichen mit anderen Sterbetafeln	66
Teil A	Vergleiche mit der Sterbetafel DAV 1994 R.....	66
Teil B	Vergleiche mit internationalen Sterbetafeln für Renten ...	74
Anhang 3	Abhängigkeit der Sterblichkeit von der Höhe der versicherten Rente.....	76
Anhang 4	Bezugsjahr für die Basistafeln	77

Anhang 5	Schätzung von Bevölkerungsterblichkeiten	78
Anhang 6	Auswertungen zur Selektion	79
Anhang 7	Bestimmung von Selektionsfaktoren.....	81
Anhang 8	Sozioökonomische Einflüsse auf die Sterblichkeit.....	82
Anhang 9	Extrapolation der Basistafeln für hohe Alter	84
Anhang 10	Annahmen bei der Ermittlung des Schwankungsabschlags	90
Anhang 11	Modelle für Sterblichkeitsprojektionen	92
	Teil A Likelihood-Ratio-Test zum Modellvergleich.....	92
	Teil B Die verallgemeinerte Kleinst-Quadrate-Schätzung.....	96
Anhang 12	Modellwahl.....	102
Anhang 13	Lee-Carter Modell.....	107
Anhang 14	Zeitraum für die Schätzung des Bevölkerungstrends	111
	Teil A Sensitivitätsbetrachtung	111
	Teil B Grippewelle 1969/1970	116
Anhang 15	Trenddämpfung	117
	Teil A Internationale Beispiele für Trenddämpfung.....	117
	Teil B Internationale Trendvergleiche	118
Anhang 16	Konfidenzintervall für Sterblichkeitstrend	127
Anhang 17	Vergleich mit Ergebnissen des IBS.....	130

1 Einleitung und grundsätzlicher methodischer Ansatz

1.1 Ausgangssituation

Seit Einführung der DAV-Sterbetafel 1994 R für Rentenversicherungen (s. [SS]) hat die Bedeutung der privaten Rentenversicherung in Deutschland stark zugenommen. Gemessen am laufenden Beitrag entfielen ca. 46% des Neuzugangs an Lebensversicherungen im Jahr 2003 auf Einzelrentenversicherungen und fondsgebundene Rentenversicherungen (berechnet aus Angaben in [GDV1]). Entsprechend ist der Anteil von Rentenversicherungen an der Gesamtzahl von Hauptversicherungen im Bestand von ca. 5% Ende 1996 auf ca. 16% Ende 2003 gestiegen (berechnet aus Angaben in [GDV2] und [GDV3]). Es ist davon auszugehen, dass die Rentenversicherung auch in der Zukunft eines der wichtigsten Produkte in der deutschen Lebensversicherung bleiben wird.

Vor diesem Hintergrund ist die Angemessenheit der in der Rentenversicherung verwendeten biometrischen Rechnungsgrundlagen von großem Interesse. Die Arbeitsgruppe „Biometrische Rechnungsgrundlagen“ des Ausschusses Lebensversicherung der Deutschen Aktuarvereinigung hat daher untersucht, ob die Notwendigkeit besteht, eine neue Sterbetafel für die Berechnung der Prämien und Deckungsrückstellungen von Rentenversicherungen zu entwickeln.

Bei der Münchener Rück und der Gen Re werden seit einigen Jahren Bestandsdaten zu Rentenversicherungen von deutschen Lebensversicherern gesammelt und ausgewertet. Dieses Datenmaterial aus den Beobachtungsjahren von 1995 bis 2002 stammt von über 20 Gesellschaften unterschiedlichster Größe und entspricht ca. 13,7 Millionen Bestandsjahren. Davon entfallen gut 10% auf laufende Renten, was etwa dem 1,8-fachen des bei der Entwicklung der Sterbetafel DAV 1994 R zur Verfügung stehenden Beobachtungsmaterials zu Versichertenbeständen entspricht. Im Gegensatz zu den 1994 verwendeten Daten enthält das Beobachtungsmaterial von Münchener Rück und Gen Re unter anderem auch Angaben zur Höhe der versicherten Rente und zur abgelaufenen Versicherungs- bzw. Rentenzahlungsdauer. Darüber hinaus stehen mit diesem Beobachtungsmaterial erstmals umfassende Daten zu aufgeschobenen Renten zur Verfügung.

Neben diesen Versichertendaten liegen knapp 10 Jahre nach Entwicklung der Sterbetafel DAV 1994 R auch neuere abgekürzte Sterbetafeln des Statistischen Bundesamts vor.

Das Beobachtungsmaterial von Münchener Rück und Gen Re sowie die abgekürzten Sterbetafeln des Statistischen Bundesamts ermöglichten eine eingehende Überprüfung der Sterbetafel DAV 1994 R. Die differenzierteren Ergebnisse zu Versichertenbeständen und die aktuellen Erkenntnisse zum Sterblichkeitstrend gaben Anlass zur Herleitung einer neuen Sterbetafel für die Berechnung der Prämien und Deckungsrückstellungen von Rentenversicherungen. Die Konstruktion dieser Sterbetafel mit der Bezeichnung DAV 2004 R wird in der vorliegenden Arbeit genauer erläutert.

Die Deutsche Aktuarvereinigung empfiehlt, für Lebensversicherungen mit Erlebensfallcharakter bei der Berechnung der Deckungsrückstellung zukünftig die Sterbetafel DAV 2004 R für das Neugeschäft ab dem Jahr 2005 zu verwenden. Diese Sterbetafel ist auch für die Beitragskalkulation von Lebensversicherungen mit Erlebensfallcharakter geeignet.

In den folgenden Abschnitten dieses Kapitels wird zunächst ein Überblick über die Sterbetafel DAV 2004 R gegeben. Der bei der Herleitung verfolgte methodische Ansatz und die einzelnen Schritte zur Berechnung der Tafel werden skizziert. Daran anschließend wird in Kapitel 2 das zur Verfügung stehende Datenmaterial genauer beschrieben. Die Herleitung der verschiedenen Basistafeln sowie die Festlegung der Sterblichkeitstrends 1. und 2. Ordnung sind in den Kapiteln 3 und 4 dokumentiert. In Kapitel 5 findet sich eine Beschreibung des angewendeten Näherungsverfahrens der Altersverschiebung. Nach einer Zusammenfassung der vorliegenden Arbeit in Kapitel 6 erläutert Kapitel 7 den Anwendungsbereich der Sterbetafel DAV 2004 R. Längere Textpassagen mit eher technischem Inhalt wurden in Anhänge ausgelagert. In Anhang 1 sind die tabellierten Werte der neuen Sterbetafel enthalten.

1.2 Periodentafeln und Generationentafeln

Eine Periodentafel gibt die Sterblichkeit für eine feste Beobachtungsperiode an. Bei den abgekürzten Sterbetafeln des Statistischen Bundesamts handelt es sich beispielsweise um Periodentafeln. Periodentafeln sind in der Lebensversicherung für die Kalkulation von Rentenversicherungen jedoch grundsätzlich ungeeignet, da sie den Trend der Sterblichkeitsverbesserung nicht abbilden.

Daher ist in der Rentenversicherung die Anwendung von Generationentafeln üblich. Generationentafeln enthalten die Sterblichkeit pro Geburtsjahrgang inklusive der zukünftig erwarteten Sterblichkeitsveränderung. Dieser Ansatz ist auch international verbreitet und wurde bereits bei den Sterbetafeln 1987 R (s. [L2]) und DAV 1994 R (s. [SS]) verwendet.

Bei der neuen Sterbetafel DAV 2004 R handelt es sich um ein System von Generationentafeln, das sich aus methodischer Sicht grundsätzlich aus folgenden Komponenten zusammensetzt:

- Basistafel 2. Ordnung: beste Schätzung der Periodensterblichkeit des Jahres 1999,
- Basistafel 1. Ordnung: unter Ansatz von Sicherheitsabschlägen auf die Basistafel 2. Ordnung,
- Sterblichkeitstrend 2. Ordnung: beste Schätzung der für die Zukunft erwarteten Sterblichkeitsreduktionen und
- Sterblichkeitstrend 1. Ordnung: unter Ansatz von Sicherheitszuschlägen auf den Sterblichkeitstrend 2. Ordnung.

1.3 Basistafeln

Bei der DAV 2004 R werden getrennte Basistafeln für die Aufschubzeit und für die Rentenbezugszeit hergeleitet, um in der Rentenbezugszeit Selektionseffekte angemessen berücksichtigen zu können.

Bei der Basistafel für die Rentenbezugszeit handelt es sich um eine Selektionstafel, die doppelt nach dem aktuellen Alter und dem laufenden Jahr der Rentenbezugszeit abgestuft ist. Diese Abstufung berücksichtigt die Selbstselektion der versicherten Personen bei sofortbeginnenden Renten sowie bei ehemals aufgeschobenen Renten mit Kapitalwahlrecht.

Die Basistafel für die Aufschubzeit wird dagegen als Aggregattafel ohne Unterscheidung nach dem laufenden Versicherungsjahr ab Policenbeginn bestimmt, da der Effekt der Selbstselektion in der Aufschubzeit deutlich weniger ausgeprägt ist. Für Alter ab 65 Jahre wird die Aggregattafel mit Hilfe des Beobachtungsmaterials zu laufenden Renten fortgesetzt. Dabei wird die Selektion zu Beginn der Rentenbezugszeit nicht explizit durch Differenzierung des Beobachtungsmaterials nach zurückgelegter Rentenbezugszeit berücksichtigt. Als Aggregattafel beinhaltet diese Basistafel die Selbstselektion der Versicherten zu Beginn der Rentenbezugszeit implizit.

Alternativ zur Verwendung unterschiedlicher Sterbetafeln für Aufschubzeit und Rentenbezugszeit kann deswegen unter Berücksichtigung der Hinweise in Kapitel 7 diese Aggregattafel auch als alleinige Basistafel für Aufschubzeit und Rentenbezugszeit verwendet werden. Dies kann den Aufwand für die EDV-technische Umsetzung der DAV-Tafel 2004 R reduzieren.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten der Basistafeln werden bis auf notwendige Extrapolationen in Randaltern als rentenhöhengewichtete Versichertensterblichkeiten direkt aus dem Beobachtungsmaterial von Münchener Rück und Gen Re gewonnen.

Wie in Anhang 3 genauer ausgeführt wird, besteht ein deutlicher Zusammenhang zwischen der Sterblichkeit der Versicherten und der Höhe der versicherten Rente. Infolgedessen ist das Risikoergebnis in der Rentenversicherung von der Verteilung der Verträge auf die verschiedenen Rentenhöhenklassen abhängig. Es ist daher sinnvoll, in einer Sterbetafel für Rentenversicherungen rentenhöhengewichtete Sterbewahrscheinlichkeiten anzusetzen. Alternativ wäre auch eine Gewichtung mit der bei Tod frei werdenden Deckungsrückstellung denkbar. Bei einer genaueren Untersuchung wurde aber festgestellt, dass eine solche Gewichtung zu keinen signifikant anderen Ergebnissen führt als die Gewichtung mit der Rentenhöhe.

Zur Berücksichtigung der folgenden Risiken werden Sicherheitsabschläge auf die Basistafeln 2. Ordnung ermittelt:

- Abschlag auf die Sterblichkeiten der Basistafel 2. Ordnung für das statistische Schwankungsrisiko bei der Anwendung der Rententafel und
- Abschlag auf die Sterblichkeiten der Basistafel 2. Ordnung für Irrtumsrisiken (Parameter-Schätzunsicherheit, Modellrisiko) bei der Herleitung der Rententafel.

Zielgröße bei der Bestimmung des statistischen Schwankungsabschlags ist die durch Tod freiwerdende Deckungsrückstellung. Der Schwankungsabschlag wird als konstanter prozentualer, vom jeweiligen Alter unabhängiger Abschlag berechnet.

Der Irrtumsabschlag wird ebenfalls als konstanter prozentualer, vom jeweiligen Alter unabhängiger Abschlag angesetzt.

1.4 Sterblichkeitstrend

Die Trendfunktion 2. Ordnung der neuen Sterbetafel DAV 2004 R hängt nicht nur vom Alter des Versicherten, sondern auch vom Kalenderjahr ab.

Der Langfristtrend deutscher Bevölkerungstafeln seit 1871 ist deutlich niedriger als der Mittelfristtrend der Bevölkerungstafeln seit 1972. Diese Tatsache in Verbindung mit bereits beobachteten Trendabschwächungen in anderen Ländern lässt es wahrscheinlich erscheinen, dass der Sterblichkeitstrend sich in der Zukunft abschwächen wird.

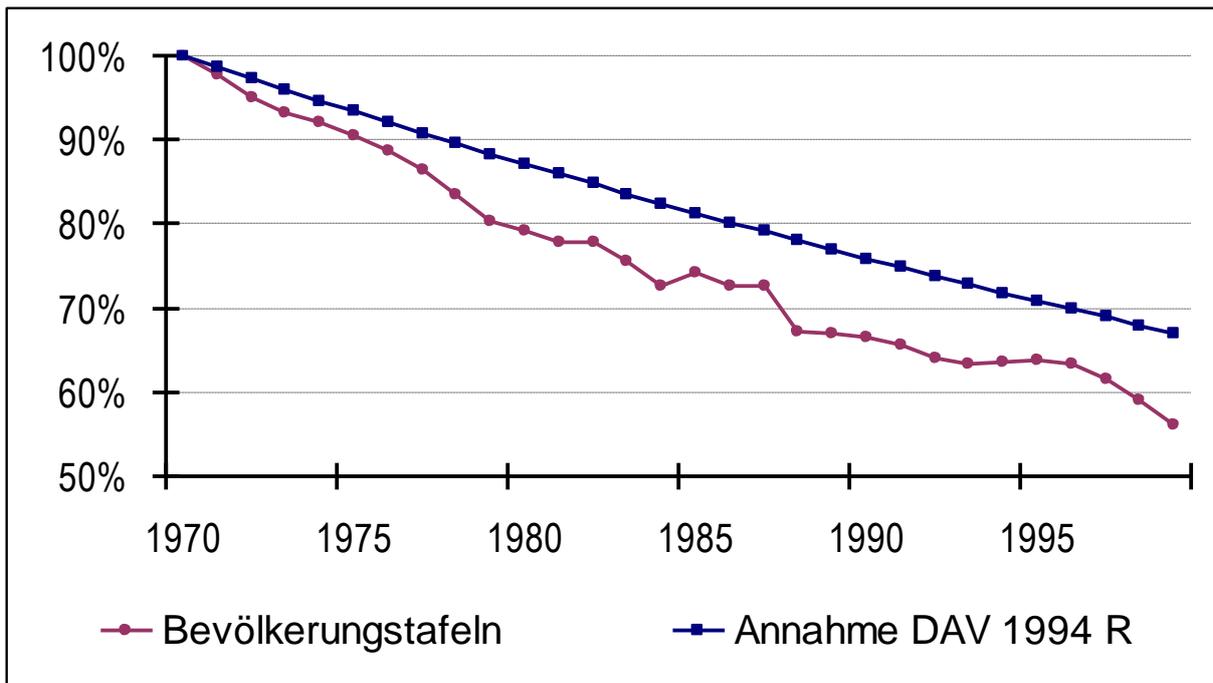
Für den Sterblichkeitstrend 2. Ordnung wird daher eine lineare Trenddämpfung angesetzt, die den auf dem Niveau des Kurzfristrends der Bevölkerungstafeln basierenden sogenannten Starttrend innerhalb eines angemessenen Zeitraums in den sogenannten Zieltrend überführt.

Aufgrund der in Abschnitt 4.1.4.1 genauer dargelegten Erkenntnisse ist davon auszugehen, dass der Trend der Sterblichkeitsverbesserung bei Versicherten höher ist als der Bevölkerungstrend. Deshalb wird der Versichertentrend gegenüber dem Bevölkerungstrend um einen pauschalen Zuschlag erhöht. Der auf diese Weise konstruierte Trend wird nach Extrapolation für hohe Alter und Minimierung in jungen Altern als Starttrend 2. Ordnung festgelegt.

Der Zieltrend 2. Ordnung entspricht 75% des aus den Bevölkerungstafeln abgeleiteten und um den Versichertenzuschlag erhöhten Mittelfristtrends.

Aus Vorsichtsgründen wird der Sterblichkeitstrend 1. Ordnung nicht gedämpft. Der Sterblichkeitstrend 1. Ordnung hängt daher nicht vom Kalenderjahr ab, sondern nur vom Alter und vom Geschlecht. Der Sterblichkeitstrend 1. Ordnung ergibt sich für alle Kalenderjahre aus dem Starttrend 2. Ordnung durch Erhöhung um einen pauschalen Zuschlag für das Änderungsrisiko.

Die folgende Grafik stellt ausgehend von einem Niveau von 100% Sterblichkeit im Jahr 1970 die Sterbewahrscheinlichkeiten 65-jähriger Männer gemäß den Bevölkerungstafeln des Statistischen Bundesamts für das frühere Bundesgebiet dar. Zum Vergleich ist die Verbesserung der Sterbewahrscheinlichkeit eingetragen, die sich in diesem Zeitraum gemäß dem langfristigen Trend der DAV 1994 R ergeben hätte. Bei diesem Vergleich ist zu beachten, dass für die Jahre bis 2000 in der DAV 1994 R nicht der langfristige Trend, sondern ein wesentlich höherer Trend der Sterblichkeitsverbesserungen angesetzt wurde, der die tatsächlichen Sterblichkeitsverbesserungen gut abbildet.



Grafik 1: Sterblichkeitsentwicklung 65-jähriger Männer gemäß Bevölkerungstafeln und langfristigem Trend der DAV 1994 R

In den ab dem Jahr 2000 angesetzten langfristigen Trend der DAV 1994 R fließt der „Jahrhunderttrend“ ein, der die Sterblichkeitsverbesserungen deutscher Bevölkerungstafeln seit 1871 abbildet. Im Laufe der Jahrzehnte hat sich das Altersprofil der Sterblichkeitsverbesserungen jedoch dahingehend gewandelt, dass infolge des medizinischen Fortschritts auch in hohen Altern große Sterblichkeitsabnahmen zu beobachten sind. Die Auswertung der neuen Daten zur Bevölkerungssterblichkeit hat gezeigt, dass sich diese Entwicklung der letzten Jahrzehnte auch in den 90er Jahren fortgesetzt hat.

Die langfristige Trendannahme der DAV 1994 R erscheint aus heutiger Sicht gegenüber der Sterblichkeitsentwicklung der letzten 30 Jahre des 20. Jahrhunderts nicht mehr angemessen. Ein Jahrhunderttrend wird deswegen bei der DAV 2004 R zur Projektion der zukünftigen Sterblichkeitsverbesserungen nicht herangezogen.

1.5 Altersverschiebung als Näherungsverfahren

Bei Verwendung der Generationentafel DAV 2004 R hängen die versicherungstechnischen Werte nicht nur vom Alter bei Abschluss eines Vertrages, sondern auch vom jeweiligen Geburtsjahr des Versicherten ab. Für Zwecke der Außendarstellung und für die Umsetzung in manchen EDV-Systemen wird daher von einigen Unternehmen statt des Systems von Generationentafeln eine eindimensionale Grundtafel mit Altersverschiebung bevorzugt. Diese Darstellungsform einer Sterbetafel für Versicherungen mit Erlebensfallcharakter ist auch bereits von den Sterbetafeln 49/51, 1987 R und DAV 1994 R her bekannt (s. [R], [L2] und [SS]). Auch für die

neue Sterbetafel DAV 2004 R wird mit einem modifizierten Verfahren die Approximation der Generationentafeln durch eine Grundtafel mit Altersverschiebung durchgeführt.

2 Datenmaterial

Die neuen Rententafeln basieren auf dem folgenden Datenmaterial:

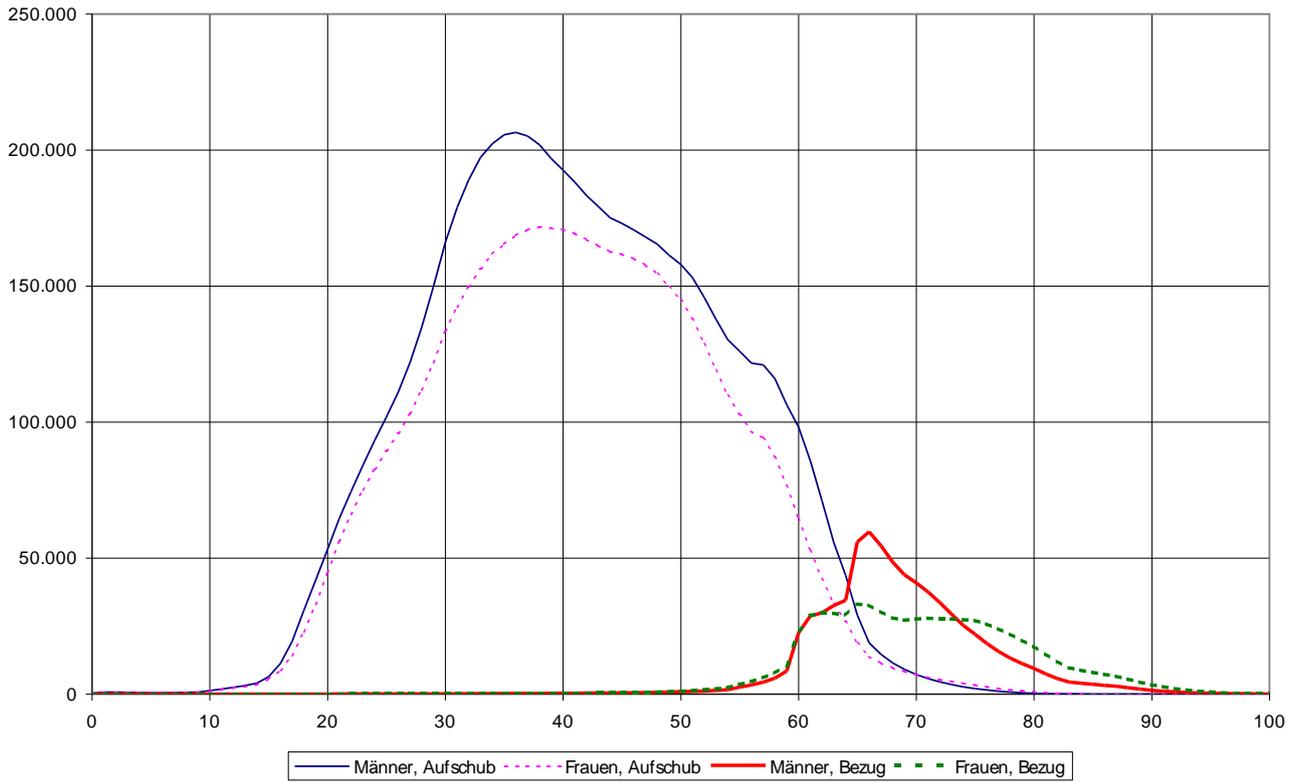
- Versichertendaten für die Jahre 1995 bis 2002, die von der Münchener Rück und der Gen Re ausgewertet wurden,
- Abgekürzte Bevölkerungssterbetafeln des Statistischen Bundesamtes für das frühere Bundesgebiet ab 1971/73 bis 1998/2000 (für 1986/88 stattdessen die Allgemeine Deutsche Sterbetafel 1986/88) und
- Daten der gesetzlichen Rentenversicherung (GRV) für das frühere Bundesgebiet von 1986 bis 2002 für die Alter von 66 bis 98 Jahren.

2.1 Versichertendaten

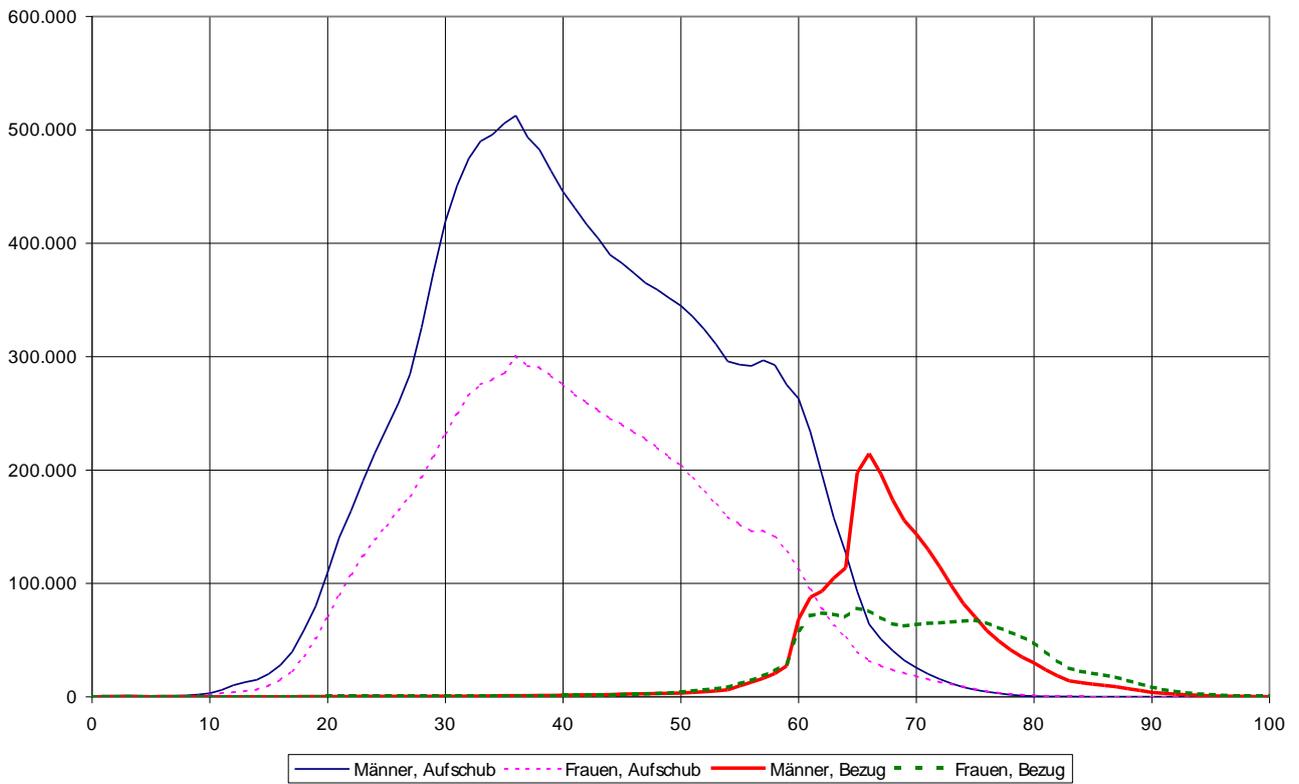
Münchener Rück und Gen Re verfügen über Daten zu aufgeschobenen Renten und laufenden Renten von mehr als 20 Erstversicherungsunternehmen. Der Anteil der einzelnen Unternehmen an den Daten zur Aufschubzeit einerseits und zur Rentenbezugszeit andererseits ist ähnlich, aber nicht identisch. Das Datenmaterial aus den Jahren 1995 bis 2002 erlaubt eine Differenzierung nach Bestandszugehörigkeit und damit die Ermittlung von Selektionseffekten. Das Beobachtungsmaterial zur Rentenbezugszeit beruht auf ca. 1,45 Mio. Bestandsjahren und 33.456 Todesfällen. Das Beobachtungsmaterial zur Aufschubzeit umfasst ca. 12,2 Millionen Bestandsjahre und 31.044 Todesfälle.

In die Konstruktion der neuen Rententafel fließen rentenhöhengewichtete Versichertensterblichkeiten auf Basis dieses Beobachtungsmaterials ein.

Die folgenden Grafiken zeigen die Altersstruktur des Beobachtungsmaterials nach anzahlgewichteten bzw. nach rentenhöhengewichteten Verweildauern innerhalb des Zeitraumes 1995 bis 2002:



Grafik 3: Altersabhängigkeit der anzahlgewichteten Verweildauern (in Jahren)



Grafik 2: Altersabhängigkeit der rentenhöhengewichteten Verweildauern (in der Maßeinheit 1.000 EUR * Jahre)

Im Bereich von Altern bis 20 Jahre stellt sich das Problem, dass aufgrund des relativ geringen Beobachtungsmaterials und der niedrigen Sterbewahrscheinlichkeiten größere Schwankungen in den rohen Sterbewahrscheinlichkeiten auftreten. In diesem Altersbereich gehen daher in die Konstruktion der DAV 2004 R Bevölkerungsdaten ein. In Altern ab 90 Jahre liegen auch keine Bevölkerungsdaten vor, so dass hier extrapoliert werden muss.

2.2 Bevölkerungsdaten

Grundlage für die Konstruktion des Versichertentrends der Sterblichkeitsverbesserungen ist der Bevölkerungstrend der Sterblichkeitsverbesserungen, der aus den abgekürzten Bevölkerungssterbetafeln des Statistischen Bundesamtes für das frühere Bundesgebiet von 1971/73 bis 1998/2000 abgeleitet wird. Ab 1999/2001 wird vom Statistischen Bundesamt nur noch eine abgekürzte Sterbetafel für Gesamtdeutschland erstellt und nicht mehr für das frühere Bundesgebiet, weil aufgrund der Neugliederung der Berliner Bezirke ab dem Berichtsjahr 2001 eine Zuordnung in den Grenzen früheres West- bzw. Ostberlin nicht mehr möglich ist.

Ein Vergleich der Bevölkerungsdaten des Statistischen Bundesamtes für Ost-, West- und Gesamtdeutschland hat ergeben, dass es sinnvoll ist, bei der Herleitung des Bevölkerungstrends auf die Bevölkerungssterbetafeln für Westdeutschland bis 1998/2000 zurückzugreifen.

Der Sterblichkeitstrend der letzten 10 Jahre weist große Unterschiede zwischen Ost- und Westdeutschland auf. In Ostdeutschland ist der Sterblichkeitstrend aufgrund der Angleichung der Sterblichkeit an das niedrigere Westniveau wesentlich höher als in Westdeutschland. Hinzu kommt, dass Frauen in Ostdeutschland höhere Sterblichkeitsverbesserungen aufweisen als Männer. In Westdeutschland hat der Sterblichkeitstrend für Männer und Frauen in den letzten 10 Jahren hingegen dieselbe Größenordnung. Das Statistische Bundesamt nimmt in seiner 10. koordinierten Bevölkerungsvorausberechnung jedoch an, dass im Jahr 2020 die Lebenserwartung in Ost- und Westdeutschland identisch sein wird.

Die abgekürzten Sterbetafeln des Statistischen Bundesamts enden mit dem Alter 89. Für Alter ab 90 lässt sich daher aus diesen Sterbetafeln kein Sterblichkeitstrend ableiten.

2.3 Daten der gesetzlichen Rentenversicherung

Neben den Sterbetafeln des Statistischen Bundesamtes stehen auch Daten der gesetzlichen Rentenversicherung (GRV) zur Verfügung. Dieses Datenmaterial erstreckt sich bis zum Alter 98 und kann insofern zu Vergleichsrechnungen sowie zur Beurteilung des Sterblichkeitsverbesserungstrends für hohe Alter herangezogen werden.

Ein Vergleich von Bevölkerungsterblichkeit und GRV-Sterblichkeit zeigt für die aktuellen Perioden 1998/2000 und 1999/2001 bei Männern eine gute Übereinstimmung. Bei Frauen liegt die GRV-Sterblichkeit im Schnitt drei bis vier Prozent unter

der Bevölkerungssterblichkeit. Dieser Vergleich fällt für Gesamtdeutschland und Westdeutschland sehr ähnlich aus.

Im Einzelnen stehen für die GRV, die Arbeiterrentenversicherung (AR) und die Angestelltenversicherung (AV) Toten- und Lebendenbestände für die Jahre von 1986 bis 2002 zur Verfügung. Ab 1992 liegen für die Lebendenbestände und ab 1995 auch für die Totenbestände separat für West-, Ost- und Gesamtdeutschland Daten vor. Darüber hinaus stehen für die Jahre von 1994 bis 2000 Daten des Statistischen Bundesamtes zu Toten- und Lebendenbeständen für Beamte zur Verfügung. Aus den jeweiligen Daten werden Sterbewahrscheinlichkeiten abgeleitet.

Anhand der GRV-Daten sind Einflüsse verschiedener Ausprägungen des sozioökonomischen Status auf das Sterblichkeitsniveau zu erkennen:

- Versicherte der AR weisen höhere Sterbewahrscheinlichkeiten auf als Versicherte der AV, die wiederum höhere Sterbewahrscheinlichkeiten als die Beamten aufweisen.
- Bezieher hoher Renten weisen eine niedrigere Sterblichkeit auf als Bezieher niedriger Renten.

Detailergebnisse hierzu finden sich im Anhang 8.

3 Basistafeln

Auf Grundlage des bei Münchener Rück und Gen Re vorliegenden Beobachtungsmaterials zur Sterblichkeit bei Rentenversicherungen werden Basistafeln erstellt. Das Beobachtungsmaterial für die Rentenbezugszeit ist nach zurückgelegter Rentenbezugszeit differenziert. Damit ist auch die Erstellung von nach erreichtem Alter und zurückgelegter Rentenbezugszeit doppelt abgestuften Selektionstabellen möglich. In Abschnitt 3.2 wird die Erstellung der Selektionstabelle 2. Ordnung für die Rentenbezugszeit beschrieben. In Abschnitt 3.3 wird die Erstellung der Aggregattabelle 2. Ordnung für die Aufschiebzeit und für die Rentenbezugszeit beschrieben. Dabei wird für die Rentenbezugszeit das Beobachtungsmaterial aller Selektionsphasen zusammengefasst, so dass der Selektionseffekt der Rentenbezugszeit in der Aggregattabelle analog zur DAV 1994 R implizit berücksichtigt ist.

In den Abschnitten 3.4 wird die Bestimmung von Sicherheitsabschlägen für diese Sterbetabellen beschrieben, mit welchen sich Basistabellen 1. Ordnung ergeben. Für die Rentenbezugszeit kann alternativ entweder die Selektionstabelle oder die Aggregattabelle angesetzt werden. Für die Aufschiebzeit ist die Aggregattabelle zu verwenden.

3.1 Bezugsjahr für die Basistabelle

Zur Erstellung der Basistabellen wird das bei Münchener Rück und Gen Re vorliegende Beobachtungsmaterial der Jahre von 1995 bis 2002 zusammengefasst. Aufgrund der Verteilung des Beobachtungsmaterials auf die Jahre von 1995 bis 2002 beziehen sich die Basistabellen auf das Jahr 1999 (siehe Anhang 4).

3.2 Selektionstabelle 2. Ordnung für die Rentenbezugszeit

Die Rentenbezugszeit wird in Abhängigkeit von der zurückgelegten Rentenbezugsdauer in sechs Selektionsphasen unterteilt: 1. Jahr, ..., 5. Jahr, ab 6. Jahr. Diese Selektionsphasen werden mit $s = 1, \dots, 6$ bezeichnet.

Für die Selektionsphasen $s = 1, \dots, 6$ und die Jahre $t = 1995, \dots, 2002$ sei

$T_{x,t}^s$ die Summe der Jahresrenten der im Jahr t und Alter x und Selektionsphase s Gestorbenen im Beobachtungsmaterial der Münchener Rück und der Gen Re,

$L_{x,t}^s$ die mit Rentenhöhen gewichtete Verweildauer der im Beobachtungsjahr t Lebenden des Alters x und der Selektionsphase s im Beobachtungsmaterial der Münchener Rück und der Gen Re,

q_x^s die ausgeglichene Sterbewahrscheinlichkeit eines x -Jährigen in der Selektionsphase s bezogen auf das mittlere Beobachtungsjahr 1999,

f^1 der Selektionsfaktor für die Selektionsphase 1,

f^{2-5} der Selektionsfaktor für die Selektionsphasen 2 bis 5,

$q_x^6(roh)$ die rohe Sterbewahrscheinlichkeit eines x -Jährigen in der Selektionsphase 6 bezogen auf das mittlere Beobachtungsjahr 1999.

3.2.1 Selektionsfaktoren

Aufgrund der Auswertungen des Beobachtungsmaterials zur Selektion (siehe Anhang 6) wird folgendes Modell zur Berücksichtigung einer Selektionsdauer von 5 Jahren verwendet:

- Die Sterbewahrscheinlichkeit q_x^1 im ersten Jahr des Rentenbezugs ergibt sich aus der Sterbewahrscheinlichkeit ab dem sechsten Jahr q_x^6 durch Multiplikation mit einem Selektionsfaktor $f^1 < 1$:

$$q_x^1 = f^1 * q_x^6$$

- Die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_x^2, q_x^3, q_x^4, q_x^5$ im zweiten bis fünften Jahr des Rentenbezugs ergeben sich aus der Sterbewahrscheinlichkeit ab dem sechsten Jahr q_x^6 durch Multiplikation mit einem einheitlichen Selektionsfaktor $f^{2-5} < 1$:

$$q_x^2 = q_x^3 = q_x^4 = q_x^5 = f^{2-5} * q_x^6$$

Dabei hängen die Selektionsfaktoren f^1 und f^{2-5} vom Geschlecht, aber nicht vom Alter ab. In Anhang 7 werden folgende Selektionsfaktoren 2. Ordnung ermittelt:

	Männer	Frauen
f^1	0,670538	0,712823
f^{2-5}	0,876209	0,798230

3.2.2 Rohe Sterbewahrscheinlichkeiten

Die rohen Sterbewahrscheinlichkeiten ab dem sechsten Jahr $q_x^6(roh)$ werden auf Basis des Beobachtungsmaterials aller Selektionsphasen wie folgt berechnet:

$$q_x^6(roh) = \frac{\sum_{s=1}^6 \sum_{t=1995}^{2002} T_{x,t}^s}{f^1 \cdot \sum_{t=1995}^{2002} L_{x,t}^1 + f^{2-5} \cdot \sum_{s=2}^5 \sum_{t=1995}^{2002} L_{x,t}^s + \sum_{t=1995}^{2002} L_{x,t}^6}$$

Dabei wird das Beobachtungsmaterial aller Selektionsphasen verwendet, weil für Alter $x \leq 64$ nur relativ wenig Beobachtungsmaterial für die Selektionsphase $s = 6$ vorliegt.

3.2.3 Ausgegliche Sterbewahrscheinlichkeiten

Der Ausgleich der q_x^6 (roh) im Altersbereich von 60 bis 99 Jahren erfolgt nach dem Verfahren von Whittaker-Henderson (s. [KBLOZ], S. 92ff oder [L1], S. 508/509) mit Gewicht $\sum_{s=1}^6 \sum_{t=1995}^{2002} L_{x,t}^s$ für die Sterbewahrscheinlichkeit des Alters x und Gewicht $g = 0,5$ für das Glättemaß aus zweiten Differenzen. Die ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten ab dem sechsten Jahr werden mit q_x^6 bezeichnet (siehe oben).

Zu Vergleichszwecken wurden auch rohe und ausgeglichene ultimate Sterbewahrscheinlichkeiten ohne Einbeziehung des Beobachtungsmaterials der Selektionsphasen $s = 1, \dots, 5$ berechnet. Dabei ergeben sich ab Alter 70 nur noch geringe Unterschiede zu den hier hergeleiteten Sterbewahrscheinlichkeiten. Unterschiede in jüngeren Altern sind darauf zurückzuführen, dass der wenig umfangreiche ultimate-Bestand in diesen Altern durch Frührentner geprägt ist und nicht als repräsentativ für den Bestand aller Altersrentner angesehen werden kann.

3.2.4 Extrapolation

Für die Altersbereiche $x < 60$ und $x > 99$ werden die Sterbewahrscheinlichkeiten q_x^6 extrapoliert.

Bei der Extrapolation im Altersbereich $x < 60$ werden die Schätzer $\hat{q}_{x,1999}^{Bev}$ der Bevölkerungssterblichkeiten des Jahres 1999 aus Anhang 5 verwendet. Das Verhältnis zwischen der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeit ab dem sechsten Jahr q_{60}^6 und dem Schätzer $\hat{q}_{60,1999}^{Bev}$ der Bevölkerungssterblichkeit im Alter 60 Jahre wird auch für niedrigere Alter angesetzt. Für $x < 60$ wird q_x^6 also folgendermaßen berechnet:

$$q_x^6 = \hat{q}_{x,1999}^{Bev} \cdot \frac{q_{60}^6}{\hat{q}_{60,1999}^{Bev}} = \hat{q}_{x,1999}^{Bev} \cdot \begin{cases} 0,666311 & \text{für Männer} \\ 0,851765 & \text{für Frauen} \end{cases}$$

Für die Extrapolation im Altersbereich $x > 99$ werden in Anhang 9 verschiedene Modelle vorgestellt. Die Untersuchungen in Anhang 9 haben ergeben, dass das logistische Modell

$$q_x^6 = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\beta \cdot \exp(b \cdot x)}{1 + \alpha \cdot \exp(b \cdot x)} + c\right)\right)$$

am besten zur Extrapolation für hohe Alter geeignet erscheint. Die Bestimmung der Parameter α, β, b, c mit den Sterbewahrscheinlichkeiten q_x^6 der Alter von 85 bis 95 Jahren als Stützstellen der Extrapolation wird in Anhang 9 beschrieben. Für die Alter von 100 bis 120 Jahren werden die q_x^6 gemäß

$$q_x^6 = 1 - \exp\left(-\left(\frac{-0,7979071812 \cdot \exp(-0,006 \cdot x)}{1 - 2,4 \cdot \exp(-0,006 \cdot x)} - 0,9795414181\right)\right)$$

bei Männern und

$$q_y^6 = 1 - \exp\left(-\left(\frac{-0,7415144956 \cdot \exp(-0,007 \cdot y)}{1 - 2,7 \cdot \exp(-0,007 \cdot y)} - 0,7587905969\right)\right)$$

bei Frauen bestimmt.

3.3 Aggregattafel 2. Ordnung

Zur Konstruktion der Aggregattafel werden Beobachtungsdaten zu laufenden und zu aufgeschobenen Renten herangezogen.

Münchener Rück und Gen Re liegen über das Beobachtungsmaterial zu laufenden Renten hinaus Angaben zur Sterblichkeit bei aufgeschobenen Renten vor, die auf ca. 12,2 Millionen Bestandsjahren von über 20 Gesellschaften aus den Jahren 1995 bis 2002 beruhen. Über 96% des Beobachtungsmaterials zu aufgeschobenen Renten entfallen auf die Alter von 20 bis 64.

In den „typischen“ Altern der Aufschiebzeit bis knapp über 60 Jahre enthält das gesamte Beobachtungsmaterial von Münchener Rück und Gen Re wesentlich mehr Datensätze zu aufgeschobenen Renten als zu laufenden Renten. Die Verweildauer aufgeschobener Renten im Alter 55 während des Beobachtungszeitraums beträgt z.B. mehr als das Zwanzigfache der Verweildauer laufender Renten im Alter 55 während des Beobachtungszeitraums. Dieses Verhältnis fällt mit zunehmendem Alter stark ab. Im Alter 64 liegt etwa gleich viel Datenmaterial zu aufgeschobenen Renten und zu laufenden Renten vor. Wie bereits aus den Grafiken 2 und 3 ersichtlich ist, überwiegt dann für Alter ab 65 klar das Datenmaterial zu laufenden Renten. Ungefähr 75% des Datenmaterials zu laufenden Renten bezieht sich auf Alter ab 65. Es ist daher insgesamt sinnvoll, bei der Konstruktion der Aggregattafel ab Alter 65 das Datenmaterial zu laufenden Renten zu verwenden und für jüngere Alter die Daten zu aufgeschobenen Renten.

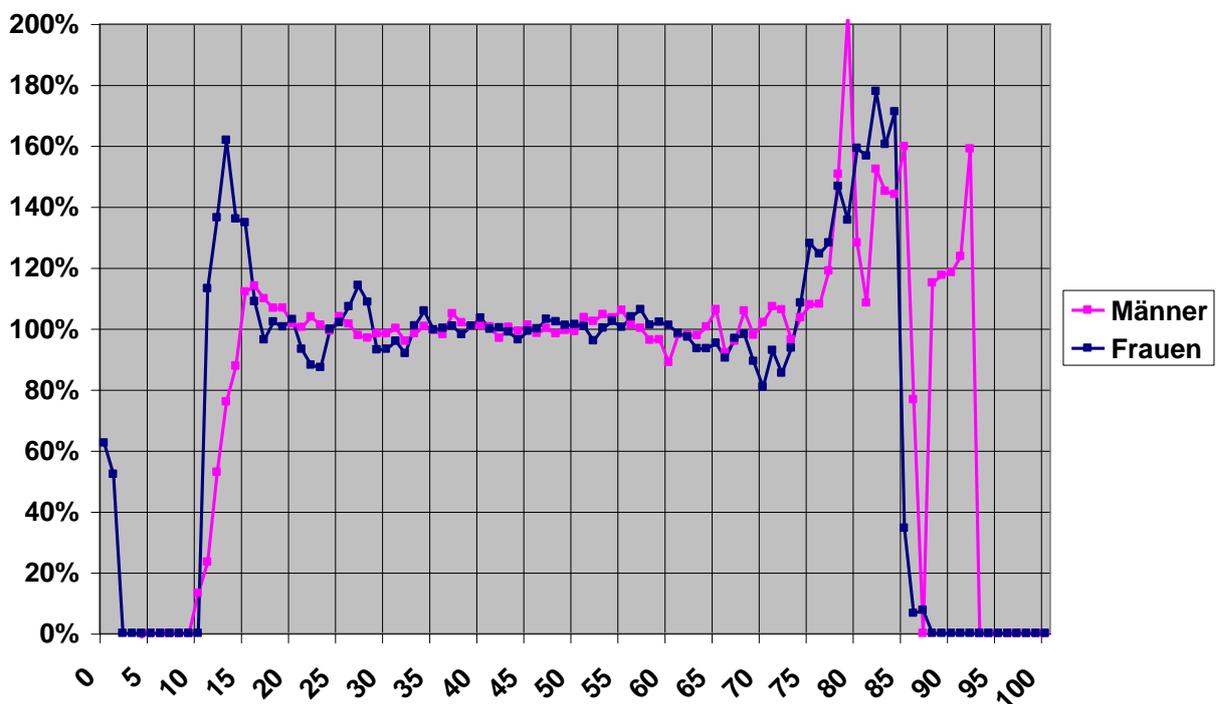
3.3.1 Aufschiebzeit

Bei verschiedenen Auswertungen zeigte sich, dass das Sterblichkeitsniveau in der Aufschiebzeit in hohem Maße davon abhängt, ob beim Abschluss der Policen eine Gesundheitsprüfung durchgeführt wurde oder nicht. Es erwies sich, dass die Sterblichkeit bei Verträgen ohne Gesundheitsprüfung teilweise um mehr als 50% höher ist als bei Verträgen mit Gesundheitsprüfung.

Auch wenn bei ca. 60% des Beobachtungsmaterials keine Information über eine Gesundheitsprüfung vorliegt, ist davon auszugehen, dass im Beobachtungsmaterial eine repräsentative Mischung aus aufgeschobenen Verträgen enthalten ist, die mit oder ohne Gesundheitsprüfung zustande gekommen sind. Eine solche Mischung ist auch für die Zukunft zu erwarten. Bei der Herleitung der Aggregattafel

werden daher Datensätze zu aufgeschobenen Renten mit und ohne Gesundheitsprüfung gleichermaßen berücksichtigt. Hinweise zur Anwendbarkeit der so hergeleiteten Basistafel finden sich in Kapitel 7.

Aus dem Beobachtungsmaterial zu aufgeschobenen Renten werden zunächst rohe rentenhöhengewichtete Sterbewahrscheinlichkeiten berechnet. Diese rohen Sterbewahrscheinlichkeiten werden mit dem Verfahren von Whittaker-Henderson für die Alter 0 bis 100 geglättet (Glättungsgrad 2, Glättungsfaktor $g=0,5$, Gewichtung mit der rentenhöhengewichteten Verweildauer). Anschließend wird die tatsächlich beobachtete Anzahl von Toten in rollierenden Fünfjahresbändern verglichen mit der Anzahl von Toten, die bei Ansatz der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten zu erwarten wäre. Dieser Vergleich ist in der folgenden Grafik dargestellt.



Grafik 4: Tatsächlich beobachtete Tote bei aufgeschobenen Renten in rollierenden Fünfjahresbändern im Vergleich zu den nach den ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten zu erwartenden Toten

Der Vergleich zeigt, dass etwa im Altersbereich 20 bis 70 der Ausgleich der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten mit dem Verfahren von Whittaker-Henderson zu zufrieden stellenden Ergebnissen führt. Da ab Alter 65 ohnehin das Datenmaterial zu laufenden Renten für die Aggregattafel verwendet wird, ist das Alter 70 als obere Grenze für die Verwendung der ausgeglichenen Sterbewahrscheinlichkeiten unproblematisch.

Für Alter unterhalb von 20 liegt dagegen kein ausreichendes Beobachtungsmaterial aus Versichertenbeständen vor. In diesem Altersbereich wird daher mit Hilfe der Schätzer $\hat{q}_{x,1999}^{Bev}$ der Bevölkerungssterblichkeit aus Anhang 5 extrapoliert. Es werden 90% der Bevölkerungssterblichkeit angesetzt. Der Faktor 90% wurde in diesem Altersbereich auch bereits bei der Konstruktion der Sterbetafel DAV 1994 R verwendet.

3.3.2 Rentenbezugszeit

Ab Alter 65 werden für die Aggregattafel die rentenhöhen-gewichteten Sterbewahrscheinlichkeiten aus dem Beobachtungsmaterial zu laufenden Renten angesetzt. Im Unterschied zu Abschnitt 3.2 werden dabei die Datensätze zu laufenden Renten unabhängig von ihrer aktuellen Selektionsphase berücksichtigt. Die Selbstselektion der Versicherten zu Beginn der Rentenbezugszeit geht also implizit in die Konstruktion der Aggregattafel ein. Die Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten erfolgt wiederum mit dem Verfahren von Whittaker-Henderson (Glättungsgrad 2, Glättungsfaktor $g=0,5$, Gewichtung mit der rentenhöhen-gewichteten Verweildauer). Um einen glatten Übergang von den Sterbewahrscheinlichkeiten der Aufschubzeit bis zum Alter 64 Jahre auf die Sterbewahrscheinlichkeiten der Rentenbezugszeit ab dem Alter 65 Jahre zu ermöglichen, erfolgt die Glättung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten der Aufschubzeit im Altersbereich von 20 bis 70 Jahren und die der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten der Rentenbezugszeit im Altersbereich 60 bis 99 Jahre. Bei diesem Ansatz beträgt der relative Unterschied zwischen den geglätteten Sterbewahrscheinlichkeiten der Aufschubzeit und der Rentenbezugszeit im Alter 65 weniger als 1%.

3.3.3 Stetiger Übergang für niedrige Alter

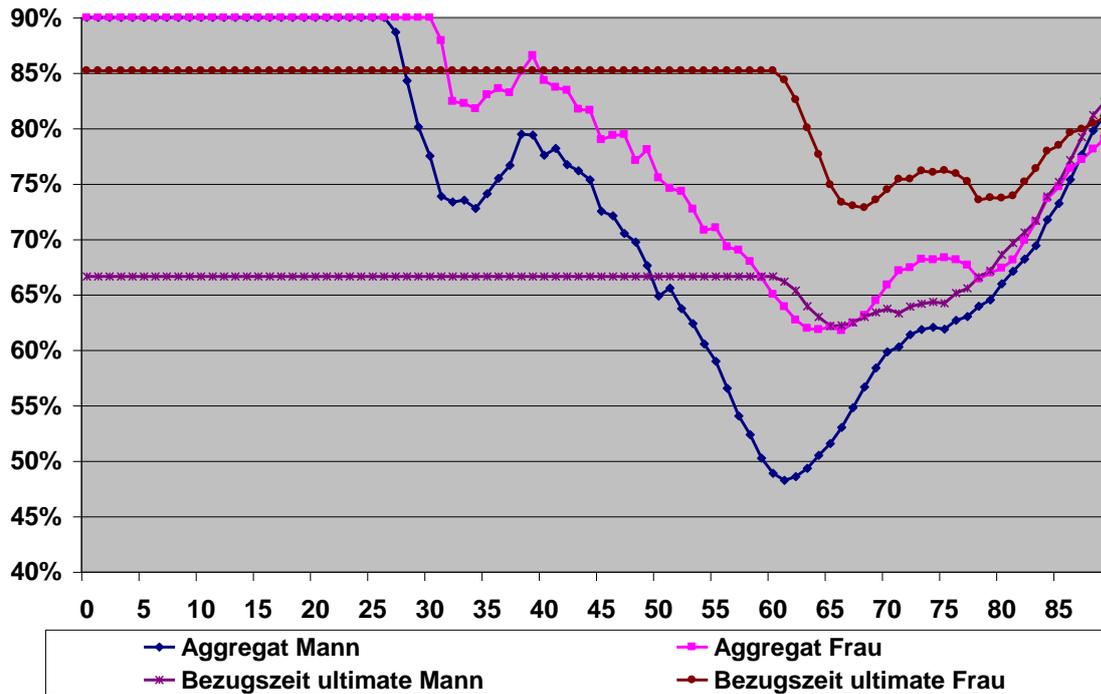
Abschließend werden die geglätteten Sterbewahrscheinlichkeiten auf 90% der Schätzer $\hat{q}_{x,1999}^{Bev}$ der Bevölkerungssterblichkeiten des Jahres 1999 aus Anhang 5 minimiert, um einen stetigen Übergang vom Alterbereich bis 19 Jahre in höhere Alter zu erreichen. Diese Minimierung betrifft die Alter 20 bis 26 bei Männern und 20 bis 30 bei Frauen. In diesem Bereich betragen die geglätteten Sterbewahrscheinlichkeiten vor Minimierung zumeist zwischen 90% und 100% der Bevölkerungssterblichkeit bei einem Maximum von bis zu 106% der Bevölkerungssterblichkeit.

Die so hergeleitete Aggregattafel kann gleichzeitig auch als separate Sterbetafel für die Aufschubzeit in Verbindung mit der Selektionstafel für die Rentenbezugszeit eingesetzt werden, da sie im zentralen Altersbereich der Aufschubzeit direkt aus den Beobachtungsdaten zu aufgeschobenen Renten hergeleitet wurde.

3.3.4 Extrapolation

Da die Selektionstafel 2. Ordnung und die Aggregattafel im Alter 99 bis auf geringfügige Abweichungen übereinstimmen, werden für die Extrapolation der Aggregattafel im Altersbereich $x > 99$ die in Abschnitt 3.2.4 ermittelten Sterbewahrscheinlichkeiten der Selektionstafel übernommen.

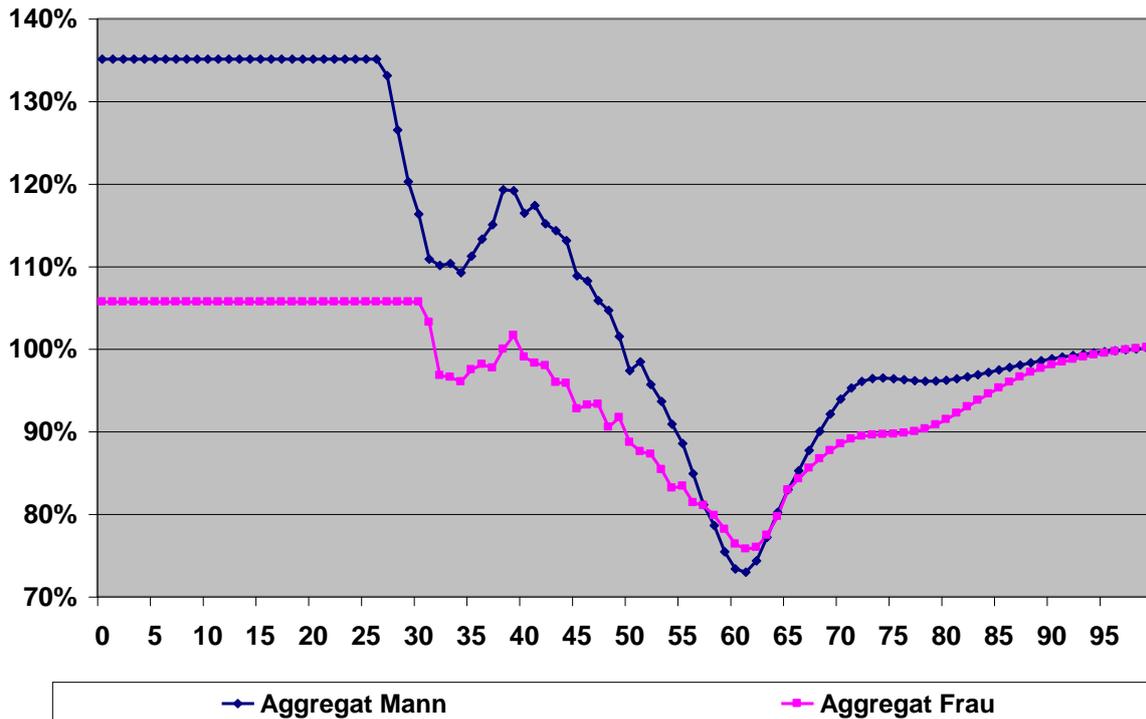
Die folgende Grafik illustriert das Verhältnis zwischen der Bevölkerungssterblichkeit, den Sterblichkeiten ab dem sechsten Jahr (ultimate) der Selektionstafel und den Sterblichkeiten der Aggregattafel.



Grafik 5: Aggregattafel und Sterblichkeiten ab dem sechsten Jahr der Selektionstafel im Vergleich zur Bevölkerungssterblichkeit gemäß Anhang 5

Es fällt auf, dass die Aggregattafel in jungen Jahren oberhalb der Selektionstafel (ultimate) verläuft. Dies ist darauf zurückzuführen, dass die Herleitung bzw. Extrapolation der Tafeln in diesem Altersbereich anhand unterschiedlicher Bestände erfolgte. Die Selektionstafel wird für junge Alter in der Praxis nur selten Anwendung finden.

Die folgende Grafik illustriert das Verhältnis zwischen den Sterblichkeiten der Aggregattafel und den Sterblichkeiten ab dem sechsten Jahr der Selektionstafel.



Grafik 6: Aggregattafel in Prozent der Sterblichkeiten ab dem sechsten Jahr der Selektionstafel

3.4 Basistafeln 1. Ordnung

In diesem Abschnitt wird näher auf die Begründung und Ermittlung der Sicherheitsabschläge eingegangen. Die Zuschläge auf die Trendfunktion werden in Abschnitt 4.2 erläutert.

3.4.1 Abschlag für statistisches Schwankungsrisiko

Bei der Bestimmung des statistischen Schwankungsabschlags wird ein Modellbestand zugrunde gelegt. Die Annahmen hinsichtlich des Modellbestands werden in Abschnitt 3.4.1.1 und in Anhang 10 erläutert. Es werden folgende Bezeichnungen verwendet:

- q_x die Sterbewahrscheinlichkeit 2. Ordnung gemäß Abschnitt 3.2 bzw. 3.3,
- s_x^α der absolute Schwankungsabschlag auf q_x zum Sicherheitsniveau $1-\alpha$,
- s^α der altersunabhängige prozentuale Schwankungsabschlag zum Sicherheitsniveau $1-\alpha$,
- L_x^M die Lebenden des Alters x des Modellbestandes,
- T_x die Zufallsvariable der im Alter x Gestorbenen im Modellbestand,
- V_x die Deckungsrückstellung zum Vertrag eines Versicherten des Alters x ,

$u_{1-\alpha}$ das Standardnormalverteilungs-Quantil zum Sicherheitsniveau $1-\alpha$.

Mit dem Abschlag s_x^α auf die ermittelten Sterblichkeiten der Basistafeln soll dem Risiko statistischer Schwankungen bei der Anwendung der Rententafeln Rechnung getragen werden. Analog zum Vorgehen in [L1], [SS] und allgemeiner in [P1], [PS] wird als Grundidee die Absicherung gegen den Eintritt eines gemäß vorgegebenem Konfidenzniveau maximal zulässigen Schadens verfolgt. Der Schaden kann dabei durch ein nicht durch Tod freiwerdendes Deckungsrückstellungsvolumen beschrieben werden⁴. Konkret wird der Abschlag daher so festgesetzt, dass die mit den Sterbewahrscheinlichkeiten $q_x - s_x^\alpha$ für den Modellbestand berechnete erwartete freiwerdende Deckungsrückstellung des gesamten Bestandes eine untere Konfidenzschranke zum Niveau $1-\alpha$ für die Zufallsvariable der durch Tod im Modellbestand freiwerdenden Deckungsrückstellung, $\sum_x T_x V_x$, ist. Es soll also gelten:

$$P\left(\sum_x T_x V_x \geq \sum_x (q_x - s_x^\alpha) L_x^M V_x\right) = 1 - \alpha.$$

Mit der Vorgabe $s_x^\alpha = s^\alpha \cdot q_x$ (s. [P2]) ergibt sich

$$s^\alpha = \frac{\sqrt{\sum_z q_z (1 - q_z) L_z^M V_z^2}}{\sum_z q_z L_z^M V_z} \cdot u_{1-\alpha}$$

Der Ansatz unterteilt - insoweit abweichend z. B. von der Herleitung der DAV 1994 T (s. [L1]) und der DAV 1994 R (s. [SS]) - den Bestand nicht in Altersklassen, die jeweils zu einem reduzierten Konfidenzniveau abgesichert werden. Das bedeutet, dass die Verteilung der Sicherheitsabschläge auf die einzelnen Alter nicht explizit auf die Altersstruktur des Modellbestandes zurückgreift.

3.4.1.1 Modellbestand

Für den Modellbestand, welcher der Berechnung der Schwankungsabschläge zugrunde liegt, wird ein Gesamtbestand aus Männern und Frauen von insgesamt 200.000 Versicherten (je 100.000 Männer und Frauen) angenommen. Dies entspricht nach GDV-Statistiken aus dem Jahr 2003 etwa der kurzfristig zu erwartenden mittleren Bestandsgröße an Rentenversicherungen deutscher Lebensversicherungsunternehmen. Bei der Herleitung der DAV 1994 R wurde demgegenüber eine Bestandsgröße von 75.000 Versicherten je Geschlecht angenommen. Es wird angenommen, dass sich 90% der Verträge in der Aufschubzeit befinden. Dies orientiert sich an den Verhältnissen im Beobachtungsmaterial von Münchener Rück und Gen Re. Für die Altersstruktur des Modellbestandes wird die (relative) mittlere Altersstruktur des Beobachtungsmaterials gemäß anzahlgewichteten Verweildauern

⁴ In [L1] und [SS] wird als Maß für den Schaden stattdessen die Anzahl der Toten verwendet.

(s. Grafik 2) übernommen. Dabei wird zwischen Aufschubzeit und Rentenbezugszeit differenziert. Bei der Bestimmung des Sicherheitsniveaus der Selektionstafel wird in der Altersstruktur für die Rentenbezugszeit jede Altersklasse gemäß Beobachtungsdaten weiter in die drei Selektionsphasen (1. Jahr, 2. bis 5. Jahr, ultimate) zerlegt, und dort werden die jeweils gemäß Selektionsfaktoren reduzierten Sterbewahrscheinlichkeiten angesetzt.

Bei der Berechnung des Sicherheitsabschlags $s^\alpha = \sqrt{\frac{\sum_z q_z(1-q_z)L_z^M V_z^2}{\sum_z q_z L_z^M V_z}} \cdot u_{1-\alpha}$ wird kein

Sterblichkeitstrend berücksichtigt. Es wird also auf Basis der in Abschnitt 3.2 und 3.3 bestimmten Periodensterbetafeln gerechnet. Der Rechnungszins beträgt 2,75%. Für die Berechnung der Deckungsrückstellung V_x sind noch Annahmen zu Vertragsmerkmalen, wie etwa Rentenbeginn, bereits abgelaufene Versicherungsdauer usw., zu treffen, die in Anhang 10 beschrieben werden. Die Rentenhöhe hängt im Modellbestand vom Geschlecht ab, nicht aber vom Alter.

Das realisierte Sicherheitsniveau ist von der konkreten Struktur des zugrunde liegenden Bestandes abhängig. Sensitivitätsrechnungen belegen jedoch, dass selbst einschneidende Änderungen der Altersstruktur, der Aufteilung nach Geschlecht und der Aufteilung nach Aufschubzeit oder Rentenbezugszeit das erzielte Sicherheitsniveau nicht wesentlich verändern.

Insbesondere ergeben sich im folgenden aufgrund der pauschalen Zerlegung des Modellbestandes nach dem Geschlecht (s. Anhang 10) für den gesamten Modellbestand geringfügig vom Zielniveau von 95% abweichende Sicherheitsniveaus. Solche strukturellen Abweichungen treten gleichermaßen zwischen Anwendungsbestand und Herleitungsbestand auf und werden durch den Abschlag für Irrtumsrissen (Abschnitt 3.4.2) erfasst.

3.4.1.2 *Aggregattafel 1. Ordnung*

Für den gesamten Modellbestand wird gefordert, dass die statistischen Schwankungsabschläge ein Sicherheitsniveau von 95% ergeben. Für die beiden nach Geschlecht getrennten Teilbestände des Modellbestands führt dies durch pauschale Zerlegung (s. Anhang 10) zu Sicherheitsniveaus von jeweils 87,76%. Daraus errechnen sich Schwankungsabschläge s^α von 6,26% für Männer und von 7,22% für Frauen.

Das tatsächlich im gesamten Modellbestand erreichte Sicherheitsniveau der Aggregattafel beträgt damit 94,6%. Bei anzahlgewichteter Betrachtung⁵ ergäbe sich ein Abschlag von 5,41% für Männer und von 6,27% für Frauen bei einem erreich-

⁵ d. h. Bestimmung der Schwankungsabschläge gemäß Bedingung

$$P\left(\sum_x T_x \geq \sum_x (q_x - s_x^\alpha) L_x^M\right) = 1 - \alpha \text{ mit anzahlgewichteten } T_x \text{ und } L_x^M.$$

ten Sicherheitsniveau von 94,9%. Die oben mit der freiwerdenden Deckungsrückstellung gewichtet ermittelten Abschläge ergeben bei anzahlgewichteter Bewertung ein Sicherheitsniveau von 97,1% im Gesamtbestand.

3.4.1.3 Selektionstafeln 1. Ordnung

Für die Selektionstafel werden die Schwankungsabschläge $s^\alpha = 6,26\%$ für Männer und $s^\alpha = 7,22\%$ für Frauen übernommen, welche für die Aggregattafel ermittelt wurden.

Damit ergibt sich für die Selektionstafeln ein Sicherheitsniveau auf dem Gesamtbestand von 94,6% und für die Teilbestände ein Sicherheitsniveau von 87,5% für Männer und von 87,9% für Frauen. Bei anzahlgewichteter Bewertung dieser Abschläge ergibt sich wiederum ein Sicherheitsniveau von 97,1% im Gesamtbestand.

3.4.2 Abschlag für Irrtumsrisiken

Dieser Abschlag berücksichtigt die Parameter-Schätzunsicherheiten und das Modellrisiko, insbesondere folgende zumeist in Unterschieden zwischen Modellbestand und Anwendungsbestand liegende Risiken:

- Unterschiede in der Bestandsstruktur (Altersstruktur, Geschäftsmix) zwischen Herleitung und Anwendung,
- Unterschiede in der Selektionsstruktur (Altersstruktur der Versicherungsbeginne in Aggregattafel, Höhe der Selektionseffekte) zwischen Herleitung und Anwendung sowie die Schätzunsicherheit in den Selektionsfaktoren,
- Unterschiede im Sterblichkeitsgesamtniveau bei unterschiedlichen LVU (u.a. abhängig von Vertriebs-/Kundenstruktur, Geschäftsmix) und somit potenziell auch zwischen Herleitung und Anwendung,
- mögliche strukturelle Abweichungen des zukünftigen Neugeschäfts gegenüber den für die Herleitung analysierten Teilbeständen (u.a. verändertes Kundenverhalten aufgrund veränderter politischer Rahmenbedingungen) und
- statistische Fluktuationen im Herleitungsbestand (Parameterschätzunsicherheit innerhalb des Modellbestands).

Zur Berücksichtigung dieser Irrtumsrisiken wird pauschal ein altersunabhängiger Abschlag von 10% auf die Basistafel angesetzt. Weitere Änderungsrisiken werden in den Zuschlägen auf die Trendfunktion (s. Abschnitt 4.2.2) berücksichtigt.

Auf einen gesonderten Sicherheitsabschlag auf die Selektionsfaktoren wird angesichts der Berücksichtigung von Selektionseinflüssen in den Irrtumsabschlägen auf die Sterbewahrscheinlichkeiten verzichtet.

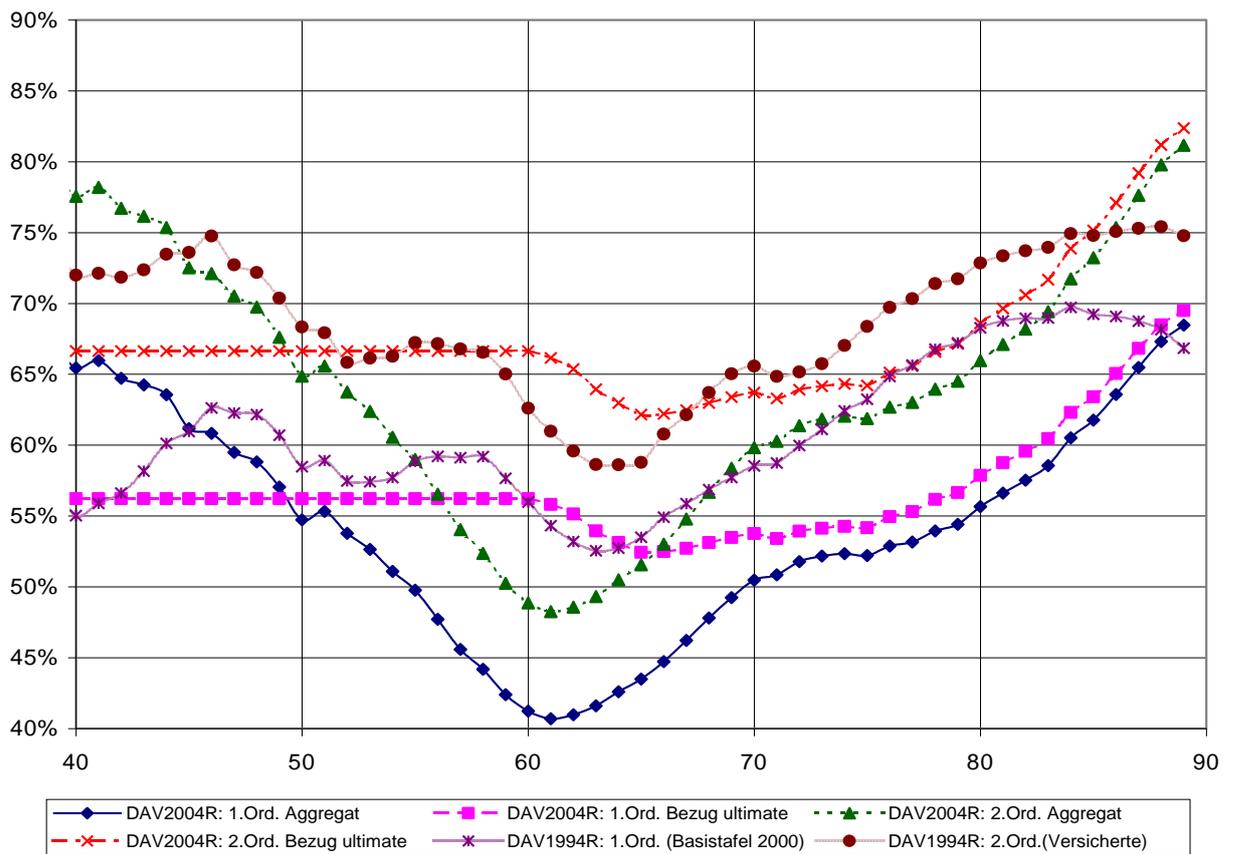
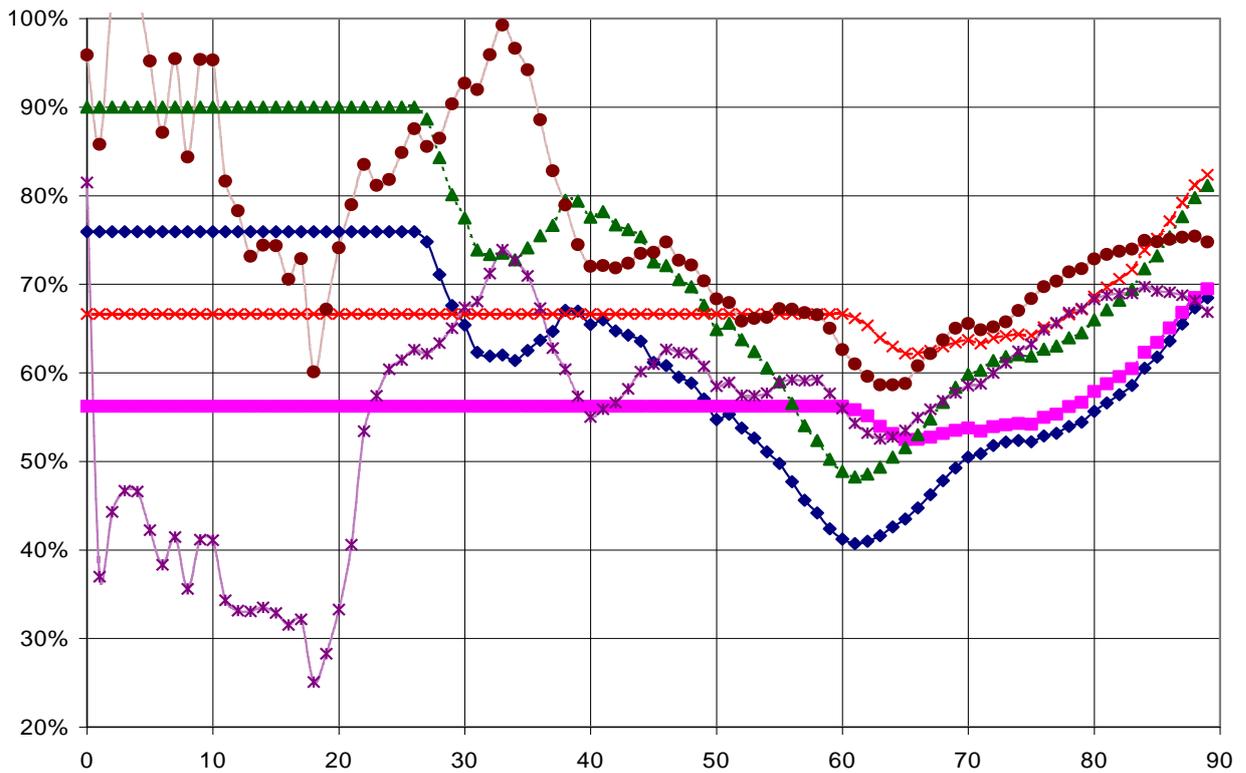
3.4.3 Gesamtabschlag auf die Basistafeln

Die Abschläge für Irrtumsrisiko und statistisches Schwankungsrisiko werden multiplikativ zusammengesetzt. Der Gesamtabschlag auf die Basistafeln beträgt 15,6% für Männer und 16,5% für Frauen.

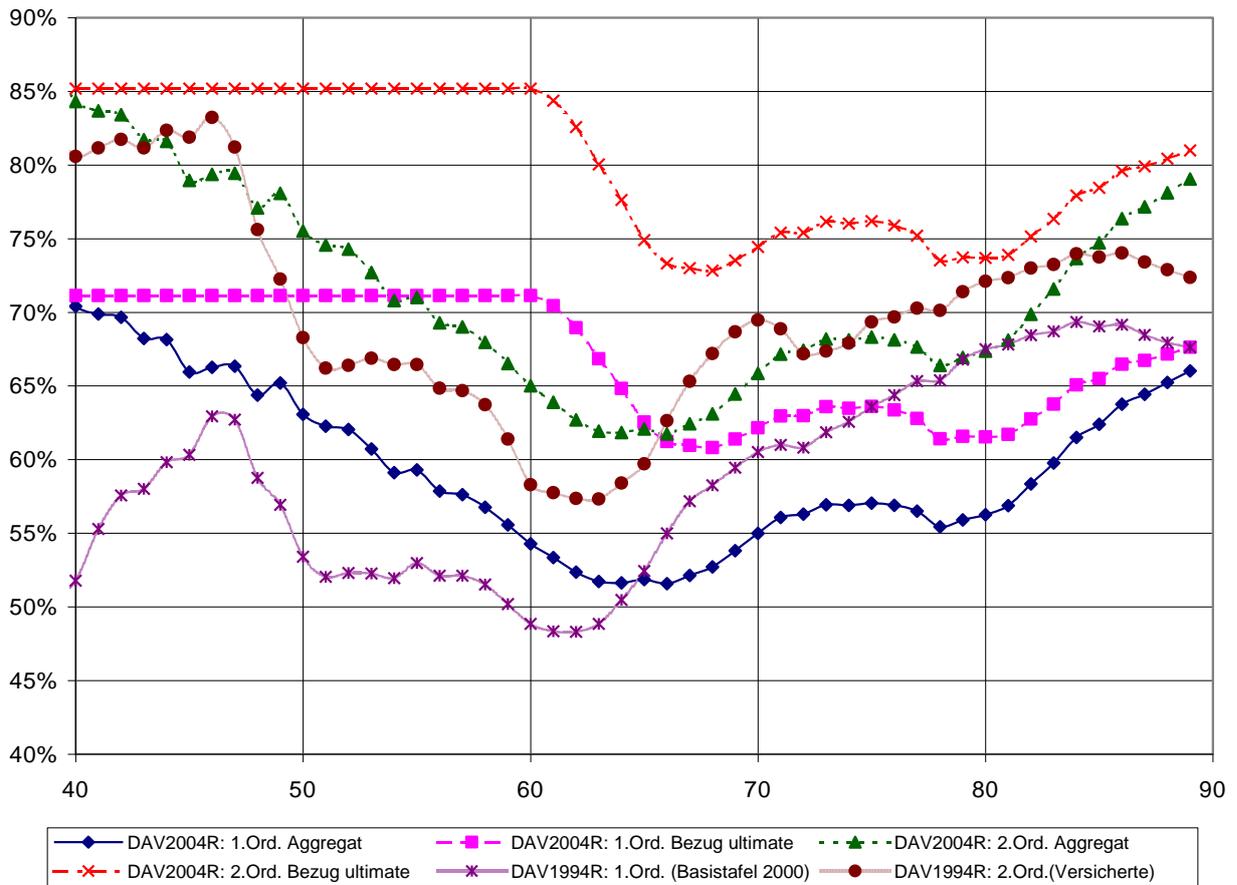
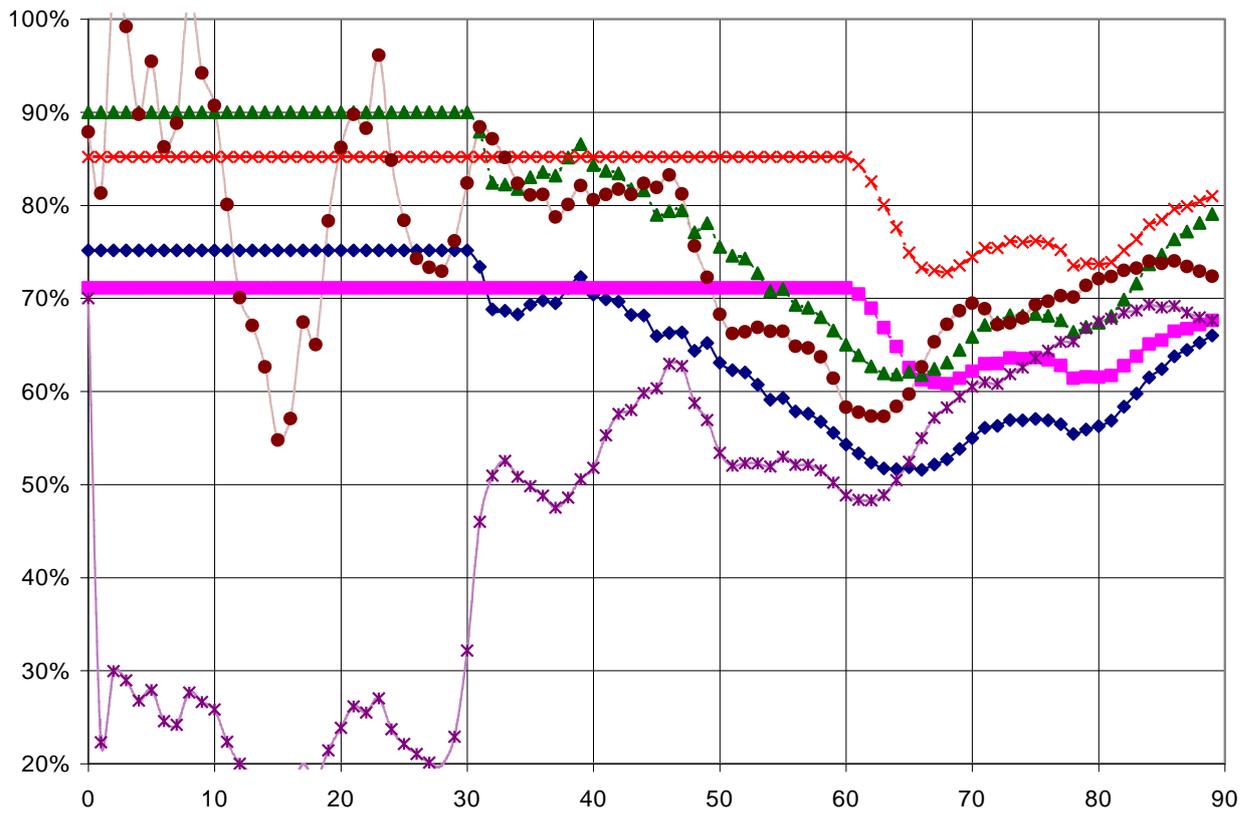
3.4.4 Darstellung der Ergebnisse

In der folgenden Grafik sind die Sterbewahrscheinlichkeiten der Basistafeln für die Altersbereiche von 0 bis 90 Jahren sowie von 40 bis 90 Jahren in % der Schätzer $\hat{q}_{x,1999}^{Bev}$ der Bevölkerungssterblichkeit aus Anhang 5 dargestellt.

Im Unterschied zur DAV 1994 R sind die Schwankungsabschläge der DAV 2004 R gleichmäßig über alle Alter verteilt. Dadurch entfallen extreme Abschläge in den im Modellbestand schwach besetzten Randaltern und die Robustheit der Sicherheitsabschläge gegen Unterschiede zwischen Anwendung und Herleitung in der jeweiligen Altersstruktur erhöht sich. Diese Änderung trägt dazu bei, dass die Sterblichkeiten 1. Ordnung der DAV 2004 R für einige Alter über denen der DAV 1994 R liegen.



Grafik 7: Altersabhängigkeit der Basistafeln Männer in % der Bevölkerungstafel 1999 im Altersbereich 0-90 (oben) und 40-90 (unten)



Grafik 8: Altersabhängigkeit der Basistafeln Frauen in % der Bevölkerungstafel 1999 im Altersbereich 0-90 (oben) und 40-90 (unten)

4 Projektion des Sterblichkeitstrends

4.1 Sterblichkeitstrend 2. Ordnung

4.1.1 Auswahl des Modells für Sterblichkeitsprojektionen

Bei der Konstruktion der Sterbetafel DAV 1994 R wurde für Sterblichkeitsprojektionen das Modell altersabhängiger Sterblichkeitsverbesserungen

$$\frac{q_{x,t+1}}{q_{x,t}} = \exp(-F(x))$$

verwendet. Dieses Modell wird im Folgenden als traditionelles Modell bezeichnet.

In [W1], Abschnitt 6.6 wird das Kohortenmodell geburtsjahrabhängiger Sterblichkeitsverbesserungen

$$\frac{q_{x,t+1}}{q_{x,t}} = \exp(-G(t+1-x))$$

definiert. [W1] enthält Untersuchungen von Sterblichkeitsdaten aus England und Wales, bei denen ein Kohorteneffekt festgestellt wurde. Zur Auswahl eines geeigneten Modells für die Projektion der Sterblichkeiten der deutschen Bevölkerung wurden diese beiden Modelle sowie das durch Kombination dieser beiden Modelle gegebene Synthesemodell

$$\frac{q_{x,t+1}}{q_{x,t}} = \exp(-F(x) - G(t+1-x))$$

untersucht. Die in Anhang 11 enthaltenen Untersuchungen haben ergeben, dass das Synthesemodell am besten zur Modellierung der Daten der Vergangenheit geeignet ist. Gemäß Anhang 12 ist das Synthesemodell jedoch für prognostische Zwecke ungeeignet. In Anhang 12 wird ferner begründet, dass das traditionelle Modell besser für die Projektion der Sterblichkeiten der DAV 2004 R geeignet erscheint als das Kohortenmodell. Die Plausibilität der Ergebnisse des traditionellen Modells wird zusätzlich durch Vergleich mit dem Lee-Carter-Sterblichkeitsmodell verifiziert (siehe Anhang 13).

4.1.2 Sterblichkeitstrend der Bevölkerung

Als Grundlage für die Konstruktion des Versichertentrends 2. Ordnung (siehe Abschnitt 4.1.4) dient der Sterblichkeitstrend der deutschen Bevölkerung.

Um die Veränderungen des Sterblichkeitstrends im Verlauf der zurückliegenden Jahrzehnte zu erfassen, werden folgende Bevölkerungstrends der Sterblichkeitsverbesserungen betrachtet:

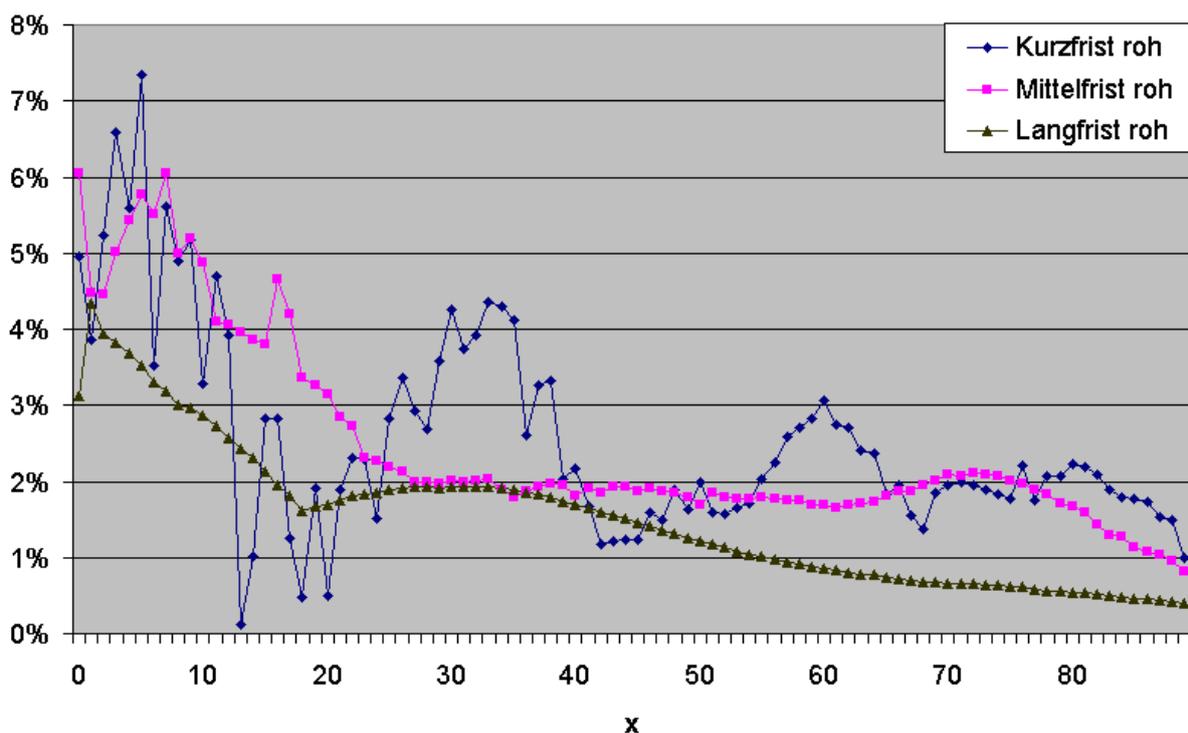
- Kurzfristtrend der 10 abgekürzten Sterbetafeln für Westdeutschland St 1989/91 bis St 1998/2000,

- Mittelfristtrend der 28 abgekürzten Sterbetafeln für Westdeutschland St 1971/73 bis St 1998/2000 (für 1986/88 wird dabei die Allgemeine Deutsche Sterbetafel 1986/88 verwendet),
- Langfristtrend der 11 Allgemeinen Deutschen Sterbetafeln von ADSt 1871/1880 bis ADSt 1986/88 und der abgekürzten Sterbetafel für Westdeutschland St 1998/2000.

Die durch die Grippewelle 1969/1970 (Anhang 14Teil B) verursachten Verwerfungen werden im Mittelfristtrend vermieden, indem abgekürzte Sterbetafeln ab St 1971/73 als Grundlage des Mittelfristtrends verwendet werden.

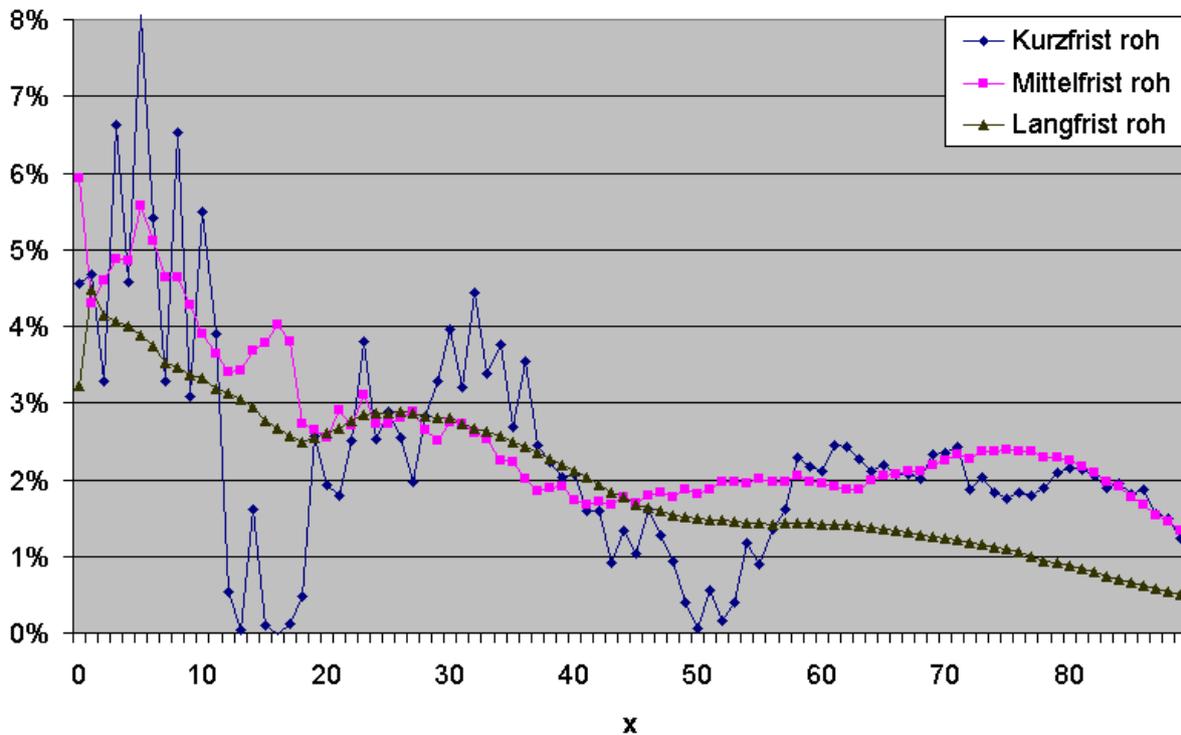
Auf Basis dieser Sterblichkeitsdaten werden für die drei unterschiedlichen Zeiträume mit der Methode der kleinsten Quadrate die altersabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen gemäß traditionellem Modell bestimmt. Dabei ergeben sich für längere Zeiträume glattere Verläufe der jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen als für kürzere Zeiträume:

**Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen Männer
Rohe Bevölkerungstrends**



Grafik 9: Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen bei Männern

Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen Frauen Rohe Bevölkerungstrends



Grafik 10: Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen bei Frauen

Um diese Trends zu vergleichen wird das arithmetische Mittel der jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen für die Alter 60 bis 89 betrachtet:

	Männer	Frauen
Kurzfristtrend	1,97%	2,00%
Mittelfristtrend	1,67%	2,05%
Langfristtrend	0,62%	1,04%

Der Langfristtrend verläuft deutlich niedriger als der Mittel- und der Kurzfristtrend. Für Männer liegt der Kurzfristtrend deutlich über dem Mittelfristtrend.

4.1.3 Lineare Trenddämpfung

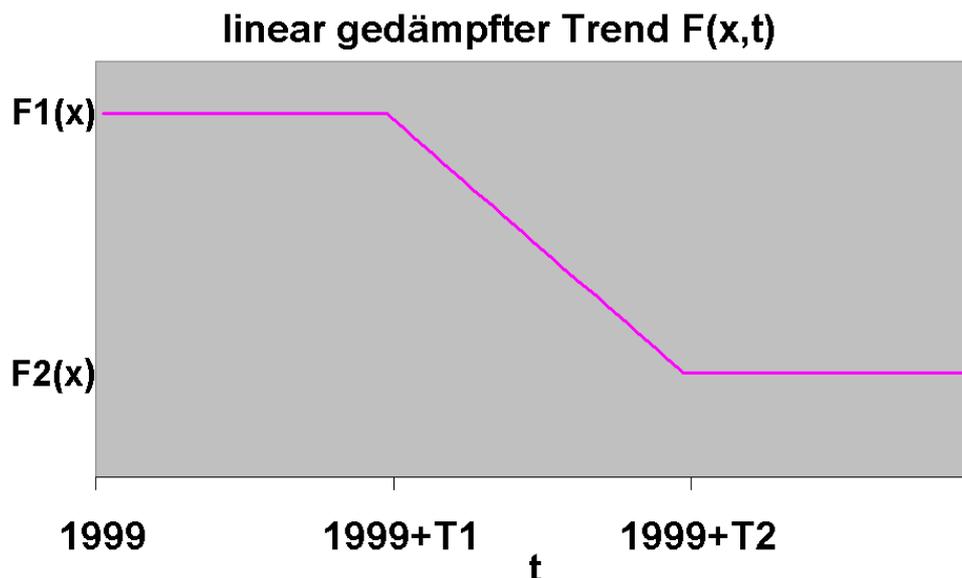
Bei der Festlegung des Versichertentrends der DAV 2004 R wird durch eine sogenannte Trenddämpfung berücksichtigt, dass der Langfristtrend der Bevölkerung deutlich niedriger verläuft als der Mittel- und der Kurzfristtrend. Dass der hohe Kurzfristtrend nicht langfristig andauern muss, zeigt z. B. die Sterblichkeitsentwicklung in Japan (siehe Anhang 15Teil B), wo bei einem niedrigeren Sterblichkeitsniveau als in Deutschland sowohl für Männer als auch für Frauen seit 1970 fallende Sterblichkeitsverbesserungen zu beobachten sind. Dies spricht dagegen,

den hohen Kurzfristtrend auch für die längerfristige Zukunft anzusetzen. Stattdessen wird, ähnlich wie z. B. in Japan zu beobachten ist, wieder mit einer Abschwächung des Trends gerechnet. Weitere Begründungen für eine Trendabschwächung werden in Anhang 15 genannt. Modelliert wird diese zukünftig erwartete Trendabschwächung mit dem Verfahren der linearen Trenddämpfung. Dieses Modell einer linearen Trenddämpfung wurde u.a. auch bei der österreichischen Rententafel AVÖ 1996R (s. [JLPS]) verwendet. In den UK-Sterbetafeln der „92“ series (s. Anhang 15Teil A) wird ebenfalls eine zukünftige erwartete Trendabschwächung modelliert. Auch die Trendfunktion der DAV 1994 R schwächt sich im Jahr 2000 sprunghaft ab (s. [SS]).

Die alters- und kalenderjahrabhängige Trendfunktion wird mit $F(x,t)$ bezeichnet. Der Zusammenhang zwischen Trendfunktion und Sterbewahrscheinlichkeiten ist gegeben durch

$$F(x,t) = -\ln\left(\frac{q_{x,t+1}}{q_{x,t}}\right).$$

Zunächst wird für einen bestimmten Zeitraum ein Starttrend $F_1(x)$ angesetzt. In einem anschließenden Zeitraum wird der Trend linear vom Starttrend $F_1(x)$ auf einen Zieltrend $F_2(x)$ reduziert. Schließlich wird für die weitere Zukunft der Zieltrend $F_2(x)$ angesetzt. Dieses Modell wird in der folgenden Grafik veranschaulicht, wobei der Zeitpunkt $t = 1999$ dem Beginn der Sterblichkeitsprojektionen entspricht:



Grafik 11: Linear gedämpfter Trend

Formelmäßig ist die zeitabhängige Trendfunktion $F(x,t)$ gegeben durch

$$F(x,t) = \begin{cases} F_1(x) & 1999 \leq t \leq 1999 + T_1 \\ F_1(x) \cdot \left(1 - \frac{t-1999-T_1}{T_2-T_1}\right) + F_2(x) \cdot \frac{t-1999-T_1}{T_2-T_1} & 1999 + T_1 \leq t \leq 1999 + T_2 \\ F_2(x) & t \geq 1999 + T_2 \end{cases}$$

Für diese lineare Trenddämpfung sind folgende Parameter zu bestimmen:

- Starttrend $F_1(x)$,
- Zieltrend $F_2(x)$,
- Zeitraum T_1 bis zum Beginn der Trenddämpfung und
- Zeitraum T_2 bis zum Ende der Trenddämpfung.

Der Starttrend setzt auf dem Niveau des Kurzfristrends auf. Um für die Männer das Niveau des Kurzfristrends zu erreichen, wird zu den jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen des geglätteten Mittelfristrends die mittlere Differenz von Kurz- und Mittelfristtrend im Altersbereich von 60 bis 89 Jahren in Höhe von 0,3% addiert. Für Frauen wird der geglättete Mittelfristtrend als Starttrend übernommen, da er etwa auf dem Niveau des Kurzfristrends liegt. Der geglättete Mittelfristtrend wird dabei folgendermaßen bestimmt: Die Trendfunktion $F(x)$ des rohen Mittelfristrends für Alter x von 0 bis 89 Jahren wird mit Gewicht 1 für den Wert $F(x)$ und Gewicht $g = 0,25$ für das Glättemaß aus zweiten Differenzen geglättet.

Dann wird der Versicherungszuschlag in Höhe von 0,2% jährlicher Sterblichkeitsverbesserung addiert (siehe Abschnitt 4.1.4.1). Schließlich wird der Trend für hohe Alter auf ein Niveau von 1% überführt (siehe Abschnitt 4.1.4.2), und für niedrige Alter auf 3% begrenzt (siehe Abschnitt 4.1.4.3). Dadurch ist der Starttrend $F_1(x)$ definiert.

Der Zieltrend $F_2(x)$ wird folgendermaßen definiert: Die jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen des Zieltrends $F_2(x)$ entsprechen 75% der jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen des geglätteten (und für hohe und niedrige Alter extrapolierten) Mittelfristrends, welcher nur um den Versicherungszuschlag erhöht wurde, nicht aber um die mittlere Differenz von Kurz- und Mittelfristtrend bei den Männern. Der so definierte Zieltrend 2. Ordnung $F_2(x)$ ist einerseits niedriger als der geglättete Mittelfristtrend und andererseits für Alter $x > 61$ (Männer) bzw. $x > 72$ (Frauen) höher als der Trend 1. Ordnung der DAV 1994 R.

Die Zeitparameter T_1 und T_2 sind in Abhängigkeit von der jeweiligen Anwendung und bei Entwicklung unternehmenseigener Rechnungsgrundlagen in Abhängigkeit von den Besonderheiten des jeweiligen Kollektivs angemessen zu wählen. Für die vorliegende Ausarbeitung sind beispielhaft für die Parameterkombinationen $(T_1 = 5, T_2 = 10)$, $(T_1 = 10, T_2 = 15)$ und $(T_1 = 15, T_2 = 25)$ Vergleiche der Lebenser-

wartungen mit den Projektionsrechnungen des Instituts für Bevölkerungsforschung und Sozialpolitik der Universität Bielefeld (IBS) (siehe Anhang 17) durchgeführt worden. Ausgehend von den IBS-Sterbewahrscheinlichkeiten als Basistafel für das Jahr 1999 ergeben sich mit den aus dem Start- und Zielrend 2. Ordnung resultierenden Generationentafeln die folgenden ferneren Lebenserwartungen 65-jähriger versicherter Personen:

	Männer			Frauen		
	2005	2025	2050	2005	2025	2050
IBS-Schätzung	17,6	19,5	20,9	22,4	24,2	25,2
IBS-Periodentafel mit DAV2004R-Trend 2. Ordnung, T1=5, T2=10	17,6	19,8	22,4	22,1	24,4	26,9
T1=10, T2=15	17,9	20,1	22,7	22,3	24,5	27,1
T1=15, T2=25	18,1	20,5	23,1	22,4	24,8	27,3

4.1.4 Versichertentrend 2. Ordnung

Der im vorangehenden Abschnitt erwähnte Versichertenzuschlag, sowie die Extrapolation für hohe und niedrige Alter werden im Folgenden genauer beschrieben.

4.1.4.1 Versichertenzuschlag

Verschiedene internationale Untersuchungen (siehe z.B. [V]) sowie die Untersuchungsergebnisse aus den Versichertendaten von Münchener Rück und Gen Re und den GRV-Daten haben jeweils Folgendes ergeben:

- Sterblichkeitsverbesserungen für Versicherte sind höher als Sterblichkeitsverbesserungen für die Bevölkerung.
- Sterblichkeitsverbesserungen in den oberen sozioökonomischen Gruppen sind höher als Sterblichkeitsverbesserungen in den unteren sozioökonomischen Gruppen.

Da die privat Rentenversicherten – insbesondere bei Gewichtung nach Rentenhöhe – überwiegend den oberen sozioökonomischen Gruppen zuzuordnen sind, sprechen auch die Erkenntnisse des zweiten Punkts dafür, dass für privat Rentenversicherte höhere Sterblichkeitsverbesserungen zu erwarten sind als für die Bevölkerung.

In den Rententafeln verschiedener Länder (z.B. UK und Schweiz) ist dieser Unterschied zwischen Bevölkerungstrend und Versichertentrend explizit berücksichtigt, indem der Trend aus Versichertendaten und nicht aus Bevölkerungsdaten hergeleitet wurde. Dies bewirkt eine Erhöhung der jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen um teilweise mehr als einen Prozentpunkt: In der Schweiz wurden z.B. für 70-jährige Männer jährliche Sterblichkeitsverbesserungen von 1,33% für die Bevölkerung und von 2,41% für Rentenversicherte beobachtet (s. [SVV]).

In Deutschland ist eine Herleitung des Trends aus Versichertendaten nicht möglich, da für die Untersuchungen zur Rentnersterblichkeit in der Privatversicherung Daten nur für einen 8 Jahre umfassenden Beobachtungszeitraum von 1995 bis 2002 zur Verfügung stehen. Im Beobachtungszeitraum von 1995 bis 2002 wurden im Versichertenbestand wesentlich stärkere jährliche Sterblichkeitsverbesserung als in der Bevölkerung beobachtet. Diese Ergebnisse beruhen aber möglicherweise nur auf temporären Effekten und sind insofern nicht signifikant, oder sie sind wegen der Zunahme des Rentengeschäfts in diesem Zeitraum Folgen von Bestandsstrukturänderungen. Außerdem erscheint die Kürze des Beobachtungszeitraums für langfristige Trendprognosen nicht geeignet. Daher bleiben diese Ergebnisse aus den genannten Gründen bei der Konstruktion des Versichertentrends 2. Ordnung außer Betracht.

Deshalb wird die Berücksichtigung der Versichertensterblichkeit im Trend aus Daten der GRV abgeleitet: Dazu wird der Unterschied der durchschnittlichen jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen im Altersbereich von 66 bis 98 Jahren zwischen dem Gesamtbestand der GRV und dem Teilbestand Angestelltenversicherung (AV) der GRV betrachtet.

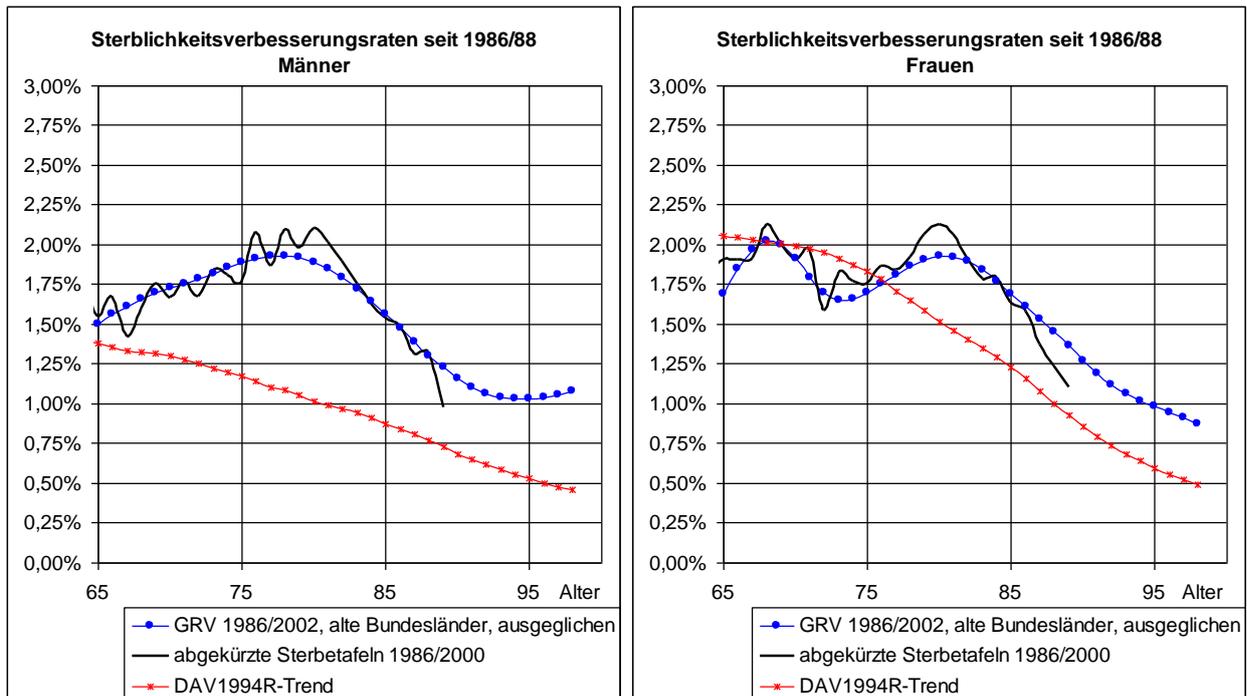
GRV	Männer			Frauen		
	GRV (1)	AV (2)	(2) - (1)	GRV (1)	AV (2)	(2) - (1)
Alter 65–98						
1986–2002	1,53%	1,76%	0,23%	1,58%	1,72%	0,14%

Für Rentner der AV sind um 0,14% bis 0,23% höhere Sterblichkeitsverbesserungen zu beobachten als für alle Rentner der GRV. Deshalb wird bei Männern und Frauen ein Versichertenzuschlag von 0,2% auf den in Abschnitt 4.1.3 hergeleiteten Sterblichkeitstrend der Bevölkerung erhoben, um die im Vergleich zur Bevölkerung stärkeren Sterblichkeitsverbesserungen der Versicherten zu berücksichtigen.

Der Versichertenzuschlag von 0,2% wird dabei auf die jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen $1 - \exp(-F(x, t))$ addiert.

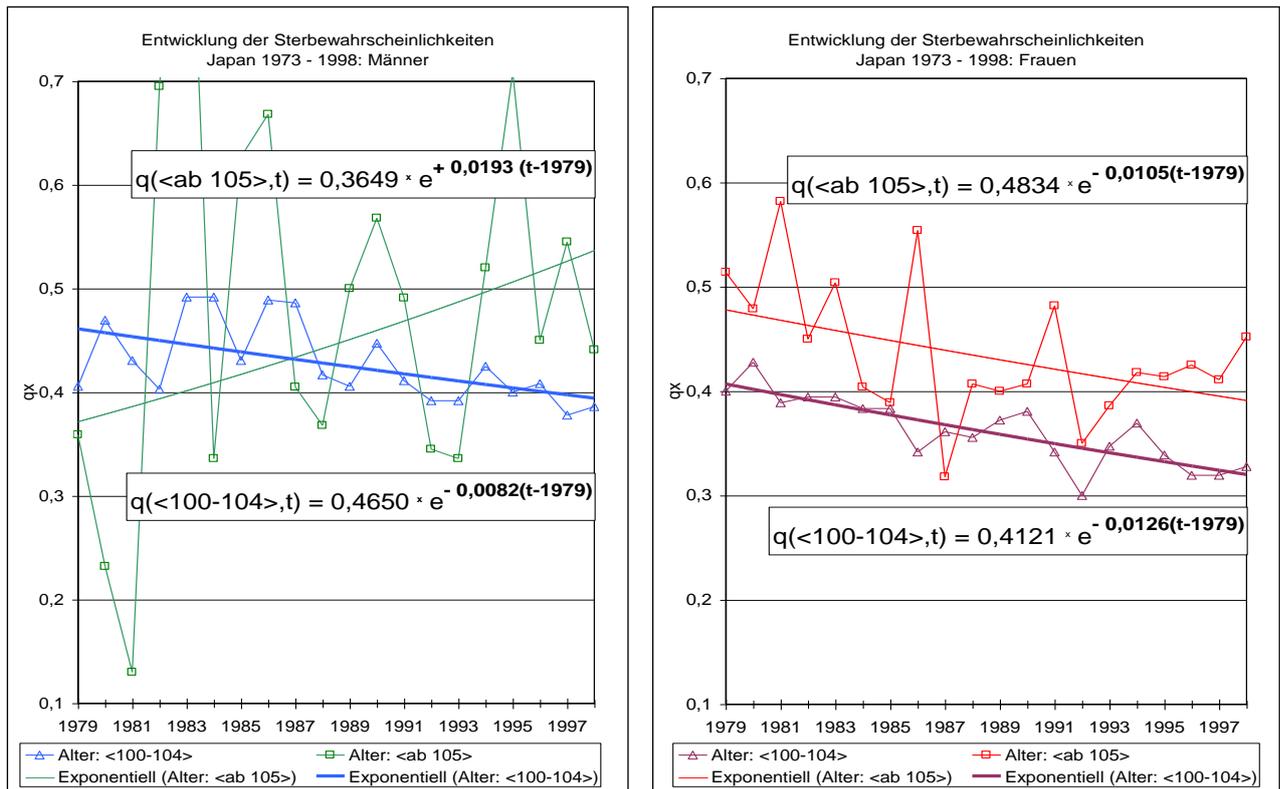
4.1.4.2 Extrapolation der Trendfaktoren in die hohen Alter 90 bis 120 Jahre

Aus den abgekürzten Bevölkerungssterbetafeln lässt sich ein Sterblichkeitstrend nur bis zum Alter 89 Jahre ermitteln. Für die Alter von 90 bis 120 werden die Werte deshalb durch Plausibilitätsüberlegungen bestimmt, indem Trends für Bestände untersucht werden, welche Auswertungen jenseits des Alters 90 Jahre zulassen. So lassen sich Sterblichkeitsdaten der GRV bis zum Alter 98 Jahre auswerten, die zur besseren Bewertung und Veranschaulichung mit dem Verfahren von Whittaker-Henderson ausgeglichen werden (siehe folgende Grafik). Für das Alter 95 werden hier für Männer und Frauen Sterblichkeitsverbesserungen von ca. 1% beobachtet.



Grafik 12: Sterblichkeitsverbesserung seit 1986/88, alte Bundesländer

Aus japanischen Sterblichkeitsuntersuchungen (s. [RSJ]) lassen sich Entwicklungen der Trendfaktoren für die Sterblichkeitsverbesserungen ab Alter 100 begründen. Die Sterblichkeitsverbesserungen betragen im Altersbereich von 100 bis 104 für Männer 0,82% und für Frauen 1,25%. Ab dem Alter 105 liegt die Trendverbesserung für die Frauen bei 1,04%, während bei den Männern wieder eine tendenzielle Zunahme der Sterbewahrscheinlichkeiten zu beobachten ist (siehe folgende Grafik).



Grafik 13: Entwicklung der Sterbewahrscheinlichkeiten in Japan

Diese Beobachtungen lassen für den Altersbereich ab 100 Jahre Sterblichkeitsverbesserungen von 1% plausibel erscheinen.

Der Versichertentrend für die Alter von 0 bis 89 Jahre wird für Alter von 90 bis 120 Jahre so extrapoliert, dass konstante jährliche Sterblichkeitsverbesserungen von 1% in einem Altersbereich $x_0 \leq x \leq 120$ nach einem Übergang mit einem Polynom 2. Grades in einem Altersbereich $90 \leq x \leq x_0$ erreicht werden. Dazu werden das Polynom $p(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c$ und das Übergangsalter x_0 bestimmt, für welche folgende Bedingungen erfüllt sind:

- $p(x_0) = 1\%$,
- $p'(x_0) = 0$,
- $p(89)$ und $p'(89)$ sind durch lineare Regression der jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen des Altersbereichs $80 \leq x \leq 89$ festgelegt.

Mit diesem Verfahren ergeben sich ab dem Alter 97 Jahre für Männer und ab dem Alter 99 Jahre für Frauen konstante jährliche Sterblichkeitsverbesserungen von 1%.

4.1.4.3 Beschränkung des Trends für niedrige Alter

Die jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen des in Abschnitt 4.1.4.1 konstruierten Trends betragen für Männer und Frauen bis 22 Jahre mehr als 3%.

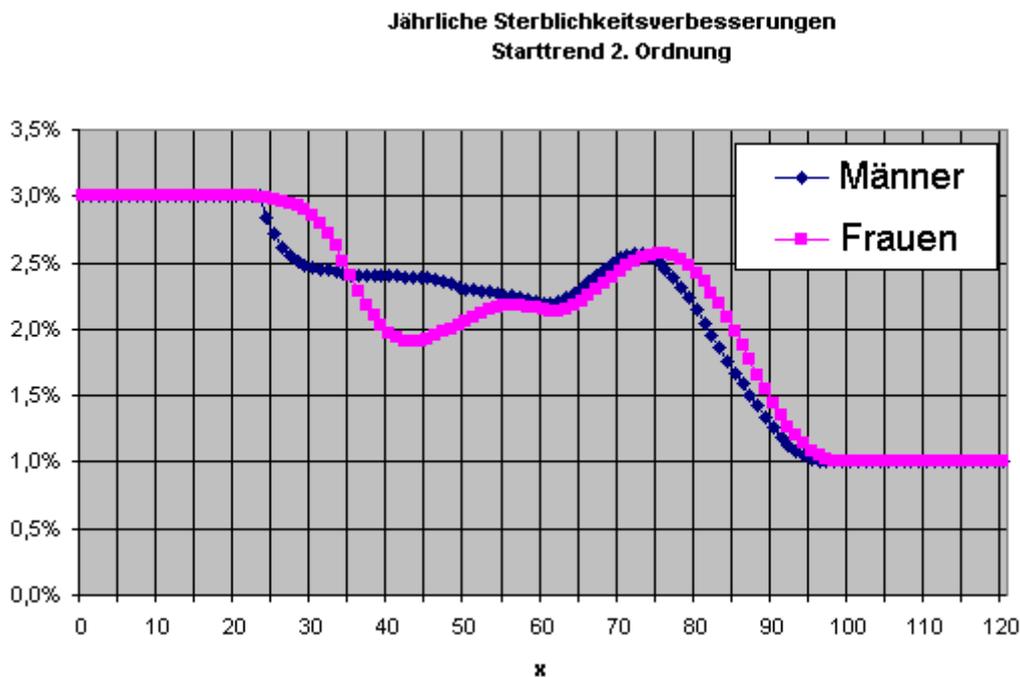
Für den Kurzfristtrend der Bevölkerung ergeben sich jedoch für junge Alter geringere jährliche Sterblichkeitsverbesserungen: Für den Altersbereich von 0 bis 22 Jahren wird die gewichtete durchschnittliche jährliche Sterblichkeitsverbesserung des Kurzfristtrends berechnet. Die Gewichtung wird dabei gemäß der Altersverteilung des Modellbestands (s. Abschnitt 3.4.1.1) vorgenommen. Diese durchschnittliche jährliche Sterblichkeitsverbesserung beträgt 1,74% für Männer und 1,85% für Frauen.

Deshalb werden die jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen auf 3% beschränkt. Diese Beschränkung des Trends betrifft für Männer und Frauen jeweils die Alter von 0 bis 22 Jahren.

Die Beschränkung des Trends für junge Alter erleichtert einerseits die Implementierung einer Altersverschiebung (siehe Kapitel 5) und hat andererseits praktisch keine Auswirkungen auf die Höhe der resultierenden Prämien und Deckungsrückstellungen.

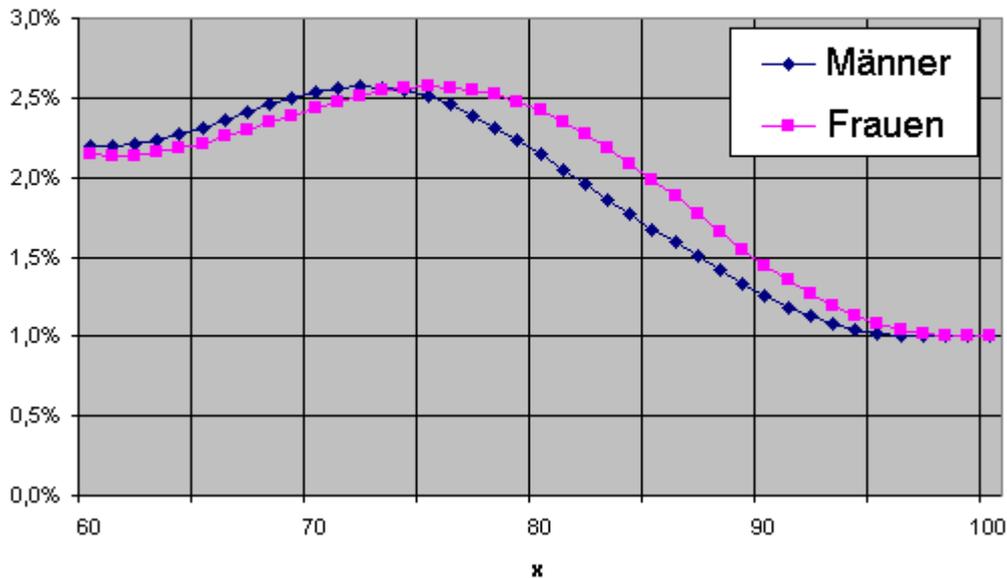
4.1.4.4 Start- und Zieltrend 2. Ordnung im Überblick

Die Werte der Trendfunktionen $F_1(x)$ und $F_2(x)$ sind in Anhang 1Teil B enthalten. In den folgenden Grafiken sind die jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen gemäß Starttrend 2. Ordnung des Versichertentrends für die Altersbereiche $0 \leq x \leq 120$ und $60 \leq x \leq 100$ dargestellt:



Grafik 14: Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen

**Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen
Starttrend 2. Ordnung**

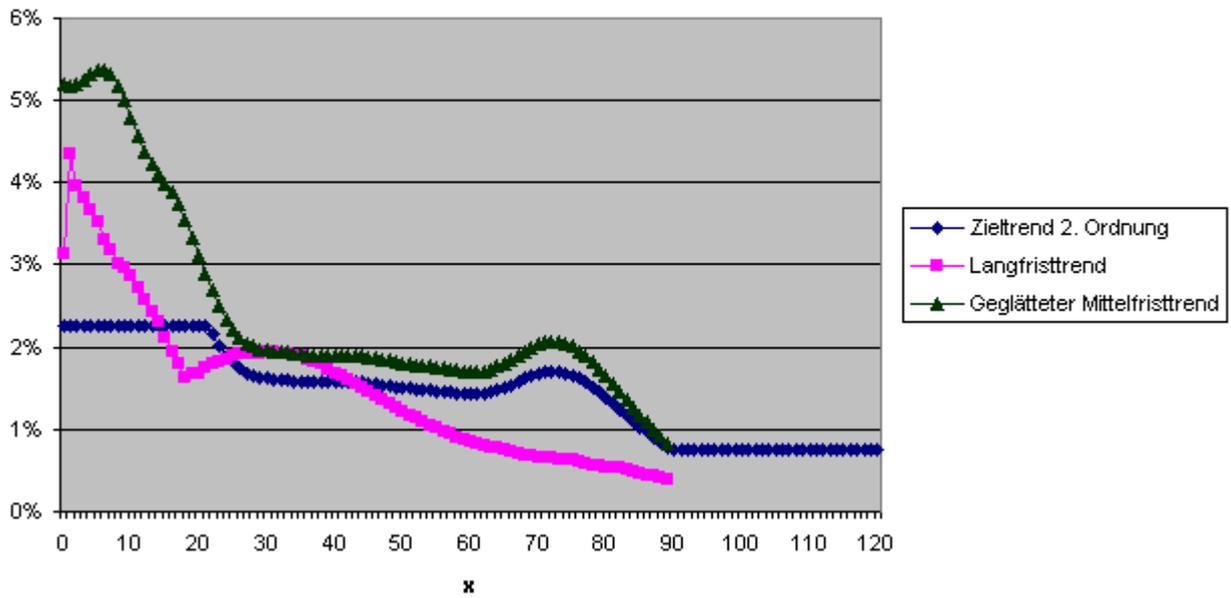


Grafik 15: Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen

In den beiden folgenden Grafiken ist für Männer und Frauen jeweils der Zieltrend 2. Ordnung, der Langfristtrend der Bevölkerung (1871-1999) und der geglättete Mittelfristtrend 2. Ordnung (1972-1999) dargestellt. Es ist folgendes zu erkennen:

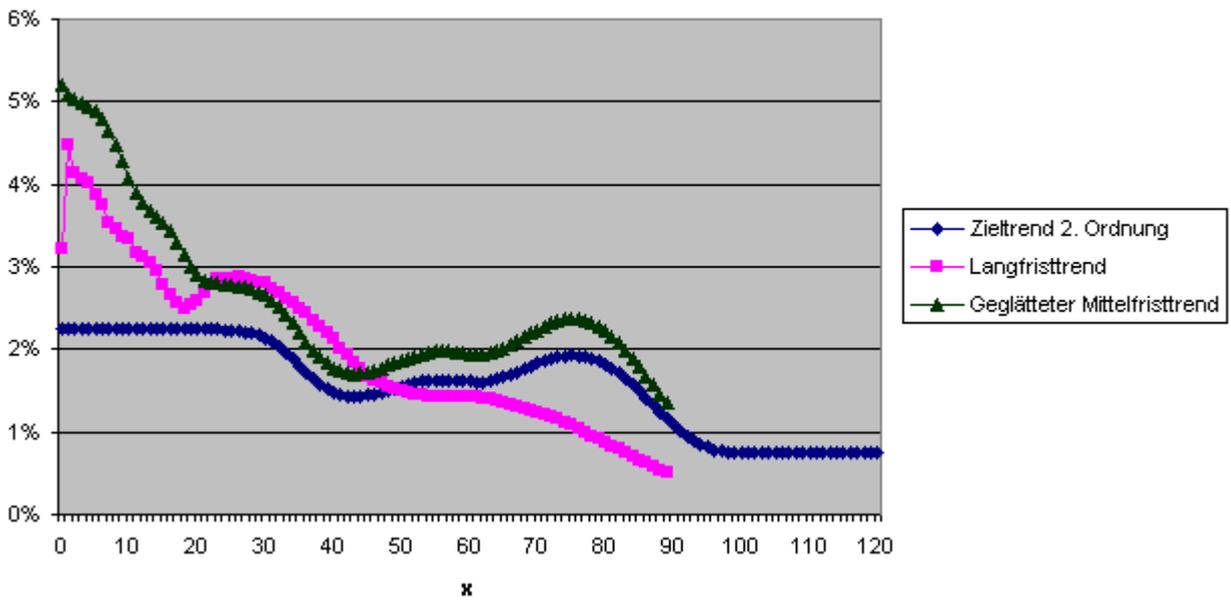
- Bei Frauen ist der Zieltrend für Alter $x \leq 48$ niedriger als der Langfristtrend.
- Für Alter von 23 bis 44 ist für Frauen jedoch auch der Mittelfristtrend niedriger als der Langfristtrend. Bei der zweiten Beobachtung handelt es sich um einen in den Daten der Vergangenheit beobachteten Effekt. In der Vergangenheit hat sich der Trend im Vergleich der Perioden 1871-1999 einerseits und 1972-1999 andererseits also im Altersbereich von 23 bis 44 abgeschwächt. Es erscheint plausibel, dass sich dieser Altersbereich, in welchem der zukünftige Trend der Sterblichkeitsverbesserungen niedriger ist als der Langfristtrend, noch ausdehnen kann, z.B. auf bis zu 48 Jahre wie es mit dem Zieltrend prognostiziert wird. Dies kann als Fortsetzung der bereits in der Vergangenheit zu beobachtenden Trendabschwächung in mittleren Altern interpretiert werden. Bei Männern sind ähnliche Effekte in niedrigeren Altern zu beobachten.
- Im hohen Altersbereich liegt der Zieltrend deutlich über dem Langfristtrend. Im Mittel liegt er bei den Männern sogar deutlich über dem Trend 1. Ordnung der DAV 1994 R und bei den Frauen geringfügig darunter (siehe Tabelle unten).

Trendvergleich Männer



Grafik 16: Trendvergleich, Männer

Trendvergleich Frauen



Grafik 17: Trendvergleich, Frauen

Arithmetisches Mittel von Sterblichkeitsverbesserungsraten im Altersbereich 60–89:

Trend	Männer	Frauen
Starttrend 2.Ordnung	2,17%	2,25%
Zieltrend 2.Ordnung	1,40%	1,69%
Langfristtrend	0,62%	1,04%
DAV 1994 R-Trend	1,14%	1,70%

Insgesamt erscheint der Zieltrend also plausibel.

4.1.5 Formeln

Im Folgenden werden kurz einige nützliche Formeln für die Sterbewahrscheinlichkeiten bei linear gedämpftem Trend dargestellt. Die Sterbewahrscheinlichkeit $q_{x,t}$ eines x -jährigen im Kalenderjahr $t \geq 1999$ ergibt sich aus der Basistafel $q_{x,1999}$ und der zweidimensionalen Trendfunktion $F(x,t)$ gemäß

$$q_{x,t} = q_{x,1999} * \exp\left(-\sum_{u=1999}^{t-1} F(x,u)\right) \text{ für die Aggregattafel und}$$

$$q_{x,t} = f^s * q_{x,1999} * \exp\left(-\sum_{u=1999}^{t-1} F(x,u)\right) \text{ für die Selektionstafel.}$$

Dabei bezeichnet f^s den Selektionsfaktor der Selektionsphase s .

Diese Formel lässt sich alternativ darstellen, so dass sie nicht mehr von $F(x,t)$ sondern direkt von $F_1(x)$, $F_2(x)$, T_1 und T_2 abhängt. Dies geschieht, indem folgende Ersetzung vorgenommen wird:

$$\sum_{u=1999}^{t-1} F(x,u) = [F_2(x) + G(t) \cdot (F_1(x) - F_2(x))] * (t - 1999)$$

mit

$$G(t) = \begin{cases} 1 & 1999 \leq t \leq 1999 + T_1 \\ 1 - \frac{(t-1999-T_1)(t-1999-T_1-1)}{2(T_2-T_1)(t-1999)} & 1999 + T_1 \leq t \leq 1999 + T_2 \\ \frac{T_1 + T_2 + 1}{2(t-1999)} & t \geq 1999 + T_2. \end{cases}$$

4.1.6 Vergleich mit Ergebnissen des IBS

Im Rahmen der Rentenreform 2000 wurden vom Institut für Bevölkerungsforschung und Sozialpolitik der Universität Bielefeld (im folgenden IBS genannt) demographische Projektionsrechnungen durchgeführt. Dabei wurde der Zusammenhang zwischen dem Medianalter und der Lebenserwartung ab 1949/51 ausgewertet und es wurden Annahmen über die Entwicklung im 21. Jahrhundert nach drei Szenarien zugrunde gelegt. Anhang 17 enthält einen Vergleich der Ergebnisse des IBS mit den Sterblichkeiten 2. Ordnung der DAV 2004 R. Trotz unterschiedlicher Methoden insbesondere in der Prognose der Sterblichkeitsentwicklung ergeben sich gut vergleichbare Ergebnisse. Die Ergebnisse der Methode des IBS unterstützt die Annahme von in Zukunft fallenden Sterblichkeitsverbesserungen.

4.2 Sterblichkeitstrend 1. Ordnung

Das wesentliche Risiko bei der Herleitung eines Sterblichkeitstrends besteht in der grundsätzlichen Unsicherheit der Schätzung zukünftiger Sterblichkeitsverbesserungen auf Basis von Vergangenheitsdaten. Die dominierenden Risiken bei der Schätzung des zukünftigen Sterblichkeitstrends sind das Modellrisiko und das Änderungsrisiko.

4.2.1 Zuschlag für Modellrisiko

Bei der Bestimmung des Sterblichkeitstrends 2. Ordnung wird eine lineare Trenddämpfung angenommen (siehe Abschnitt 4.1.3). Zur Berücksichtigung des Modellrisikos, das insbesondere im Ausbleiben der Trenddämpfung besteht, wird ein Sicherheitszuschlag angesetzt, der sich qualitativ aus dem Weglassen der Annahme der Trenddämpfung ergibt. Dies bedeutet, dass der Starttrend 2. Ordnung $F_1(x)$ aus Abschnitt 4.1.3 über die gesamte Projektionsdauer als Sterblichkeitstrend angenommen wird. Diese Vorgehensweise entspricht einem Zuschlag von mindestens 34% auf den Zieltrend $F_2(x)$ gemäß Abschnitt 4.1.3 (34% bei Frauen bzw. 34% bis 72% bei Männern). Aus diesem Zuschlag ergibt sich im Modellbestand unter Berücksichtigung der erhöhten Prämien eine Erhöhung der Deckungsrückstellung zum 01.01.2005 um z.B. etwa 2% für die Parameterkombination ($T_1 = 10, T_2 = 15$) oder etwa 3% für die Parameterkombination ($T_1 = 5, T_2 = 10$).

4.2.2 Änderungszuschlag

Das Risiko einer zukünftigen temporären weiteren Trendbeschleunigung wird berücksichtigt, indem die jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen, die sich auf Basis des Trends 2. Ordnung zuzüglich des Zuschlags zur Berücksichtigung des Modellrisikos (siehe 4.2.1) ergeben, altersunabhängig pauschal um 0,25% erhöht werden.

Die Begründung der Angemessenheit dieses Absicherungsniveaus orientiert sich an den Überlegungen bei Herleitung der schweizerischen Tafeln ER 2000, s. [K]

und [SVV]. Es wird die Auswirkung einer temporären Trendbeschleunigung auf die Deckungsrückstellung im Jahr 2005 ermittelt. Ausgangspunkt ist die Trendfunktion 2. Ordnung zuzüglich des Zuschlags für das Modellrisiko. Es wird der erwartete erhöhte Deckungsrückstellungsbedarf bestimmt, welcher entsteht, wenn sich über ein Zeitintervall von zehn Jahren diese Trendfunktion in allen Altern x um 50% erhöht („Trendschock“)⁶. Dies entspricht beispielsweise im Mittelwert über den Altersbereich von 60 bis 89 Jahren einer Erhöhung der jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen von 2,5% auf 3,8% (Frauen) bzw. von 2,4% auf 3,6% (Männer). Dabei wird angenommen, dass ein einmaliger Trendschock innerhalb der nächsten 50 Jahren ab dem Betrachtungstermin auftritt, d.h. die Intervallmitte τ liegt zwischen 2005 und 2054. Für den Modellbestand (s. Abschnitt 3.4.1.1) ergibt sich dann als Erwartungswert des zusätzlichen Deckungsrückstellungsbedarfs ca. 2% der vorhandenen Deckungsrückstellung. Eine entsprechend um ca. 2% erhöhte Deckungsrückstellung wird (unter Berücksichtigung der entsprechend erhöhten Prämien) erreicht, wenn altersunabhängig ein additiver Sicherheitszuschlag von 0,25% auf die jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen angesetzt wird. Dies entspricht einer relativen Erhöhung der Werte der Trendfunktion $F(x)$ (siehe Tabelle in Anhang 1Teil B) von etwa 8% in niedrigen Altern (unter 24 Jahren) bis 25% in hohen Altern (über 96 Jahren). Im Altersbereich von 60 bis 89 Jahren beträgt die resultierende mittlere Erhöhung der Trendfunktion 12% für Männer bzw. 11% für Frauen.

Insgesamt stellt der Änderungszuschlag damit eine geeignete Absicherung gegen die erwartete Auswirkung temporärer Trendbeschleunigungen dar. Wird die Betrachtung analog zu [SVV] auf fällige Renten beschränkt, da diese hinsichtlich des Handlungsspielraums für die Reaktion auf kurzfristige Trendbeschleunigungen besonders problematisch sind, so werden durch den Zuschlag sogar deutlich stärkere Trendschocks (Erhöhung um über 100%, d.h. $\eta > 200\%$) abgesichert. Insbesondere sind damit auch ein im Beobachtungsbestand kurzzeitig erhöhtes Sterblichkeitsverbesserungsniveau (s. Abschnitt 4.1.4.1) abgesichert. Durch den additiven Ansatz des Änderungszuschlags wirkt dieser verstärkt in Altern mit unterdurchschnittlichem Trendniveau, insbesondere also in den sehr hohen Altern.

Der Änderungszuschlag und der Zuschlag für das Modellrisiko wirken sich etwa gleich stark auf die Deckungsrückstellung des Modellbestandes aus.

4.2.3 Andere Irrtumsrisiken

Für die übrigen Irrtumsrisiken (z.B. aus der Parameterschätzung) wird kein expliziter zusätzlicher Zuschlag angesetzt. Die geringe Größe der Konfidenzintervalle bei der Ermittlung der Trends 2. Ordnung (siehe Anhang 16) sowie der Vergleich der Ergebnisse aus dem Lee-Carter-Modell mit dem verwendeten Modell (siehe Anhang 13) belegen, dass solche Zuschläge in Relation zu den Zuschlägen, die das Modell- und das Änderungsrisiko berücksichtigen (siehe Abschnitte 4.2.1 und

⁶ Dabei wird $F(x,t) = F_1(x)$ für $\tau - 5 \leq t < \tau + 5$ durch $F(x,t) = \eta \cdot F_1(x)$ mit $\eta = 150\%$ ersetzt.

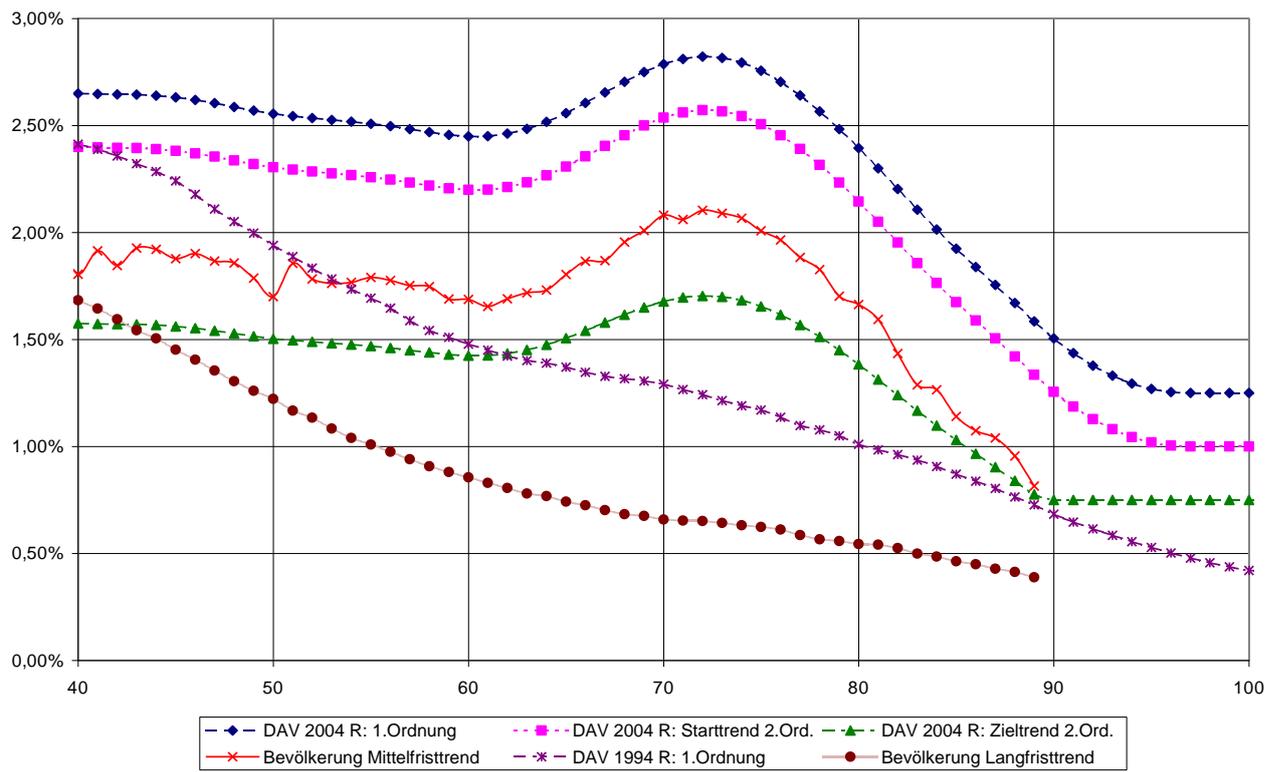
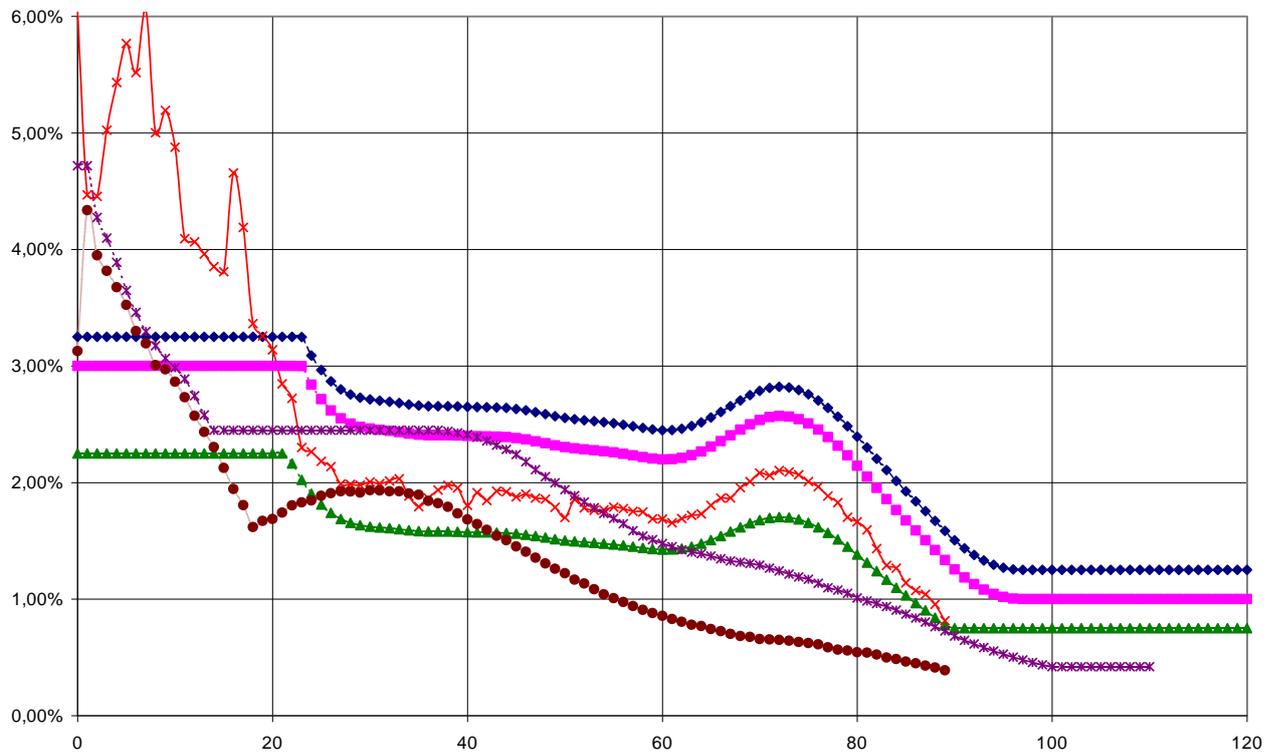
4.2.2), vergleichsweise gering wären. Es wird angenommen, dass andere Irrtumsrisiken bereits durch die Zuschläge für das Modell- und das Änderungsrisiko abgedeckt sind.

4.2.4 Monotonieverhalten

Der Trend 1. Ordnung führt in den Altern über 25 Jahren zu monoton wachsenden Generationentafeln für Geburtsjahrgänge bis 2030. Die resultierenden Periodentafeln bis 2030 sind in den Altern über 25 Jahren ebenfalls monoton wachsend. Somit ergibt sich ein plausibles Monotonieverhalten der resultierenden Sterbewahrscheinlichkeiten. Auf eine Monotonisierung des Trends wird daher verzichtet.

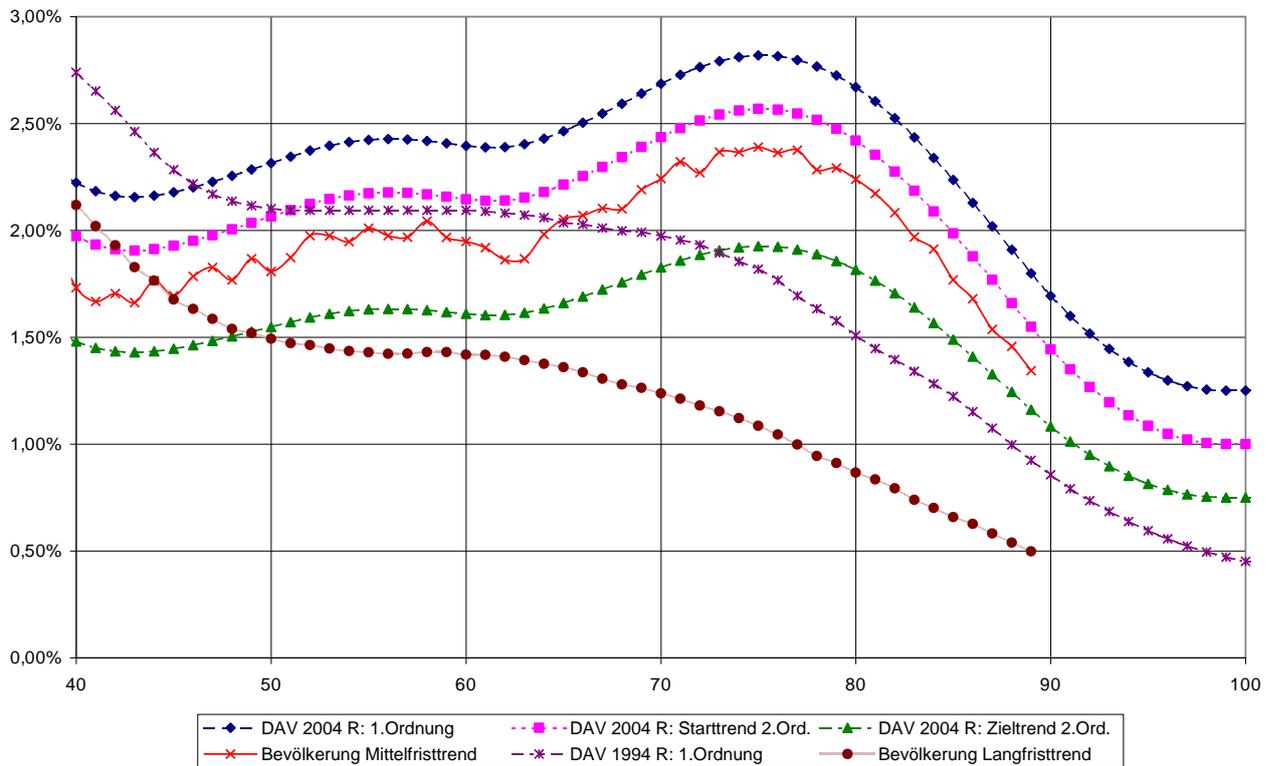
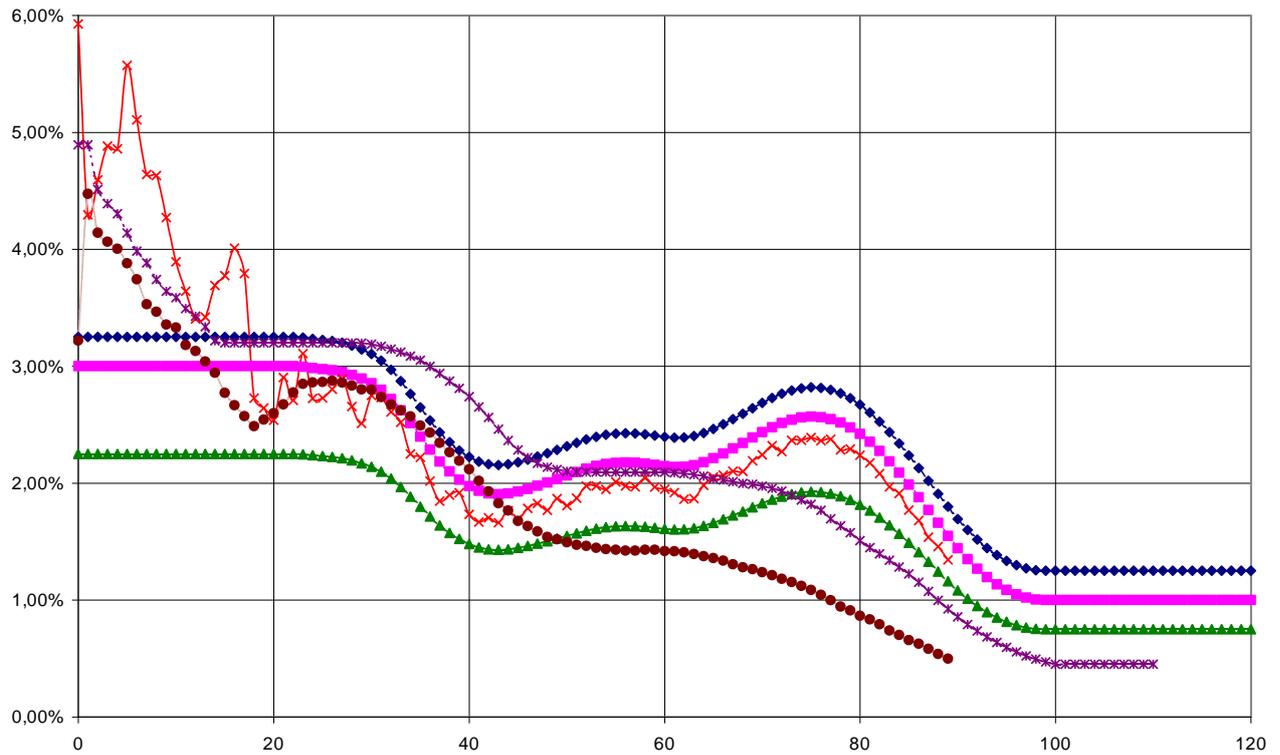
4.2.5 Darstellung der Ergebnisse

In den folgenden Grafiken sind die Trends der DAV 2004 R und der DAV 1994 R sowie des mittelfristigen und des langfristigen Bevölkerungstrends im Vergleich dargestellt.



-◆- DAV 2004 R: 1.Ordnung -■- DAV 2004 R: Starttrend 2.Ord. -▲- DAV 2004 R: Zieltrend 2.Ord.
 -×- Bevölkerung Mittelfristtrend -* - DAV 1994 R: 1.Ordnung -●- Bevölkerung Langfristtrend

Grafik 18: Altersabhängigkeit der jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen für Männer im Altersbereich 0-120 (oben) und 40-100 (unten)



Grafik 19: Altersabhängigkeit der jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen für Frauen im Altersbereich 0-120 (oben) und 40-100 (unten)

5 Altersverschiebung als Näherungsverfahren

Die mit einer Generationentafel berechneten Prämien und Deckungsrückstellungen hängen nicht nur vom Alter bei Abschluss eines Vertrages sondern auch vom jeweiligen Geburtsjahr des Versicherten ab. Im folgenden wird ein Näherungsverfahren erläutert, welches die Berechnungen bei der DAV 2004 R auf eine eindimensionale Sterbetafel zurückführt.

Es wird eine Sterbetafel in der Schar der Generationentafeln als sogenannte Grundtafel ausgezeichnet und dann werden durch Verschiebungen des tatsächlichen Alters in Abhängigkeit vom Geburtsjahrgang die exakten versicherungstechnischen Werte durch Verwendung der Grundtafel mit Altersverschiebung angenähert. Dabei werden Versicherte der Geburtsjahrgänge, die größer als das Geburtsjahr der ausgezeichneten Sterbetafel sind, jünger gemacht und solche der Geburtsjahrgänge, die kleiner als das Geburtsjahr der ausgezeichneten Sterbetafel sind, älter gemacht, um so dem Trend der Sterblichkeitsverbesserungen Rechnung zu tragen.

5.1 Grundtafel

Aus der zweidimensionalen Generationentafel wird eine Grundtafel mit Altersverschiebung ermittelt.

Als Grundtafel (GT) für die Altersverschiebung wird folgende Sterbetafel gewählt:

$$q_x^{GT} = \begin{cases} q_x^{1965} & x > 34 \\ q_x^{B,mon} & 0 \leq x \leq 34, \\ q_0^{B,mon} & x < 0 \end{cases}$$

wobei q_x^{1965} die Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen des Jahrganges 1965 bezeichnet und $q_x^{B,mon}$ die Sterbewahrscheinlichkeit eines x-jährigen gemäß monotonisierter Basistafel der Aggregattafel 1. Ordnung. Die Monotonisierung der Basistafel der Aggregattafel 1. Ordnung q_x^B (s. Anhang 1Teil A) lässt sich formelmäßig durch folgende Rekursion darstellen:

$$q_{120}^{B,mon} = q_{120}^B,$$
$$q_x^{B,mon} = \min(q_x^B, q_{x+1}^{B,mon}).$$

Für die Auswahl des Geburtsjahrgangs 1965 spricht, dass 1965 etwa in der Mitte des Bereichs an Geburtsjahrgängen liegt, für welche die DAV 2004R voraussichtlich von Bedeutung sein wird. Durch diese Wahl wird insbesondere der Fehler, der durch das Näherungsverfahren der Altersverschiebung entsteht, kleingehalten. Der Fehler wächst mit dem Abstand des tatsächlichen Geburtsjahrganges von dem Jahrgang, welcher der Grundtafel zugrunde liegt.

Es wird also für das Beginnjahr 2005 ein durchschnittliches Eintrittsalter von 40 Jahren unterstellt.

5.2 Altersverschiebung

Für jedes Geburtsjahr $\tau = 1910, \dots, 2020$ und für alle Alter x mit $2020 \geq \tau + x \geq 2005$ wird die ganzzahlige Verschiebung $h(\tau, x)$ bestimmt, für welche folgende Bedingung erfüllt ist:

$$\ddot{a}_{x+h(\tau, x)+1}(GT) < \ddot{a}_{x, \tau} \leq \ddot{a}_{x+h(\tau, x)}(GT).$$

Dabei bezeichnet $\ddot{a}_{x, \tau}$ den Leistungsbarwert einer vorschüssigen Leibrente mit jährlicher Zahlungsweise und einem Rechnungszins von 2,75% gemäß der Generationentafel DAV 2004 R. $\ddot{a}_x(GT)$ bezeichnet den Leistungsbarwert einer vorschüssigen Leibrente mit jährlicher Zahlungsweise und einem Rechnungszins von 2,75% gemäß der Grundtafel aus Abschnitt 5.1.

Von allen so ermittelten Verschiebungen $h(\tau, x)$ wird für die Geburtsjahrgänge von 1910 bis 1929 die minimale Verschiebung $h(\tau)$ und ab dem Geburtsjahrgang 1930 der Mittelwert der Verschiebungen $h(\tau)$ bestimmt:

$$h(\tau) = \begin{cases} \min_x(h(\tau, x)) & \tau < 1930 \\ \frac{1}{16} \cdot \sum_{x=2005-\tau}^{2020-\tau} h(\tau, x) & \tau \geq 1930 \end{cases}$$

Diese Altersverschiebungen $h(\tau)$ sind nur vom Geburtsjahr abhängig. Für Geburtsjahrgänge ab 1930 wird der Mittelwert gewählt, damit im Zeitraum von 2005 bis 2020 für die Leistungsbarwerte der Rentenleistung nach der abgeleiteten Grundtafel die Abweichungen zu den entsprechenden Werten der Generationentafel nicht zu groß werden.

Die sich ergebenden Altersverschiebungen $h(\tau)$ werden auf ganze Jahre aufgerundet und abschließend monotonisiert. Durch die Monotonisierung ändern sich die Altersverschiebungen für die Geburtsjahre 1910 bis 1915 sowie bei Männern zusätzlich für den Geburtsjahrgang 1930. Die Grundtafel und die Altersverschiebungen für Männer und Frauen sind Anhang 1Teil C zu entnehmen.

5.3 Vergleiche

In Anhang 2Teil A werden versicherungstechnische Werte für folgende Sterbetafeln verglichen:

- DAV 1994 R
- Selektionstafel der DAV 2004 R
- Aggregattafel der DAV 2004 R
- Grundtafel mit Altersverschiebung der DAV 2004 R

Es werden Nettoprämien für Eintrittsalter ab 15 mit Rentenbeginn 55, 60, 65 und 70 des Abschlussjahres 2005 berechnet. Außerdem werden Nettoeinmalprämien für die Eintrittsalter von 50 bis 90 Jahren berechnet.

Die Nettoprämien gemäß Grundtafel mit Altersverschiebung der DAV 2004 R sind für alle relevanten Alter bei Männern größer als die mit der Generationentafel berechneten Prämien. Bei Frauen werden die Prämien maximal um weniger als ein halbes Prozent unterschritten. In hohen Altern kommt es zu stärkeren Abweichungen, die dadurch bedingt sind, dass die Sterbetafel durch positive Altersverschiebungen verkürzt wird. Die Werte sind in Anhang 2Teil A (Tabelle 1 bis 4) aufgeführt.

Anwartschaften auf eine aufgeschobene vorschüssige Jahresrente für repräsentative Eintrittsalter ab 15 mit Rentenbeginnalter 55, 60, 65 und 70 des Abschlussjahres 2005 und ein Deckungsrückstellungsverlauf in der Anwartschaftszeit für das Eintrittsalter 30 und Rentenbeginnalter 65 sind in Anhang 2Teil A (Tabelle 5 bis 8) zu finden. Auch dabei sind die gemäß Grundtafel mit Altersverschiebung der DAV 2004 R berechneten Werte für alle relevanten Alter größer als die mit der Generationentafel berechneten.

Anhang 2Teil B enthält einen Vergleich von Nettoprämien nach den neuen deutschen Rechnungsgrundlagen (Aggregattafel 1. Ordnung für die Aufschubzeit und Selektionstafel 1. Ordnung für die Rentenbezugszeit) mit denen nach Rechnungsgrundlagen aus verschiedenen anderen Ländern:

- Sterbetafel ER 2000 aus der Schweiz,
- Sterbetafel IA 92 mc aus UK und
- Sterbetafel AVÖ 1996R aus Österreich.

Informationen zu diesen internationalen Sterbetafeln sind in Anhang 15 enthalten.⁷ Der Nettoprämienvergleich dient dabei nicht als Preisvergleich, sondern als verdichteter Vergleich der unterschiedlichen Sterblichkeitsgrundlagen insbesondere im Hinblick auf die Reservierung.

Für Männer ergeben sich mit der DAV 2004 R niedrigere Nettoprämien als mit den schweizerischen Rechnungsgrundlagen. Für Frauen liegen die Nettoprämien gemäß DAV 2004 R und gemäß schweizerischen Rechnungsgrundlagen auf einem ähnlichen Niveau. In allen betrachteten Beispielen sind die Nettoprämien gemäß DAV 2004 R höher als die Nettoprämien gemäß Rechnungsgrundlagen aus UK und Österreich.

⁷ Bei der Sterbetafel IA 92 mc aus UK handelt es sich um die Sterbetafel IA 92 für Amounts aus [CMI1] mit zusätzlichen geburtsjahrabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen der Variante Medium aus [CMI2].

6 Zusammenfassung

Die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_{x,t}$ der DAV-Sterbetafel 2004 R hängen sowohl vom Alter x der betrachteten Person als auch vom betrachteten Kalenderjahr t ab. Zudem werden die Sterblichkeiten nach dem Geschlecht differenziert. Da die Konstruktion der DAV-Sterbetafel für Männer und Frauen dem gleichen Prinzip folgt, wird diese Differenzierung in diesem Kapitel nicht explizit gemacht. Die im Folgenden genannten Formeln beziehen sich auf die Sterbetafeln 1. Ordnung, in der Sicherheitsabschläge bzw. -zuschläge bereits berücksichtigt sind.

Grundlegend für die Herleitung der Sterbewahrscheinlichkeiten der DAV-Sterbetafel 2004 R sind

- Basistafeln, die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_{x,1999}$ enthalten;
- eine altersabhängige Trendfunktion $F(x)$, mit der beschrieben wird, wie sich die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_{x,t}$ bei Projektion in Kalenderjahre $t \geq 1999$ aus den $q_{x,1999}$ errechnen.

Rechnungsgrundlage für Rentenversicherungen von versicherten Personen mit Geburtsjahrgang τ sind die Generationentafeln der Form $q_{x,\tau+x}$.

Die Sterbewahrscheinlichkeiten der **Basistafeln** werden in den zentralen Altersbereichen der Tafeln als rentenhöengewichtete Sterblichkeiten direkt aus Bestandsdaten zu Rentenversicherungen ermittelt. Diese Bestandsdaten wurden für die Jahre 1995 bis 2002 bei der Münchener Rück und bei der Gen Re gesammelt und ausgewertet. Die Bestandsdaten erlauben eine Differenzierung der Rentenversicherungen nach Aufschubzeit bzw. Rentenbezugszeit, Rentenhöhe sowie nach zurückgelegter Versicherungsdauer. Dies wird in der Ermittlung der Basistafeln berücksichtigt, indem getrennte Basistafeln für die Rentenbezugszeit und für die Aufschubzeit hergeleitet werden. Außerdem lassen sich Selektionseffekte in den Versichertensterblichkeiten, die in den ersten fünf Jahren der Rentenbezugszeit zu beobachten sind, in den Sterbetafeln abbilden.

- Bei der Basistafel für die Rentenbezugszeit handelt es sich also um eine Selektionstafel, die doppelt nach dem aktuellen Alter und dem laufenden Jahr der Rentenbezugszeit abgestuft ist. Sie beruht für die Alter 60 bis 99 auf den in den Bestandsdaten beobachteten rentenhöengewichteten Versichertendaten. Die Basistafeln haben die Form $f^s \cdot q_{x,1999}^6$, wobei $f^s \leq 1$ der Selektionsfaktor für das s -te Jahr des Rentenbezugs ist und $q_{x,1999}^6$ die Sterbewahrscheinlichkeit eines x -Jährigen im Kalenderjahr 1999 bezeichnet, dessen Rentenbezugszeit schon mindestens sechs Jahre dauert. Nur die Faktoren f^1 und $f^2 = \dots = f^5$ sind von 1 verschieden. Die Sterbewahrscheinlichkeiten werden in der Selektionstafel für die Rentenbezugszeit fortgeschrieben als

$$q_{x,t}^s = f^s \cdot q_{x,1999}^6 \cdot \exp(-(t-1999) \cdot F(x)).$$

- Die Basistafel für die Aufschubzeit $q_{x,1999}$ wird als Aggregattafel ohne Unterscheidung nach dem laufenden Versicherungsjahr ab Policenbeginn bestimmt. Sie beruht für die Alter bis 64 auf den in den Bestandsdaten beobachteten rentenhöhengewichteten Versichertendaten aufgeschobener Renten und für die Alter 65 bis 99 auf den entsprechenden Daten laufender Renten. Die Sterbewahrscheinlichkeiten werden in der Sterbetafel für die Aufschubzeit fortgeschrieben als

$$q_{x,t} = q_{x,1999} \cdot \exp(-(t-1999) \cdot F(x)).$$

Die Tafeln für die Aufschubzeit und die Rentenbezugszeit reichen vom Alter 0 bis zum Endalter 120.

Die **Trendfunktion** F , mit der die Sterblichkeitsveränderungen beschrieben werden, basiert auf dem Bevölkerungstrend, der aus den abgekürzten Bevölkerungsterbetafeln des Statistischen Bundesamtes für das frühere Bundesgebiet ab 1972 abgeleitet wird. Mit einem Zuschlag wird zudem berücksichtigt, dass Sterblichkeitsverbesserungen für Versicherte höher sind als Sterblichkeitsverbesserungen für die Bevölkerung.

In den Basistafeln sind Sicherheitsabschläge für folgende Risiken berücksichtigt:

- das statistische Schwankungsrisiko bei Anwendung der Sterbetafeln;
- die Irrtumsrisiken bei Herleitung und Anwendung der Rententafel.

In der Trendfunktion sind Sicherheitszuschläge für folgende Risiken berücksichtigt:

- das Irrtumsrisiko bei der Bestimmung der Trendfunktion;
- langfristige Änderungsrisiken der zukünftigen Sterblichkeit.

Erscheint der Aufwand für die EDV-technische Umsetzung der oben beschriebenen DAV-Sterbetafel 2004 R zu hoch, so kann der Einsatz der folgenden Näherungsverfahren erwogen werden:

- Verwendung der Aggregattafel als Basistafel für Aufschubzeit und Rentenbezugszeit. Zu beachten ist, dass die Selektion zu Beginn der Rentenbezugszeit in diesem Fall nur näherungsweise implizit berücksichtigt wird (siehe Kapitel 7).
- Verwendung der Grundtafel q_x^{GT} mit Altersverschiebung, die auf Basis der zweidimensionalen Rententafeln ermittelt wurde. Für jede versicherte Person wird eine Generationentafel $q_{x+h(\tau)}^{GT}$ verwendet, wobei $h(\tau)$ die vom Geburtsjahrgang τ der Person abhängige Altersverschiebung bezeichnet.

7 Anwendungsbereich

Statistische Basis für die Herleitung der Sterbetafel 2004 R sind Bestandsdaten zu Rentenversicherungen sowie Daten der deutschen Bevölkerungsstatistik. Diese Ausarbeitung dokumentiert

- die ermittelten Sterbewahrscheinlichkeiten,
- die zu Grunde liegenden Annahmen über die Veränderung zukünftiger Sterbewahrscheinlichkeiten (Trendfunktion) sowie
- die Sicherheitsmargen, mit denen in der Sterbetafel das statistische Schwankungsrisiko sowie die Änderungs- und Irrtumsrisiken berücksichtigt werden, die bei Herleitung und Anwendung der Sterbetafel auftreten können.

Bei der Auswertung des Beobachtungsbestandes wurden erhebliche Sterblichkeitsunterschiede zwischen den Teilbeständen der beteiligten Unternehmen festgestellt. Gründe für diese Unterschiede könnten z.B. unterschiedliche sozioökonomische Bestandszusammensetzungen oder das Vorliegen von Gesundheitsprüfungen sein.

Das bei der Berechnung der statistischen Schwankungsabschläge realisierte Sicherheitsniveau hängt von der konkreten Größe und Struktur des betrachteten Bestandes ab. Die Berechnung basiert hierbei auf einem Modellbestand, dessen Größe einer kurzfristig zu erwartenden mittleren Bestandsgröße an Rentenversicherungen deutscher Lebensversicherungsunternehmen entspricht.

Ein Anwendungsbestand, also der Bestand an Rentenversicherungen eines konkreten Lebensversicherungsunternehmens, wird sich von den bei der Herleitung zu Grunde gelegten Bestandsdaten bzw. dem Modellbestand zum Beispiel im Hinblick auf

- das beobachtete Sterblichkeitsniveau (zum Beispiel in Folge der Kundenstruktur, der Verteilung der Rentenhöhen oder dem Anteil von Verträgen mit/ohne Gesundheitsprüfung),
- die Bestandsgröße und die Bestandsstruktur (zum Beispiel Altersstruktur, Produktparameter, Anteil sofortbeginnender Renten)
- die beobachteten Selektionseffekte

unterscheiden.

Der Verantwortliche Aktuar eines Lebensversicherungsunternehmens muss daher überprüfen, ob

- das Sterblichkeitsniveau der Sterbetafel DAV 2004 R,
- Struktur und Höhe der Sicherheitsmargen und das durch sie realisierte Sicherheitsniveau der Sterbetafel DAV 2004 R,

für die Rentenbestände des Unternehmens angemessen und im Sinne der in der vorliegenden Ausarbeitung beschriebenen Festlegungen ausreichend vorsichtig sind. Gegebenenfalls muss der Verantwortliche Aktuar geeignete Anpassungen des eingerechneten Sterblichkeitsniveaus bzw. der betroffenen Sicherheitszuschläge vornehmen. Eine sich ggf. rechnerisch ergebende Erhöhung des von der jeweiligen Bestandsgröße abhängigen Schwankungszuschlags kann z.B. durch Berücksichtigung einer entsprechend guten Eigenmittelausstattung unterbleiben.

Bei Anwendung der Selektionstabellen der DAV 2004 R, das heißt bei Anwendung der separaten Sterbetafeln für Aufschiebzeit und Rentenbezugszeit, werden die im Herleitungsbestand zu beobachtenden durchschnittlichen Selektionseffekte in den ersten fünf Jahren des Rentenbezugs durch aus dem Herleitungsbestand abgeleitete Selektionsfaktoren modelliert. Insbesondere unterscheidet der Herleitungsbestand nicht zwischen Tarifen mit oder ohne Kapitalwahlrecht am Rentenbeginn.

- Auf Grund des umfassenden Herleitungsbestandes stellen die im Durchschnitt des Herleitungsbestandes ermittelten Selektionsfaktoren eine beste Schätzung für alle Tarife der Rentenbezugszeit dar. Die Angemessenheit einer Anwendung abweichender Selektionsfaktoren ist daher durch den Verantwortlichen Aktuar zu begründen.
- Insbesondere bei Verträgen mit hohen Rentenbeginnaltern ist durch den Verantwortlichen Aktuar zu prüfen, inwiefern eine Anwendung der Aggregattafel bzw. der Grundtafel mit Altersverschiebung angemessen ist und zu einer aktuariell ausreichend vorsichtigen Prämienkalkulation bzw. Reservierung führt, da das Sicherheitsniveau der Selektionstabellen unterschritten wird.

8 Literatur

- [CMI1] Continuous Mortality Investigation Bureau: Standard tables of mortality based on the 1991-94 experience, Continuous Mortality Investigation Reports 17 (1999).
http://www.actuaries.org.uk/Display_Page.cgi?url=/library/cm17/welcome.xml
- [CMI2] Continuous Mortality Investigation Mortality sub-committee: An interim basis for adjusting the "92" Series mortality projections for cohort effects, Continuous Mortality Investigation Working Paper 1 (2002).
<http://www.actuaries.org.uk/files/pdf/cmi/CMIWP1.pdf>
- [GDV1] GDV-Rundschreiben 0428/2004 vom 10.03.2004.
- [GDV2] GDV-Rundschreiben 0581/1998 vom 27.03.1998.
- [GDV3] GDV-Rundschreiben 0429/2004 vom 10.03.2004.
- [I] Institute of Actuaries discussion meeting 'Living longer is bad for the nation's wealth', Abstract of the discussion, British Actuarial Journal 7 (2001), 75–102.
- [JHGLL] *Judge, G. G., Hill, R. C., Griffiths, W. E., Lütkepohl, H., Lee, T. C.:* Introduction to the Theory and Practice of Econometrics, Second Edition, Wiley, New York, 1988.
- [JLPS] *Jörgen, S., Liebmann, F. G., Pagler, F. W., Schachermayer, W.:* Herleitung der Sterbetafel AVÖ 1996R für Rentenversicherungen, Mitteilungen der Aktuarvereinigung Österreichs 9 (1997), 39–82.
- [K] *Koller, M.:* Lebensversicherungsmathematik, Skript zur Vorlesung LV1&2, Stand: 9. Oktober 2000.
http://www.math.ethz.ch/finance/misc/Skript_LV1_2.pdf
- [KBLOZ] *Kakies, P., Behrens, H.-G., Loebus, H., Oehlers-Vogel, B., Zschoyan, B.:* Methodik von Sterblichkeitsuntersuchungen, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik Heft 15, Verlag Versicherungswirtschaft e.V., Karlsruhe, 1985.
- [L1] *Loebus, H.:* Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter, Blätter DGVM XXI (1994), 497–524.
- [L2] *Lühr, K.-H.:* Neue Sterbetafeln für die Rentenversicherung, Blätter DGVM XVII (1986), 485–513.
- [L3] *Lee, R. D.:* The Lee-Carter method for forecasting mortality, with various extensions and applications, North American Actuarial Journal 4 (2000), 80–93.

- [LC] *Lee, R. D., Carter, L.:* Modeling and forecasting the time series of US mortality, *Journal of the American Statistical Association* 87 (1992), 659–671.
- [P1] *Pannenberg, M.:* Statistische Schwankungszuschläge für biometrische Rechnungsgrundlagen in der Lebensversicherung, *Blätter DGVM XXIII* (1997), 35–64.
- [P2] *Pannenberg, M.:* Zu einer Standardtafel proportionale Rechnungsgrundlagen, *Blätter DGVM XXIV* (1999), 49–62.
- [PS] *Pannenberg, M., Schütz, E.:* Sicherheitszuschläge für biometrische Rechnungsgrundlagen in der Lebensversicherung, *Transactions of the 26th International Congress of Actuaries, Birmingham 1998, Volume 6*, 481–511.
- [R] *Rueff, F.:* Ableitung von Sterbetafeln für die Rentenversicherung und sonstige Versicherungen mit Erlebensfallcharakter, *Konrad Triltsch Verlag, Würzburg, 1955.*
- [RSJ] *Robine, J.-M., Saito, Y., Jagger, C.:* Living and dying beyond age 100 in Japan, *Symposium Living to 100 and Beyond: Survival at Advanced Ages, Lake Buena Vista, Florida, January 17–18, 2002.*
- [SB] Statistisches Bundesamt: 10. koordinierte Bevölkerungsvorausberechnung, 2003.
- [SS] *Schmithals, B., Schütz, E.:* Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 R für Rentenversicherungen, *Blätter DGVM XXII* (1995), 29–69.
- [SVV] Arbeitsgruppe des Schweizerischen Versicherungsverbands unter Leitung von M. Koller: Methodik zur Konstruktion von Generationentafeln, 1998.
- [TKV] *Thatcher, A. R., Kannisto, V., Vaupel, J. W.:* The force of mortality at Ages 80 to 120, *Odense University Press, Odense, 1998.*
<http://www.demogr.mpg.de/Papers/Books/Monograph5/start.htm>
- [V] *Valkonen, T.:* Die Vergrößerung der sozioökonomischen Unterschiede in der Erwachsenenmortalität durch Status und deren Ursachen, *Zeitschrift für Bevölkerungswissenschaft* 23 (1998), 263–292.
- [W1] *Willeys, R.:* Mortality in the next millennium, 1999.
<http://www.sias.org.uk/papers/mortality.pdf>
- [W2] *Wilmoth, J. R.:* Computational Methods for Fitting and Extrapolating the Lee-Carter Model of Mortality Change, *Technical Report, University of California, Department of Demography, 1993.*

Anhang 1 Tabellen zur DAV 2004 R

Teil A Selektionsfaktoren und Basistafeln

Selektionsfaktoren	Männer	Frauen
f^1	0,670538	0,712823
f^{2-5}	0,876209	0,798230

Alter	Basistafel 1. Ordnung				Basistafel 2. Ordnung			
	Aggregattafel		Selektionstafel Rentenbezug		Aggregattafel		Selektionstafel Rentenbezug	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen
	q_x	q_y	q_x^6	q_y^6	q_x	q_y	q_x^6	q_y^6
0	0,003439	0,002694	0,002546	0,002549	0,004076	0,003226	0,003018	0,003053
1	0,000317	0,000280	0,000234	0,000265	0,000375	0,000335	0,000278	0,000317
2	0,000214	0,000160	0,000158	0,000152	0,000253	0,000192	0,000187	0,000182
3	0,000158	0,000124	0,000117	0,000117	0,000187	0,000148	0,000139	0,000140
4	0,000122	0,000101	0,000090	0,000095	0,000145	0,000120	0,000107	0,000114
5	0,000108	0,000078	0,000080	0,000074	0,000128	0,000094	0,000095	0,000089
6	0,000102	0,000081	0,000076	0,000076	0,000121	0,000097	0,000090	0,000091
7	0,000087	0,000080	0,000065	0,000076	0,000104	0,000096	0,000077	0,000091
8	0,000099	0,000069	0,000073	0,000065	0,000117	0,000082	0,000087	0,000078
9	0,000084	0,000068	0,000062	0,000065	0,000100	0,000082	0,000074	0,000077
10	0,000083	0,000066	0,000061	0,000062	0,000098	0,000079	0,000073	0,000075
11	0,000098	0,000071	0,000073	0,000067	0,000117	0,000085	0,000086	0,000081
12	0,000104	0,000075	0,000077	0,000071	0,000123	0,000090	0,000091	0,000085
13	0,000114	0,000079	0,000084	0,000075	0,000135	0,000094	0,000100	0,000089
14	0,000140	0,000092	0,000103	0,000087	0,000165	0,000110	0,000122	0,000104
15	0,000192	0,000120	0,000142	0,000114	0,000228	0,000144	0,000169	0,000136
16	0,000276	0,000144	0,000205	0,000137	0,000328	0,000173	0,000243	0,000164
17	0,000364	0,000166	0,000270	0,000157	0,000432	0,000199	0,000320	0,000188
18	0,000596	0,000235	0,000442	0,000223	0,000707	0,000282	0,000523	0,000267
19	0,000630	0,000238	0,000467	0,000225	0,000747	0,000285	0,000553	0,000269
20	0,000627	0,000230	0,000464	0,000218	0,000743	0,000275	0,000550	0,000260
21	0,000636	0,000211	0,000471	0,000199	0,000754	0,000252	0,000558	0,000239
22	0,000625	0,000215	0,000463	0,000203	0,000741	0,000257	0,000548	0,000243
23	0,000642	0,000201	0,000475	0,000190	0,000761	0,000240	0,000563	0,000227
24	0,000622	0,000222	0,000460	0,000210	0,000737	0,000266	0,000546	0,000251
25	0,000617	0,000225	0,000457	0,000213	0,000731	0,000270	0,000541	0,000255
26	0,000616	0,000225	0,000456	0,000213	0,000730	0,000270	0,000540	0,000255
27	0,000627	0,000235	0,000471	0,000222	0,000743	0,000281	0,000558	0,000266
28	0,000613	0,000258	0,000485	0,000244	0,000726	0,000309	0,000574	0,000293
29	0,000603	0,000280	0,000502	0,000265	0,000715	0,000335	0,000595	0,000317
30	0,000598	0,000291	0,000515	0,000275	0,000709	0,000348	0,000610	0,000329
31	0,000605	0,000302	0,000546	0,000292	0,000717	0,000361	0,000647	0,000350
32	0,000626	0,000318	0,000568	0,000329	0,000742	0,000381	0,000674	0,000394
33	0,000663	0,000344	0,000601	0,000357	0,000786	0,000413	0,000712	0,000427
34	0,000713	0,000385	0,000653	0,000401	0,000845	0,000461	0,000774	0,000480
35	0,000775	0,000434	0,000697	0,000445	0,000918	0,000519	0,000826	0,000533
36	0,000850	0,000488	0,000751	0,000498	0,001008	0,000585	0,000890	0,000596

37	0,000944	0,000547	0,000821	0,000561	0,001119	0,000656	0,000973	0,000671
	Basistafel 1. Ordnung				Basistafel 2. Ordnung			
	Aggregattafel		Selektionstafel Rentenbezug		Aggregattafel		Selektionstafel Rentenbezug	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen
Alter	q_x	q_y	q_x^6	q_y^6	q_x	q_y	q_x^6	q_y^6
38	0,001047	0,000605	0,000878	0,000606	0,001242	0,000725	0,001041	0,000725
39	0,001153	0,000666	0,000968	0,000656	0,001367	0,000798	0,001148	0,000785
40	0,001261	0,000735	0,001083	0,000743	0,001495	0,000881	0,001284	0,000890
41	0,001372	0,000809	0,001169	0,000823	0,001626	0,000968	0,001386	0,000986
42	0,001483	0,000885	0,001288	0,000903	0,001758	0,001059	0,001527	0,001082
43	0,001603	0,000959	0,001403	0,001000	0,001900	0,001149	0,001663	0,001198
44	0,001732	0,001033	0,001532	0,001079	0,002053	0,001237	0,001815	0,001292
45	0,001871	0,001113	0,001719	0,001200	0,002217	0,001332	0,002038	0,001437
46	0,002025	0,001203	0,001872	0,001291	0,002400	0,001440	0,002219	0,001546
47	0,002194	0,001301	0,002074	0,001395	0,002601	0,001558	0,002458	0,001671
48	0,002373	0,001406	0,002268	0,001553	0,002813	0,001683	0,002688	0,001860
49	0,002563	0,001512	0,002526	0,001650	0,003038	0,001811	0,002994	0,001976
50	0,002762	0,001616	0,002838	0,001823	0,003274	0,001935	0,003364	0,002183
51	0,002981	0,001720	0,003029	0,001965	0,003534	0,002060	0,003591	0,002353
52	0,003212	0,001822	0,003358	0,002089	0,003807	0,002182	0,003980	0,002502
53	0,003449	0,001931	0,003684	0,002262	0,004088	0,002312	0,004366	0,002709
54	0,003684	0,002052	0,004054	0,002470	0,004367	0,002458	0,004805	0,002957
55	0,003911	0,002186	0,004419	0,002623	0,004636	0,002618	0,005238	0,003141
56	0,004134	0,002340	0,004872	0,002877	0,004901	0,002803	0,005775	0,003445
57	0,004370	0,002516	0,005388	0,003106	0,005179	0,003013	0,006387	0,003720
58	0,004627	0,002706	0,005888	0,003391	0,005485	0,003240	0,006980	0,004061
59	0,004932	0,002914	0,006541	0,003731	0,005846	0,003490	0,007753	0,004468
60	0,005299	0,003145	0,007226	0,004121	0,006281	0,003766	0,008565	0,004935
61	0,005777	0,003402	0,007922	0,004492	0,006848	0,004074	0,009390	0,005379
62	0,006383	0,003692	0,008590	0,004862	0,007566	0,004421	0,010182	0,005822
63	0,007119	0,004021	0,009229	0,005195	0,008438	0,004815	0,010939	0,006221
64	0,007963	0,004384	0,009933	0,005504	0,009439	0,005250	0,011774	0,006591
65	0,008886	0,004830	0,010714	0,005827	0,010533	0,005783	0,012699	0,006977
66	0,009938	0,005278	0,011662	0,006266	0,011779	0,006321	0,013823	0,007504
67	0,011253	0,005905	0,012834	0,006904	0,013339	0,007071	0,015212	0,008268
68	0,012687	0,006674	0,014099	0,007701	0,015038	0,007992	0,016712	0,009222
69	0,014231	0,007548	0,015456	0,008612	0,016869	0,009039	0,018321	0,010313
70	0,015887	0,008525	0,016920	0,009637	0,018832	0,010209	0,020056	0,011540
71	0,017663	0,009679	0,018547	0,010869	0,020937	0,011591	0,021984	0,013015
72	0,019598	0,010965	0,020408	0,012266	0,023230	0,013131	0,024190	0,014689
73	0,021698	0,012341	0,022511	0,013782	0,025719	0,014778	0,026683	0,016504
74	0,023990	0,013909	0,024873	0,015522	0,028436	0,016656	0,029483	0,018588
75	0,026610	0,015706	0,027614	0,017516	0,031542	0,018808	0,032731	0,020976
76	0,029533	0,017672	0,030689	0,019686	0,035006	0,021163	0,036376	0,023574
77	0,032873	0,019722	0,034200	0,021922	0,038965	0,023618	0,040539	0,026251
78	0,036696	0,022102	0,038203	0,024477	0,043496	0,026468	0,045283	0,029312
79	0,041106	0,024975	0,042787	0,027510	0,048724	0,029908	0,050717	0,032944
80	0,046239	0,028535	0,048081	0,031211	0,054808	0,034171	0,056992	0,037376
81	0,052094	0,032947	0,054068	0,035743	0,061748	0,039454	0,064088	0,042803
82	0,058742	0,038340	0,060821	0,041240	0,069628	0,045913	0,072092	0,049385
83	0,066209	0,044665	0,068363	0,047641	0,078479	0,053487	0,081033	0,057051
84	0,074583	0,051737	0,076782	0,054741	0,088405	0,061956	0,091012	0,065553
85	0,083899	0,059541	0,086113	0,062514	0,099447	0,071302	0,102071	0,074862
86	0,094103	0,068187	0,096295	0,071076	0,111543	0,081656	0,114141	0,085115
87	0,105171	0,077684	0,107306	0,080444	0,124661	0,093028	0,127192	0,096333

88	0,116929	0,087911	0,118973	0,090508	0,138599	0,105275	0,141021	0,108385
	Basistafel 1. Ordnung				Basistafel 2. Ordnung			
	Aggregattafel		Selektionstafel Rentenbezug		Aggregattafel		Selektionstafel Rentenbezug	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen
Alter	q_x	q_y	q_x^6	q_y^6	q_x	q_y	q_x^6	q_y^6
89	0,129206	0,098662	0,131124	0,101071	0,153150	0,118149	0,155425	0,121035
90	0,141850	0,109614	0,143616	0,111814	0,168138	0,131265	0,170231	0,133899
91	0,154860	0,120510	0,156454	0,122478	0,183559	0,144313	0,185449	0,146670
92	0,168157	0,131383	0,169564	0,133104	0,199321	0,157333	0,200989	0,159395
93	0,181737	0,142265	0,182946	0,143725	0,215417	0,170365	0,216850	0,172113
94	0,195567	0,153185	0,196568	0,154369	0,231810	0,183442	0,232997	0,184860
95	0,209614	0,164128	0,210397	0,165023	0,248460	0,196546	0,249388	0,197618
96	0,223854	0,175065	0,224411	0,175662	0,265339	0,209643	0,265999	0,210358
97	0,238280	0,185958	0,238604	0,186250	0,282439	0,222688	0,282823	0,223038
98	0,252858	0,196824	0,252947	0,196808	0,299718	0,235701	0,299824	0,235681
99	0,267526	0,207667	0,267377	0,207342	0,317104	0,248685	0,316929	0,248296
100	0,278816	0,229739	0,278816	0,229739	0,330487	0,275117	0,330487	0,275117
101	0,293701	0,243350	0,293701	0,243350	0,348131	0,291416	0,348131	0,291416
102	0,308850	0,257319	0,308850	0,257319	0,366086	0,308144	0,366086	0,308144
103	0,324261	0,271655	0,324261	0,271655	0,384354	0,325311	0,384354	0,325311
104	0,339936	0,286368	0,339936	0,286368	0,402934	0,342930	0,402934	0,342930
105	0,355873	0,301467	0,355873	0,301467	0,421824	0,361012	0,421824	0,361012
106	0,372069	0,316962	0,372069	0,316962	0,441023	0,379567	0,441023	0,379567
107	0,388523	0,332860	0,388523	0,332860	0,460525	0,398606	0,460525	0,398606
108	0,405229	0,349169	0,405229	0,349169	0,480327	0,418136	0,480327	0,418136
109	0,422180	0,365896	0,422180	0,365896	0,500419	0,438167	0,500419	0,438167
110	0,439368	0,383046	0,439368	0,383046	0,520793	0,458705	0,520793	0,458705
111	0,456782	0,400622	0,456782	0,400622	0,541435	0,479752	0,541435	0,479752
112	0,474411	0,418626	0,474411	0,418626	0,562330	0,501312	0,562330	0,501312
113	0,492237	0,437055	0,492237	0,437055	0,583459	0,523382	0,583459	0,523382
114	0,510241	0,455906	0,510241	0,455906	0,604801	0,545956	0,604801	0,545956
115	0,528401	0,475170	0,528401	0,475170	0,626326	0,569024	0,626326	0,569024
116	0,546689	0,494832	0,546689	0,494832	0,648003	0,592570	0,648003	0,592570
117	0,565074	0,514872	0,565074	0,514872	0,669795	0,616569	0,669795	0,616569
118	0,583517	0,535264	0,583517	0,535264	0,691657	0,640988	0,691657	0,640988
119	0,601976	0,555969	0,601976	0,555969	0,713536	0,665783	0,713536	0,665783
120	0,620400	0,576942	0,620400	0,576942	0,735375	0,690898	0,735375	0,690898
121	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000	1,000000

Teil B

Trendfunktionen

	Starttrend 2. Ordnung		Zieltrend 2. Ordnung		Trend 1. Ordnung	
	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen
Alter	$F(x)$	$F(y)$	$F(x)$	$F(y)$	$F(x)$	$F(y)$
0	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
1	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
2	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
3	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
4	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
5	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
6	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
7	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
8	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
9	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
10	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
11	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
12	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
13	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
14	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
15	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
16	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
17	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
18	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
19	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
20	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
21	0,03045921	0,03045921	0,02275699	0,02275699	0,03303985	0,03303985
22	0,03045921	0,03045921	0,02187596	0,02275699	0,03303985	0,03303985
23	0,03043323	0,03040765	0,02043855	0,02271861	0,03301381	0,03298816
24	0,02881264	0,03029140	0,01923494	0,02263210	0,03138903	0,03287161
25	0,02752183	0,03020168	0,01827591	0,02256532	0,03009490	0,03278166
26	0,02653992	0,03010539	0,01754616	0,02249365	0,02911046	0,03268512
27	0,02583092	0,02994760	0,01701912	0,02237620	0,02839963	0,03252693
28	0,02536650	0,02969009	0,01667385	0,02218451	0,02793402	0,03226875
29	0,02508959	0,02935894	0,01646795	0,02193800	0,02765640	0,03193675
30	0,02493426	0,02894826	0,01635245	0,02163226	0,02750067	0,03152501
31	0,02483416	0,02836840	0,01627801	0,02120050	0,02740031	0,03094365
32	0,02474212	0,02757348	0,01620958	0,02060850	0,02730804	0,03014668
33	0,02462828	0,02657932	0,01612492	0,01986797	0,02719391	0,02914996
34	0,02449507	0,02544282	0,01602585	0,01902117	0,02706035	0,02801054
35	0,02439063	0,02426505	0,01594819	0,01814336	0,02695565	0,02682974
36	0,02434739	0,02311820	0,01591603	0,01728835	0,02691229	0,02567995
37	0,02434472	0,02208468	0,01591404	0,01651761	0,02690961	0,02464377
38	0,02434439	0,02121613	0,01591380	0,01586975	0,02690928	0,02377300
39	0,02432191	0,02050145	0,01589708	0,01533655	0,02688675	0,02305650
40	0,02428500	0,01992856	0,01586963	0,01490906	0,02684974	0,02248214
41	0,02426450	0,01952555	0,01585438	0,01460830	0,02682919	0,02207810
42	0,02424813	0,01930199	0,01584221	0,01444145	0,02681278	0,02185396
43	0,02423142	0,01923720	0,01582978	0,01439310	0,02679602	0,02178902
44	0,02418724	0,01930711	0,01579692	0,01444528	0,02675173	0,02185910
45	0,02410346	0,01946812	0,01573461	0,01456544	0,02666774	0,02202052
46	0,02398254	0,01970017	0,01564468	0,01473862	0,02654651	0,02225316
47	0,02382519	0,01996800	0,01552764	0,01493850	0,02638875	0,02252168
48	0,02364638	0,02025161	0,01539464	0,01515013	0,02620949	0,02280602
49	0,02346664	0,02055358	0,01526094	0,01537544	0,02602928	0,02310876
	Starttrend 2. Ordnung		Zieltrend 2. Ordnung		Trend 1. Ordnung	

	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen
Alter	$F(x)$	$F(y)$	$F(x)$	$F(y)$	$F(x)$	$F(y)$
50	0,02331582	0,02085973	0,01514874	0,01560386	0,02587807	0,02341569
51	0,02320900	0,02117083	0,01506928	0,01583595	0,02577098	0,02372758
52	0,02311376	0,02146215	0,01499843	0,01605328	0,02567549	0,02401966
53	0,02302553	0,02169881	0,01493279	0,01622981	0,02558704	0,02425692
54	0,02293885	0,02186952	0,01486830	0,01635714	0,02550013	0,02442806
55	0,02284194	0,02197616	0,01479620	0,01643668	0,02540298	0,02453498
56	0,02272244	0,02201318	0,01470729	0,01646429	0,02528317	0,02457210
57	0,02258219	0,02199130	0,01460295	0,01644797	0,02514256	0,02455016
58	0,02243636	0,02192024	0,01449444	0,01639497	0,02499636	0,02447892
59	0,02230882	0,02180639	0,01439954	0,01631005	0,02486849	0,02436478
60	0,02223622	0,02169000	0,01434552	0,01622323	0,02479571	0,02424808
61	0,02224764	0,02161569	0,01435402	0,01616781	0,02480715	0,02417359
62	0,02236662	0,02162912	0,01444255	0,01617782	0,02492644	0,02418705
63	0,02259603	0,02176735	0,01461324	0,01628093	0,02515644	0,02432563
64	0,02292896	0,02203222	0,01486095	0,01647849	0,02549022	0,02459119
65	0,02335122	0,02238686	0,01517508	0,01674299	0,02591357	0,02494674
66	0,02383259	0,02279537	0,01553315	0,01704763	0,02639617	0,02535629
67	0,02434107	0,02323941	0,01591133	0,01737873	0,02690595	0,02580147
68	0,02484958	0,02370775	0,01628948	0,01772791	0,02741577	0,02627101
69	0,02531438	0,02419153	0,01663510	0,01808856	0,02788177	0,02675603
70	0,02569230	0,02466260	0,01691607	0,01843969	0,02826066	0,02722831
71	0,02594418	0,02509284	0,01710332	0,01876036	0,02851318	0,02765966
72	0,02605113	0,02545692	0,01718283	0,01903168	0,02862041	0,02802468
73	0,02599425	0,02574882	0,01714055	0,01924919	0,02856339	0,02831732
74	0,02576921	0,02594249	0,01697325	0,01939350	0,02833777	0,02851150
75	0,02538270	0,02602289	0,01668589	0,01945340	0,02795026	0,02859209
76	0,02485163	0,02597743	0,01629101	0,01941953	0,02741783	0,02854652
77	0,02419360	0,02580295	0,01580165	0,01928952	0,02675811	0,02837159
78	0,02343096	0,02549572	0,01523440	0,01906059	0,02599351	0,02806358
79	0,02258309	0,02506486	0,01460361	0,01873950	0,02514346	0,02763160
80	0,02167445	0,02450425	0,01392748	0,01832166	0,02423250	0,02706955
81	0,02071541	0,02381520	0,01321366	0,01780802	0,02327100	0,02637873
82	0,01972490	0,02300732	0,01247624	0,01720567	0,02227796	0,02556878
83	0,01874172	0,02209869	0,01174408	0,01652807	0,02129226	0,02465783
84	0,01779590	0,02111098	0,01103958	0,01579131	0,02034403	0,02366759
85	0,01688653	0,02005839	0,01036206	0,01500595	0,01943234	0,02261230
86	0,01601311	0,01896550	0,00971119	0,01419030	0,01855670	0,02151662
87	0,01515958	0,01784943	0,00907499	0,01335712	0,01770100	0,02039770
88	0,01430337	0,01672797	0,00843666	0,01251967	0,01684261	0,01927338
89	0,01343795	0,01560419	0,00779132	0,01168026	0,01597498	0,01814674
90	0,01262835	0,01453824	0,00752827	0,01088382	0,01516333	0,01707808
91	0,01192950	0,01358644	0,00752827	0,01017249	0,01446271	0,01612386
92	0,01134117	0,01274847	0,00752827	0,00954608	0,01387288	0,01528376
93	0,01086315	0,01202404	0,00752827	0,00900445	0,01339365	0,01455749
94	0,01049529	0,01141290	0,00752827	0,00854744	0,01302486	0,01394480
95	0,01023747	0,01091485	0,00752827	0,00817495	0,01276639	0,01344549
96	0,01008961	0,01052972	0,00752827	0,00788688	0,01261815	0,01305938
97	0,01005034	0,01025737	0,00752827	0,00768315	0,01257878	0,01278634
98	0,01005034	0,01009773	0,00752827	0,00756372	0,01257878	0,01262629
99	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
100	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
101	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
102	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
	Starttrend 2. Ordnung		Zieltrend 2. Ordnung		Trend 1. Ordnung	

	Männer	Frauen	Männer	Frauen	Männer	Frauen
Alter	$F(x)$	$F(y)$	$F(x)$	$F(y)$	$F(x)$	$F(y)$
103	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
104	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
105	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
106	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
107	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
108	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
109	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
110	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
111	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
112	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
113	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
114	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
115	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
116	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
117	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
118	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
119	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
120	0,01005034	0,01005034	0,00752827	0,00752827	0,01257878	0,01257878
121	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000	0,00000000

Teil C

Grundtafel und Altersverschiebung

Tabelle 1: Grundtafel für die Altersverschiebung							
Männer				Frauen			
Alter	Grundtafel 1965 q_x^{GT}	Alter	Grundtafel 1965 q_x^{GT}	Alter	Grundtafel 1965 q_y^{GT}	Alter	Grundtafel 1965 q_y^{GT}
0	0,000083	61	0,002957	0	0,000066	61	0,001771
1	0,000083	62	0,003176	1	0,000066	62	0,001876
2	0,000083	63	0,003432	2	0,000066	63	0,001986
3	0,000083	64	0,003707	3	0,000066	64	0,002096
4	0,000083	65	0,003980	4	0,000066	65	0,002229
5	0,000083	66	0,004270	5	0,000066	66	0,002345
6	0,000083	67	0,004631	6	0,000066	67	0,002520
7	0,000083	68	0,004995	7	0,000066	68	0,002732
8	0,000083	69	0,005363	8	0,000066	69	0,002959
9	0,000083	70	0,005744	9	0,000066	70	0,003199
10	0,000083	71	0,006150	10	0,000066	71	0,003478
11	0,000098	72	0,006605	11	0,000071	72	0,003780
12	0,000104	73	0,007122	12	0,000075	73	0,004090
13	0,000114	74	0,007722	13	0,000079	74	0,004446
14	0,000140	75	0,008460	14	0,000092	75	0,004864
15	0,000192	76	0,009337	15	0,000120	76	0,005328
16	0,000276	77	0,010403	16	0,000144	77	0,005823
17	0,000364	78	0,011693	17	0,000166	78	0,006429
18	0,000596	79	0,013259	18	0,000201	79	0,007203
19	0,000598	80	0,015167	19	0,000201	80	0,008215
20	0,000598	81	0,017450	20	0,000201	81	0,009536
21	0,000598	82	0,020162	21	0,000201	82	0,011237
22	0,000598	83	0,023324	22	0,000201	83	0,013343
23	0,000598	84	0,026970	23	0,000201	84	0,015844
24	0,000598	85	0,031142	24	0,000222	85	0,018792
25	0,000598	86	0,035854	25	0,000225	86	0,022273
26	0,000598	87	0,041159	26	0,000225	87	0,026353
27	0,000598	88	0,047090	27	0,000235	88	0,031049
28	0,000598	89	0,053666	28	0,000258	89	0,036366
29	0,000598	90	0,060681	29	0,000280	90	0,042123
30	0,000598	91	0,067908	30	0,000291	91	0,048071
31	0,000605	92	0,075209	31	0,000302	92	0,054145
32	0,000626	93	0,082462	32	0,000318	93	0,060268
33	0,000663	94	0,089515	33	0,000344	94	0,066351
34	0,000713	95	0,096209	34	0,000385	95	0,072275
35	0,000754	96	0,102378	35	0,000423	96	0,077904
36	0,000805	97	0,107876	36	0,000464	97	0,083095
37	0,000871	98	0,113045	37	0,000508	98	0,087727
38	0,000940	99	0,118108	38	0,000550	99	0,091681
39	0,001008	100	0,121553	39	0,000593	100	0,100158
40	0,001073	101	0,126442	40	0,000642	101	0,104765
41	0,001137	102	0,131302	41	0,000693	102	0,109394
42	0,001197	103	0,136130	42	0,000743	103	0,114045
43	0,001259	104	0,140927	43	0,000788	104	0,118719
44	0,001325	105	0,145690	44	0,000830	105	0,123417
45	0,001395	106	0,150416	45	0,000874	106	0,128138
46	0,001473	107	0,155105	46	0,000921	107	0,132883
47	0,001557	108	0,159752	47	0,000971	108	0,137652
48	0,001644	109	0,164354	48	0,001022	109	0,142443
49	0,001735	110	0,168907	49	0,001069	110	0,147255
50	0,001826	111	0,173407	50	0,001111	111	0,152087
51	0,001924	112	0,177848	51	0,001149	112	0,156935
52	0,002023	113	0,182224	52	0,001182	113	0,161796
53	0,002121	114	0,186528	53	0,001218	114	0,166665
54	0,002212	115	0,190752	54	0,001259	115	0,171536
55	0,002294	116	0,194887	55	0,001306	116	0,176401
56	0,002370	117	0,198923	56	0,001363	117	0,181250
57	0,002451	118	0,202848	57	0,001430	118	0,186074
58	0,002540	119	0,206649	58	0,001504	119	0,190855
59	0,002649	120	0,210311	59	0,001585	120	0,195579
60	0,002781	121	1,000000	60	0,001674	121	1,000000

Tabelle 2: Altersverschiebung gerundet

Tabelle 2: Altersverschiebung gerundet							
Männer				Frauen			
Geburts- jahr	Altersver- schiebung	Geburts- jahr	Altersver- schiebung	Geburts- jahr	Altersver- schiebung	Geburts- jahr	Altersver- schiebung
1910	12	1966	-1	1910	11	1966	-1
1911	12	1967	-1	1911	11	1967	-1
1912	12	1968	-1	1912	11	1968	-1
1913	12	1969	-1	1913	11	1969	-1
1914	12	1970	-2	1914	11	1970	-2
1915	12	1971	-2	1915	11	1971	-2
1916	12	1972	-2	1916	11	1972	-2
1917	12	1973	-2	1917	10	1973	-2
1918	11	1974	-3	1918	10	1974	-2
1919	10	1975	-3	1919	9	1975	-3
1920	9	1976	-3	1920	8	1976	-3
1921	8	1977	-3	1921	8	1977	-3
1922	7	1978	-4	1922	7	1978	-3
1923	7	1979	-4	1923	7	1979	-3
1924	7	1980	-4	1924	7	1980	-4
1925	7	1981	-4	1925	6	1981	-4
1926	6	1982	-5	1926	6	1982	-4
1927	6	1983	-5	1927	6	1983	-4
1928	6	1984	-5	1928	6	1984	-4
1929	6	1985	-5	1929	6	1985	-5
1930	6	1986	-6	1930	6	1986	-5
1931	6	1987	-6	1931	6	1987	-5
1932	6	1988	-6	1932	6	1988	-5
1933	6	1989	-6	1933	6	1989	-5
1934	6	1990	-7	1934	5	1990	-6
1935	5	1991	-7	1935	5	1991	-6
1936	5	1992	-7	1936	5	1992	-6
1937	5	1993	-7	1937	5	1993	-6
1938	5	1994	-7	1938	5	1994	-7
1939	5	1995	-8	1939	5	1995	-7
1940	5	1996	-8	1940	4	1996	-7
1941	5	1997	-8	1941	4	1997	-7
1942	4	1998	-8	1942	4	1998	-7
1943	4	1999	-9	1943	4	1999	-8
1944	4	2000	-9	1944	4	2000	-8
1945	4	2001	-9	1945	4	2001	-8
1946	4	2002	-9	1946	3	2002	-8
1947	4	2003	-10	1947	3	2003	-8
1948	3	2004	-10	1948	3	2004	-8
1949	3	2005	-10	1949	3	2005	-9
1950	3	2006	-10	1950	3	2006	-9
1951	3	2007	-10	1951	2	2007	-9
1952	3	2008	-11	1952	2	2008	-9
1953	2	2009	-11	1953	2	2009	-9
1954	2	2010	-11	1954	2	2010	-10
1955	2	2011	-11	1955	2	2011	-10
1956	2	2012	-12	1956	1	2012	-10
1957	1	2013	-12	1957	1	2013	-10
1958	1	2014	-12	1958	1	2014	-10
1959	1	2015	-12	1959	1	2015	-11
1960	1	2016	-12	1960	1	2016	-11
1961	0	2017	-13	1961	0	2017	-11
1962	0	2018	-13	1962	0	2018	-11
1963	0	2019	-13	1963	0	2019	-11
1964	0	2020	-13	1964	0	2020	-12
1965	0			1965	0		

Anhang 2 Tabellen zu Vergleichen mit anderen Sterbetafeln

Teil A Vergleiche mit der Sterbetafel DAV 1994 R

Tabelle 1: Vergleich der Nettojahresprämien für eine aufgeschobene vorschüssige Jahresrente vom Betrag 100									
Männer		Beginn in		2005					
Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung									
Endalter	Zins Eintritts- alter	DAV 1994R (1)	DAV 2004R Selekt (2)	DAV 2004R Aggregat (3)	DAV 2004R GT mit AV (4)	(2)/(1)	(3)/(2)	(4)/(2)	(4)/(3)
70	15	11,263	14,464	14,480	15,044	128,4%	100,1%	104,0%	103,9%
	20	13,230	16,910	16,928	17,224	127,8%	100,1%	101,9%	101,8%
	25	15,677	19,922	19,942	20,337	127,1%	100,1%	102,1%	102,0%
	30	18,785	23,709	23,730	24,263	126,2%	100,1%	102,3%	102,2%
	35	22,844	28,601	28,623	29,352	125,2%	100,1%	102,6%	102,5%
	40	28,346	35,156	35,178	35,178	124,0%	100,1%	100,1%	100,0%
	45	36,187	44,382	44,401	44,498	122,6%	100,0%	100,3%	100,2%
	50	48,181	58,300	58,309	58,548	121,0%	100,0%	100,4%	100,4%
	55	68,575	81,639	81,626	82,066	119,1%	100,0%	100,5%	100,5%
	60	110,196	128,642	128,570	129,352	116,7%	99,9%	100,6%	100,6%
	65	237,279	270,967	270,683	272,110	114,2%	99,9%	100,4%	100,5%
65	15	15,872	19,313	19,356	19,893	121,7%	100,2%	103,0%	102,8%
	20	18,870	22,864	22,919	23,171	121,2%	100,2%	101,3%	101,1%
	25	22,683	27,346	27,416	27,784	120,6%	100,3%	101,6%	101,3%
	30	27,663	33,153	33,244	33,782	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	35	34,402	40,947	41,068	41,860	119,0%	100,3%	102,2%	101,9%
	40	43,976	51,930	52,095	52,095	118,1%	100,3%	100,3%	100,0%
	45	58,559	68,507	68,741	68,923	117,0%	100,3%	100,6%	100,3%
	50	83,246	96,302	96,654	97,142	115,7%	100,4%	100,9%	100,5%
	55	133,357	152,200	152,795	153,839	114,1%	100,4%	101,1%	100,7%
	60	285,688	320,672	322,012	324,655	112,2%	100,4%	101,2%	100,8%
60	15	21,792	25,436	25,540	26,054	116,7%	100,4%	102,4%	102,0%
	20	26,260	30,534	30,673	30,878	116,3%	100,5%	101,1%	100,7%
	25	32,102	37,157	37,344	37,683	115,7%	100,5%	101,4%	100,9%
	30	40,005	46,060	46,317	46,864	115,1%	100,6%	101,7%	101,2%
	35	51,220	58,613	58,976	59,851	114,4%	100,6%	102,1%	101,5%
	40	68,252	77,569	78,103	78,103	113,7%	100,7%	100,7%	100,0%
	45	96,991	109,353	110,187	110,500	112,7%	100,8%	101,0%	100,3%
	50	155,141	173,259	174,725	175,676	111,7%	100,8%	101,4%	100,5%
	55	331,266	365,802	369,234	371,928	110,4%	100,9%	101,7%	100,7%
	55	15	29,488	33,360	33,521	34,022	113,1%	100,5%	102,0%
20		36,118	40,721	40,939	41,101	112,7%	100,5%	100,9%	100,4%
25		45,097	50,637	50,938	51,256	112,3%	100,6%	101,2%	100,6%
30		57,833	64,632	65,060	65,634	111,8%	100,7%	101,5%	100,9%
35		77,159	85,770	86,402	87,409	111,2%	100,7%	101,9%	101,2%
40		109,693	121,217	122,210	122,210	110,5%	100,8%	100,8%	100,0%
45		175,368	192,476	194,229	194,790	109,8%	100,9%	101,2%	100,3%

	50	373,913	407,105	411,224	413,542	108,9%	101,0%	101,6%	100,6%
--	----	---------	---------	---------	---------	--------	--------	--------	--------

Tabelle 2: Vergleich der Nettojahresprämien für eine aufgeschobene vorschüssige Jahresrente vom Betrag 100

Frauen									
Beginn in 2005									
Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung									
Endalter	Zins Eintrittsalter	DAV 1994R	DAV 2004R Selekt	DAV 2004R Aggregat	DAV 2004R GT mit AV				
		2,75%	2,75%	2,75%	2,75%	(2)/(1)	(3)/(2)	(4)/(2)	(4)/(3)
		(1)	(2)	(3)	(4)	(2)/(1)	(3)/(2)	(4)/(2)	(4)/(3)
70	15	13,630	15,846	15,887	16,285	116,3%	100,3%	102,8%	102,5%
	20	16,078	18,607	18,660	19,115	115,7%	100,3%	102,7%	102,4%
	25	19,121	22,021	22,088	22,620	115,2%	100,3%	102,7%	102,4%
	30	22,985	26,330	26,418	27,051	114,6%	100,3%	102,7%	102,4%
	35	28,022	31,917	32,032	32,802	113,9%	100,4%	102,8%	102,4%
	40	34,823	39,418	39,572	39,572	113,2%	100,4%	100,4%	100,0%
	45	44,456	49,981	50,192	50,158	112,4%	100,4%	100,4%	99,9%
	50	59,051	65,903	66,202	66,098	111,6%	100,5%	100,3%	99,8%
	55	83,596	92,554	93,006	92,740	110,7%	100,5%	100,2%	99,7%
	60	133,117	146,094	146,857	146,176	109,7%	100,5%	100,1%	99,5%
65	282,973	307,461	309,175	315,923	108,7%	100,6%	102,8%	102,2%	
65	15	18,530	20,824	20,889	21,272	112,4%	100,3%	102,2%	101,8%
	20	22,106	24,741	24,826	25,273	111,9%	100,3%	102,2%	101,8%
	25	26,652	29,700	29,814	30,350	111,4%	100,4%	102,2%	101,8%
	30	32,589	36,147	36,300	36,961	110,9%	100,4%	102,3%	101,8%
	35	40,614	44,823	45,033	45,873	110,4%	100,5%	102,3%	101,9%
	40	51,987	57,067	57,361	57,361	109,8%	100,5%	100,5%	100,0%
	45	69,234	75,553	75,982	75,985	109,1%	100,6%	100,6%	100,0%
	50	98,236	106,525	107,190	107,181	108,4%	100,6%	100,6%	100,0%
	55	156,658	168,729	169,890	169,796	107,7%	100,7%	100,6%	99,9%
	60	332,946	355,996	358,688	358,168	106,9%	100,8%	100,6%	99,9%
60	15	24,737	27,109	27,213	27,585	109,6%	100,4%	101,8%	101,4%
	20	29,893	32,642	32,781	33,225	109,2%	100,4%	101,8%	101,4%
	25	36,634	39,849	40,037	40,586	108,8%	100,5%	101,8%	101,4%
	30	45,754	49,565	49,824	50,528	108,3%	100,5%	101,9%	101,4%
	35	58,686	63,293	63,662	64,601	107,9%	100,6%	102,1%	101,5%
	40	78,302	84,048	84,591	84,591	107,3%	100,6%	100,6%	100,0%
	45	111,310	118,856	119,709	119,764	106,8%	100,7%	100,8%	100,0%
	50	177,806	188,802	190,304	190,451	106,2%	100,8%	100,9%	100,1%
	55	378,304	399,328	402,849	403,161	105,6%	100,9%	101,0%	100,1%
	55	15	32,734	35,214	35,358	35,727	107,6%	100,4%	101,5%
20		40,187	43,095	43,290	43,740	107,2%	100,5%	101,5%	101,0%
25		50,278	53,734	54,004	54,581	106,9%	100,5%	101,6%	101,1%
30		64,592	68,784	69,169	69,941	106,5%	100,6%	101,7%	101,1%
35		86,310	91,555	92,125	93,219	106,1%	100,6%	101,8%	101,2%
40		122,848	129,776	130,674	130,674	105,6%	100,7%	100,7%	100,0%
45		196,490	206,625	208,212	208,360	105,2%	100,8%	100,8%	100,1%
50		418,564	438,006	441,739	442,319	104,6%	100,9%	101,0%	100,1%

Tabelle 3: Vergleich der Nettoeinmalprämien für eine sofortbeginnende vorschüssige Jahresrente vom Betrag 1

Männer

Beginn in 2005

Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung

	Zins Rentenbeginn	DAV 1994R 2,75% (1)	DAV 2004R Selekt 2,75% (2)	DAV 2004R Aggregat 2,75% (3)	DAV 2004R GT mit AV 2,75% (4)	(2)/(1)	(3)/(2)	(4)/(2)	(4)/(3)
50		22,337	23,898	24,112	24,239	107,0%	100,9%	101,4%	100,5%
51		21,936	23,504	23,726	23,926	107,1%	100,9%	101,8%	100,8%
52		21,526	23,100	23,330	23,607	107,3%	101,0%	102,2%	101,2%
53		21,109	22,689	22,926	22,946	107,5%	101,0%	101,1%	100,1%
54		20,685	22,270	22,513	22,603	107,7%	101,1%	101,5%	100,4%
55		20,256	21,844	22,090	22,251	107,8%	101,1%	101,9%	100,7%
56		19,821	21,410	21,656	21,891	108,0%	101,1%	102,2%	101,1%
57		19,381	20,969	21,212	21,523	108,2%	101,2%	102,6%	101,5%
58		18,936	20,522	20,756	20,761	108,4%	101,1%	101,2%	100,0%
59		18,486	20,068	20,289	20,369	108,6%	101,1%	101,5%	100,4%
60		18,029	19,608	19,812	19,971	108,8%	101,0%	101,9%	100,8%
61		17,565	19,142	19,323	19,565	109,0%	100,9%	102,2%	101,3%
62		17,093	18,670	18,825	19,152	109,2%	100,8%	102,6%	101,7%
63		16,614	18,191	18,319	18,731	109,5%	100,7%	103,0%	102,2%
64		16,129	17,704	17,806	17,868	109,8%	100,6%	100,9%	100,4%
65		15,639	17,210	17,286	17,426	110,0%	100,4%	101,3%	100,8%
66		15,146	16,708	16,761	16,975	110,3%	100,3%	101,6%	101,3%
67		14,652	16,201	16,231	16,516	110,6%	100,2%	101,9%	101,8%
68		14,159	15,689	15,699	16,048	110,8%	100,1%	102,3%	102,2%
69		13,665	15,173	15,165	15,573	111,0%	99,9%	102,6%	102,7%
70		13,171	14,654	14,630	15,090	111,3%	99,8%	103,0%	103,1%
71		12,677	14,132	14,093	14,107	111,5%	99,7%	99,8%	100,1%
72		12,184	13,607	13,556	13,609	111,7%	99,6%	100,0%	100,4%
73		11,695	13,082	13,018	13,109	111,9%	99,5%	100,2%	100,7%
74		11,212	12,558	12,480	12,609	112,0%	99,4%	100,4%	101,0%
75		10,739	12,036	11,943	12,112	112,1%	99,2%	100,6%	101,4%
76		10,276	11,518	11,409	11,621	112,1%	99,1%	100,9%	101,9%
77		9,826	11,005	10,879	11,137	112,0%	98,8%	101,2%	102,4%
78		9,389	10,500	10,354	10,665	111,8%	98,6%	101,6%	103,0%
79		8,966	10,005	9,836	10,206	111,6%	98,3%	102,0%	103,8%
80		8,561	9,522	9,329	9,339	111,2%	98,0%	98,1%	100,1%
81		8,174	9,052	8,834	8,936	110,8%	97,6%	98,7%	101,2%
82		7,807	8,599	8,354	8,557	110,1%	97,2%	99,5%	102,4%
83		7,462	8,164	7,893	8,205	109,4%	96,7%	100,5%	104,0%
84		7,141	7,748	7,450	7,586	108,5%	96,2%	97,9%	101,8%
85		6,842	7,353	7,029	7,075	107,5%	95,6%	96,2%	100,6%
86		6,567	6,980	6,631	6,657	106,3%	95,0%	95,4%	100,4%
87		6,314	6,630	6,258	6,306	105,0%	94,4%	95,1%	100,8%
88		6,081	6,303	5,910	5,997	103,7%	93,8%	95,1%	101,5%
89		5,867	6,000	5,588	5,845	102,3%	93,1%	97,4%	104,6%
90		5,671	5,719	5,290	5,699	100,9%	92,5%	99,6%	107,7%

Tabelle 4: Vergleich der Nettoeinmalprämien für eine sofortbeginnende vorschüssige Jahresrente vom Betrag 1

Frauen									
Beginn in 2005									
Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung									
	Zins	DAV 1994R	DAV 2004R	DAV 2004R	DAV 2004R				
	Rentenbeginn	2,75%	Selekt	Aggregat	GT mit AV	(2)/(1)	(3)/(2)	(4)/(2)	(4)/(3)
		(1)	(2)	(3)	(4)				
50		24,516	25,397	25,603	25,642	103,6%	100,8%	101,0%	100,2%
51		24,150	25,040	25,250	25,349	103,7%	100,8%	101,2%	100,4%
52		23,774	24,674	24,888	25,050	103,8%	100,9%	101,5%	100,6%
53		23,388	24,298	24,516	24,742	103,9%	100,9%	101,8%	100,9%
54		22,992	23,912	24,134	24,427	104,0%	100,9%	102,2%	101,2%
55		22,587	23,518	23,741	23,773	104,1%	100,9%	101,1%	100,1%
56		22,172	23,115	23,337	23,435	104,3%	101,0%	101,4%	100,4%
57		21,747	22,702	22,923	23,088	104,4%	101,0%	101,7%	100,7%
58		21,312	22,280	22,499	22,734	104,5%	101,0%	102,0%	101,0%
59		20,867	21,849	22,064	22,371	104,7%	101,0%	102,4%	101,4%
60		20,410	21,409	21,618	21,621	104,9%	101,0%	101,0%	100,0%
61		19,943	20,960	21,161	21,232	105,1%	101,0%	101,3%	100,3%
62		19,465	20,501	20,693	20,835	105,3%	100,9%	101,6%	100,7%
63		18,977	20,034	20,215	20,428	105,6%	100,9%	102,0%	101,1%
64		18,480	19,555	19,725	20,013	105,8%	100,9%	102,3%	101,5%
65		17,975	19,066	19,225	19,590	106,1%	100,8%	102,7%	101,9%
66		17,463	18,566	18,714	18,717	106,3%	100,8%	100,8%	100,0%
67		16,946	18,056	18,192	18,267	106,5%	100,8%	101,2%	100,4%
68		16,424	17,538	17,662	17,810	106,8%	100,7%	101,5%	100,8%
69		15,898	17,013	17,124	17,343	107,0%	100,7%	101,9%	101,3%
70		15,367	16,482	16,580	16,867	107,3%	100,6%	102,3%	101,7%
71		14,832	15,946	16,029	16,383	107,5%	100,5%	102,7%	102,2%
72		14,293	15,407	15,474	15,390	107,8%	100,4%	99,9%	99,5%
73		13,751	14,864	14,914	14,881	108,1%	100,3%	100,1%	99,8%
74		13,208	14,319	14,350	14,367	108,4%	100,2%	100,3%	100,1%
75		12,666	13,773	13,783	13,848	108,7%	100,1%	100,5%	100,5%
76		12,128	13,228	13,215	13,328	109,1%	99,9%	100,8%	100,9%
77		11,595	12,685	12,646	12,811	109,4%	99,7%	101,0%	101,3%
78		11,068	12,144	12,075	12,300	109,7%	99,4%	101,3%	101,9%
79		10,550	11,607	11,504	11,798	110,0%	99,1%	101,6%	102,6%
80		10,042	11,077	10,935	11,307	110,3%	98,7%	102,1%	103,4%
81		9,549	10,556	10,374	10,376	110,5%	98,3%	98,3%	100,0%
82		9,073	10,049	9,824	9,943	110,8%	97,8%	98,9%	101,2%
83		8,615	9,560	9,292	9,535	111,0%	97,2%	99,7%	102,6%
84		8,179	9,092	8,781	8,803	111,2%	96,6%	96,8%	100,3%
85		7,765	8,647	8,293	8,477	111,4%	95,9%	98,0%	102,2%
86		7,374	8,226	7,831	7,896	111,5%	95,2%	96,0%	100,8%
87		7,008	7,829	7,396	7,397	111,7%	94,5%	94,5%	100,0%
88		6,665	7,457	6,990	7,168	111,9%	93,7%	96,1%	102,5%
89		6,348	7,112	6,615	6,728	112,0%	93,0%	94,6%	101,7%
90		6,055	6,793	6,270	6,540	112,2%	92,3%	96,3%	104,3%

Tabelle 5: Vergleich der Anwartschaftsbarwerte für eine aufgeschobene vorschüssige Jahresrente vom Betrag 1

Männer									
Beginn in 2005									
Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung									
Endalter	Zins Eintrittsalter	DAV 1994R 2,75% (1)	DAV 2004R Selekt 2,75% (2)	DAV 2004R Aggregat 2,75% (3)	DAV 2004R GT mit AV 2,75% (4)	(2)/(1)	(3)/(2)	(4)/(2)	(4)/(3)
70	15	3,225	4,147	4,152	4,308	128,6%	100,1%	103,9%	103,8%
	20	3,618	4,636	4,640	4,709	128,1%	100,1%	101,6%	101,5%
	25	4,060	5,178	5,183	5,272	127,5%	100,1%	101,8%	101,7%
	30	4,554	5,775	5,781	5,901	126,8%	100,1%	102,2%	102,1%
	35	5,109	6,430	6,435	6,597	125,9%	100,1%	102,6%	102,5%
	40	5,732	7,155	7,160	7,160	124,8%	100,1%	100,1%	100,0%
	45	6,439	7,965	7,969	8,001	123,7%	100,0%	100,4%	100,4%
	50	7,263	8,880	8,881	8,951	122,3%	100,0%	100,8%	100,8%
	55	8,240	9,929	9,927	10,030	120,5%	100,0%	101,0%	101,0%
	60	9,452	11,150	11,144	11,263	118,0%	99,9%	101,0%	101,1%
65	11,002	12,636	12,623	12,743	114,9%	99,9%	100,8%	100,9%	
65	15	4,364	5,311	5,323	5,466	121,7%	100,2%	102,9%	102,7%
	20	4,916	5,962	5,977	6,028	121,3%	100,2%	101,1%	100,9%
	25	5,539	6,691	6,708	6,782	120,8%	100,3%	101,4%	101,1%
	30	6,240	7,499	7,520	7,631	120,2%	100,3%	101,8%	101,5%
	35	7,032	8,394	8,419	8,578	119,4%	100,3%	102,2%	101,9%
	40	7,928	9,394	9,423	9,423	118,5%	100,3%	100,3%	100,0%
	45	8,949	10,522	10,558	10,600	117,6%	100,3%	100,7%	100,4%
	50	10,147	11,808	11,851	11,944	116,4%	100,4%	101,2%	100,8%
55	11,576	13,299	13,351	13,485	114,9%	100,4%	101,4%	101,0%	
60	13,355	15,054	15,117	15,268	112,7%	100,4%	101,4%	101,0%	
60	15	5,701	6,651	6,678	6,809	116,7%	100,4%	102,4%	102,0%
	20	6,441	7,490	7,524	7,561	116,3%	100,5%	100,9%	100,5%
	25	7,280	8,434	8,477	8,537	115,9%	100,5%	101,2%	100,7%
	30	8,229	9,488	9,541	9,643	115,3%	100,6%	101,6%	101,1%
	35	9,306	10,662	10,728	10,885	114,6%	100,6%	102,1%	101,5%
	40	10,529	11,982	12,065	12,065	113,8%	100,7%	100,7%	100,0%
	45	11,931	13,483	13,586	13,638	113,0%	100,8%	101,2%	100,4%
	50	13,582	15,207	15,335	15,446	112,0%	100,8%	101,6%	100,7%
55	15,559	17,220	17,382	17,536	110,7%	100,9%	101,8%	100,9%	
55	15	7,256	8,201	8,241	8,363	113,0%	100,5%	102,0%	101,5%
	20	8,217	9,261	9,311	9,335	112,7%	100,5%	100,8%	100,3%
	25	9,311	10,459	10,521	10,570	112,3%	100,6%	101,1%	100,5%
	30	10,553	11,802	11,880	11,975	111,8%	100,7%	101,5%	100,8%
	35	11,966	13,306	13,404	13,559	111,2%	100,7%	101,9%	101,2%
	40	13,577	15,008	15,131	15,131	110,5%	100,8%	100,8%	100,0%
	45	15,432	16,953	17,108	17,167	109,9%	100,9%	101,3%	100,3%
	50	17,623	19,201	19,396	19,519	109,0%	101,0%	101,7%	100,6%

Tabelle 6: Vergleich der Anwartschaftsbarwerte für eine aufgeschobene vorschüssige Jahresrente vom Betrag 1

Frauen									
Beginn in 2005									
Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung									
Endalter	Zins Eintrittsalter	DAV 1994R 2,75% (1)	DAV 2004R Selekt 2,75% (2)	DAV 2004R Aggregat 2,75% (3)	DAV 2004R GT mit AV 2,75% (4)	(2)/(1)	(3)/(2)	(4)/(2)	(4)/(3)
70	15	3,933	4,565	4,577	4,687	116,1%	100,3%	102,7%	102,4%
	20	4,439	5,129	5,144	5,263	115,6%	100,3%	102,6%	102,3%
	25	5,006	5,757	5,775	5,908	115,0%	100,3%	102,6%	102,3%
	30	5,641	6,454	6,476	6,627	114,4%	100,3%	102,7%	102,3%
	35	6,354	7,229	7,255	7,429	113,8%	100,4%	102,8%	102,4%
	40	7,156	8,093	8,125	8,125	113,1%	100,4%	100,4%	100,0%
	45	8,064	9,062	9,100	9,104	112,4%	100,4%	100,5%	100,0%
	50	9,102	10,152	10,198	10,204	111,5%	100,5%	100,5%	100,1%
	55	10,284	11,385	11,440	11,439	110,7%	100,5%	100,5%	100,0%
	60	11,655	12,794	12,861	12,838	109,8%	100,5%	100,3%	99,8%
65	13,282	14,446	14,526	14,880	108,8%	100,6%	103,0%	102,4%	
65	15	5,126	5,751	5,769	5,871	112,2%	100,3%	102,1%	101,8%
	20	5,802	6,483	6,506	6,617	111,7%	100,3%	102,1%	101,7%
	25	6,563	7,303	7,331	7,457	111,3%	100,4%	102,1%	101,7%
	30	7,418	8,218	8,253	8,400	110,8%	100,4%	102,2%	101,8%
	35	8,384	9,242	9,285	9,459	110,2%	100,5%	102,3%	101,9%
	40	9,476	10,392	10,446	10,446	109,7%	100,5%	100,5%	100,0%
	45	10,720	11,691	11,758	11,767	109,1%	100,6%	100,7%	100,1%
	50	12,149	13,163	13,246	13,265	108,4%	100,6%	100,8%	100,1%
	55	13,787	14,842	14,944	14,962	107,7%	100,7%	100,8%	100,1%
	60	15,696	16,778	16,905	16,902	106,9%	100,8%	100,7%	100,0%
60	15	6,502	7,115	7,142	7,237	109,4%	100,4%	101,7%	101,3%
	20	7,375	8,041	8,075	8,179	109,0%	100,4%	101,7%	101,3%
	25	8,362	9,083	9,126	9,246	108,6%	100,5%	101,8%	101,3%
	30	9,474	10,252	10,305	10,448	108,2%	100,5%	101,9%	101,4%
	35	10,735	11,565	11,632	11,805	107,7%	100,6%	102,1%	101,5%
	40	12,166	13,048	13,132	13,132	107,2%	100,6%	100,6%	100,0%
	45	13,804	14,732	14,837	14,852	106,7%	100,7%	100,8%	100,1%
	50	15,691	16,651	16,784	16,814	106,1%	100,8%	101,0%	100,2%
	55	17,865	18,853	19,019	19,049	105,5%	100,9%	101,0%	100,2%
	55	15	8,086	8,686	8,721	8,810	107,4%	100,4%	101,4%
20		9,187	9,838	9,882	9,980	107,1%	100,5%	101,5%	101,0%
25		10,434	11,137	11,193	11,308	106,7%	100,5%	101,5%	101,0%
30		11,845	12,600	12,670	12,810	106,4%	100,6%	101,7%	101,1%
35		13,448	14,251	14,339	14,511	106,0%	100,6%	101,8%	101,2%
40		15,272	16,122	16,234	16,234	105,6%	100,7%	100,7%	100,0%
45		17,366	18,256	18,396	18,415	105,1%	100,8%	100,9%	100,1%
50		19,788	20,700	20,877	20,914	104,6%	100,9%	101,0%	100,2%

Tabelle 7: Vergleich der Deckungsrückstellungen für eine aufgeschobene vorschüssige Jahresrente vom Betrag 1

Männer Eintrittsalter 30 Laufzeit 35 Jahre									
Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung									
Beginn 2005	Zins abg. Dauer	DAV 1994R 2,75% (1)	DAV 2004R Selekt 2,75% (2)	DAV 2004R Aggregat 2,75% (3)	DAV 2004R GT mit AV 2,75% (4)	(2)/(1)	(3)/(2)	(4)/(2)	(4)/(3)
	0	0,000	0,000	0,000	0,000	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	1	0,284	0,341	0,342	0,347	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	2	0,577	0,691	0,693	0,704	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	3	0,877	1,051	1,054	1,072	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	4	1,187	1,422	1,426	1,449	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	5	1,504	1,802	1,807	1,837	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	6	1,831	2,194	2,200	2,236	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	7	2,167	2,596	2,604	2,646	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	8	2,513	3,010	3,019	3,069	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	9	2,868	3,436	3,446	3,503	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	10	3,234	3,875	3,885	3,949	119,8%	100,3%	101,9%	101,6%
	11	3,609	4,325	4,337	4,409	119,8%	100,3%	101,9%	101,7%
	12	3,996	4,789	4,802	4,882	119,8%	100,3%	101,9%	101,7%
	13	4,394	5,266	5,281	5,369	119,8%	100,3%	101,9%	101,7%
	14	4,804	5,757	5,773	5,870	119,9%	100,3%	102,0%	101,7%
	15	5,225	6,262	6,280	6,385	119,8%	100,3%	102,0%	101,7%
	16	5,660	6,783	6,801	6,916	119,8%	100,3%	102,0%	101,7%
	17	6,108	7,318	7,338	7,463	119,8%	100,3%	102,0%	101,7%
	18	6,570	7,869	7,891	8,026	119,8%	100,3%	102,0%	101,7%
	19	7,046	8,437	8,460	8,606	119,8%	100,3%	102,0%	101,7%
	20	7,536	9,022	9,047	9,203	119,7%	100,3%	102,0%	101,7%
	21	8,042	9,624	9,651	9,819	119,7%	100,3%	102,0%	101,7%
	22	8,564	10,245	10,273	10,453	119,6%	100,3%	102,0%	101,8%
	23	9,103	10,884	10,914	11,107	119,6%	100,3%	102,0%	101,8%
	24	9,659	11,543	11,575	11,781	119,5%	100,3%	102,1%	101,8%
	25	10,235	12,222	12,256	12,476	119,4%	100,3%	102,1%	101,8%
	26	10,831	12,922	12,957	13,193	119,3%	100,3%	102,1%	101,8%
	27	11,448	13,643	13,680	13,932	119,2%	100,3%	102,1%	101,8%
	28	12,088	14,386	14,426	14,695	119,0%	100,3%	102,1%	101,9%
	29	12,752	15,152	15,194	15,482	118,8%	100,3%	102,2%	101,9%
	30	13,441	15,943	15,986	16,293	118,6%	100,3%	102,2%	101,9%
	31	14,155	16,758	16,804	17,131	118,4%	100,3%	102,2%	101,9%
	32	14,896	17,600	17,649	17,995	118,2%	100,3%	102,2%	102,0%
	33	15,667	18,470	18,521	18,886	117,9%	100,3%	102,3%	102,0%
	34	16,468	19,371	19,424	19,808	117,6%	100,3%	102,3%	102,0%
	35	17,304	20,302	20,358	20,761	117,3%	100,3%	102,3%	102,0%

Tabelle 8: Vergleich der Deckungsrückstellungen für eine aufgeschobene vorschüssige Jahresrente vom Betrag 1

Frauen Eintrittsalter 30 Laufzeit 35 Jahre

Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung

Beginn 2005	Zins abg. Dauer	DAV 1994R	DAV 2004R Selekt	DAV 2004R Aggregat	DAV 2004R GT mit AV	(2)/(1)	(3)/(2)	(4)/(2)	(4)/(3)
		2,75% (1)	2,75% (2)	2,75% (3)	2,75% (4)				
	0	0,000	0,000	0,000	0,000	100,0%	100,0%	100,0%	100,0%
	1	0,335	0,372	0,373	0,380	110,9%	100,4%	102,3%	101,8%
	2	0,679	0,753	0,757	0,770	110,9%	100,4%	102,3%	101,8%
	3	1,033	1,146	1,151	1,172	110,9%	100,4%	102,3%	101,8%
	4	1,396	1,549	1,556	1,584	110,9%	100,4%	102,3%	101,8%
	5	1,770	1,964	1,972	2,008	110,9%	100,4%	102,3%	101,8%
	6	2,154	2,390	2,400	2,444	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	7	2,549	2,828	2,840	2,892	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	8	2,954	3,278	3,292	3,352	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	9	3,371	3,742	3,757	3,826	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	10	3,800	4,218	4,236	4,313	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	11	4,241	4,708	4,728	4,814	111,0%	100,4%	102,2%	101,8%
	12	4,694	5,212	5,234	5,329	111,0%	100,4%	102,2%	101,8%
	13	5,161	5,730	5,754	5,859	111,0%	100,4%	102,2%	101,8%
	14	5,641	6,263	6,289	6,404	111,0%	100,4%	102,2%	101,8%
	15	6,134	6,811	6,840	6,964	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	16	6,642	7,375	7,406	7,541	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	17	7,164	7,955	7,988	8,135	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	18	7,702	8,552	8,588	8,745	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	19	8,255	9,166	9,204	9,374	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	20	8,824	9,797	9,839	10,021	111,0%	100,4%	102,3%	101,8%
	21	9,409	10,447	10,492	10,686	111,0%	100,4%	102,3%	101,9%
	22	10,011	11,116	11,163	11,372	111,0%	100,4%	102,3%	101,9%
	23	10,630	11,804	11,854	12,077	111,0%	100,4%	102,3%	101,9%
	24	11,268	12,512	12,565	12,803	111,0%	100,4%	102,3%	101,9%
	25	11,924	13,241	13,297	13,551	111,0%	100,4%	102,3%	101,9%
	26	12,600	13,991	14,050	14,320	111,0%	100,4%	102,4%	101,9%
	27	13,296	14,763	14,825	15,112	111,0%	100,4%	102,4%	101,9%
	28	14,013	15,557	15,623	15,927	111,0%	100,4%	102,4%	101,9%
	29	14,751	16,376	16,445	16,767	111,0%	100,4%	102,4%	102,0%
	30	15,511	17,219	17,292	17,632	111,0%	100,4%	102,4%	102,0%
	31	16,295	18,088	18,164	18,523	111,0%	100,4%	102,4%	102,0%
	32	17,102	18,983	19,063	19,441	111,0%	100,4%	102,4%	102,0%
	33	17,936	19,906	19,990	20,388	111,0%	100,4%	102,4%	102,0%
	34	18,796	20,857	20,945	21,364	111,0%	100,4%	102,4%	102,0%
	35	19,685	21,838	21,930	22,371	110,9%	100,4%	102,4%	102,0%

Teil B **Vergleiche mit internationalen Sterbetafeln für Renten**

Beginn 2005

Rechnungszins 2,75%

Nettoprämien in € für 1 € vorschüssige Jahresrente

Männer

	absolut				relativ		
	1	2	3	4	2 in % von 1	3 in % von 1	4 in % von 1
	Deutschland	Schweiz	UK	Österreich	Schweiz	UK	Österreich
	DAV 2004 R	ER 2000	IA 92 mc	AVÖ 1996R			
sofortbeginnende Rente							
Rentenbeginnalter 60							
(Geb.jahr 1945) Nettoeinmalprämie	19,608	20,397	19,015	17,383	104,0%	97,0%	88,7%
aufgeschobene Rente							
Rentenbeginnalter 60							
Aufschubzeit 20 Jahre							
(Geb.jahr 1965, Beitrittalter 40)							
Nettoeinmalprämie	11,982	12,540	11,177	9,835	104,7%	93,3%	82,1%
Nettojahresprämie	0,776	0,810	0,720	0,641	104,4%	92,8%	82,6%
Aufschubzeit 30 Jahre							
(Geb.jahr 1975, Beitrittalter 30)							
Nettoeinmalprämie	9,488	9,835	8,634	7,601	103,7%	91,0%	80,1%
Nettojahresprämie	0,461	0,479	0,418	0,371	104,0%	90,6%	80,6%
Rentenbeginnalter 65							
Aufschubzeit 20 Jahre							
(Geb.jahr 1960, Beitrittalter 45)							
Nettoeinmalprämie	10,522	11,074	9,655	8,282	105,3%	91,8%	78,7%
Nettojahresprämie	0,685	0,717	0,625	0,545	104,7%	91,3%	79,5%
Aufschubzeit 30 Jahre							
(Geb.jahr 1970, Beitrittalter 35)							
Nettoeinmalprämie	8,394	8,787	7,492	6,404	104,7%	89,3%	76,3%
Nettojahresprämie	0,409	0,428	0,364	0,315	104,6%	88,8%	77,0%

Beginn 2005

Rechnungszins 2,75%

Nettoprämien in € für 1 € vorschüssige Jahresrente

Frauen

	absolut				relativ		
	1	2	3	4	2 in % von 1	3 in % von 1	4 in % von 1
	Deutschland	Schweiz	UK	Österreich	Schweiz	UK	Österreich
	DAV 2004 R	ER 2000	IA 92 mc	AVÖ 1996R			
sofortbeginnende Rente							
Rentenbeginnalter 60							
(Geb.jahr 1945) Nettoeinmalprämie	21,409	21,761	20,615	19,836	101,6%	96,3%	92,7%
aufgeschobene Rente							
Rentenbeginnalter 60							
Aufschubzeit 20 Jahre							
(Geb.jahr 1965, Beitrittssalter 40)							
Nettoeinmalprämie	13,048	13,059	12,130	11,652	100,1%	93,0%	89,3%
Nettojahresprämie	0,840	0,841	0,777	0,751	100,1%	92,5%	89,4%
Aufschubzeit 30 Jahre							
(Geb.jahr 1975, Beitrittssalter 30)							
Nettoeinmalprämie	10,252	10,156	9,300	9,037	99,1%	90,7%	88,2%
Nettojahresprämie	0,496	0,491	0,448	0,437	99,1%	90,4%	88,2%
Rentenbeginnalter 65							
Aufschubzeit 20 Jahre							
(Geb.jahr 1960, Beitrittssalter 45)							
Nettoeinmalprämie	11,691	11,726	10,719	10,188	100,3%	91,7%	87,1%
Nettojahresprämie	0,756	0,757	0,688	0,660	100,2%	91,0%	87,3%
Aufschubzeit 30 Jahre							
(Geb.jahr 1970, Beitrittssalter 35)							
Nettoeinmalprämie	9,242	9,162	8,241	7,923	99,1%	89,2%	85,7%
Nettojahresprämie	0,448	0,444	0,397	0,385	99,1%	88,7%	85,8%

Anhang 3 Abhängigkeit der Sterblichkeit von der Höhe der versicherten Rente

Um einen Zusammenhang zwischen Sterblichkeit und Höhe der versicherten Rente nachzuweisen, wurde die im Material von Münchener Rück und Gen Re beobachtete Sterblichkeit für verschiedene Rentenhöhenklassen im Verhältnis zur beobachteten Aggregatsterblichkeit aller Rentenhöhenklassen bestimmt. Die folgende Tabelle enthält die Ergebnisse dieser Berechnungen:

Jahresrente in Euro	Männer	Frauen
0-600	117%	111%
601-1200	110%	105%
1201-2000	101%	99%
2001-3500	90%	88%
3501-6000	89%	91%
> 6000	86%	91%
Aggregat	100%	100%

Die durchschnittliche Jahresrente beträgt im Beobachtungsmaterial zur Rentenbezugszeit 3.386 € für Männer und 2.507 € für Frauen. Im Beobachtungsmaterial zur Aufschubzeit beträgt die durchschnittliche Jahresrente 2.377 € für Männer und 1.619 € für Frauen. Aufgrund der Schiefe der Verteilung ist allerdings eine Betrachtung allein auf Grund der Durchschnittsrente nicht angemessen.

Auch die in Abschnitt 2.3 beschriebenen Daten der gesetzlichen Rentenversicherungen belegen eine niedrigere Sterblichkeit in höheren Rentenhöhenklassen (siehe Anhang 8).

Anhang 4 Bezugsjahr für die Basistafeln

Der mittlere Zeitpunkt des Beobachtungsmaterials wird definiert durch Gewichtung der Verweildauern der Jahre von 1995 bis 2002, also als

$$\frac{\sum_{t=1995}^{2002} t * VWD(t)}{\sum_{t=1995}^{2002} VWD(t)},$$

wobei $VWD(t)$ die gesamte nach Rentenhöhen gewichtete Verweildauer des Beobachtungsmaterials im Jahr t bezeichnet. Für den mittleren Zeitpunkt des Beobachtungsmaterials ergeben sich folgende Werte:

	Beobachtungsmaterial Aufschubzeit	Beobachtungsmaterial Rentenbezugszeit
Männer	1999,7	1999,6
Frauen	1999,9	1999,7

Bei der Wahl des Bezugsjahrs für die Basistafeln ist zu berücksichtigen, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten $q_{x,t}$ angewendet werden für im Kalenderjahr t *beginnende* Versicherungsjahre. Im Kalenderjahr t unterjährig beginnende Versicherungsjahre enden unterjährig im Kalenderjahr $t+1$. Das Beobachtungsmaterial des Jahres t bezieht sich hingegen genau auf das Kalenderjahr t . Deshalb erscheint es angemessen, die angegebenen Werte der mittleren Zeitpunkte des Beobachtungsmaterials für die Bestimmung des Bezugsjahrs der Basistafeln um 0,5 zu reduzieren. Durch Runden ergibt sich somit als Bezugsjahr der Basistafeln das Jahr 1999.

Für das Jahr 1999 als Bezugsjahr der Basistafeln spricht auch, dass 1999 das mittlere Jahr des Beobachtungszeitraums 1998/2000 ist: Bei der Extrapolation der Basistafeln für niedrige Alter werden Bevölkerungsdaten bis einschließlich 1998/2000 verwendet.

Anhang 5 Schätzung von Bevölkerungsterblichkeiten

Es werden Schätzer $\hat{q}_{x,1999}^{Bev}$ für die Bevölkerungsterblichkeiten des Jahres 1999 auf Basis der 28 abgekürzten Sterbetafel 1971/73 bis 1998/2000 für das frühere Bundesgebiet bestimmt (für 1986/88 wird die Allgemeine Deutsche Sterbetafel verwendet):

Für $t = 1972, 1973, \dots, 1999$ wird die Sterbewahrscheinlichkeit eines x -Jährigen nach der abgekürzten Sterbetafel der Jahre $t-1/t+1$ des Statistischen Bundesamtes mit $q_{x,t}^{Bev}$ bezeichnet. Mit logarithmisch-linearer Regression gemäß dem Ansatz

$$\ln(\hat{q}_{x,t}^{Bev}) = -\hat{F}^{Bev}(x) \cdot t + B(x)$$

ergeben sich daraus Schätzer $\hat{q}_{x,t}^{Bev}$ für die Bevölkerungsterblichkeiten im Jahr t und $\hat{F}^{Bev}(x)$ für den Bevölkerungstrend.

Die Schätzer $\hat{q}_{x,1999}^{Bev}$ für die Bevölkerungsterblichkeiten des Jahres 1999 werden in den Abschnitten 3.2.4, 3.3.1 und 3.3.3 bei der Extrapolation der Basistafeln für niedrige Alter sowie in Abschnitt 3.4.4 und in Anhang 6 als Vergleichsbasis verwendet. Die Schätzer $\hat{F}^{Bev}(x)$ entsprechen der Trendfunktion des in Abschnitt 4.1.2 betrachteten rohen Mittelfristtrends der Bevölkerung.

Anhang 6 Auswertungen zur Selektion

Für die Selektionsphasen $s = 1, \dots, 6$ wird die nach Rentenhöhen gewichtete relative Sterblichkeit im Verhältnis zur Bevölkerungsterblichkeit des Jahres 1999 ermittelt. Dazu wird

$$r_s = \frac{\sum_{t=1995}^{2002} \sum_{x=0}^{89} T_{x,t}^s}{\sum_{t=1995}^{2002} \sum_{x=0}^{89} \hat{q}_{x,1999}^{Bev} \cdot L_{x,t}^s}$$

berechnet mit

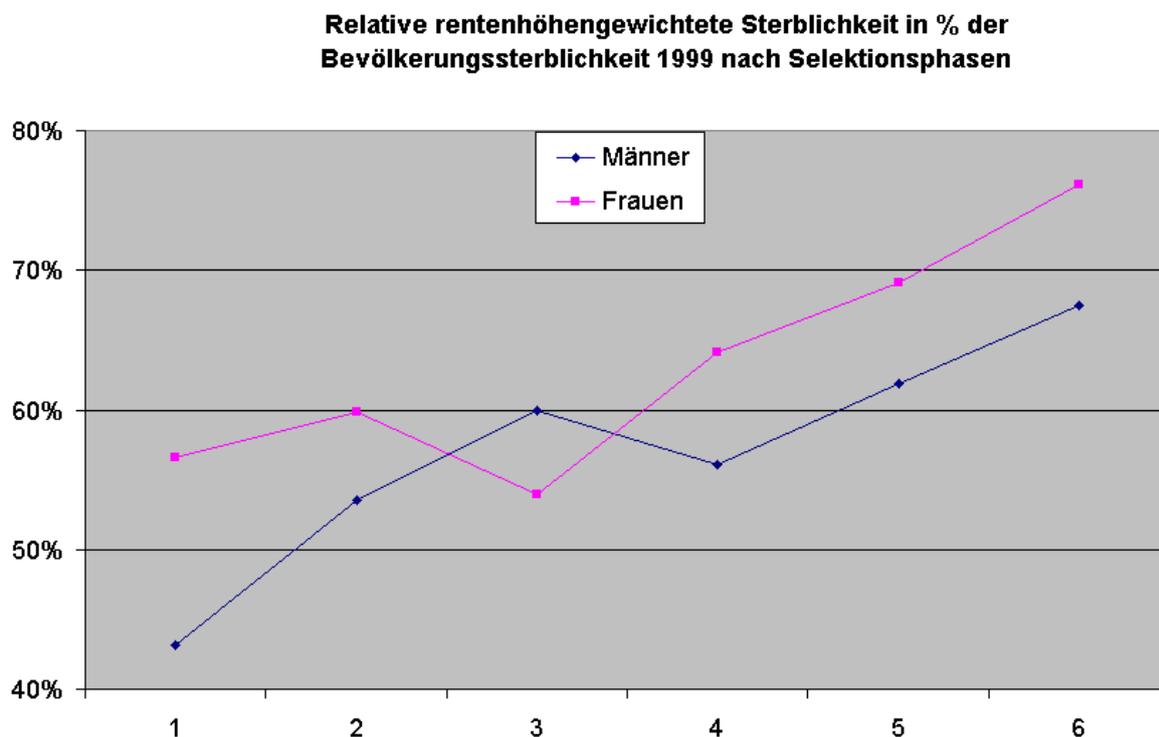
r_s relative Sterblichkeit in der Selektionsphase s ,

$T_{x,t}^s$ Tote wie in Abschnitt 3.2 definiert,

$L_{x,t}^s$ Lebende wie in Abschnitt 3.2 definiert und

$\hat{q}_{x,1999}^{Bev}$ Schätzer für die Bevölkerungsterblichkeit des Jahres 1999 (s. Anhang 5)

Die Werte r_s sind in der folgenden Grafik dargestellt:



Grafik 20: Relative rentenhöhengewichtete Sterblichkeit

Es ist Folgendes zu beobachten:

- Die Sterblichkeit in der Selektionsphase 1 ist für Männer niedriger als in allen folgenden Selektionsphasen. Für Frauen ist die Sterblichkeit in der Selektionsphase 1 niedriger als in den folgenden Selektionsphasen 2, 4, 5 und 6.

- Die Sterblichkeit in der Selektionsphase 6 ist für Männer und Frauen jeweils höher als in allen vorangehenden Selektionsphasen.
- In den Selektionsphasen 2 bis 5 sind für Männer und Frauen jeweils Schwankungen der Sterblichkeit zu beobachten.

Deshalb wird für die Selektionstafel ein Modell gewählt, bei welchem für die Selektionsphasen $s = 2, 3, 4, 5$ dieselben Sterbewahrscheinlichkeiten angesetzt werden.

Anhang 7 Bestimmung von Selektionsfaktoren

Rohe Referenzsterbewahrscheinlichkeiten werden wie folgt berechnet:

$$q_x^{ref} (roh) = \frac{\sum_{t=1995}^{2002} T_{x,t}^6}{\sum_{t=1995}^{2002} L_{x,t}^6}$$

Der Ausgleich der $q_x^{ref} (roh)$ im Altersbereich von 60 bis 99 Jahren erfolgt nach dem Verfahren von Whittaker-Henderson mit Gewicht $\sum_{t=1995}^{2002} L_{x,t}^6$ für die Sterbewahrscheinlichkeit des Alters x und Gewicht $g = 0,5$ für das Glättmaß aus zweiten Differenzen. Die Referenzsterbewahrscheinlichkeiten werden mit q_x^{ref} bezeichnet.

Der Selektionsfaktor für das Jahr 1 wird wie folgt berechnet:

$$f^1 = \frac{\sum_{t=1995}^{2002} \sum_{x=60}^{99} T_{x,t}^1}{\sum_{t=1995}^{2002} \sum_{x=60}^{99} q_x^{ref} \cdot L_{x,t}^1}$$

Der Selektionsfaktor für die Jahre 2–5 wird wie folgt berechnet:

$$f^{2-5} = \frac{\sum_{s=2}^5 \sum_{t=1995}^{2002} \sum_{x=60}^{99} T_{x,t}^s}{\sum_{s=2}^5 \sum_{t=1995}^{2002} \sum_{x=60}^{99} q_x^{ref} \cdot L_{x,t}^s}$$

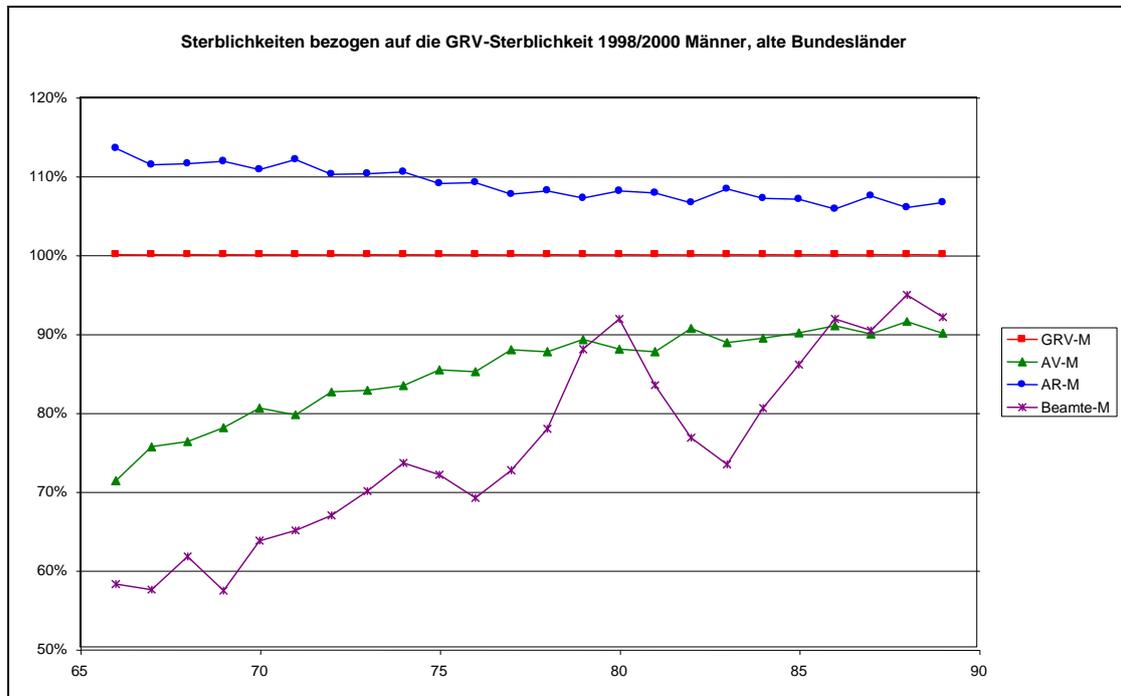
Damit ergeben sich folgende Selektionsfaktoren:

	Männer	Frauen
f^1	0,670538	0,712823
f^{2-5}	0,876209	0,798230

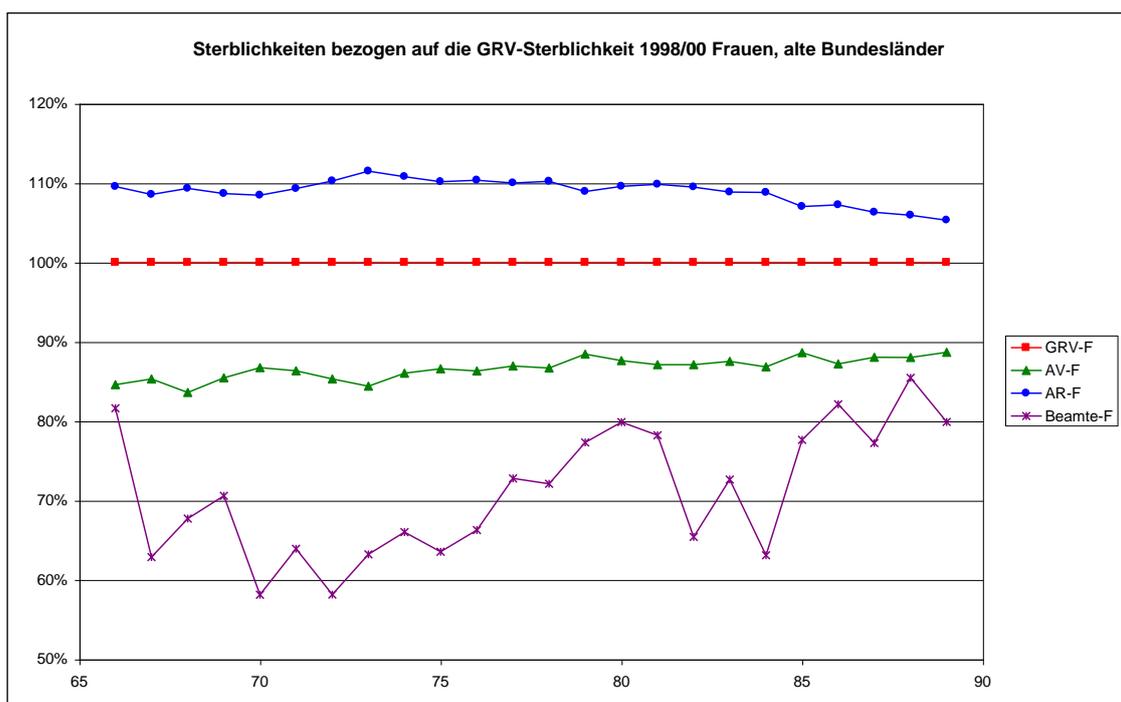
Anhang 8 Sozioökonomische Einflüsse auf die Sterblichkeit

Anhand der GRV-Daten sowie von Daten des statistischen Bundesamtes für Beamte sind Einflüsse verschiedener Ausprägungen des sozioökonomischen Status auf das Sterblichkeitsniveau zu erkennen:

- Versicherte der AR weisen höhere Sterbewahrscheinlichkeiten auf als Versicherte der AV, die wiederum höhere Sterbewahrscheinlichkeiten als die Beamten aufweisen.

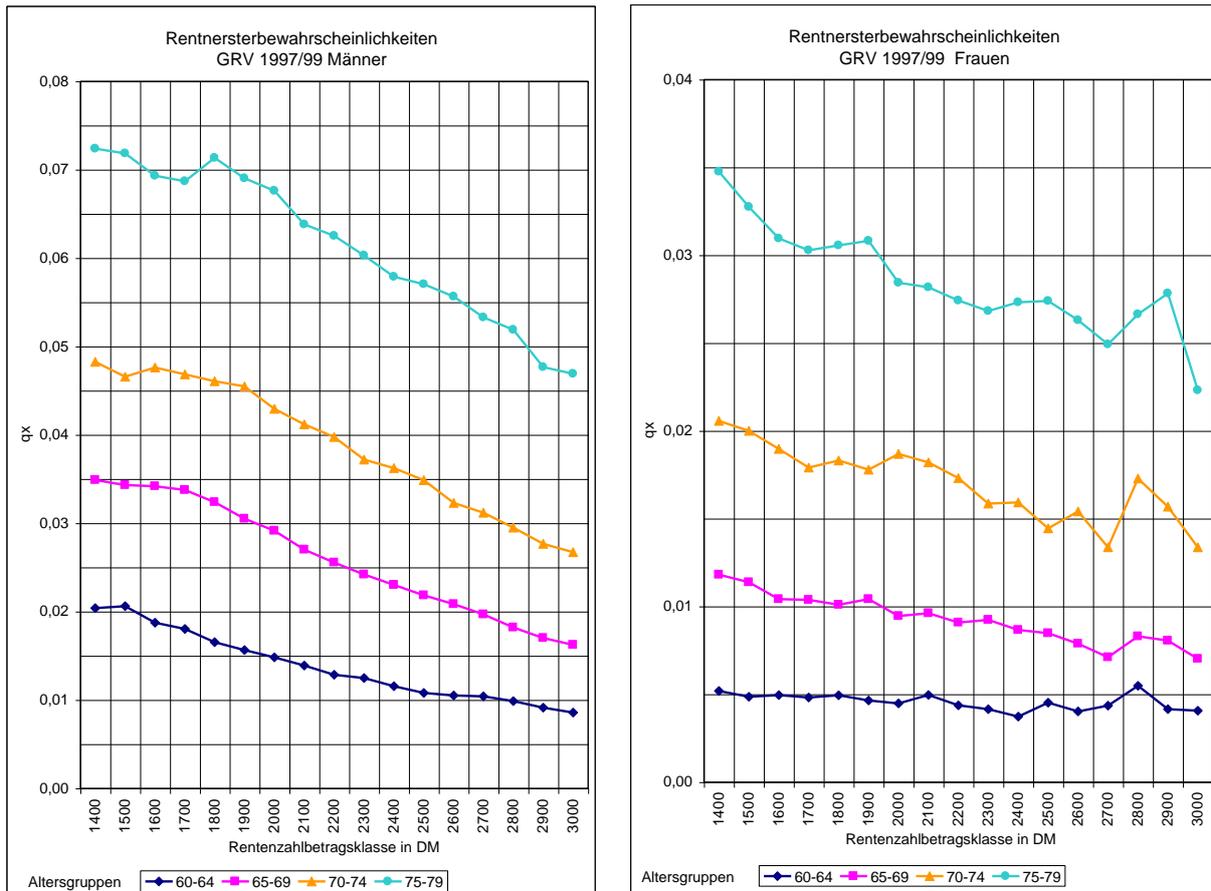


Grafik 21: Sterblichkeiten in verschiedenen Kollektiven, Männer



Grafik 22: Sterblichkeiten in verschiedenen Kollektiven, Frauen

- Je höher die Jahresrente, desto niedriger die Sterbewahrscheinlichkeiten:



Grafik 23: Abhängigkeit der Sterblichkeit von der Rentenhöhe in der GRV

Für die Jahre 1997 bis 1999 liegen für Gesamtdeutschland auch Toten- und Lebendenbestände bis zum Alter 80 Jahre nach Rentenhöhe vor (siehe Grafik 23).

Auf Basis dieser Daten können Testrechnungen durchgeführt werden, zum Beispiel zur Modellwahl für die Berechnung des Sterblichkeitstrends sowie zur Wahl des Extrapolationsverfahrens für die Fortsetzung der Basistafeln in hohe Alter. Daten von GRV und AV gehen unmittelbar in die Abschätzung des Trendzuschlags für Versicherte ein (siehe Abschnitt 4.1.4).

Anhang 9 Extrapolation der Basistafeln für hohe Alter

Die Basistafeln 2. Ordnung bis zum Alter 99 werden um die Sterbewahrscheinlichkeiten für die Alter 100 bis 120 ergänzt, wobei die Methodik [TKV] entnommen wird. Es zeigt sich, dass Aggregat- und Selektionstafel einheitlich fortgesetzt werden können, da sie sich einander in den Altern über 90 stark annähern. Die folgenden Ausführungen beziehen sich auf die Basistafel mit den Sterbewahrscheinlichkeiten ab dem sechsten Jahr der Selektionstafel, kurz auch als Basistafel bezeichnet.

In [TKV] werden anhand von Sterblichkeitsdaten aus 13 Ländern für Alter von 80 bis 120 die folgenden sechs Extrapolationsmodelle untersucht:

- Gompertz-Modell: $q_x = 1 - \exp(-\exp(a + bx))$
- Quadratisches Modell: $q_x = 1 - \exp(-\exp(a + bx + cx^2))$
- Heligmann-Pollard-Modell: $q_x = \frac{a \exp(bx)}{1 + a \exp(bx)}$
- Weibull-Modell: $q_x = 1 - \exp(-a(x + \frac{1}{2})^b)$
- Kannisto-Modell: $q_x = 1 - \exp\left(-\left(\frac{a \exp(bx)}{1 + a \exp(bx)} + c\right)\right)$
- Logistisches Modell: $q_x = 1 - \exp\left(-\left(\frac{\beta \exp(bx)}{1 + \alpha \exp(bx)} + c\right)\right)$

Für die Verlängerung der Basistafel 1999 auf den Altersbereich von 100 bis 120 werden zunächst die Parameter aller sechs Modelle geschätzt, und anschließend wird die am besten geeignete Variante ausgewählt. Die Schätzung erfolgt mit der Maximum-Likelihood-Methode, wobei die nichtlinearen Gleichungssysteme numerisch mit Hilfe des Newton-Verfahrens gelöst werden. Die benötigten Lebendenzahlen entstammen dem Beobachtungsmaterial der Münchener Rück und der Gen Re. Daraus werden mit der zu verlängernden Basistafel die benötigten Totenzahlen ermittelt.

Während das Kannisto-Modell in [TKV] nur mit der Einschränkung $c = 0$ geschätzt wird, wird hier auch die Variante $c \neq 0$ betrachtet.

Die Ergebnisse des folgenden Abschnitts zur Parameterschätzung zeigen, dass die Modelle von Gompertz, Heligmann und Weibull die Sterbewahrscheinlichkeiten in hohen Altern deutlich überschätzen, was sich mit [TKV] deckt. Gegen die Verwendung des bei der DAV 1994 R angewendeten quadratischen Modells spricht prinzipiell, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten nach Erreichen eines Maximums in $x = -b/2c$ wieder sinken. Dieser Punkt wird bei den gegebenen Daten sowohl bei Männern als auch bei Frauen deutlich vor dem Tafelendalter 120 erreicht. Außerdem reagiert das Modell übermäßig stark auf Veränderungen des Stützstellenbereichs. Die Auswahl zwischen den zwei Varianten des Kannisto-Modells und dem logistischen Modell erfolgt einerseits auf Basis formaler Gütekriterien und andererseits auch so,

dass sich im Extrapolationsbereich ein plausibles Sterblichkeitsniveau ergibt. Im Ergebnis erscheint das logistische Modell am besten geeignet.

Die errechneten Parameter des logistischen Modells sind im Einzelnen:

	α	β	b	c
Mann	-2,4	-0,7979071812	-0,006	-0,9795414181
Frau	-2,7	-0,7415144956	-0,007	-0,7587905969

Die resultierende Sterbewahrscheinlichkeit im Tafelendalter 120 beträgt bei Männern 74% und bei Frauen 69%.

Parameterschätzung

Für die Verlängerung der Basistafel 1999 werden die Parameter der sechs betrachteten Modelle mit Hilfe der Maximum-Likelihood-Methode geschätzt. Diese lässt sich allgemein wie folgt formulieren:

Es soll der Parametervektor θ (z.B. $\theta = (a, b)$) in einem Sterblichkeitsmodell $q_x = q_x(\theta)$ geschätzt werden. Die Wahrscheinlichkeit, im betrachteten Altersbereich bei Sterbewahrscheinlichkeiten q_x und jeweils L_x Lebenden T_x Tote zu beobachten, ist unter der Binomialverteilungsannahme

$$\prod_x P(T_x \text{ beobachtete Tote}) = \prod_x \binom{L_x}{T_x} q_x(\theta)^{T_x} (1 - q_x(\theta))^{L_x - T_x}$$

Dieser Ausdruck („Likelihood“) ist bezüglich θ zu maximieren. Bequemer ist die Maximierung der „Loglikelihood“

$$L(\theta) = \sum_x T_x \ln(q_x) + \sum_x (L_x - T_x) \ln(1 - q_x) + \sum_x \binom{L_x}{T_x}$$

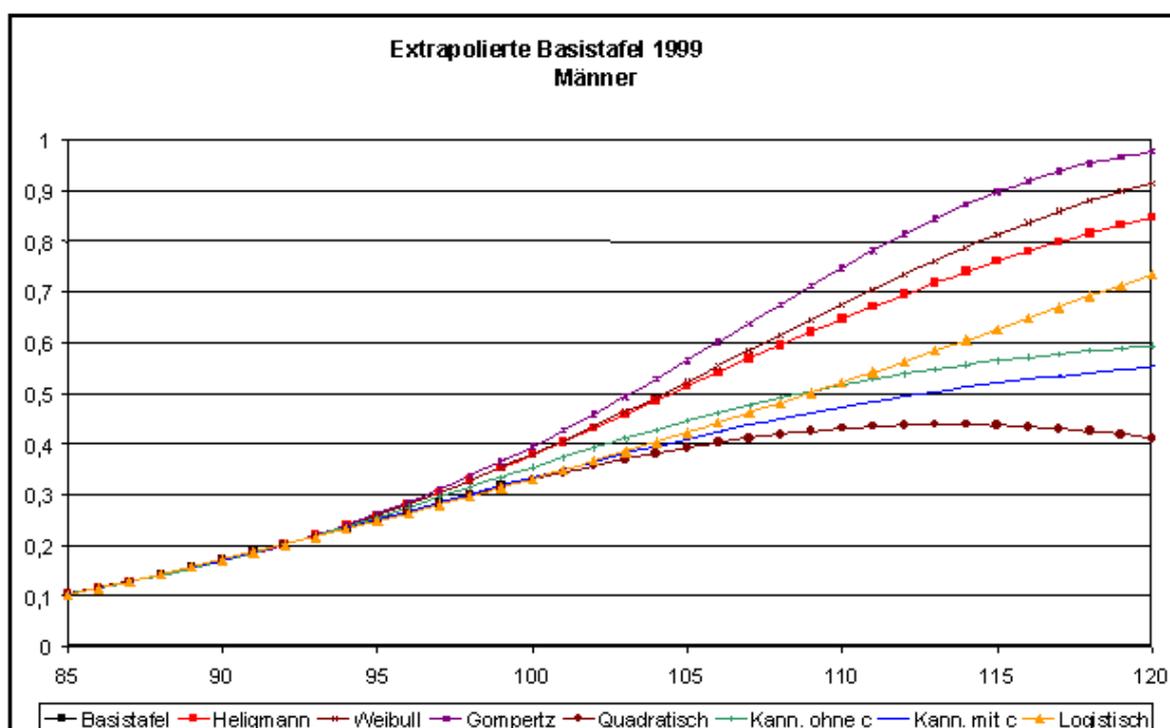
Der letzte, konstante Summand ist für die Maximierung irrelevant. Um in einem konkreten Modell ein Maximum zu ermitteln, ist das Gleichungssystem $\partial L(\theta) / \partial \theta_i = 0$ zu lösen. Da dies i.A. nichtlinear ist, müssen numerische Verfahren benutzt werden. Für die Extrapolation der Basistafel 1999 wird das Newton-Verfahren⁸ verwendet. Als Stützstellen dienen die Alter 85 bis 95, damit der Bereich einerseits hinreichend groß ist, andererseits für die von der Schätzung unabhängigen Alter 96 bis 99 ein Modellvergleich möglich ist.

Toten- und Lebendenzahlen werden rentenhöhenbewichtet angesetzt. Dies verträgt sich streng genommen nicht mit der obigen Binomialverteilungsannahme, jedoch haben Kontrollrechnungen mit anzahlgewichteten Zahlen die aus den rentenhöhenbewichteten Zahlen erhaltenen Ergebnisse bestätigt.

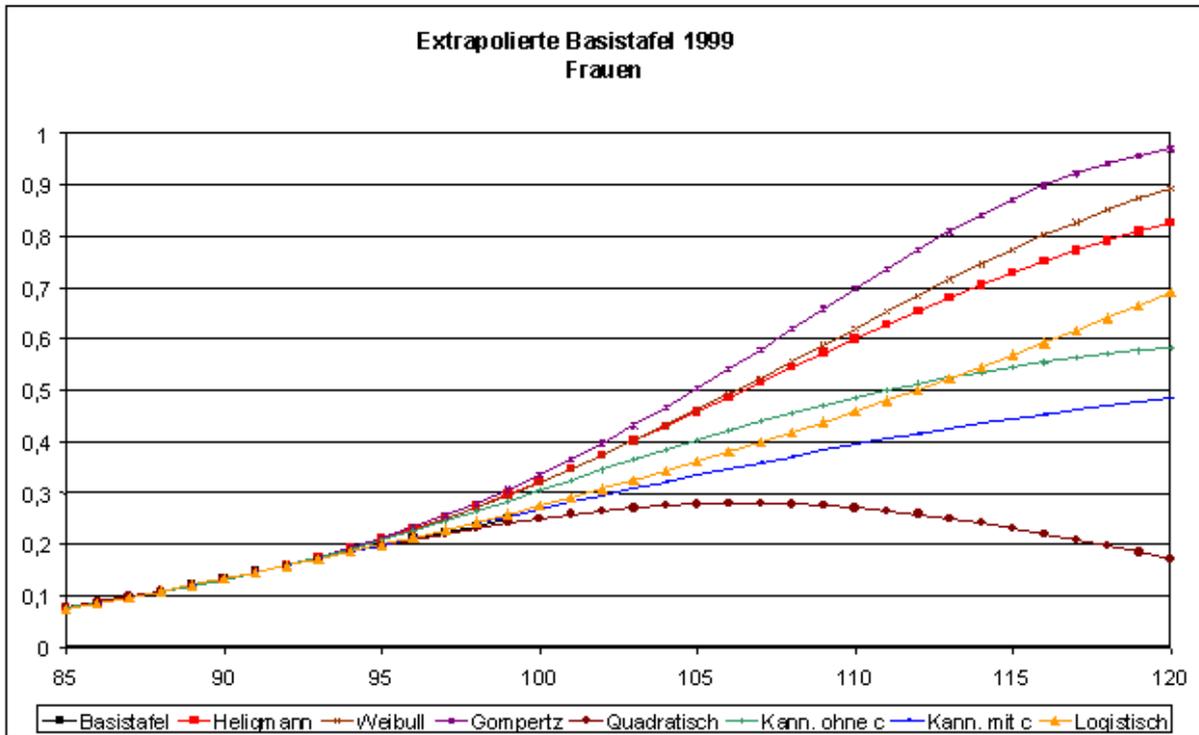
⁸ Iterationsverfahren: $\theta_{t+1} = \theta_t - G_t^{-1} g_t$ mit $g_t = g(\theta_t) = \frac{\partial L}{\partial \theta}(\theta_t)$, $G_t = G(\theta_t) = \frac{\partial^2 L}{\partial \theta \partial \theta'}(\theta_t)$

In den folgenden beiden Grafiken sind die mit den sechs Modellen geschätzten Sterbewahrscheinlichkeiten für Männer bzw. Frauen abgebildet. Es zeigt sich, dass die Modelle ungefähr bis zum Alter 90 sehr ähnliche Ergebnisse liefern, während sie sich in höheren Altern deutlich unterscheiden. Nach dem quadratischen Modell ergibt sich sowohl für Männer als auch für Frauen ein unplausibler Sterblichkeitsverlauf mit fallenden Werten für steigende Alter. Die drei Modelle von Gompertz, Weibull und Heligmann-Pollard liefern sehr viel höhere Sterbewahrscheinlichkeiten als die anderen Modelle. Der Vergleich mit den Werten der Basistafel bis Alter 99 zeigt, dass sie die Sterbewahrscheinlichkeiten überschätzen. Auch beim Kannisto-Modell mit $c=0$ liegen die geschätzten Sterbewahrscheinlichkeiten insbesondere bei den Frauen über den Werten der Basistafel.

Das Kannisto-Modell mit $c \neq 0$ und das logistische Modell bilden die Daten bis zum Alter 99 besser ab und zeigen einen insgesamt plausiblen Verlauf.



Grafik 24: Extrapolierte Basistafel 1999, Männer



Grafik 25: Extrapolierte Basistafel 1999, Frauen

Da der Stützstellenbereich nur die Alter bis 95 beinhaltet, die Basisdaten aber bis 99 zur Verfügung stehen, kann der Altersbereich 96-99 als unabhängige Validierungsmenge herangezogen werden. Zum Modellvergleich werden folgende Kriterien herangezogen:

- Vergleich von gemäß extrapolierten Sterbewahrscheinlichkeiten erwarteten

Toten mit tatsächlichen Toten:
$$\frac{\sum_{x=96}^{99} (\hat{q}_x L_x - T_x)}{\sum_{x=96}^{99} \hat{q}_x L_x}$$

- Wert der Loglikelihood (ohne konstanten Summanden):

$$\sum_{x=96}^{99} T_x \ln(\hat{q}_x) + \sum_{x=96}^{99} (L_x - T_x) \ln(1 - \hat{q}_x)$$

- Wert der χ^2 -Statistik:
$$\sum_{x=96}^{99} \frac{(T_x - L_x \hat{q}_x)^2}{L_x \hat{q}_x (1 - \hat{q}_x)}$$

Für die Loglikelihood-Betrachtung gilt, dass ein Modell umso besser ist, je größer der jeweilige Wert ist. Das χ^2 -Kriterium, bei dem ein kleinerer Wert besser als ein größerer ist, wird nur für eine Sortierung der Modelle, nicht für einen Hypothesentest verwendet, da hierfür die Binomialverteilungsannahme benötigt würde.

Es ergeben sich die folgenden Werte:

Männer						
	(erw.-beob.)/erw.Tote		Loglikelihood		χ^2 -Statistik	
Modell	Wert	Rang	Wert	Rang	Wert	Rang
Gompertz	9,34%	(7)	-953.057	(7)	7.003	(7)
Quadratisch	-0,55%	(2)	-949.504	(2)	29	(2)
Heligmann-Pollard	7,29%	(6)	-951.557	(6)	4.075	(6)
Weibull	7,18%	(5)	-951.505	(5)	3.927	(5)
Kannisto mit $c = 0$	4,07%	(4)	-950.078	(4)	1.166	(4)
Kannisto mit $c \neq 0$	0,07%	(1)	-949.490	(1)	1	(1)
Logistisch	-1,20%	(3)	-949.535	(3)	91	(3)

Frauen						
	(erw.-beob.)/erw.Tote		Loglikelihood		χ^2 -Statistik	
Modell	Wert	Rang	Wert	Rang	Wert	Rang
Gompertz	13,02%	(7)	-1.462.744	(7)	17.364	(7)
Quadratisch	-1,00%	(1)	-1.453.831	(1)	120	(1)
Heligmann-Pollard	11,43%	(6)	-1.460.436	(6)	12.950	(6)
Weibull	10,98%	(5)	-1.459.898	(5)	11.916	(5)
Kannisto mit $c = 0$	9,15%	(4)	-1.457.819	(4)	7.913	(4)
Kannisto mit $c \neq 0$	1,57%	(2)	-1.453.879	(2)	214	(2)
Logistisch	2,52%	(3)	-1.454.067	(3)	587	(3)

Die Sortierung der Modelle hängt im Wesentlichen nicht vom Vergleichskriterium ab. Wird das quadratische Modell wegen seines Verhaltens bei Altern über 100 außer Acht gelassen, so schneiden das logistische Modell und das Kannisto-Modell mit $c \neq 0$ am besten ab.

Einen weiteren Anhaltspunkt für die Beurteilung der Extrapolationsmethode liefern die japanischen Bevölkerungssterblichkeiten im Jahr 1999. Als Vergleichswerte werden $x = 105$ und $x = 109$ gewählt:

	Männer		Frauen	
	$x = 105$	$x = 109$	$x = 105$	$x = 109$
Japan Bevölkerung	46,1%	52,2%	41,9%	49,6%
Logistisches Modell	42,2%	50,0%	36,1%	43,8%
Kannisto-Modell	40,9%	46,1%	33,4%	38,3%

Das Sterblichkeitsniveau in hohen Altern erscheint demnach beim Kannisto-Modell zu niedrig. Obwohl nach den Gütekriterien dem Kannisto-Modell der Vorzug gegeben werden müsste, wird deshalb für die Verlängerung der Basistafeln das logistische Modell gewählt.

Anhang 10 Annahmen bei der Ermittlung des Schwankungsabschlags

Eigenschaften des zugrundeliegenden Modellbestands

Bei der Herleitung der Schwankungsabschläge wird ein Modellbestand zugrunde gelegt. Für die Altersstruktur des Modellbestandes wird die mittlere Altersstruktur des in Abschnitt 2.1 beschriebenen Beobachtungsmaterials an Versichertendaten in den Jahren 1995 bis 2002 (anzahlgewichtete Verweildauern) übernommen. Die absoluten Volumina werden auf je 100.000 Männer und Frauen und einen Anteil der Versicherungen in der Aufschubzeit von jeweils 90% skaliert.

Für die Ermittlung der zur Gewichtung benötigten freiwerdenden Deckungsrückstellung werden eigentlich Vertragsmerkmale benötigt, die nicht oder nur unvollständig vorlagen. Daher werden folgende pauschalen Annahmen und Näherungen getroffen:

- konstante Rentenhöhe (geschlechtsabhängiger Mittelwert gemäß Beobachtungsmaterial)
- Rechnungszins 2,75%
- Annahmen zum Versicherungsverlauf:
 - Rentenbeginn im Alter von 65 Jahren bzw. sofort für Versicherte, die bereits älter als 65 Jahre sind

- Versicherungsbeginn:

beobachtetes Alter	Versicherungsbeginn
0..9	Im Beobachtungsjahr
10..29	1 Jahr vor Beobachtung
30..39	2 Jahre vor Beobachtung
ab 40	Im Alter von 35 Jahren

- Für die Selektionstafel für die Rentenbezugszeit werden die relativen Anteile der drei Selektionsphasen für jedes Alter gemäß Beobachtung angesetzt. Für Versicherungen in der mittleren Selektionsphase (2. – 5. Versicherungsjahr) wird jeweils das 3. Versicherungsjahr angenommen.
- keine Berücksichtigung von Kosten
- Produkteigenschaften:
 - keine abgekürzte Beitragszahlung
 - keine Todesfallleistungen (Prämienrückgewähr, Hinterbliebenenrenten, Rentengarantiezeit)

Modellierung der Zufallsvariablen bei Ermittlung des Schwankungsabschlags

Es werden die Abschnitt 3.4.1 definierten Bezeichnungen verwendet. Die Zufallsvariable T_x wird als binomial verteilt mit Parametern L_x^M und q_x angenommen. Es wird angenommen, dass die Rentenhöhen aller Verträge von Versicherten eines Geschlechts innerhalb der Aufschubzeit und der Rentenbezugszeit jeweils identisch und konstant sind. Da zusätzlich angenommen wird, dass die T_x stochastisch unabhängig in x sind, folgt, dass die im Gesamtbestand durch Tod freiwerdenden Deckungsrückstellung $\sum_x T_x V_x$ durch eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert $\sum_x q_x L_x^M V_x$ und Varianz

$$\sum_x \text{Var}[T_x V_x] = \sum_x \text{Var}[T_x] \cdot V_x^2 = \sum_x q_x (1 - q_x) L_x^M \cdot V_x^2$$

angenähert werden. Bei einer Zerlegung in Teilbestände X ergibt sich das Sicherheitsniveau $1 - \alpha^*$ aus dem Sicherheitsniveau $1 - \alpha$ über:

$$u_{1-\alpha^*} = \frac{\sqrt{\text{Var}(FV)}}{\sum_x \sqrt{\text{Var}(FV_x)}} \cdot u_{1-\alpha} = \frac{\sqrt{\sum_x q_x (1 - q_x) L_x^M V_x^2}}{\sum_x \sqrt{\sum_{x \in X} q_x (1 - q_x) L_x^M V_x^2}} \cdot u_{1-\alpha}$$

Die in Abschnitt 3.4.1 genannten Sicherheitszuschläge werden ohne Berücksichtigung der tatsächlichen Altersstruktur des Modellbestandes mit der pauschalen Annahme einer hälftigen Aufteilung der Varianz der freiwerdenden Deckungsrückstellung auf beide Geschlechter zerlegt und die eigentliche Bestimmung der Abschläge abhängig vom Geschlecht durchgeführt, also

$$u_{1-\alpha^*} = \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot u_{1-\alpha}$$

Je nach tatsächlicher Altersstruktur ergeben sich daher bei der Anwendung der Sterbetafel 1. Ordnung auf einen Bestand gleichen Gesamtvolumens Sicherheitsniveaus, die geringfügig von 95% abweichen. Insbesondere ergibt sich für eine Altersstruktur gemäß ADSt 1986/88 ein höheres Sicherheitsniveau.

Anhang 11 Modelle für Sterblichkeitsprojektionen

Beim traditionellen Modell werden die altersspezifischen Trendfaktoren $q_{x,t+1}/q_{x,t} = \exp(-F(x))$ mit der Methode der kleinsten Quadrate durch lineare Regression aus den Werten $\langle \ln(q_{x,t}) \rangle$ für $t_0 \leq t \leq t_1$ bestimmt.

Ein alternatives Modell ist das Kohortenmodell, welches geburtsjahrabhängige Trendfaktoren $\exp(-G(t+1-x))$ aufweist.

Das sogenannte Synthesemodell ist eine Verallgemeinerung der beiden vorangehenden Modelle und umfasst sowohl das traditionelle Modell als auch das Kohortenmodell als Spezialfälle. Die Trendfaktoren $\exp(-F(x)-G(t+1-x))$ sind hier gleichzeitig alters- und geburtsjahrabhängig.

Innerhalb der Zeilen der Matrix $\langle \ln(q_{x,t}) \rangle$ besteht beim Kohorten- und beim Synthesemodell im Gegensatz zum traditionellen Modell kein linearer Zusammenhang. Daher kann die logarithmisch-lineare Regression zur Bestimmung von Trendfaktoren nicht ohne weiteres vom traditionellen Modell auf das Kohorten- und das Synthesemodell übertragen werden. Auf die Angabe der Formel des Kleinst-Quadrate-Schätzers für das Kohorten- und das Synthesemodell wird an dieser Stelle verzichtet, denn in dieser Arbeit werden letztlich nur die Ergebnisse des traditionellen Modells weiterverwendet.

Teil A Likelihood-Ratio-Test zum Modellvergleich

Ziel ist es, aus statistischer Sicht eine Entscheidung für eines der betrachteten Modelle zu treffen. Das traditionelle Modell, das Kohortenmodell und das Synthesemodell werden daher an die Daten der 32 abgekürzten Sterbetafeln des deutschen Statistischen Bundesamtes der Perioden von 1966/68 bis 1997/99 angepasst.

Das Synthesemodell kann durch Logarithmierung linearisiert und mittels der Methode der kleinsten Quadrate geschätzt werden. Aus dem linearen Regressionsmodell $y = Az + e$ ergeben sich die geschätzten Koeffizienten \tilde{z} also durch Berechnung von $\hat{z} = (A'A)^{-1}A'y$. Dieser Vektor \hat{z} minimiert die Fehlerquadratsumme SSE (Sum of Squared Errors) des log-linearen Modells. Die Fehlerquadratsumme SSE errechnet sich aus dem geschätzten Fehlervektor \hat{e} , dessen Elemente die Differenzen zwischen den beobachteten logarithmierten $\ln(q_{x,t})$ und ihren Schätzungen sind. Hingegen wird nicht die Fehlerquadratsumme der zu den $q_{x,t}$ gehörenden Fehlern des nicht logarithmierten Ausgangsmodells minimiert. Es werden also die prozentualen und nicht die absoluten Abweichungen von den Sterblichkeiten $q_{x,t}$ minimiert.

Gleichzeitig wird durch den Schätzer \hat{z} die Likelihoodfunktion maximiert, da der Kleinst-Quadrate-Schätzer mit dem Maximum-Likelihood-Schätzer identisch ist, wenn die Fehler normalverteilt sind (siehe [JHGLL], Abschnitte 6.1 und 8.2). Das traditionelle Modell und das Kohortenmodell ergibt sich als Spezialfälle des Synthesemodells, indem jeweils bestimmte Koeffizienten auf 0 restringiert werden.

Es gibt eine einfache und effiziente Methode, zu testen, ob die auferlegten Nullrestriktionen sinnvoll sind: Der sogenannte Likelihood-Ratio Test setzt das Maximum der Likelihoodfunktion der unrestringierten Schätzung zum Maximum der Likelihoodfunktion der restringierten Schätzung ins Verhältnis. Die Modellwahl gemäß Likelihood-Ratio Test bzw. F-Test wird auch in [K], Abschnitt 5.1.1 behandelt. Die Testgröße L des Likelihood-Ratio Tests lässt sich geeignet folgendermaßen schreiben:

$$L = (SSE_R - SSE_U) / SSE_U \cdot (T - K) / J ,$$

wobei SSE_R die Fehlerquadratsumme des restringierten Modells ist (also das traditionelle Modell oder das Kohortenmodell), SSE_U ist die Fehlerquadratsumme des unrestringierten Modells (Synthesemodell), J ist die Anzahl der auf 0 gesetzten Koeffizienten des restringierten Modells, T ist die Anzahl der Beobachtungen und K ist die Anzahl der Parameter des unrestringierten Modells. Aus der Testtheorie ergibt sich (siehe [JHGLL] Abschnitt 6.4), dass die Testgröße L einer F -Verteilung folgt mit J und $T-K$ Freiheitsgraden: $L \sim F(J, T-K)$.

Die Nullhypothese H_0 muss zu einem Signifikanzniveau von $\alpha \cdot 100\%$ abgelehnt werden, wenn $L > F(J, T-K; \alpha)$, wobei der letzte Ausdruck das obere α -Quantil der F -Verteilung ist.

Es ergeben sich folgende Testergebnisse⁹:

Likelihood-Ratio Test

$$L = (SSE_R - SSE_U) / SSE_U \cdot (T - K) / J \sim F(J, T - K)$$

	H_0 : das <u>traditionelle</u> Modell gilt H_1 : das Synthesemodell gilt	H_0 : das <u>Kohortenmodell</u> gilt H_1 : das Synthesemodell gilt
Männer (0-89 Jahre)	$L = (8,0553 - 6,0250) / 6,0250$ $\times (2880 - 299) / 119$ $= 7,31$ $F(119, 2581; 0,05) = 1,22$ $F(119, 2581; 0,01) = 1,32$	$L = (9,4451 - 6,0250) / 6,0250$ $\times (2880-299)/89$ $= 16,46$ $F(89, 2581; 0,05) = 1,27$ $F(89, 2581; 0,01) = 1,40$
Frauen (0-89 Jahre)	$L = 4,51$ $F(119, 2581; 0,05) = 1,22$ $F(119, 2581; 0,01) = 1,32$	$L = 11,93$ $F(89, 2581; 0,05) = 1,27$ $F(89, 2581; 0,01) = 1,40$

⁹ Eine Aktualisierung dieser Berechnungen mit der neuesten abgekürzten Sterbetafel St 1998/2000 führt nur zu unwesentlichen Änderungen der Ergebnisse.

Männer (20–89 Jahre)	$L = 13,39$	$L = 10,35$
	$F(99, 2001; 0,05) = 1,27$	$F(69, 2001; 0,05) = 1,32$
	$F(99, 2001; 0,01) = 1,40$	$F(69, 2001; 0,01) = 1,47$
Frauen (20–89 Jahre)	$L = 10,63$	$L = 7,93$
	$F(99, 2001; 0,05) = 1,27$	$F(69, 2001; 0,05) = 1,32$
	$F(99, 2001; 0,01) = 1,40$	$F(69, 2001; 0,01) = 1,47$

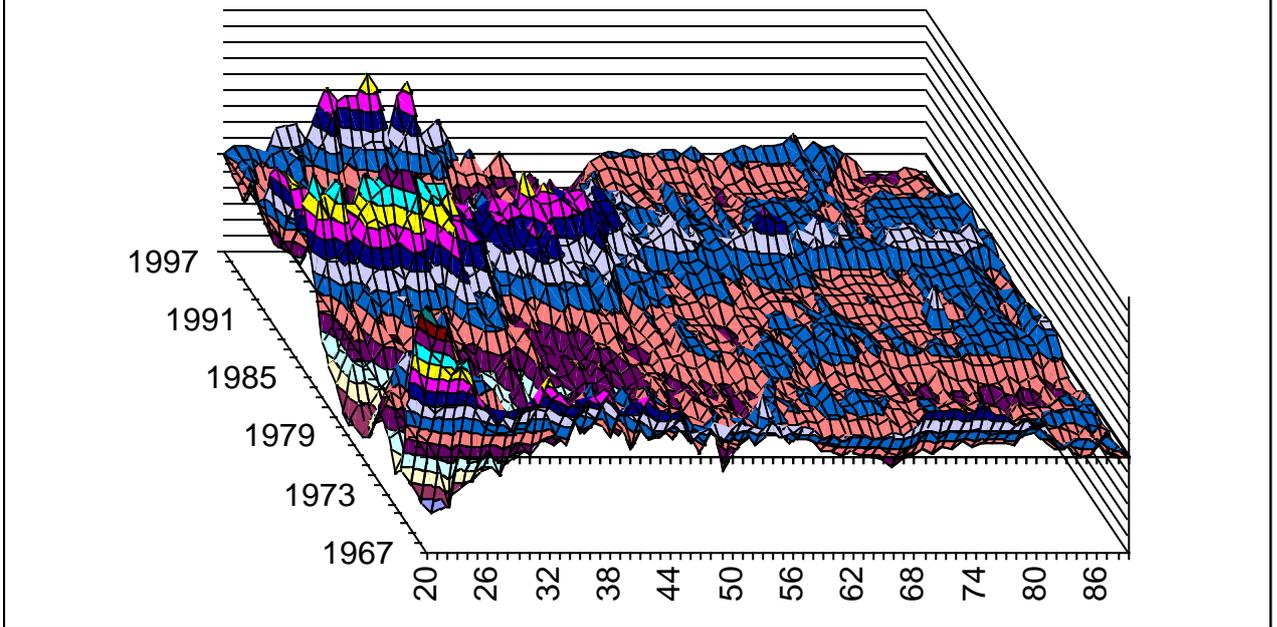
Es zeigt sich, dass der Testwert L in allen untersuchten Fällen deutlich größer ist als der kritische Wert aus der F-Verteilung, sogar auf dem Sicherheitsniveau von $1-\alpha=99\%$.

Dies bedeutet, dass es aus statistischer Sicht in keinem Fall gerechtfertigt ist, das Synthesemodell so einzuschränken, dass sich das traditionelle Modell oder das Kohortenmodell ergibt. Sowohl für Männer als auch für Frauen ist das Synthesemodell deutlich am besten geeignet, um die beobachteten Daten zu erklären.

Bei der Interpretation dieses Ergebnisses ist zu beachten, dass der Test nur auf Vergangenheitsdaten basiert. Die bisherigen Daten werden durch das Synthesemodell am besten erklärt. Im Anhang 12 wird jedoch gezeigt, dass die Extrapolationseigenschaften des Synthesemodells unplausibel sind. Das Synthesemodell wird daher nicht in Betracht gezogen. Bei Betrachtung der Alter von 20-89 Jahren ist das Kohortenmodell als nächstbestes Modell tendenziell geeigneter und bei Betrachtung der Alter von 0-89 Jahren ist das traditionelle Modell tendenziell geeigneter. Denn hier ergeben sich jeweils geringere Werte der Teststatistik L , sowohl für Männer als auch für Frauen. Dieses Ergebnis der altersabhängigen Modellwahl deckt sich mit dem Vorgehen in [W1], wo das Kohortenmodell nur für Alter ab 20 Jahren angewendet wird.

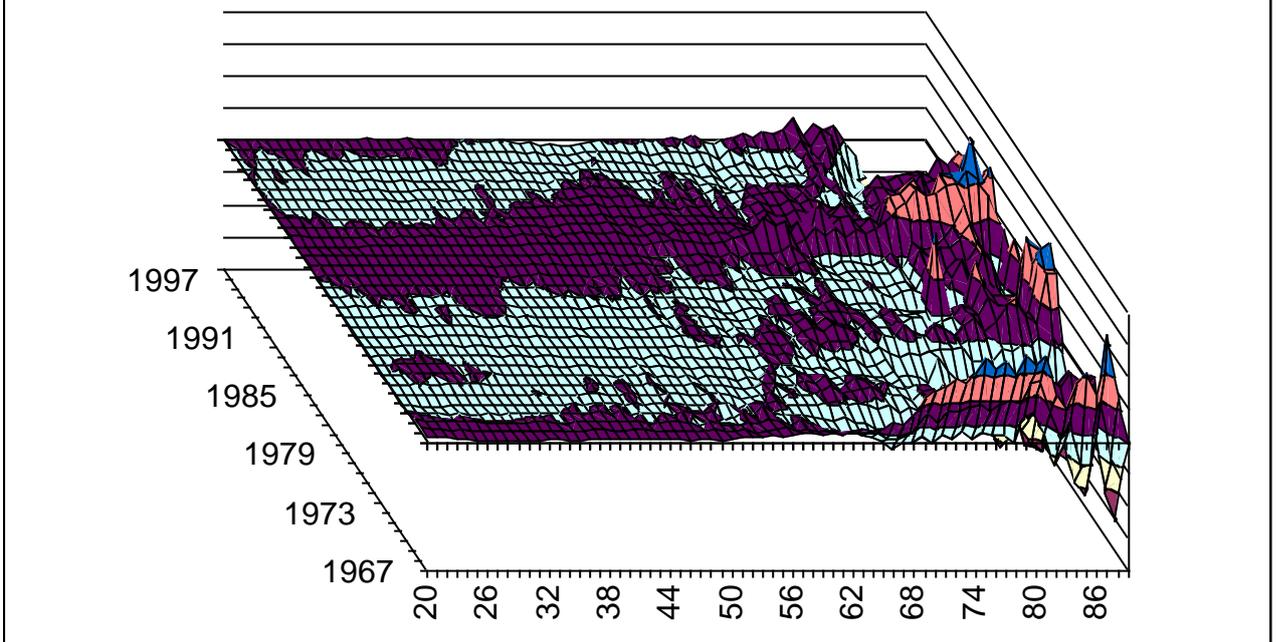
Die folgenden beiden Grafiken zeigen, welche Bedeutung es hat, dass die Fehlerquadratsumme der logarithmierten Sterblichkeiten $\ln(q_{x,t})$ minimiert wird. Exemplarisch wird hier nur das Ergebnis des Synthesemodells für Männer der Alter von 20 bis 89 Jahren dargestellt. Es ist zu erkennen, dass die Fehler der $\ln(q_{x,t})$ in Grafik 26 für niedrige Alter hoch sind. Hingegen sind die Fehler der nicht logarithmierten Sterblichkeiten $q_{x,t}$ in Grafik 27 für die hohen Alter hoch. Dies bedeutet, dass die prozentualen Sterblichkeiten für niedrige Alter schlecht angepasst werden, während die absoluten Sterblichkeiten für hohe Alter schlecht angepasst werden.

Synthesemodell, Männer 20-89, Fehler der $\ln(q_x)$



Grafik 26: Fehler des Synthesemodells für Männer von 20–89 Jahren

Synthesemodell, Männer 20-89, Fehler der q_x



Grafik 27: Fehler des Synthesemodells für Männer von 20-89 Jahren

Teil B Die verallgemeinerte Kleinst-Quadrate-Schätzung

Im vorangehen Abschnitt wurde gezeigt, dass das Synthesemodell am besten geeignet ist, um die Bevölkerungsdaten zu erklären. Hierzu wurde der gewöhnliche Kleinst-Quadrate-Schätzer (OLS = Ordinary Least Squares) verwendet. Die Analyse der Modellfehler hat jedoch ergeben, dass diese bei niedrigeren Altern deutlich stärker schwanken als bei hohen Altern. Dies kann durch die Berechnung der altersabhängigen Fehlervarianzen und deren Konfidenzintervalle bestätigt werden. Die Fehler und die altersabhängigen Fehlervarianzen sind beispielhaft für Frauen in Grafik 30 dargestellt. Es liegt daher nahe, zu dem verallgemeinerten bzw. gewichteten Kleinst-Quadrate-Schätzer (GLS = Generalised Least Squares) überzugehen. Bei diesem wird die Fehlerquadratsumme der standardisierten Fehler minimiert, was dazu führt, dass die Beobachtungen mit geringeren Abweichungen stärker gewichtet werden. In diesem Fall werden also die höheren Alter stärker gewichtet, was in der Praxis zur Berechnung von Rentenversicherungen sinnvoll ist.

Als Datenbasis werden die Daten der 33 abgekürzten Sterbetafeln des deutschen Statistischen Bundesamtes der Perioden von 1966/1968 bis 1998/2000 verwendet. Im folgenden wird, ebenso wie in [W1], stets das Beginnalter 20 verwendet um die in niedrigen Altern stark nichtlinearen Sterblichkeitsveränderungen zu eliminieren, siehe hierzu beispielhaft für Frauen Grafik 28.

Zur Schätzung der Koeffizienten z wird in einer zweistufigen linearen Regression vorgegangen. Zuerst werden die Fehler des OLS-Schätzers $\hat{z} = (A'A)^{-1}A'y$ ermittelt. Dann wird die GLS-Schätzung $\hat{z} = (A'S^{-1}A)^{-1}A'S^{-1}y$ durchgeführt, wobei S die Kovarianzmatrix der Fehler aus der OLS-Schätzung ist. S wird mit einer diagonalen Struktur modelliert, so dass die Varianzen altersabhängig sind: Auf den ersten 33 Diagonalelementen steht die Varianz der Fehler für das niedrigste Alter 20, usw. Die übliche OLS-Testtheorie gilt bei der GLS-Schätzung asymptotisch und der Likelihood-Ratio Test kann daher wie im vorangehenden Abschnitt angewendet werden.

Es ergeben sich folgende Testergebnisse:

Likelihood-Ratio Test

$$L = (SSE_R - SSE_U) / SSE_U \cdot (T - K) / J \sim F(J, T - K), \text{ mit } T = 2310 \text{ und } K = 240$$

	H_0 : das <u>traditionelle</u> Modell gilt H_1 : das Synthesemodell gilt $J = 100$ $F(0,05) = 1,25$ $F(0,01) = 1,37$	H_0 : das <u>Kohortenmodell</u> gilt H_1 : das Synthesemodell gilt $J = 69$ $F(0,05) = 1,30$ $F(0,01) = 1,45$
Männer (20–89 Jahre) $SSE_U = 2196,87$	$SSE_R = 7022,66$ $L = 45,47$	$SSE_R = 4181,51$ $L = 27,10$
Frauen (20–89 Jahre) $SSE_U = 2216,12$	$SSE_R = 4057,35$ $L = 17,20$	$SSE_R = 3855,54$ $L = 22,19$

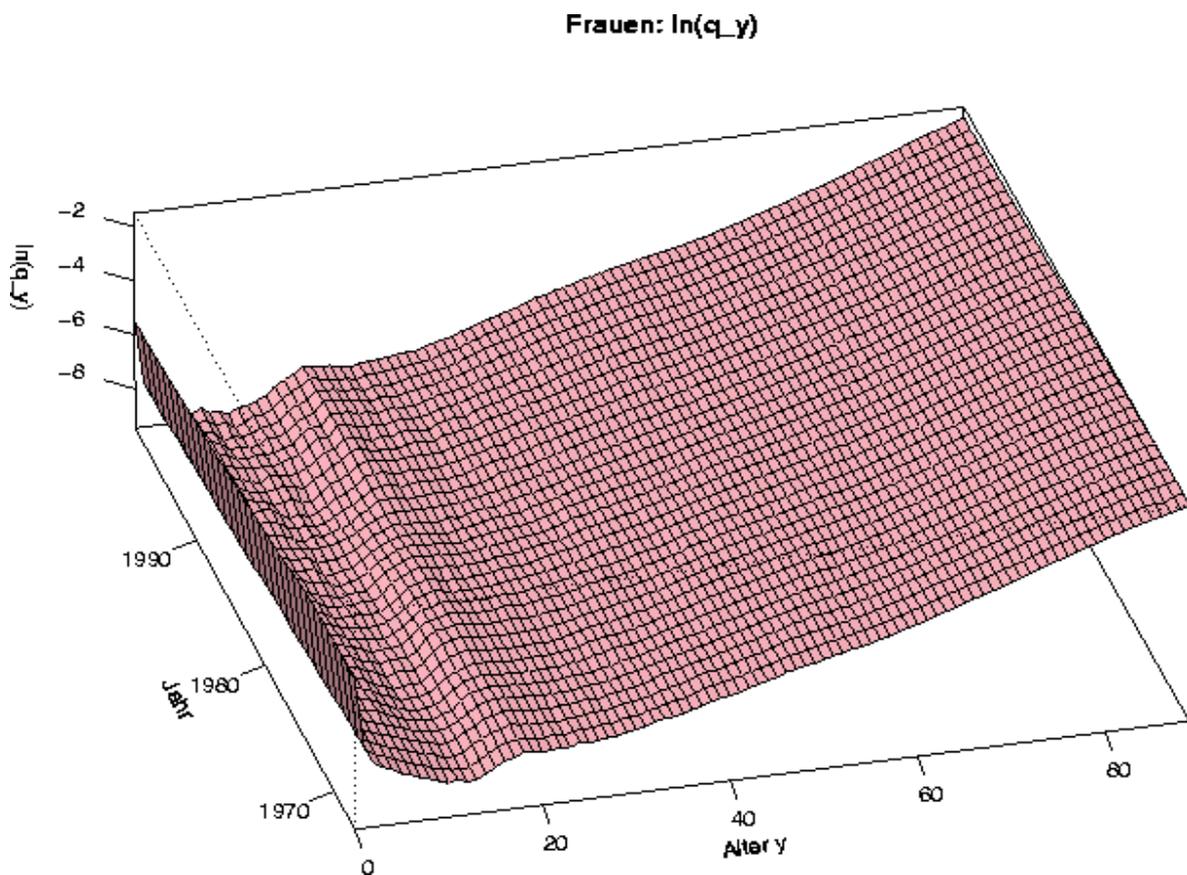
Es zeigt sich, dass der Testwert L in allen untersuchten Fällen deutlich größer ist als der kritische Wert aus der F-Verteilung, selbst bei dem Sicherheitsniveau von 99%. Es ist also auch bei der GLS-Schätzung nicht gerechtfertigt, das Synthesemodell auf das traditionelle Modell oder das Kohortenmodell einzuschränken. Sowohl für Männer als auch für Frauen ist das GLS-Synthesemodell nach diesem Test deutlich am besten geeignet, um die beobachteten Daten zu erklären. Im Vergleich zu dem auf dem OLS-Schätzer basierenden F-Test ist die Dominanz des Synthesemodells sogar noch ausgeprägter.

Da aufgrund der unplausiblen Extrapolationseigenschaften, siehe Anhang 12, nicht das Synthesemodell verwendet werden soll, sollte nach diesem Test für Männer das Kohortenmodell und für Frauen tendenziell das traditionelle Modell gewählt werden. Die Empfehlung aus der OLS-Schätzung, für Frauen ebenfalls das Kohortenmodell als beste Alternative zum Synthesemodell zu wählen, ist somit nicht mehr gültig.

Bei der Verwendung des traditionellen Modells entfällt übrigens die Unterscheidung zwischen dem verallgemeinerten Kleinst-Quadrat-Schätzer (GLS = Generalised Least Squares) und dem gewöhnlichen Kleinst-Quadrat-Schätzer (OLS = Ordinary Least Squares), da bei diesem Modell beide identisch sind.

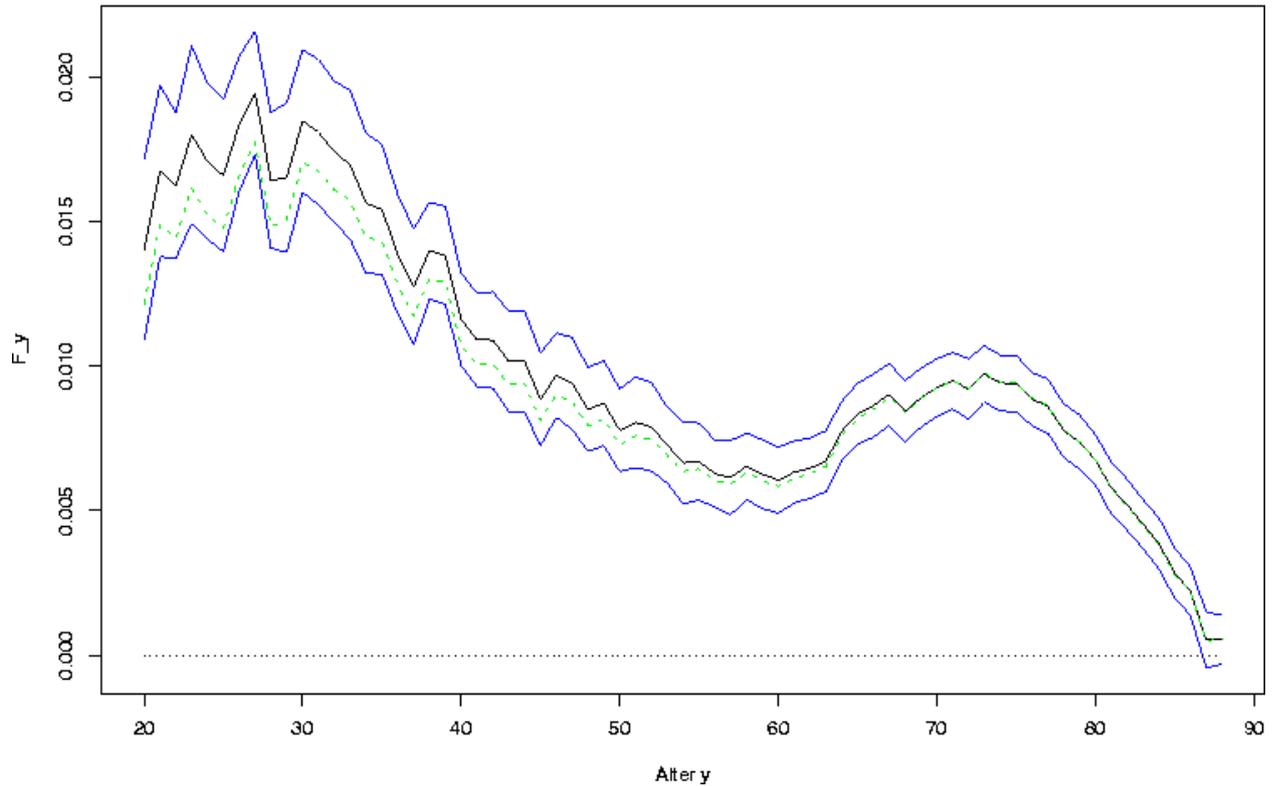
Im Folgenden soll anhand einiger Grafiken beispielhaft für Frauen veranschaulicht werden, wie sich die GLS-Schätzung auswirkt. Bei der Basistafel gibt es keine signifikanten Unterschiede. Grafik 29 zeigt die geschätzten Trend-Koeffizienten und die Kohorten-Effekte mit zugehörigem Konfidenzintervall. Während für Frauen die Trend-Koeffizienten durchgehend positiv sind, ergeben sich bei Männern (hier nicht dargestellt) bis zum Alter von 65 Jahren negative Werte. Im Vergleich zur OLS-Schätzung (gestrichelte Linie) ist ersichtlich, dass die altersabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen für niedrige Alter höher sind. Bei Männern ergeben sich sogar signifikante Unterschiede. Die GLS-Schätzung führt also zumindest teilweise zu signifikant anderen Koeffizienten als die OLS-Schätzung. Ein weiterer Effekt der GLS-Schätzung sind die schmalere Konfidenzintervalle: es ergeben sich bei Frauen nun häufiger signifikante Kohorten-Effekte und bei Männern werden die Trend-Koeffizienten in höheren Altern häufiger signifikant.

Abschließend soll gezeigt werden, welche Konsequenzen es hat, wenn das Synthesemodell entgegen der Empfehlung des Likelihood-Ratio Tests auf das traditionelle oder das Kohortenmodell reduziert wird. Grafik 30 zeigt die Residuen des mittels GLS geschätzten traditionellen Modells. Es ist deutlich zu erkennen, dass die Geburtsjahrgänge um 1920 eine andere Sterblichkeit aufweisen, die nicht durch das traditionelle Modell erklärt werden kann. Dies ist eine Folge des Verzichts auf den Kohorten-Effekt. Der Einfluss des fehlenden Kohorten-Effektes führt bei Männern dazu, dass die Trend-Koeffizienten im traditionellen Modell durchgehend positiv sind, während sie, im Synthesemodell überwiegend negativ sind. Grafik 31 zeigt für das GLS-geschätzte Kohortenmodell, dass das Ignorieren des altersabhängigen Trends gerade bei den wichtigen hohen Altern in den letzten Jahren zu signifikanten Fehlern führt.

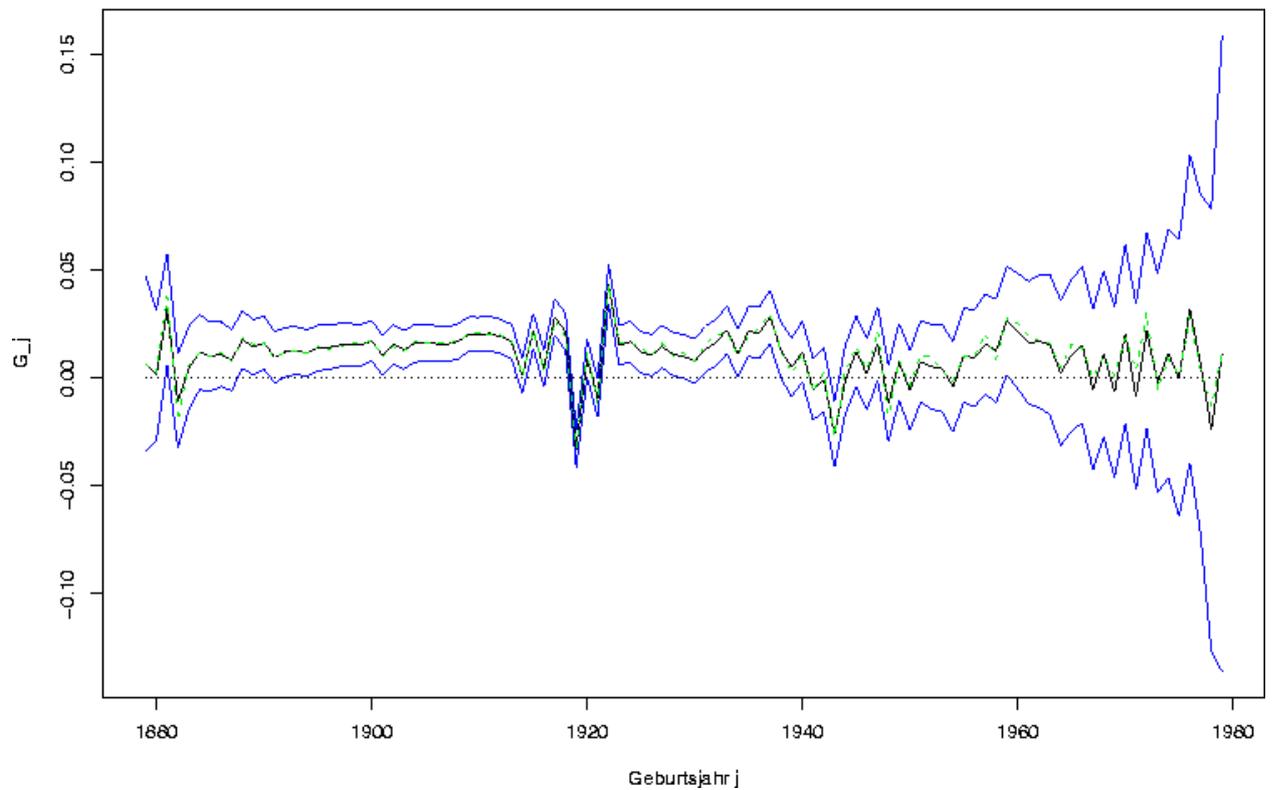


Grafik 28: Originaldaten ab Beginnalter 0

Frauen: Trend-Koeffizienten: jährliche altersabhängige Sterblichkeitsverbesserung mit 95% Konfidenzintervall

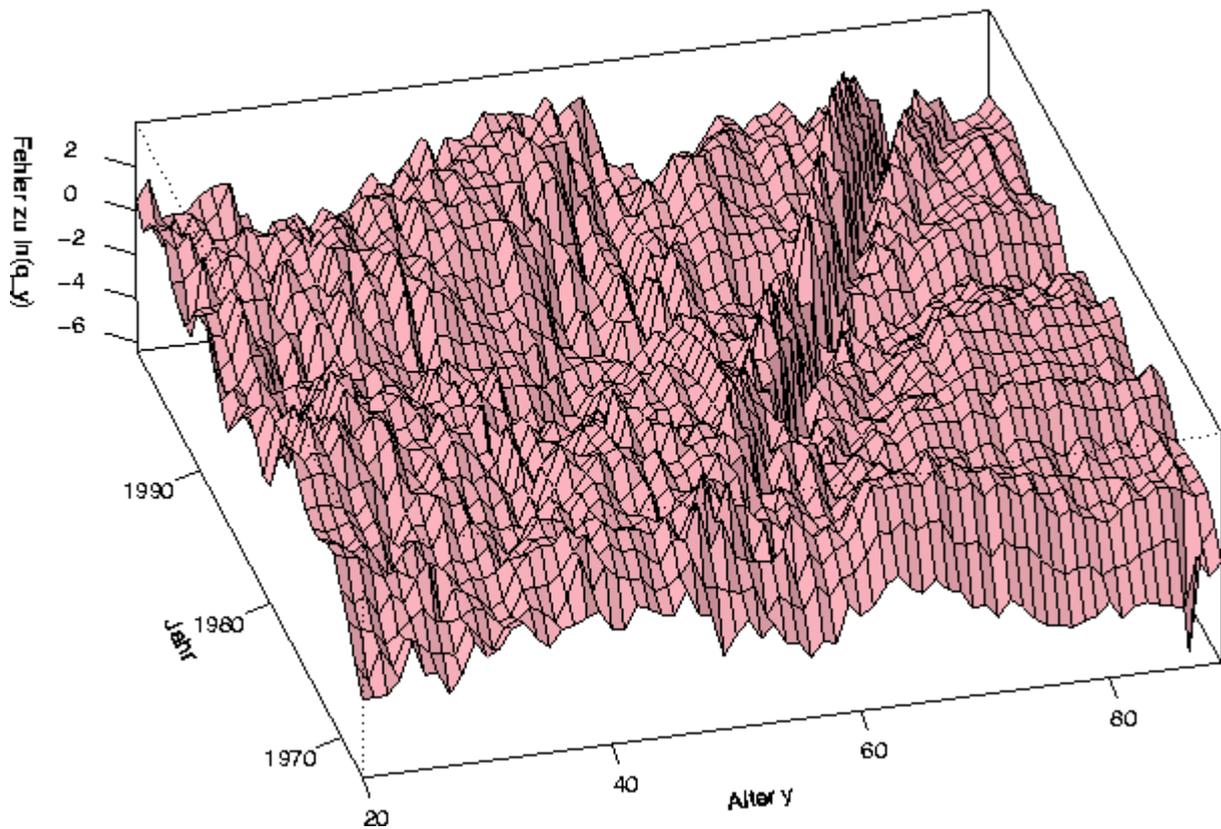


Frauen: Kohorten-Effekte: jährliche geburtsjahrabhängige Sterblichkeitsverbesserung mit 95% Konfidenzintervall

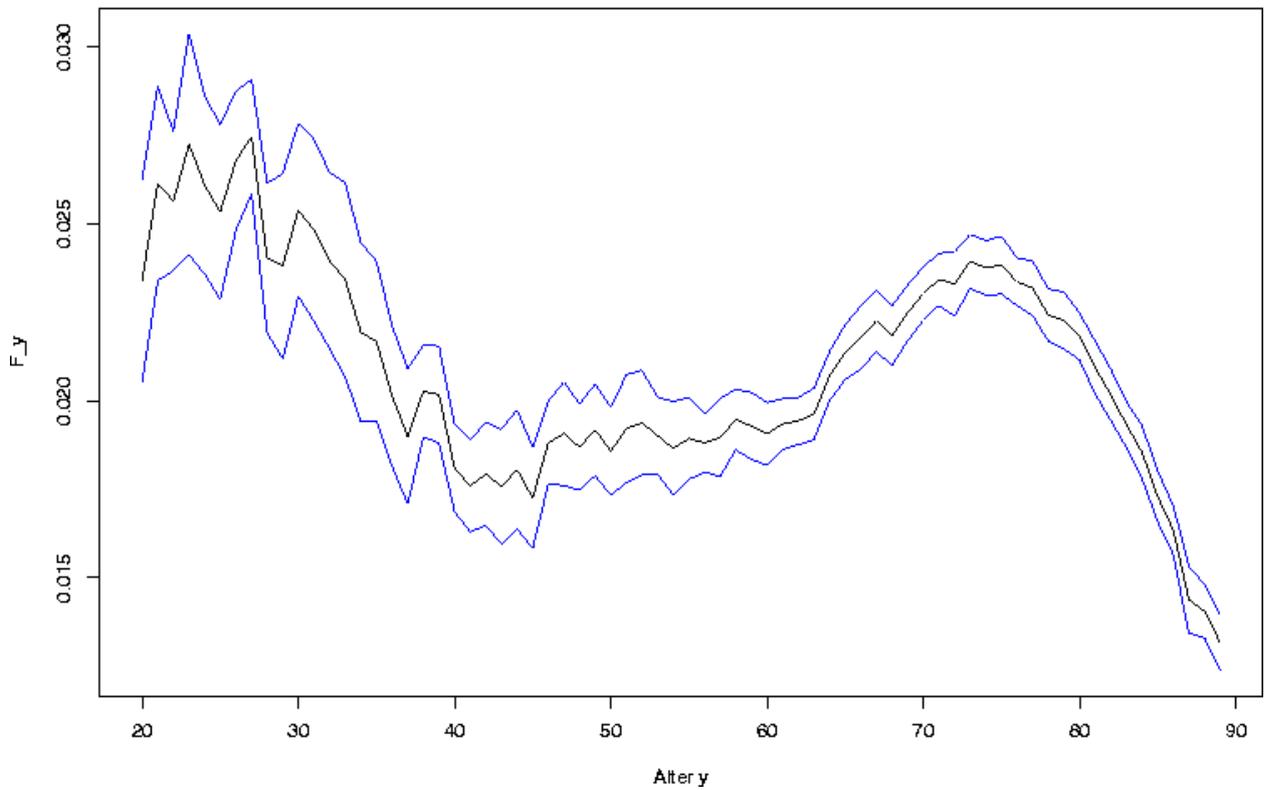


Grafik 29: GLS-Schätzer für Trend und Kohorten-Effekte - Synthesemodell - Frauen

Frauen: Fehler zu $\ln(q_y)/std_y$

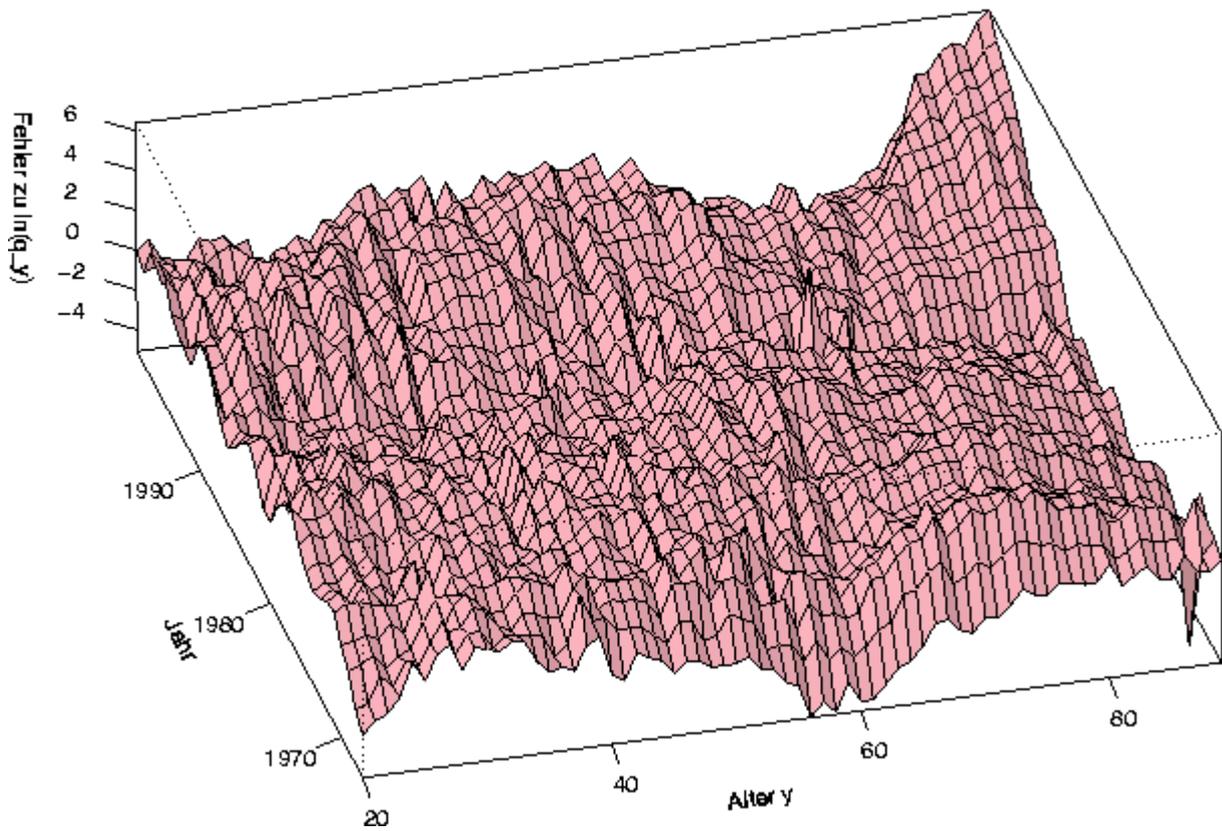


Frauen: Trend-Koeffizienten: jährliche altersabhängige Sterblichkeitsverbesserung mit 95% Konfidenzintervall

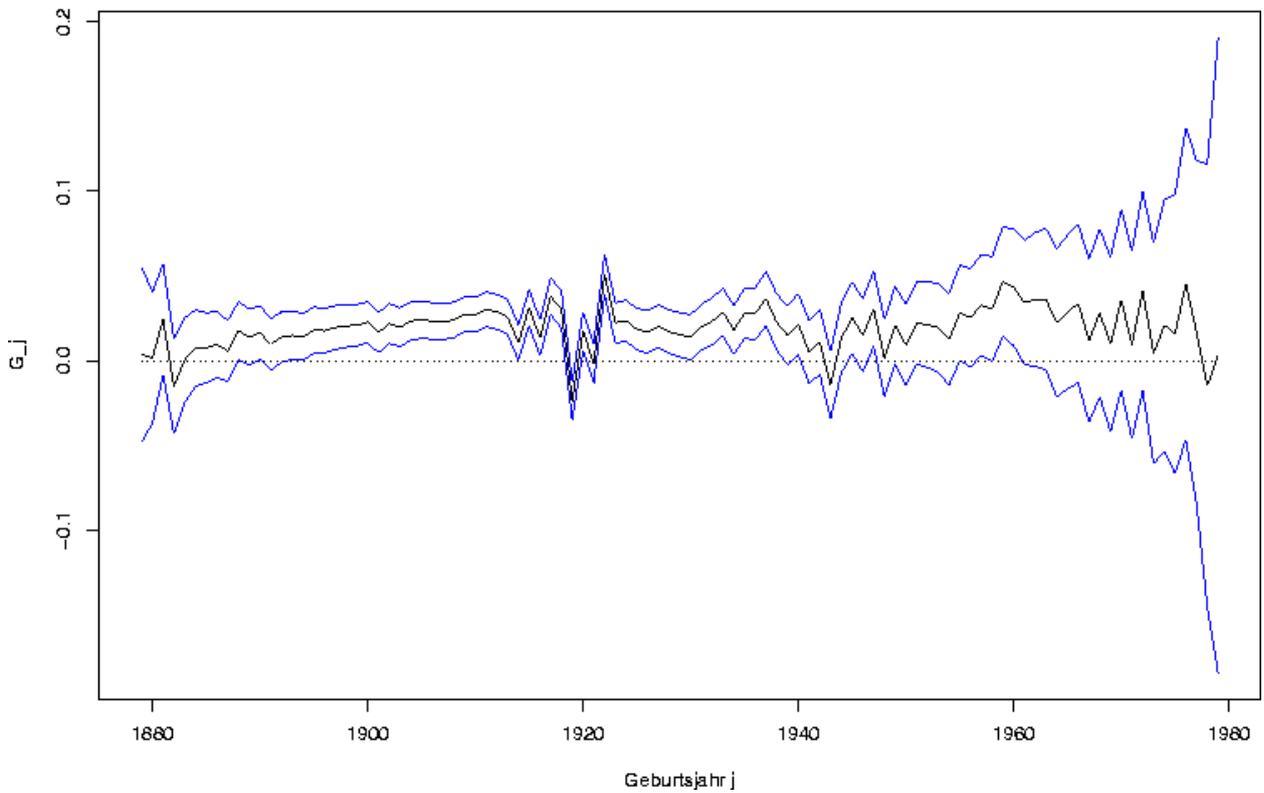


Grafik 30: GLS-Schätzer – traditionelles Modell – Fehler, Trend-Koeffizienten – Frauen

Frauen: Fehler zu $\ln(q_y)/std_y$



Frauen: Kohorten-Effekte: jährliche geburtsjahrabhängige Sterblichkeitsverbesserung mit 95% Konfidenzintervall



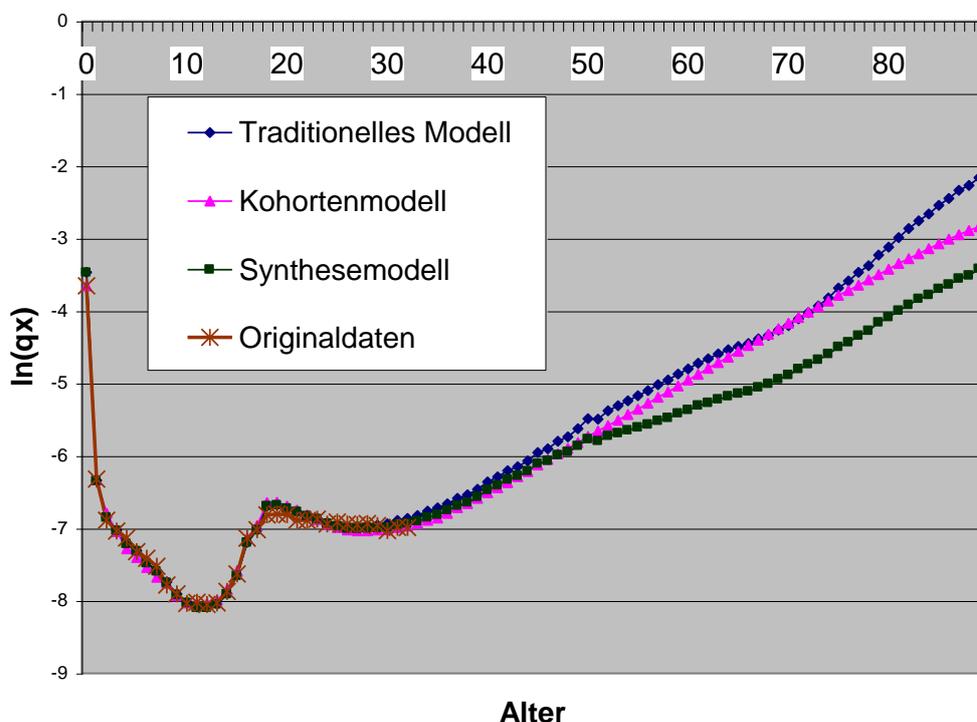
Grafik 31: GLS-Schätzer – Kohortenmodell – Fehler und Kohorten-Effekte - Frauen

Anhang 12 Modellwahl

Mit den drei betrachteten Modellen werden auf Basis der 33 Sterbetafeln des Statistischen Bundesamtes St 1966/68 bis St 1998/2000 für Alter von 0 bis 89 Jahren Sterblichkeitsprojektionen durchgeführt. Dazu werden die geburtsjahrabhängigen Trends für Geburtsjahrgänge ab 2000 jeweils für das Kohorten- und das Synthesemodell mit folgendem Verfahren extrapoliert: Als Trendfaktor für alle Geburtsjahre ab 2000 wird das geometrische Mittel der Trendfaktoren der Geburtsjahrgänge 1990 bis 1999 angesetzt. Bei den nachfolgend betrachteten projizierten Generationentafeln 1967 und Periodentafeln 2050 wirkt sich diese Extrapolation auf die Generationentafeln 1967 überhaupt nicht aus und auf die Periodentafeln 2050 gemäß Kohorten- und Synthesemodell im Altersbereich von 0 bis 50 Jahren.

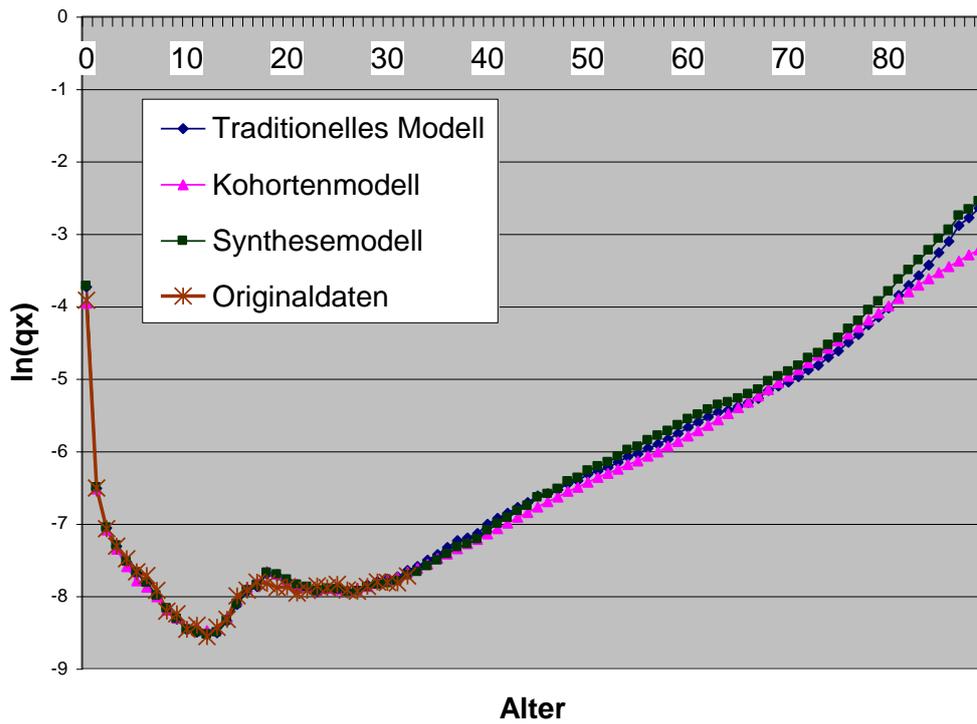
In den folgenden Grafiken 32 bis 35 sind die logarithmierten Sterblichkeiten der Generationentafeln des Geburtsjahrgangs 1967 und Periodentafeln des Jahres 2050 auf Basis dieser Sterblichkeitsprojektionen dargestellt:

Generationentafeln 1967 Männer



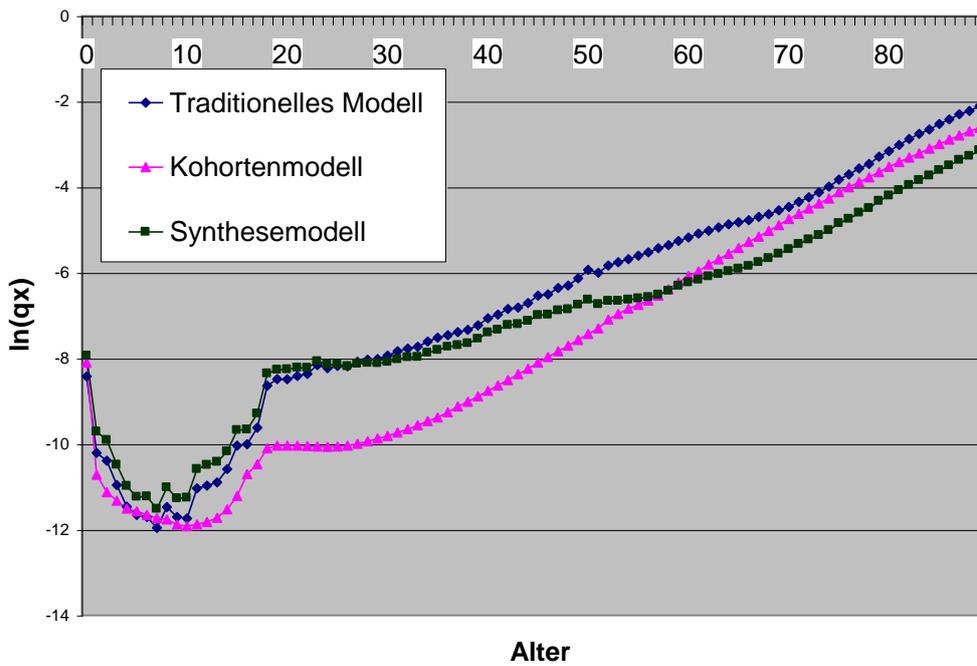
Grafik 32: Generationentafeln 1967, Männer

Generationentafeln 1967 Frauen



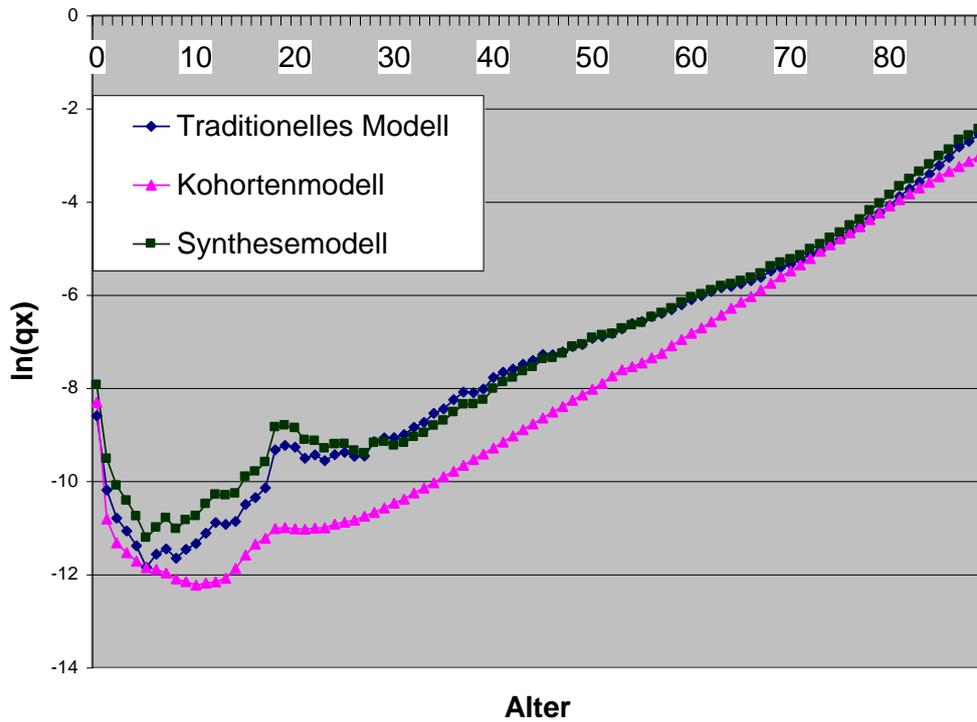
Grafik 33: Generationentafeln 1967, Frauen

Periodentafeln 2050 Männer



Grafik 34: Periodentafeln 2050, Männer

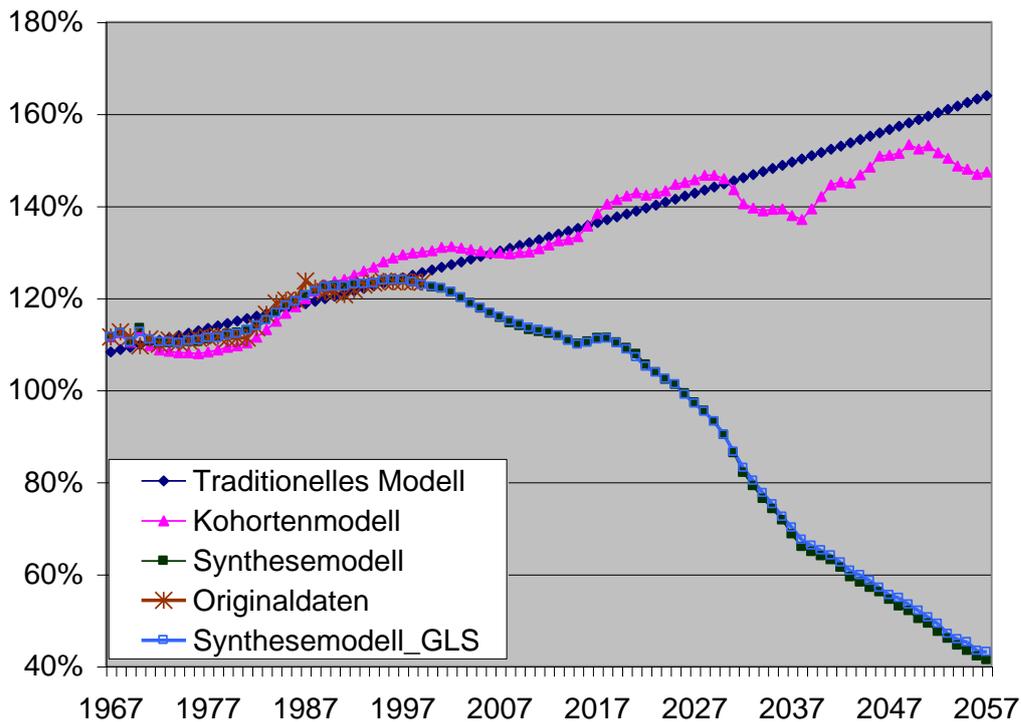
Periodentafeln 2050 Frauen



Grafik 35: Periodentafeln 2050, Frauen

Die folgende Grafik enthält das Verhältnis der Sterblichkeit 89-jähriger Männer in Prozent der Sterblichkeit 89-jähriger Frauen nach den verschiedenen Modellen, wobei neben den bisher verwendeten OLS-Schätzern für das Synthesemodell zusätzlich auch Werte auf Basis der GLS-Schätzer bestimmt werden. Dabei zeigt sich, dass die hier betrachteten Werte für OLS-Schätzer einerseits (Datenreihe „Synthesemodell“) und GLS-Schätzer andererseits (Datenreihe „Synthesemodell_GLS“) fast identisch sind.

q(89,Männer) in % q(89,Frauen)



Grafik 36: Vergleich Männer/Frauen

Gemäß Synthesemodell beträgt die Sterblichkeit 89-jähriger Männer nach dem Jahr 2050 weniger als 50% der Sterblichkeit 89-jähriger Frauen. Dies erscheint unplausibel und hat folgende Ursache:

Beim Synthesemodell sind die Sterblichkeitsverbesserungen zusammengesetzt aus einer altersabhängigen und einer geburtsjahrabhängigen Komponente. Die beste Approximation der Daten der Vergangenheit wird mit Trendfunktionen erreicht, die für Männer folgende Eigenschaften haben:

Die altersabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen für höhere Alter sind wesentlich größer als für niedrige Alter (z.B. Altersbereich 70 bis 89 Jahre im Vergleich zum Altersbereich 25 bis 45 Jahre).

Die geburtsjahrabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen für spätere Kohorten sind größer als für frühere Kohorten (z.B. Kohorten 1970 bis 1990 im Vergleich zu den Kohorten 1925 bis 1945).

Sterblichkeitsprojektionen mit diesen Trends führen nun dazu, dass die großen Sterblichkeitsverbesserungen für höhere Alter und spätere Kohorten zusammenwirken und so zu dem beobachteten Effekt führen. Denn die frühen Kohorten sterben in der Projektion aus, es bleibt jedoch die hohe Sterblichkeitsverbesserung der hohen Alter bei den Männern.

Die unplausiblen Auswirkungen ergeben sich also dadurch, dass beim Synthesemodell die beiden Komponenten der Sterblichkeitsverbesserung (alters- und geburtsjahrabhängig) in der Zukunft für andere Kombinationen von Alter und Geburtsjahr

zusammenwirken als in der Vergangenheit. Daher erscheint das Synthesemodell grundsätzlich ungeeignet für Sterblichkeitsprojektionen.

Gemäß Likelihood-Ratio-Test ist weder das Kohortenmodell noch das traditionelle Modell deutlich besser geeignet als das jeweils andere Modell.

Bei der Entscheidung zwischen Kohortenmodell und traditionellem Modell ist Folgendes zu beachten:

Beim Kohortenmodell sind die Schätzungen der Trendfaktoren für Geburtsjahre ab 1970 mit steigenden Unsicherheiten behaftet, da sie auf immer kürzeren Beobachtungsperioden (und ab Geburtsjahrgang 2000 sogar vollständig auf Extrapolationen) basieren. Die Geburtsjahrgänge ab 1970 haben jedoch einen bedeutenden Anteil am Bereich der Geburtsjahrgänge, für welche die DAV 2004 R voraussichtlich von Bedeutung sein wird.

Aus diesem Grund wird das traditionelle Modell für Sterblichkeitsprojektionen ausgewählt.

Anhang 13 Lee-Carter Modell

Das Modell von Lee und Carter ist ein seit 1992 bekanntes und seitdem verbreitetes Modell zur Prognose der Sterblichkeitsentwicklung, siehe [LC], [W2] und [L3]. Das Lee-Carter-Modell modelliert die logarithmierten Sterblichkeiten wie folgt:

$$\ln(q_{x,t}) = a_x + b_x \cdot k_t + e_{x,t}$$

Für den Spezialfall, dass k_t ein linearer Zeittrend ist, ergibt sich das traditionelle Modell altersabhängiger Sterblichkeitsverbesserungen. Im allgemeinen Fall ist k_t jedoch eine über die Zeit stochastisch variierende Variable, welche der treibende Faktor der Sterblichkeitsentwicklung ist und über die Gewichtungsfaktoren b_x unterschiedlich stark auf die einzelnen Alter wirkt. Die altersabhängigen Koeffizienten a_x entsprechen dem Mittelwert der $\ln(q_{x,t})$. Die Koeffizienten b_x und k_t werden aus einer Singularwertzerlegung ermittelt, welche die Fehlerquadratsumme $\sum e_{x,t}^2$ minimiert. Eine lineare Regression kann hier nicht verwendet werden, da sowohl b_x als auch k_t unbekannt sind und nichtlinear miteinander verknüpft sind.

Eine von Lee und Carter für Prognosezwecke verwendete Vereinfachung ist, dass der sich aus der Zerlegung ergebende Zeittrend k_t approximativ als deterministisch linear über die Zeit angenommen wird. Diese jährliche konstante Sterblichkeitsverbesserung wird geschätzt mittels $F(x) = -b_x \cdot \Delta k_t$, wobei Δk_t die Steigung von k_t über den betrachteten Zeitraum ist.

Bei der Berechnung des Lee-Carter-Modells werden implizit alle $q_{x,t}$ gleich stark gewichtet. Dies entspricht einer OLS-Schätzung (=Ordinary Least Squares). Dieses Modell lässt sich leicht verallgemeinern, indem die einzelnen $q_{x,t}$ unterschiedlich stark gewichtet werden. So wird z.B. in [W2] vorgeschlagen, Gewichtungen in Höhe der Anzahl der beobachteten Toten einzuführen. Dort wird gezeigt, dass dadurch Funktionen der $q_{x,t}$, wie z.B. die Lebenserwartung, deutlich präziser geschätzt werden können. Da bei abgekürzten Sterbetafeln keine Totenanzahlen vorliegen, soll im folgenden alternativ die altersabhängige Standardabweichung σ_x der Sterblichkeiten $q_{x,t}$ als Gewichtung verwendet werden. Dies führt zu einer verallgemeinerten Kleinste Quadrate Schätzung (GLS = Generalised Least Squares), bei welcher die Residuen für alle Altersklassen nun die gleiche Standardabweichung aufweisen:

$$\ln(q_{x,t}) = a_x + \sigma_x \cdot b_x \cdot k_t + e_{x,t}$$

Dies bedeutet, dass die Singularwertzerlegung auf die Matrix der

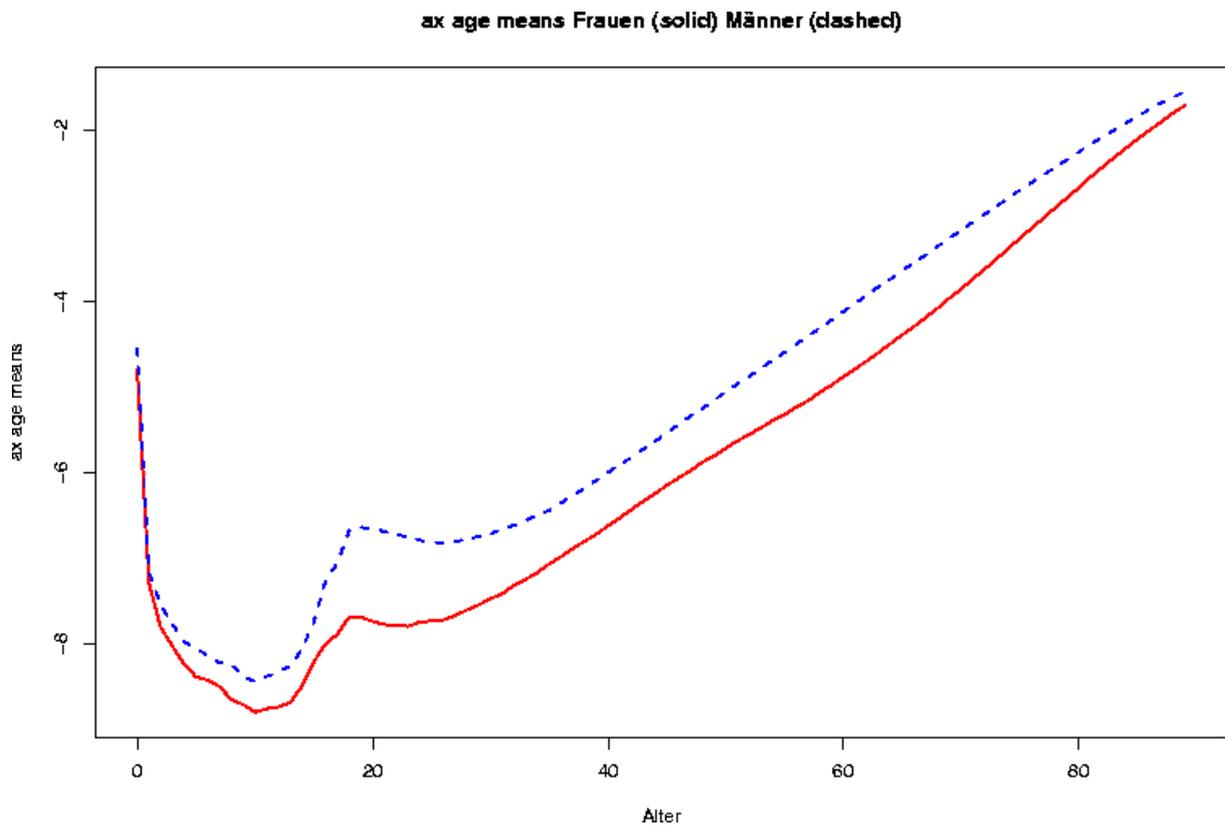
$$\frac{\ln(q_{x,t}) - a_x}{\sigma_x} = b_x \cdot k_t + e_{x,t}$$

angewendet wird. Für jedes Alter x wird also nicht nur eine altersabhängige Mittelwertbereinigung, sondern auch eine Varianznormierung durchgeführt. Die σ_x resultieren aus den Residuen einer vorangehenden OLS-Singularwertzerlegung. Unter der Annahme eines sich zeitlich linear entwickelnden Trends k_t ergibt sich die Sterblichkeitsverbesserung als $F(x) = -\sigma_x \cdot b_x \cdot \Delta k_t$.

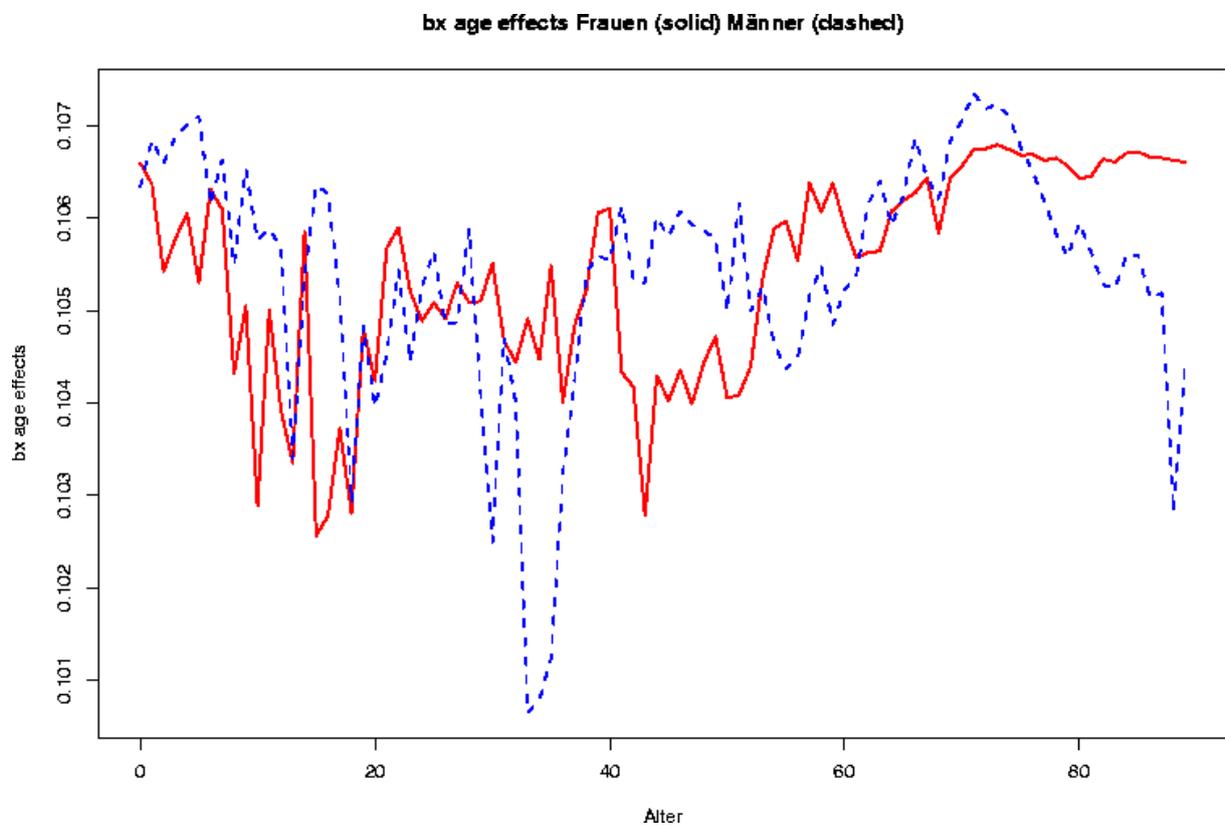
Das Lee-Carter-Modell wird geschätzt für die westdeutschen abgekürzten Sterbetafeln von St 1971/1973 bis St 1998/2000. Die Koeffizienten a_x verändern sich durch die GLS-Schätzung nicht im Vergleich zur OLS-Schätzung, siehe Grafik 37. Die Koeffizienten b_x und k_t sind in Grafik 38 und Grafik 39 dargestellt¹⁰. Da k_t in Grafik 39 im wesentlichen einem Random Walk mit Drift folgt und somit stark von einem deterministischen linearen Trend geprägt ist, ist es zulässig, vereinfachend von einer konstanten Sterblichkeitsverbesserung auszugehen. Die Sterblichkeitsverbesserungen des Lee-Carter-Modells sind in Grafik 40 dargestellt und werden dort mit denen des traditionellen Modells verglichen. Die Verwendung des GLS-Schätzers führt im Gegensatz zur OLS-Schätzung dazu, dass der Lee-Carter-Trend nun nicht mehr niedriger ist als beim traditionellen Modell: Die mittlere Sterblichkeitsverbesserung für die Alter 60 bis 89 Jahre ist für die Männer identisch mit der des traditionellen Modells. Bei den Frauen reduziert sich die ursprüngliche Differenz von 0,062% auf 0,038%. Die GLS-Schätzung in Grafik 39 zeigt, dass in den letzten 10 Jahren der Trend der Männer stärker war als der Trend der Frauen. Bei der OLS-Schätzung wurde dies noch nicht so deutlich. Dies entspricht den Erkenntnissen im Anhang 14 Teil A, wo rollierende Zeiträume untersucht werden.

Insgesamt wird deutlich, dass das Lee-Carter-Modell und das traditionelle Modell zu sehr ähnlichen Sterblichkeitstrends führen.

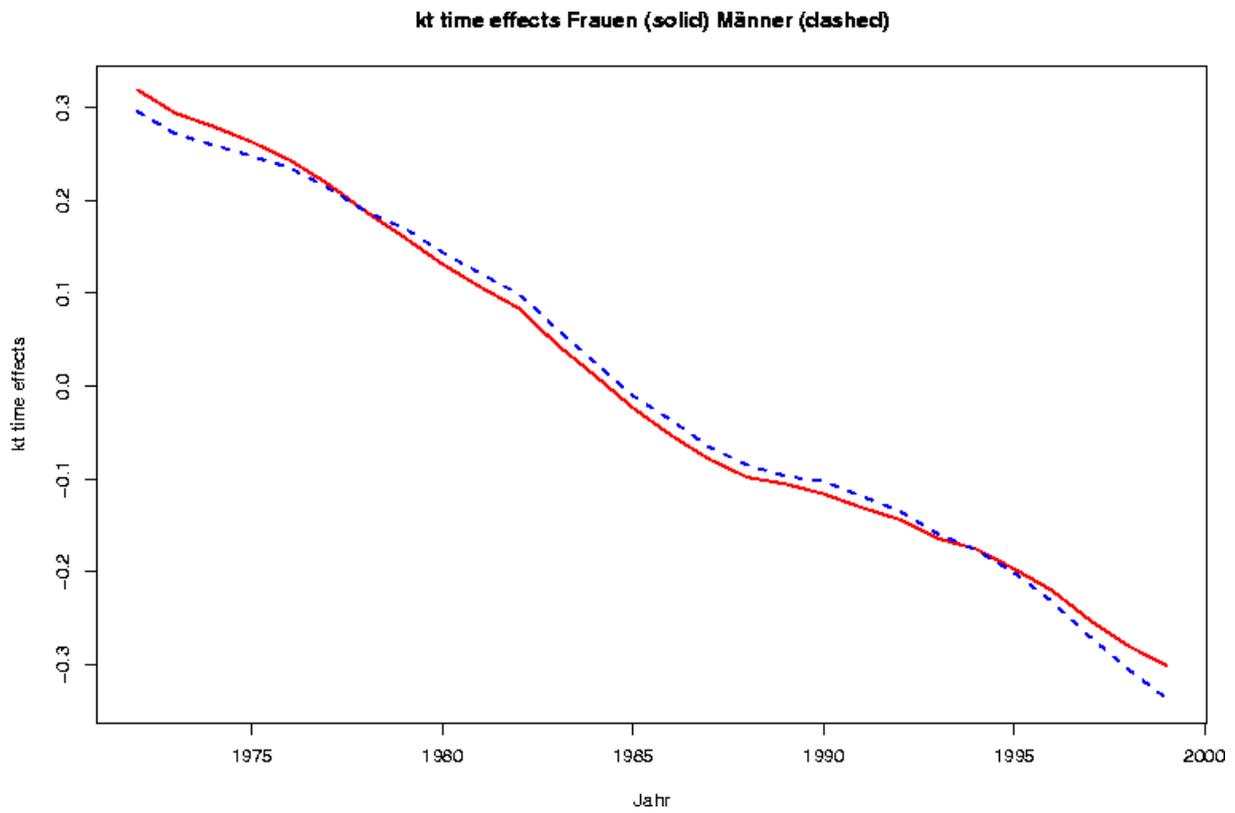
¹⁰ Bei den Koeffizienten b_x bzw. k_t ist zu beachten, dass diese noch mit den Singularwerten multipliziert werden müssen, welche bei der Zerlegung separat anfallen. Grund ist die Normierung der Vektoren b_x und k_t , so dass die Summe ihrer quadrierten Elemente gleich 1 ist. Erst nach Multiplikation mit den Singularwerten approximiert $b_x k_t$ den Ausdruck $\ln(q_{x,t}) - a_x$.



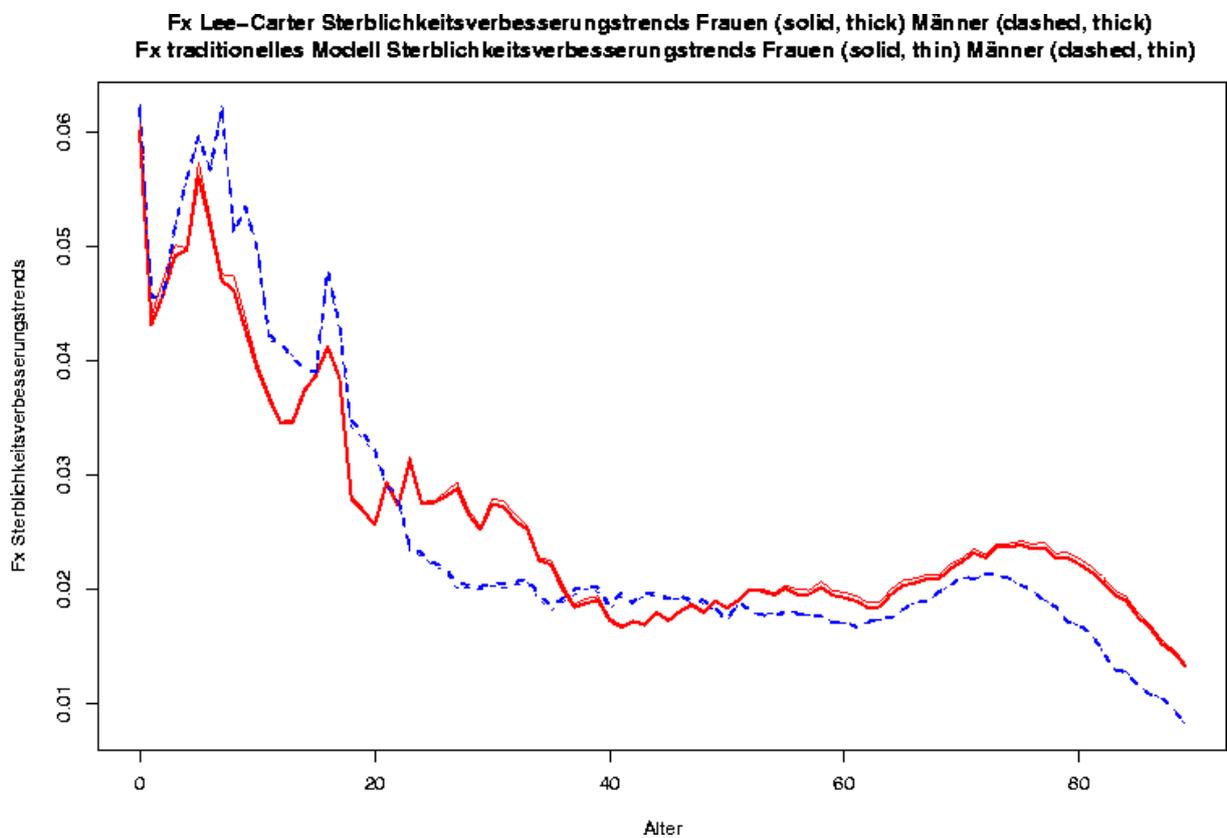
Grafik 37: Lee-Carter-Koeffizienten a_x



Grafik 38: GLS-Schätzung: Lee-Carter-Koeffizienten b_x



Grafik 39: GLS-Schätzung: Lee-Carter-Koeffizienten k_t



Grafik 40: Sterblichkeitsverbesserung Lee-Carter (GLS) im Vergleich zum traditionellen Modell

Anhang 14 Zeitraum für die Schätzung des Bevölkerungstrends

Teil A Sensitivitätsbetrachtung

Es soll untersucht werden, wie sensitiv der geschätzte Sterblichkeitstrend reagiert, wenn verschiedene Beobachtungszeiträume gewählt werden. Als Grundlage dient das traditionelle Modell mit altersabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen. Der Beobachtungszeitraum wird wie folgt variiert:

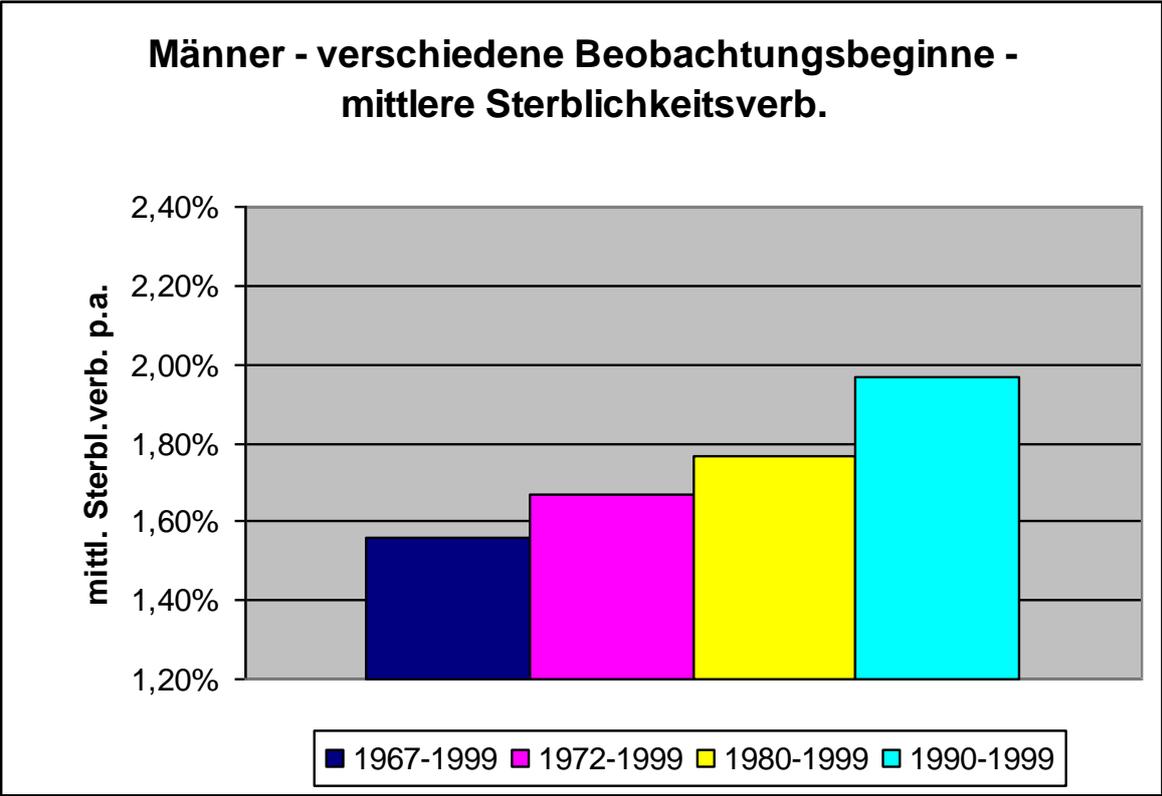
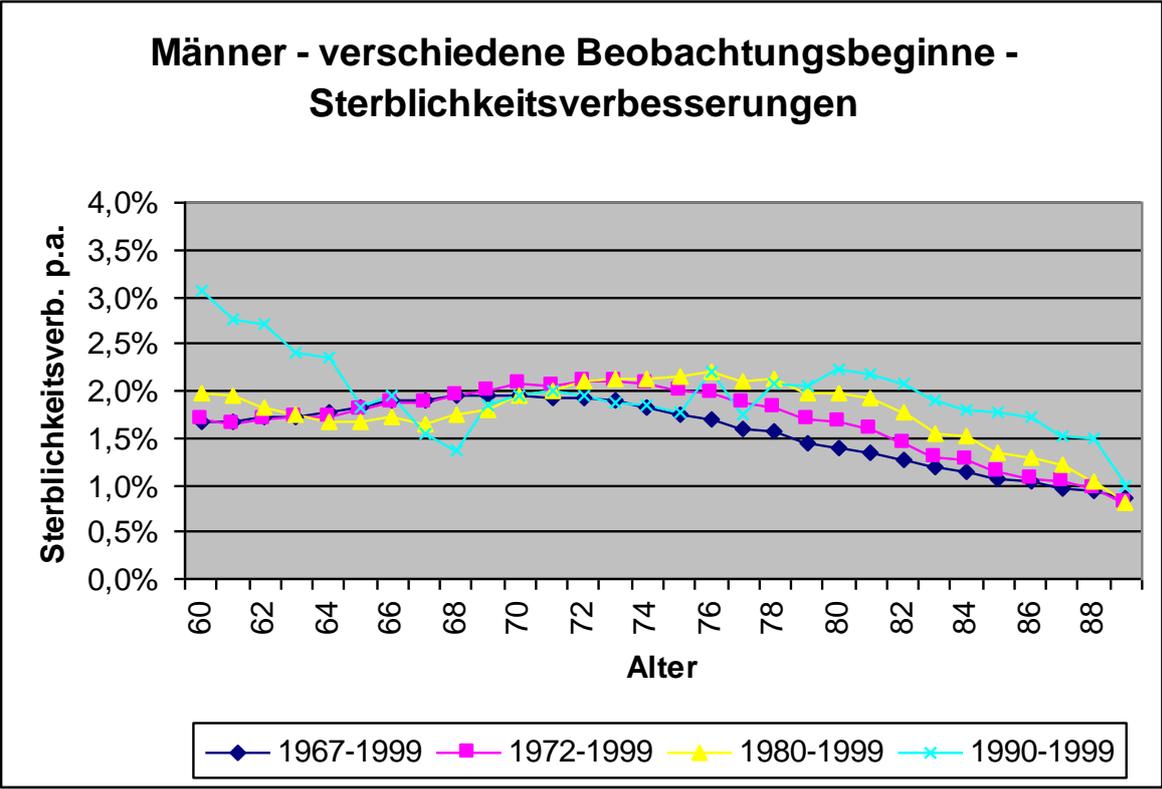
Zeitraum	
1967–1999	Gesamtzeitraum
1972–1999	nach Grippewelle
1980–1999	letzte 20 Jahre
1990–1999	letzte 10 Jahre
1974–1983	10 Jahre rollierend (nach Grippewelle)
1978–1987	10 Jahre rollierend
1982–1991	10 Jahre rollierend
1986–1995	10 Jahre rollierend
1990–1999	10 Jahre rollierend (= letzte 10 Jahre)

In den ersten vier Zeiträumen wird der Beobachtungsbeginn von 1967 bis 1990 variiert und der Beobachtungszeitraum wird somit schrittweise verkürzt. In den weiteren fünf Zeiträumen werden stets 10 Jahre betrachtet, welche rollieren.

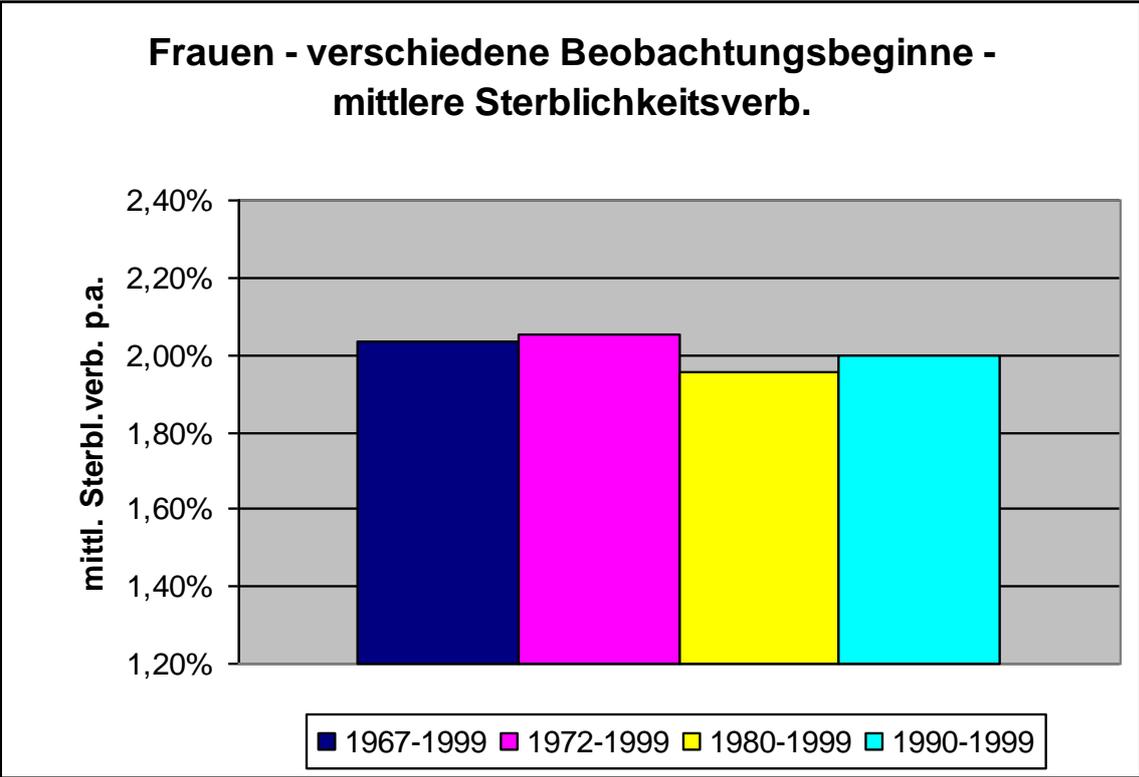
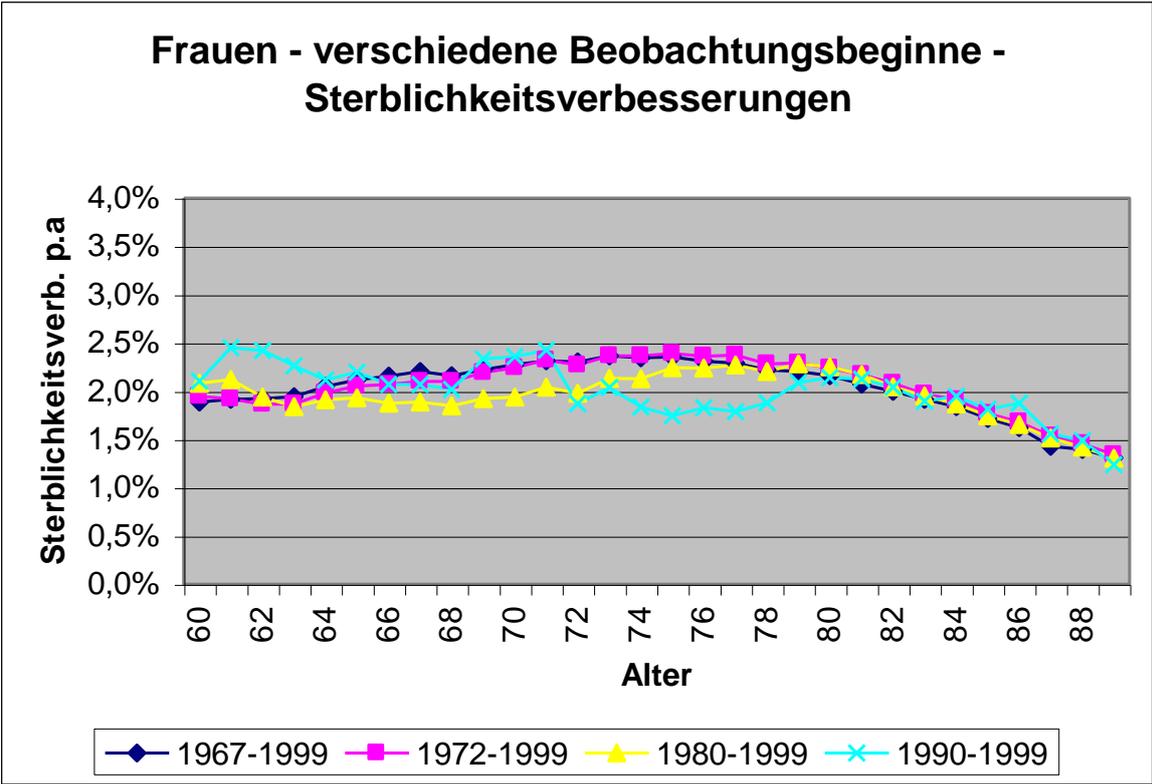
Im Folgenden werden die mittleren jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen für die Alter 60 bis 89 mittels $\frac{1}{30} \sum_{x=60}^{89} (1 - \exp(-F(x)))$ berechnet, wobei $F(x)$ den Wert der Trendfunktion für das Alter x darstellt.

Bei einer Variation der Beobachtungsbeginne ergibt sich für Frauen bis 1990 keine wesentliche Verschiebung des Trends, siehe Grafik 42. Die mittleren Sterblichkeitsverbesserungen schwanken lediglich unsystematisch in der engen Spanne von 1,96 % bis 2,05 %. Bei Männern nimmt die jährliche Sterblichkeitsverbesserung bis 1990 systematisch von 1,55 % auf 1,95 % zu.

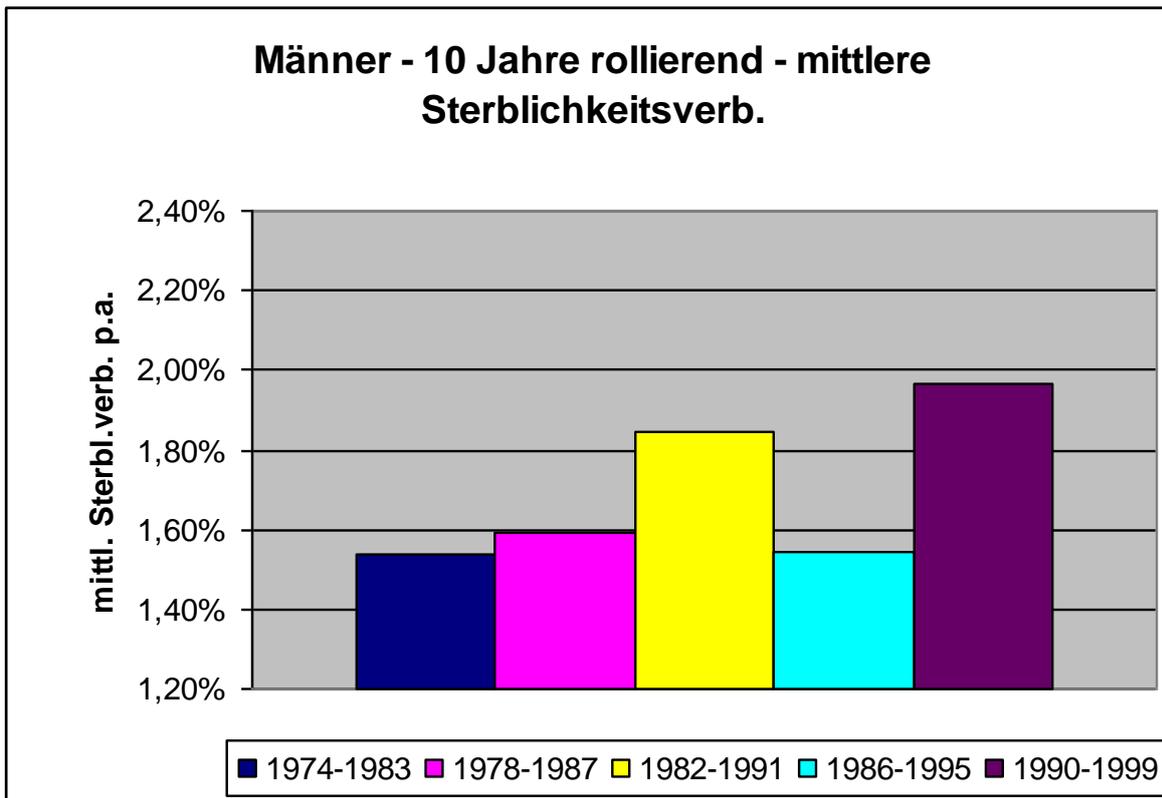
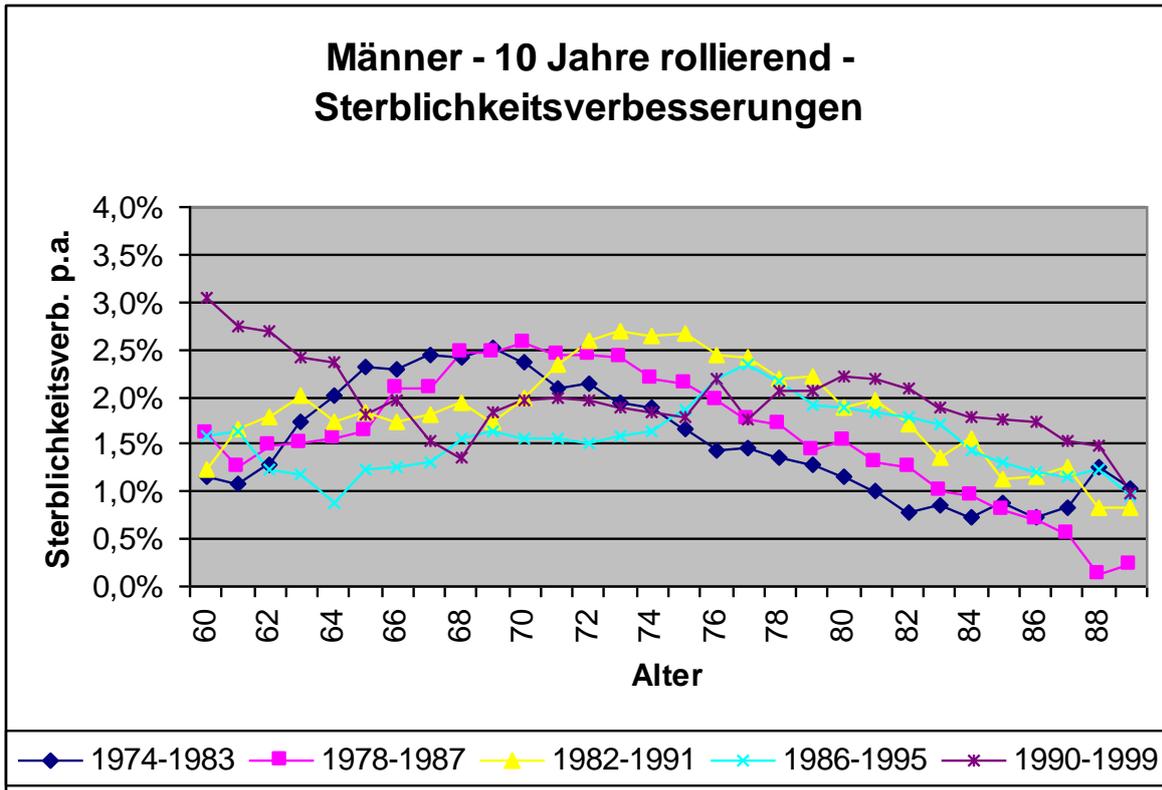
Wird der rollierende 10-Jahres-Zeitraum für Frauen betrachtet, so lässt sich erkennen, dass die mittleren Sterblichkeitsverbesserungen zwischen 1,60 % und 2,30 % schwanken, siehe Grafik 44. Die Sterblichkeitsverbesserungen scheinen bis 1986 abzunehmen und steigen ab 1990 wieder auf 2,00 % an. Bei Männern schwanken die mittleren Sterblichkeitsverbesserungen zwischen 1,55 % und knapp 2,00 % und nehmen dabei im Zeitverlauf zu, siehe Grafik 43. Bei Männern und bei Frauen weist der Zeitraum 1986 -1995 besonders niedrige Sterblichkeitsverbesserungen auf.



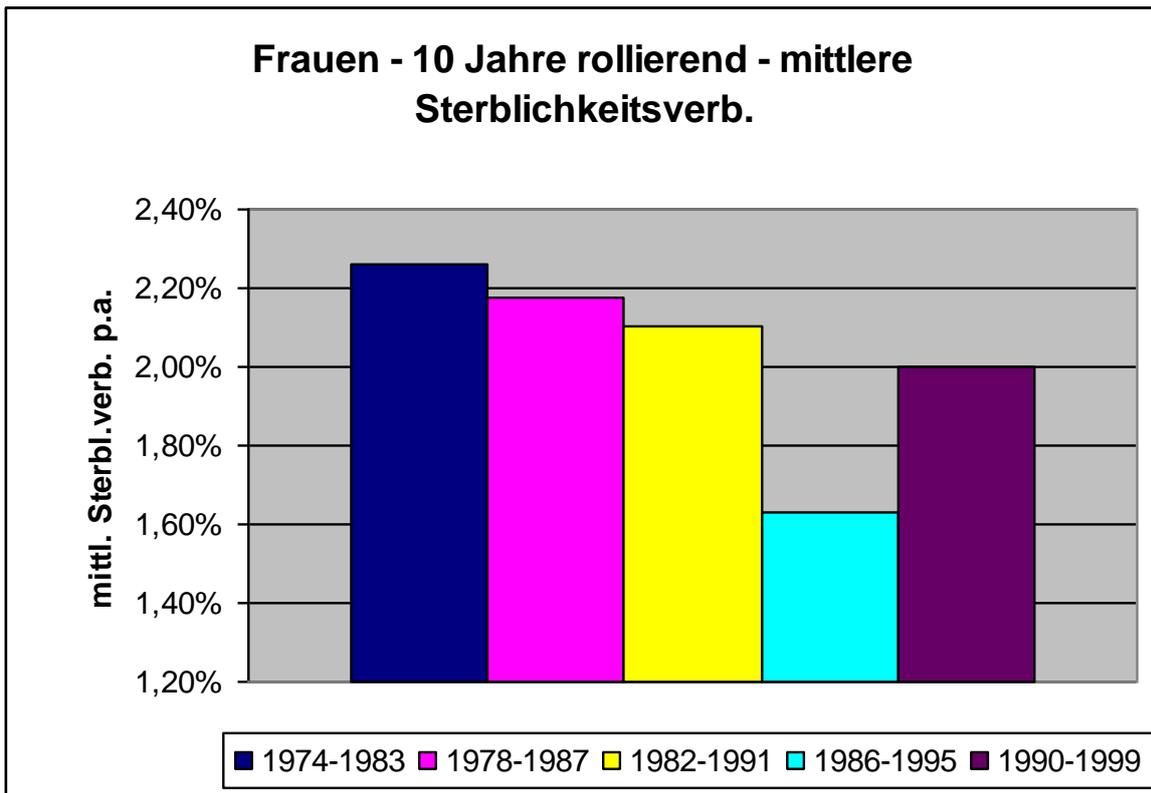
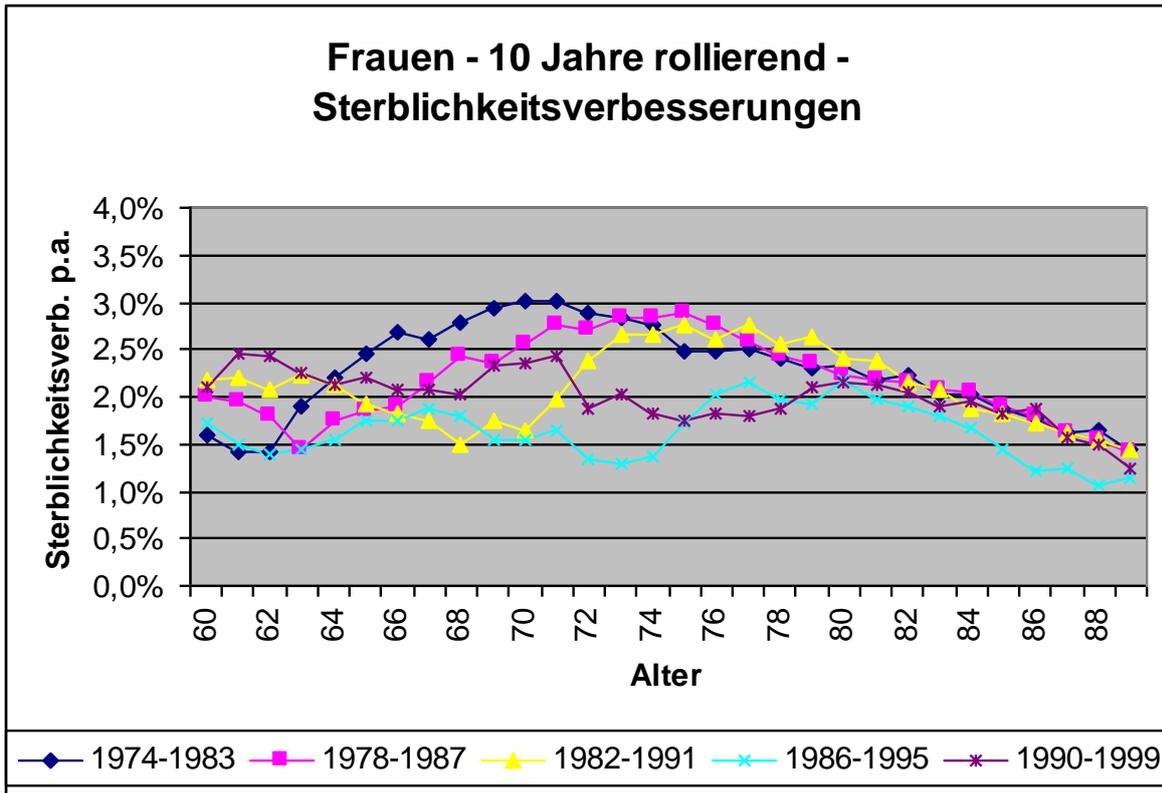
Grafik 41: Männer – verschiedene Beobachtungsbeginne



Grafik 42: Frauen – verschiedene Beobachtungsbeginne



Grafik 43: Männer – 10 Jahre rollierend



Grafik 44: Frauen – 10 Jahre rollierend

Teil B Grippewelle 1969/1970

Im Rahmen der Erstellung der Allgemeinen Deutschen Sterbetafeln ADSt 1970/72 und ADSt 1986/88 durch das Statistische Bundesamt wurden Zeitreihenanalysen der monatlichen Sterbefälle für 1950 bis einschließlich 1988 durchgeführt. Anhand der irregulären Komponente dieser Zeitreihenanalyse konnten Zufälligkeiten und Anomalien der Sterblichkeit dieses Zeitraums erkannt und quantifiziert werden.

Dabei fielen als Monate mit einer ungewöhnlich hohen Zahl von Sterbefällen auf:

- Februar 1953 mit etwa 20.000 zusätzlichen Sterbefällen,
- Oktober 1957 mit etwa 13.000 zusätzlichen Sterbefällen,
- Februar 1960 mit etwa 20.000 zusätzlichen Sterbefällen,
- Februar 1963 mit etwa 21.000 zusätzlichen Sterbefällen,
- Februar 1968 mit etwa 16.000 zusätzlichen Sterbefällen,
- Dezember 1969 und Januar 1970 mit insgesamt etwa 40.000 zusätzlichen Sterbefällen,
- Januar 1973 mit etwa 9.000 zusätzlichen Sterbefällen,
- Januar 1975 mit etwa 11.000 zusätzlichen Sterbefällen,
- Februar 1978 mit etwa 8.000 zusätzlichen Sterbefällen,
- Februar 1986 mit etwa 9.000 zusätzlichen Sterbefällen.

Für die genannten Monate weist die Todesursachenstatistik eine Häufung der Sterbefälle infolge Grippe und Erkrankungen der Atmungsorgane auf.

Im Zeitraum von 1953 bis 1972 gab es also insgesamt sechs Grippewellen, wobei es sich bei der des Winters 1969/70 um eine auch in ihren Auswirkungen ungewöhnlich starke Grippewelle gehandelt hat. In den 70er und 80er Jahren fielen die Grippewellen schwächer aus, auch scheint sich in jüngerer Zeit deren Abstand zu vergrößern. Die Grippewelle 1986 geht aufgrund der Verwendung der Sterbeziffermethode nur zu einem Drittel in die Berechnung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten ein, was angesichts der geringer werdenden Bedeutung von Grippewellen angemessen erscheint. Diese Methode wurde bei der Erstellung der hier erwähnten Allgemeinen Sterbetafeln und aller abgekürzten Sterbetafeln verwendet.

Anhang 15 Trenddämpfung

Teil A Internationale Beispiele für Trenddämpfung

UK-Sterbetafeln der „92“ series (CMI Report 17):

Die Publikation neuer Rentnersterbetafel für „Life office pensioners“ in UK (s. [CMI1]) erfolgte auf einer Datenbasis von 1991-1994 mit Ansatz von altersabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen im Zeitablauf. Die Trendfunktion $F(x,t)$ der I92 wurde auf Basis von Versichertendaten abgeleitet. Diese Sterblichkeitsverbesserungen wurden hergeleitet aus Beobachtungen der Jahre 1955-1994. Bei Männern wurden in den letzten Jahren stärkere Sterblichkeitsverbesserungen beobachtet, bei Frauen treten abhängig von der Altersgruppe auch schwächere Verbesserungen auf, welche aber nicht systematisch sind. Auf Basis dieser Daten werden exponentielle Reduktionsfaktoren für die Sterbewahrscheinlichkeit abhängig vom Alter mit einem positiven Grenzwert angenommen. Dies impliziert eine Abschwächung der Sterblichkeitsverbesserungen.

Die in [CMI2] vorgeschlagenen zusätzlichen geburtsjahrabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen beziehen sich nur auf einen begrenzten Zeitraum bis 2010, 2020 bzw. 2040. Danach werden die ursprünglichen Verbesserungen aus der Sterbetafel der „92“ series angewendet.

Herleitung der Sterbetafel AVÖ 1996R für Rentenversicherungen:

Bei der österreichischen Rententafel AVÖ 1996R (siehe [JLPS]) wird die Sterblichkeitsverbesserung mit dem traditionellen Modell auf Basis einer Trendfunktion berücksichtigt. Die Trendfunktion $F(x,t)$ wurde auf Basis von Sterblichkeitsdaten der österreichischen Bevölkerung abgeleitet. Bei der Trendfunktion wird zwischen einem Langfristtrend und einem Kurzfristtrend unterschieden. Der Kurzfristtrend ergibt sich aus Daten des Zeitraums von 1980 bis 1995 und liegt signifikant oberhalb des Langfristtrends. Deshalb wird bis 2000 der Kurzfristtrend berücksichtigt und danach mittels linearer Trenddämpfung ein Übergang auf den Langfristtrend im Zeitraum von 2000 bis 2010 unterstellt. Das bedeutet, es wird langfristig nicht von einem Anhalten der erheblichen Sterblichkeitsverbesserungen der letzten Jahre ausgegangen.

Teil B **Internationale Trendvergleiche**

Zur Bewertung der in der DAV 2004 R ermittelten Trendfaktoren 1. und 2. Ordnung werden im folgenden im internationalen Vergleich die Trendmittelwerte (siehe folgende Tabelle mit Trendwerten, die aus den Daten der Berkeley Mortality Database berechnet werden konnten) und im Vergleich mit Japan die altersabhängigen Trendwerte (siehe Grafiken 45 bis 48) untersucht. Drei Ergebnisse sind daraus hervorzuheben:

- Der Durchschnittstrend der DAV 2004 R 1.Ordnung mit 2,42% bei den Männern und 2,50% bei den Frauen wird mit Ausnahme von Japan von keinem anderen Land über einen längeren Zeitraum überschritten, für das Sterblichkeitsdaten zur Verfügung stehen.
- Eine allgemeine These zur Entwicklung der Sterblichkeitstrends im internationalen Vergleich lässt sich zwar nicht aufstellen. Es kann aber beobachtet werden, dass in Ländern, die zur Zeit die höchsten Lebenserwartungen aufweisen (siehe Grafik 49), wie Japan oder Schweiz, insbesondere für die Frauen signifikante und auch schon länger andauernde Trendreduktionen zu beobachten sind.
- Nach einem steilen Anstieg des lokalen Maximums der altersabhängigen Trendfaktoren im Altersbereich 60 bis 89 Jahre ist bei den Frauen seit der Periode 1970–1989 wieder ein steiler Abfall, bei den Männern nach der Periode 1975–1994 immerhin ein leichter Abfall zu beobachten (siehe Grafiken 45 bis 48).

Diese sinkenden Trendentwicklungen sind allerdings noch mit so großen Unsicherheiten behaftet und bei den Männern noch zu schwach ausgeprägt, als dass sie bei der Festsetzung der Trendfaktoren 1. Ordnung reduzierend berücksichtigt werden konnten. Dagegen ist es angebracht, derartige Entwicklungen in die Erstellung der Trendfaktoren 2. Ordnung einzubeziehen. Um einerseits den aktuellen hohen Sterblichkeitsverbesserungstrend angemessen zu erfassen und andererseits Trendreduktionstendenzen einfließen zu lassen, wird das Verfahren der Trenddämpfung verwendet (siehe Abschnitt 4.1.3). Durch eine kurzfristige Korrektur der Parameter Beginn und Ende der Trenddämpfungsphase lassen sich die Trendfaktoren 2. Ordnung zeitnah der tatsächlichen Trendentwicklung anpassen, ohne eine kurzfristige Korrektur der Trendfaktoren 1. Ordnung vornehmen zu müssen.

Rollierende Entwicklung der Trendfaktoren über Perioden von 20 Jahren

Mittelwert 60 -89 Jahre	1960-1979	1965-1984	1970-1989	1975-1994	1980-1999
Männer					
Deutschland-W	0,0039	0,0130	0,0157	0,0167	0,0180
Dänemark	0,0028	0,0030	0,0025	0,0039	0,0077
Japan	0,0228	0,0261	0,0254	0,0192	0,0153
Frankreich (1978-1997)	0,0089	0,0127	0,0156	0,0197	0,0198
Großbritannien (1979-1998)	0,0057	0,0087	0,0126	0,0167	0,0189
Italien	0,0035	0,0064	0,0113	0,0179	0,0203
Österreich	0,0051	0,0107	0,0159	0,0193	0,0213
Schweden	0,0030	0,0048	0,0080	0,0134	0,0163
Schweiz	0,0118	0,0138	0,0146	0,0154	0,0182
USA	0,0075	0,0131	0,0136	0,0128	0,0132
Frauen					
Deutschland-W	0,0132	0,0209	0,0222	0,0205	0,0198
Dänemark	0,0177	0,0141	0,0070	0,0016	0,0012
Japan	0,0275	0,0320	0,0349	0,0326	0,0298
Frankreich (1978-1997)	0,0176	0,0205	0,0231	0,0248	0,0239
Großbritannien (1979-1998)	0,0094	0,0098	0,0117	0,0137	0,0141
Italien	0,0148	0,0171	0,0202	0,0240	0,0250
Österreich	0,0099	0,0153	0,0198	0,0228	0,0247
Schweden	0,0186	0,0179	0,0158	0,0153	0,0146
Schweiz	0,0231	0,0254	0,0246	0,0210	0,0196
USA	0,0154	0,0175	0,0138	0,0089	0,0061

Quelle der Basisdaten: Berkeley Mortality Database - <http://www.mortality.org/>

Der rollierende 20-Jahres-Trend sank für den Altersbereich 60 bis 89 Jahre in der Schweiz für Frauen von 2,54% beim Maximum im Trendintervall 1965-84 auf aktuell 1,96% im Trendintervall 1980-99 und in Japan von 3,49% beim Maximum im Trendintervall 1970-89 auf aktuell 2,98% im Trendintervall 1980-99. In diesem Zeitraum sanken die Werte für die Frauen in Deutschland-W von 2,22% auf 1,98%.

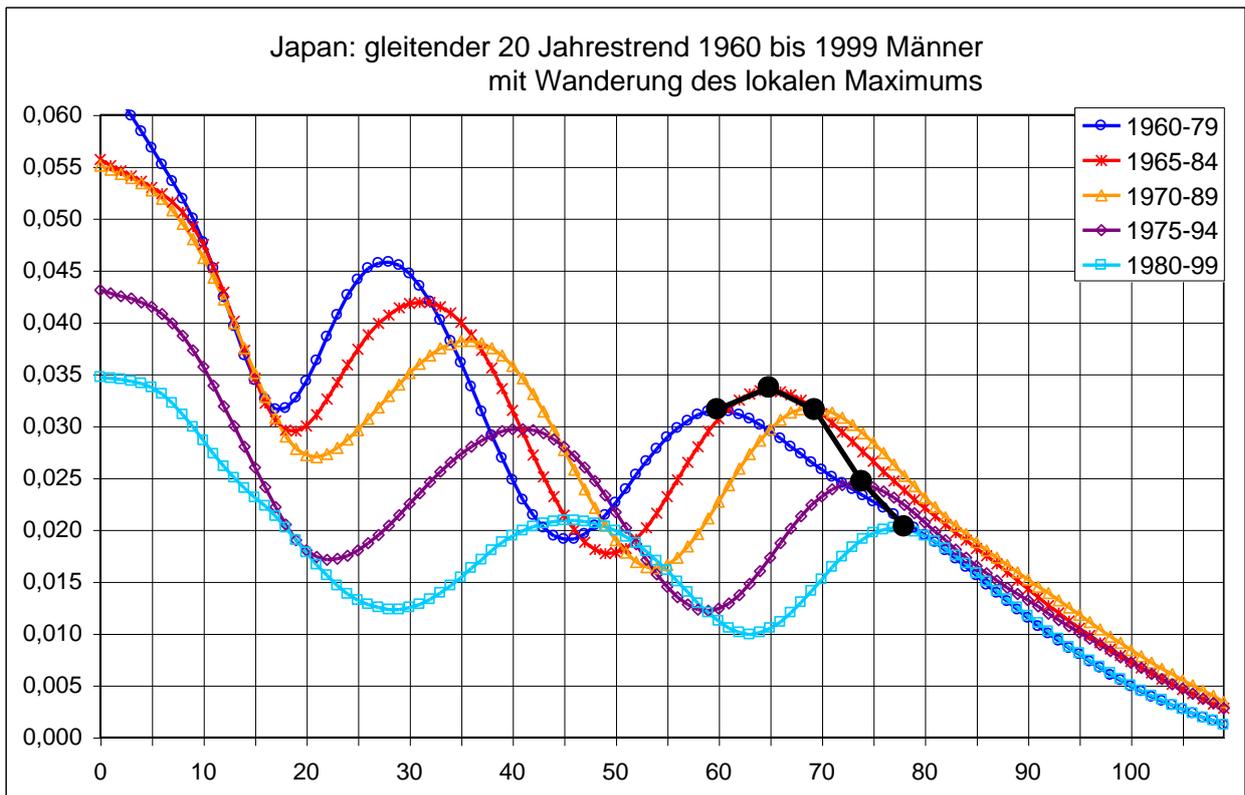
Für Männer sank der Trend in Japan seit 1965-75 von 2,61% auf 1,53% im Trendintervall 1980-99.

Ein weiteres Anzeichen für das mögliche Einsetzen einer Trenddämpfung ist die Entwicklung der lokalen Maxima in Altersbereich ab 60 Jahre (s. Grafiken 45 und 46).

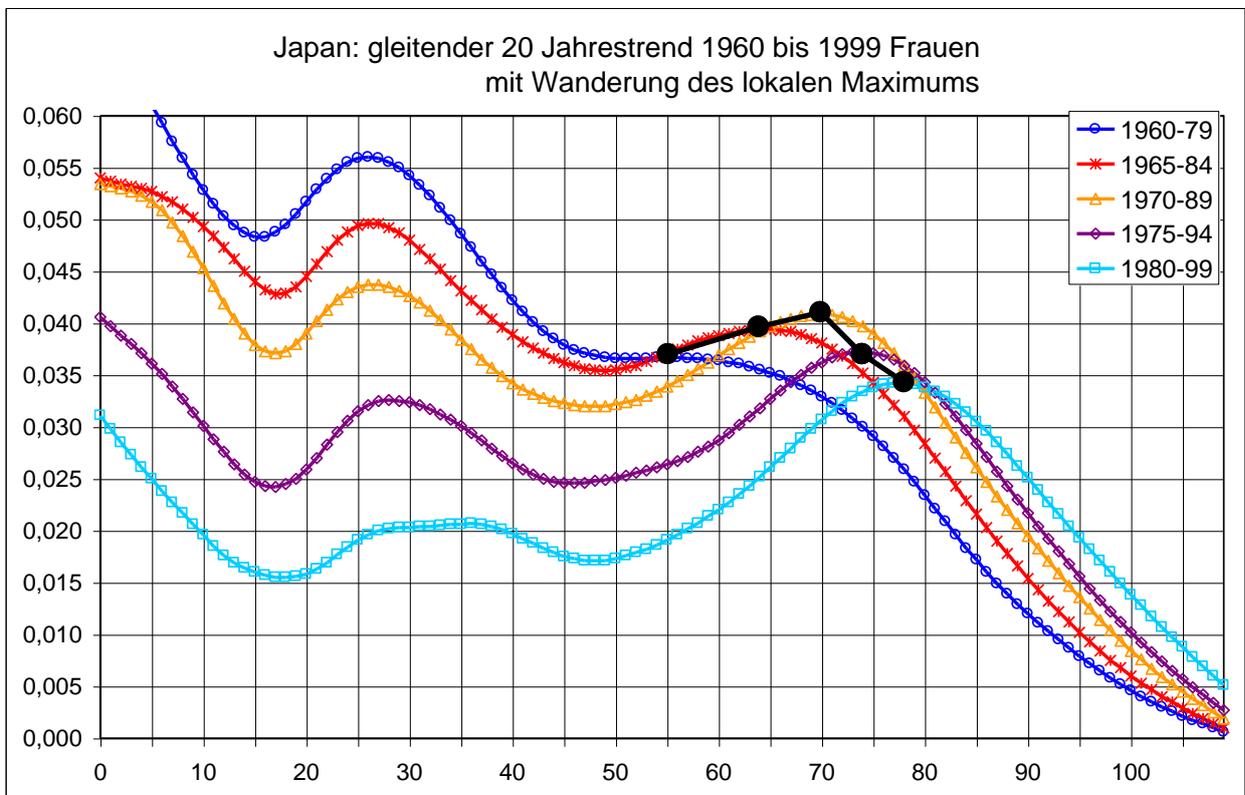
Für Männer in Japan wandert das lokale Maximum mit Wert 3,15% vom Alter 60 Jahre für das Trendintervall 1960-79 zum Alter 78 Jahre für das Trendintervall 1980-99 mit Wert 2,01%. Ein ähnlicher Verlauf ist hier auch bei den Frauen zu beobachten.

Obwohl der Durchschnittstrend bei den Männern in Deutschland-W noch steigt, ist das lokale Maximum nicht weiter gestiegen sondern von 2,22% im Trendintervall 1975-94 im Alter 73 Jahre zum Trendintervall 1980-99 auf 2,12% wieder leicht gesunken (siehe Grafiken 47 und 48).

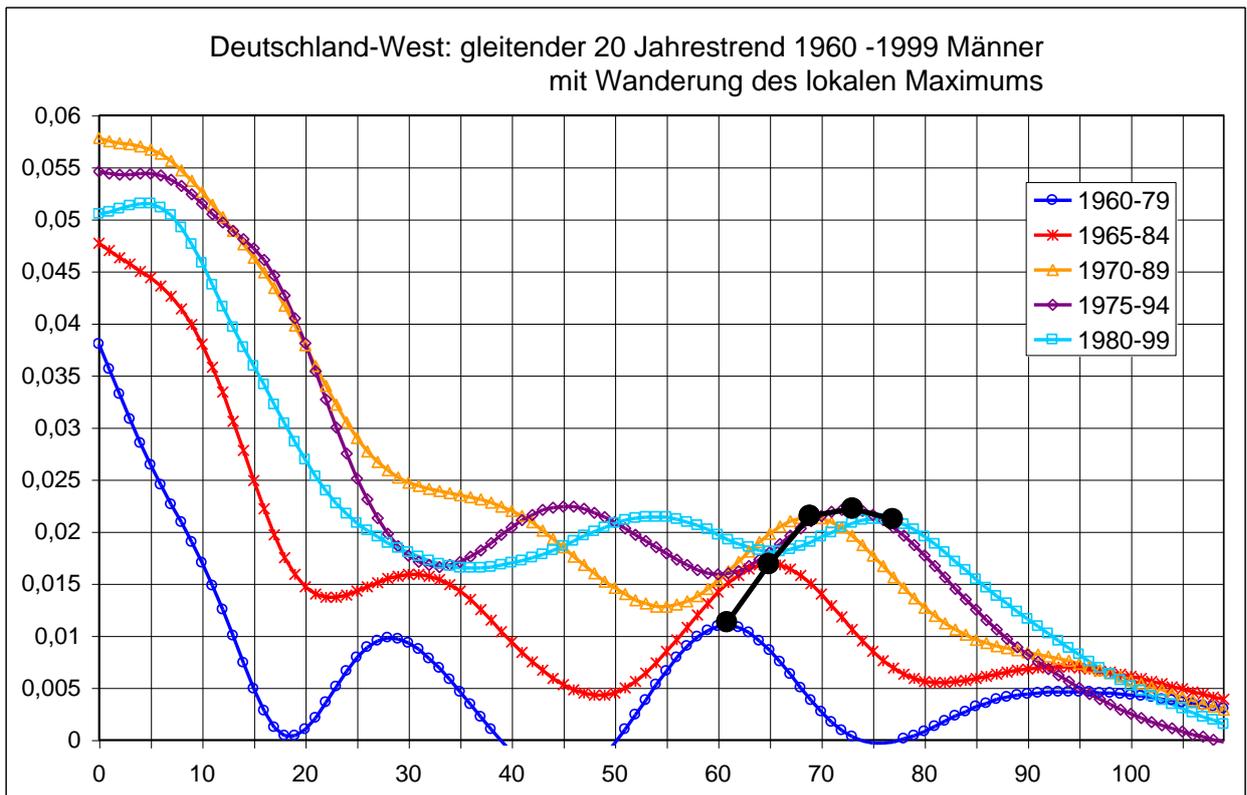
Eine künftige Trenddämpfung in Deutschland lässt sich auf Basis dieser Beobachtungen nicht mit Sicherheit vorhersagen. Diese Beobachtungen liefern aber Anhaltspunkte, zumindest beim Trend 2.Ordnung von einer Trenddämpfung auszugehen.



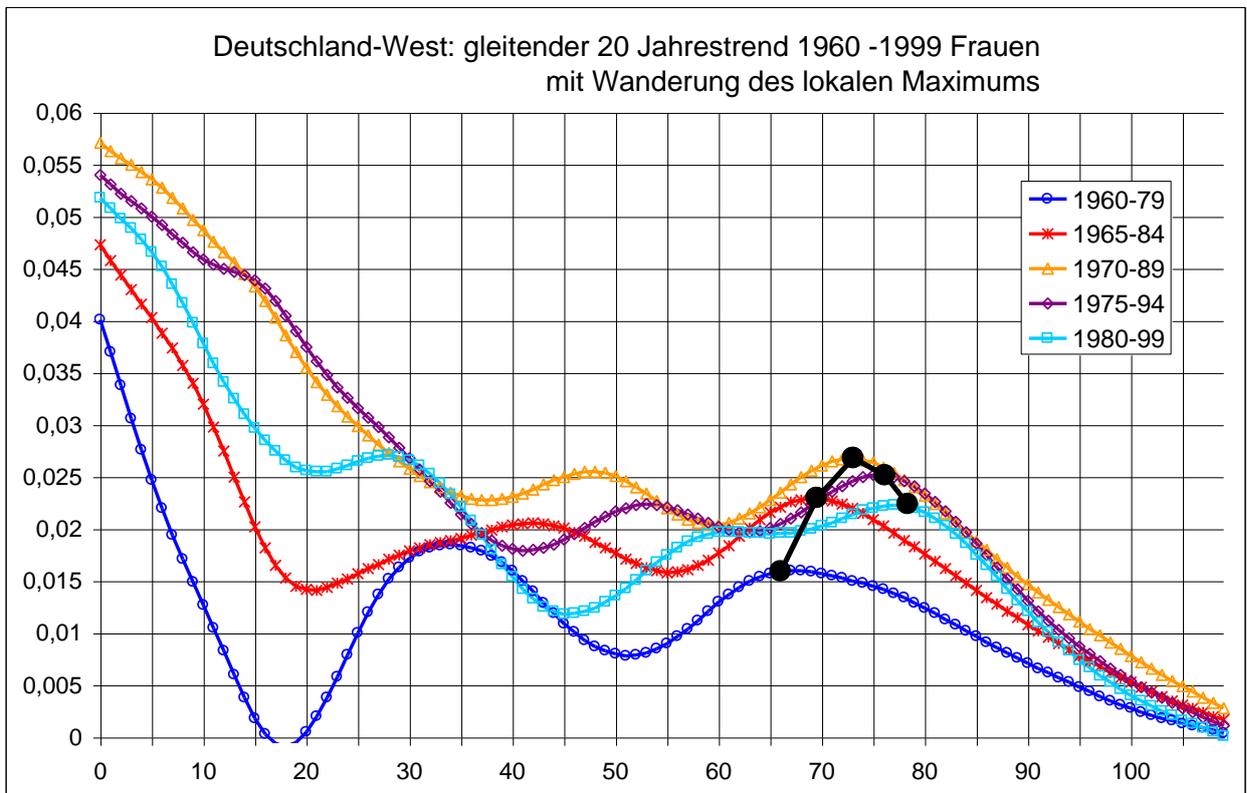
Grafik 45: Japan, gleitender 20 Jahrestrend, Männer



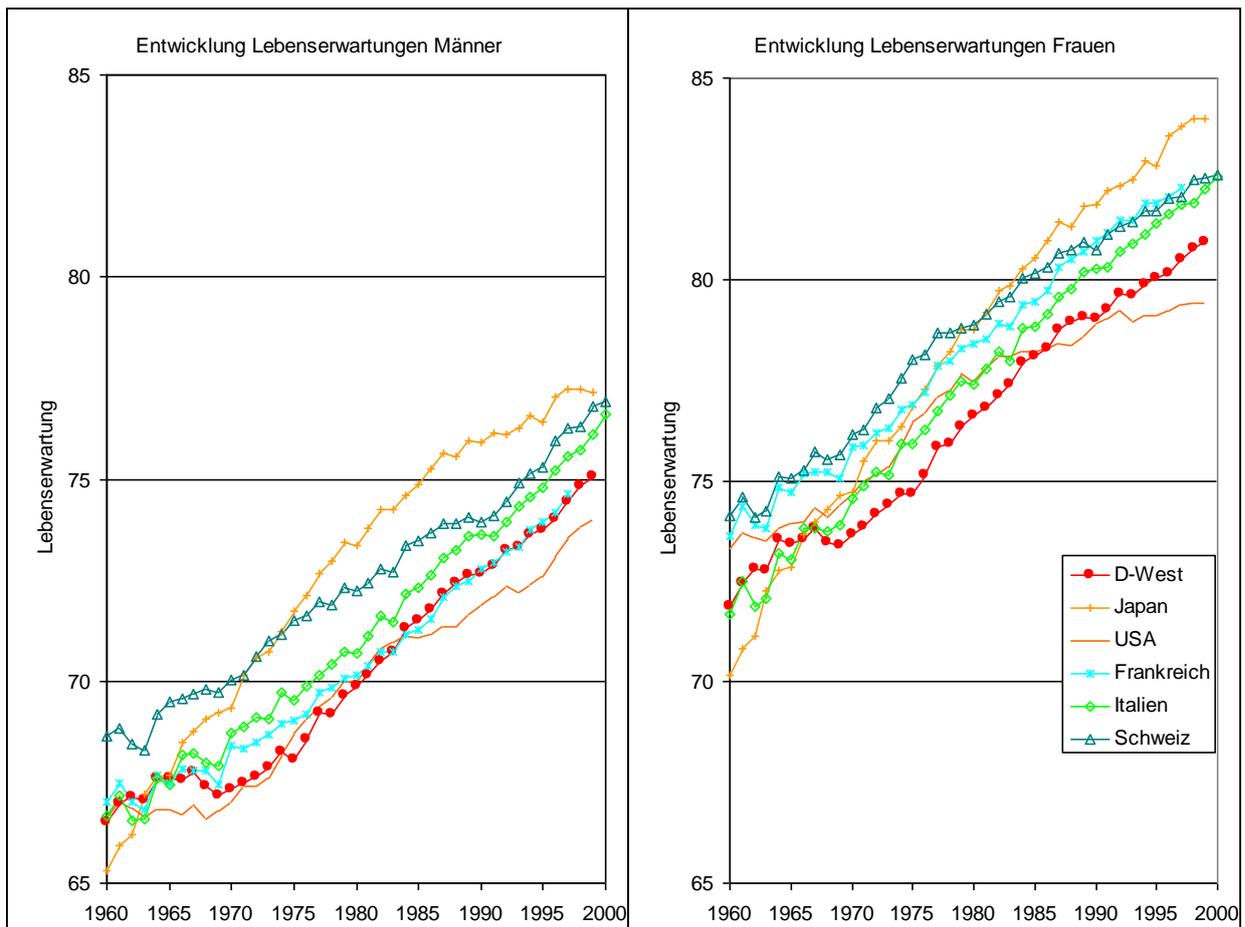
Grafik 46: Japan, gleitender 20 Jahrestrend, Frauen



Grafik 47: Deutschland-W, gleitender 20-Jahrestrend, Männer



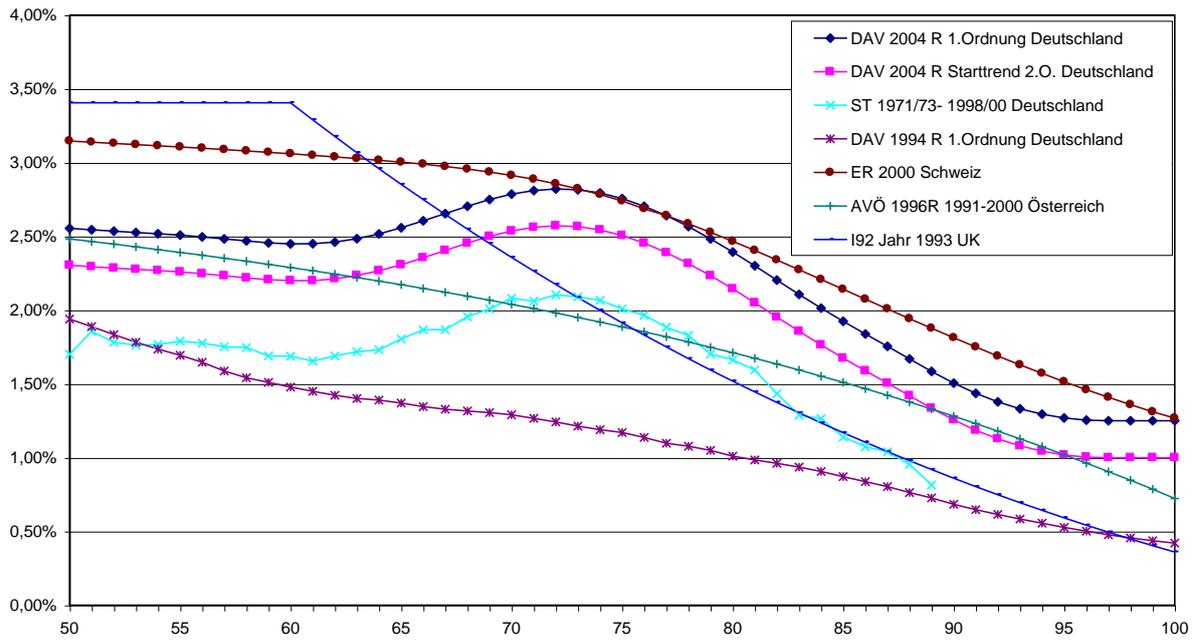
Grafik 48: Deutschland-W, gleitender 20-Jahrestrend, Frauen



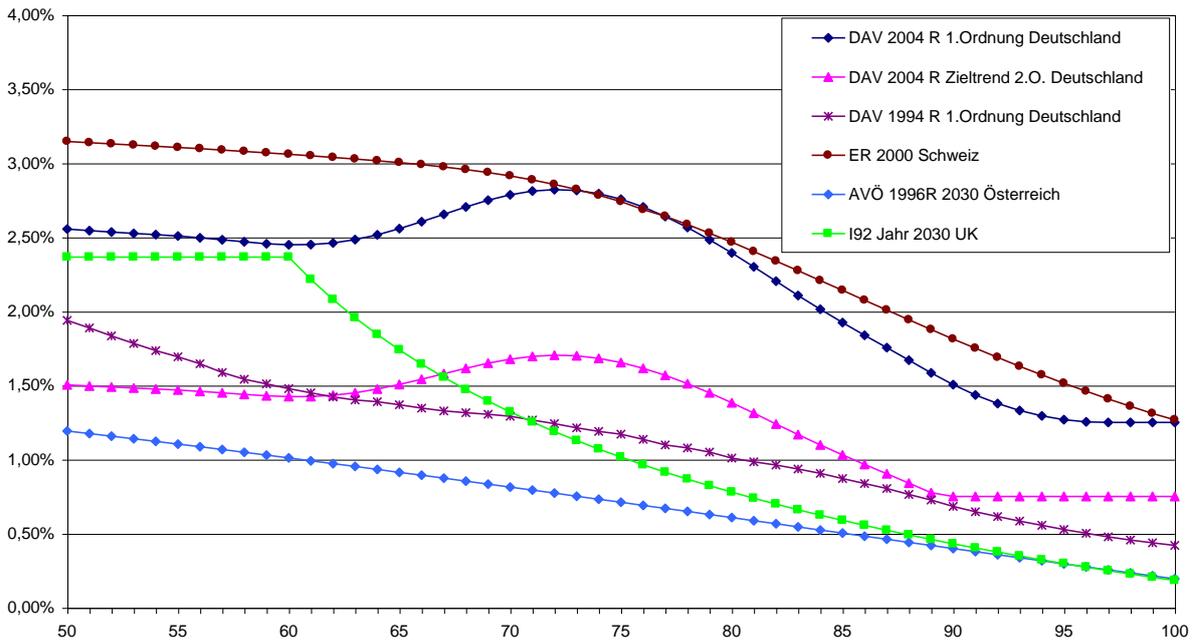
Grafik 49: Entwicklung der Lebenserwartung

In den folgenden Grafiken sind die Trends 1. und 2. Ordnung der DAV 2004 R im internationalen Vergleich dargestellt. In den oberen Grafiken sind jeweils jährliche Sterblichkeitsverbesserungen zu Beginn der Sterblichkeitsprojektionen dargestellt. Insbesondere beziehen sich die jährliche Sterblichkeitsverbesserungen $1 - \exp(-F(x,t))$ für die I92 auf das Jahr $t=1993$ (I92) und für die AVÖ 1996R auf die Jahre $1991 \leq t \leq 2000$. In den unteren Grafiken beziehen sich die jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen $1 - \exp(-F(x,t))$ für die I92 auf das Jahr $t=2030$ und für die AVÖ 1996R auf die Jahre $t \geq 2010$.

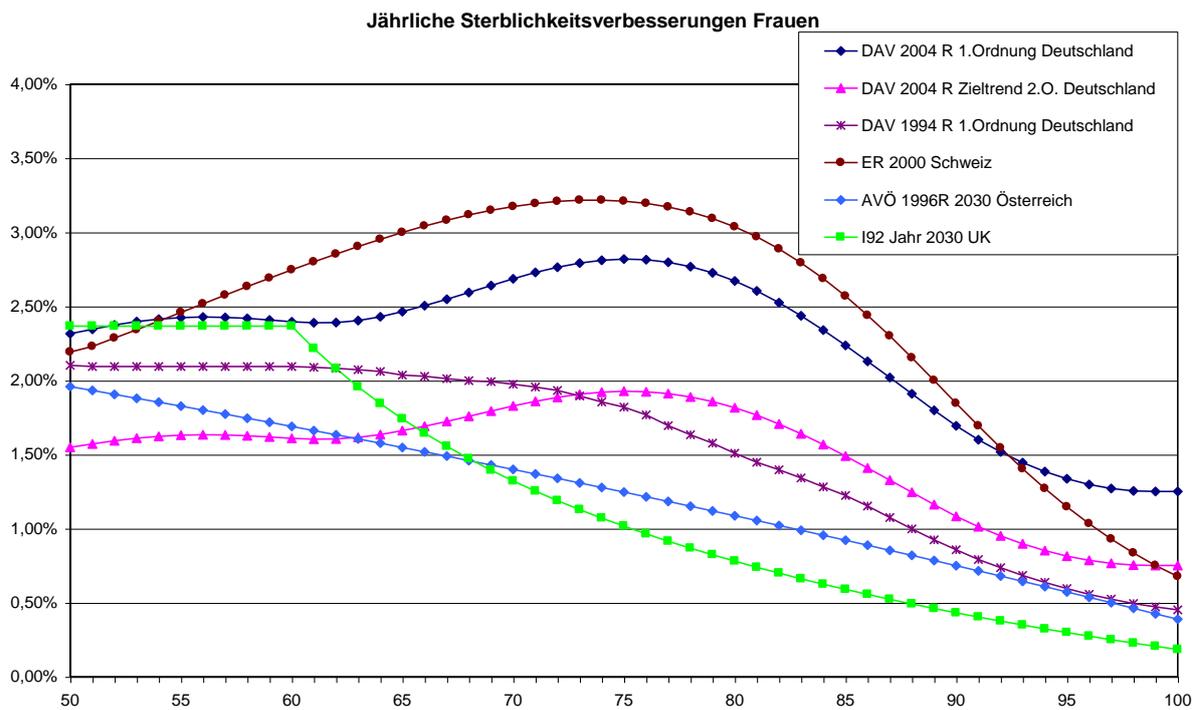
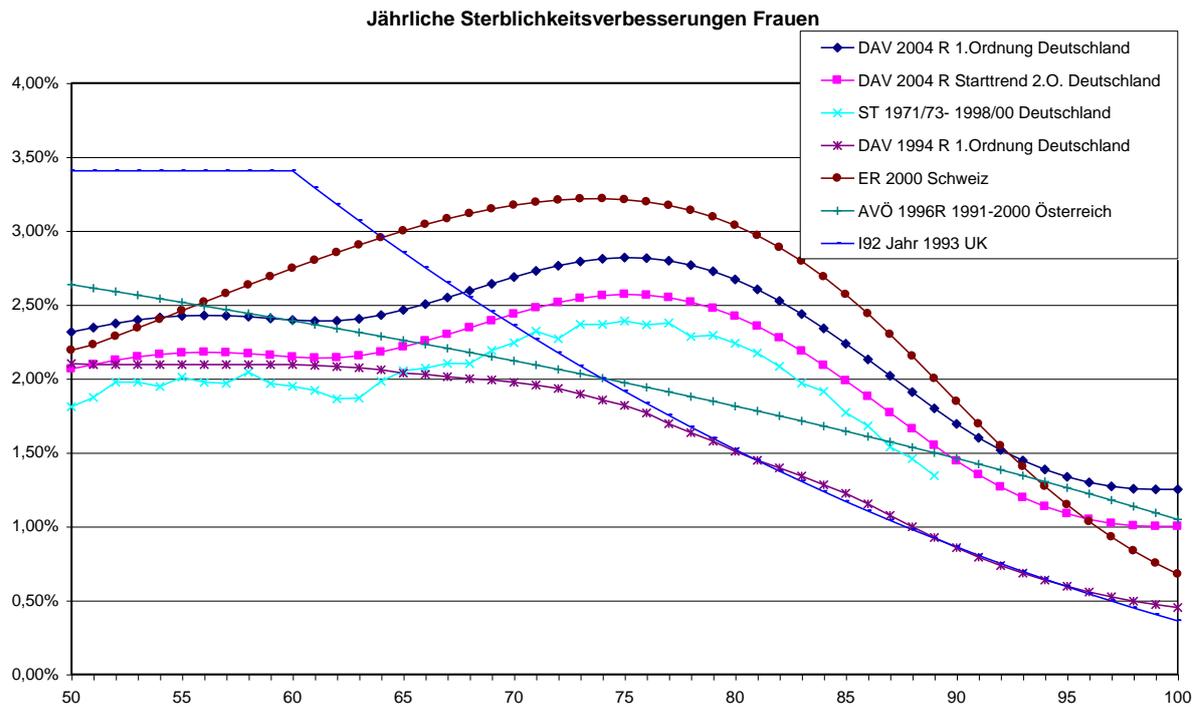
Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen Männer



Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen Männer



Grafik 50: Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen, Männer



Grafik 51: Jährliche Sterblichkeitsverbesserungen, Frauen

Jährliche Sterblichkeitsverbesserung nach verschiedenen Trendfunktionen (in %) (Männer)

	DAV 2004 R 1.Ordnung Deutschland	DAV 2004 R Starttrend 2.O Deutschland	DAV 2004 R Zieltrend 2.O. Deutschland	ST 1971/73- 1998/00 Deutschland	DAV 1994 R 1.Ordnung Deutschland	ER 2000 Schweiz	AVÖ 1996R 2030 Österreich	192 Jahr 2030 UK
20	3,25%	3,00%	2,25%	3,14%	2,45%	2,19%	1,59%	2,37%
25	2,96%	2,71%	1,81%	2,18%	2,45%	2,19%	1,54%	2,37%
30	2,71%	2,46%	1,62%	2,00%	2,45%	2,19%	1,49%	2,37%
35	2,66%	2,41%	1,58%	1,79%	2,45%	2,19%	1,42%	2,37%
40	2,65%	2,40%	1,57%	1,80%	2,41%	2,19%	1,35%	2,37%
45	2,63%	2,38%	1,56%	1,88%	2,24%	2,85%	1,28%	2,37%
50	2,55%	2,30%	1,50%	1,70%	1,94%	3,15%	1,19%	2,37%
55	2,51%	2,26%	1,47%	1,79%	1,69%	3,11%	1,10%	2,37%
60	2,45%	2,20%	1,42%	1,69%	1,48%	3,06%	1,01%	2,37%
65	2,56%	2,31%	1,51%	1,80%	1,37%	3,00%	0,91%	1,74%
70	2,79%	2,54%	1,68%	2,08%	1,29%	2,91%	0,81%	1,32%
75	2,76%	2,51%	1,65%	2,01%	1,17%	2,74%	0,71%	1,02%
80	2,39%	2,14%	1,38%	1,66%	1,01%	2,47%	0,61%	0,78%
85	1,92%	1,67%	1,03%	1,14%	0,87%	2,14%	0,50%	0,59%
90	1,50%	1,25%	0,75%		0,68%	1,81%	0,40%	0,43%
95	1,27%	1,02%	0,75%		0,53%	1,52%	0,30%	0,30%
100	1,25%	1,00%	0,75%		0,42%	1,27%	0,19%	0,18%

arithmetisches Mittel

60-89	2,42%	2,17%	1,40%	1,67%	1,14%	2,64%	0,72%	1,16%
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Jährliche Sterblichkeitsverbesserung nach verschiedenen Trendfunktionen (in %) (Frauen)

	DAV 2004 R 1.Ordnung Deutschland	DAV 2004 R Starttrend 2.O Deutschland	DAV 2004 R Zieltrend 2.O. Deutschland	ST 1971/73- 1998/00 Deutschland	DAV 1994 R 1.Ordnung Deutschland	ER 2000 Schweiz	AVO 1996R 2030 Österreich	192 Jahr 2030 UK
20	3,25%	3,00%	2,25%	2,54%	3,20%	2,19%	2,64%	2,37%
25	3,23%	2,98%	2,23%	2,73%	3,20%	2,19%	2,54%	2,37%
30	3,10%	2,85%	2,14%	2,75%	3,19%	2,19%	2,43%	2,37%
35	2,65%	2,40%	1,80%	2,22%	3,05%	2,19%	2,32%	2,37%
40	2,22%	1,97%	1,48%	1,73%	2,74%	2,19%	2,21%	2,37%
45	2,18%	1,93%	1,45%	1,69%	2,28%	2,19%	2,08%	2,37%
50	2,31%	2,06%	1,55%	1,81%	2,10%	2,19%	1,96%	2,37%
55	2,42%	2,17%	1,63%	2,01%	2,09%	2,46%	1,83%	2,37%
60	2,40%	2,15%	1,61%	1,95%	2,09%	2,75%	1,69%	2,37%
65	2,46%	2,21%	1,66%	2,05%	2,04%	3,00%	1,55%	1,74%
70	2,69%	2,44%	1,83%	2,24%	1,97%	3,17%	1,40%	1,32%
75	2,82%	2,57%	1,93%	2,39%	1,82%	3,21%	1,25%	1,02%
80	2,67%	2,42%	1,82%	2,24%	1,51%	3,04%	1,09%	0,78%
85	2,24%	1,99%	1,49%	1,77%	1,22%	2,57%	0,92%	0,59%
90	1,69%	1,44%	1,08%		0,86%	1,85%	0,75%	0,43%
95	1,34%	1,09%	0,81%		0,59%	1,15%	0,57%	0,30%
100	1,25%	1,00%	0,75%		0,45%	0,68%	0,39%	0,18%

arithmetisches Mittel

60-89	2,50%	2,25%	1,69%	2,05%	1,70%	2,91%	1,25%	1,16%
-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------	-------

Die schweizerische Rententafel ER 2000, siehe [SVV], basiert analog zu den deutschen Rententafeln auf dem traditionellen Modell $\frac{q(x,t+1)}{q(x,t)} = e^{-F(x)}$. Die Trendfunktion $F(x)$ der ER 2000 wurde für $x \geq 50$ auf Basis von Daten zu schweizerischen Einzelrenten aus dem Zeitraum von 1961 bis 1995 abgeleitet.

Die österreichische Rententafel AVÖ 1996R, siehe [JLPS], und die UK-Rententafel I92, siehe [CMI1], basieren auf Varianten des traditionellen Modells, bei denen die Trendfunktion gemäß dem Ansatz $\frac{q(x,t+1)}{q(x,t)} = e^{-F(x,t)}$ zusätzlich vom Kalenderjahr abhängt.

In UK wurden die in Rententafeln enthaltenen Trends in der Vergangenheit häufig durch stärkere Trends revidiert, wie in der folgenden Grafik aus [I], S. 90 sichtbar wird:

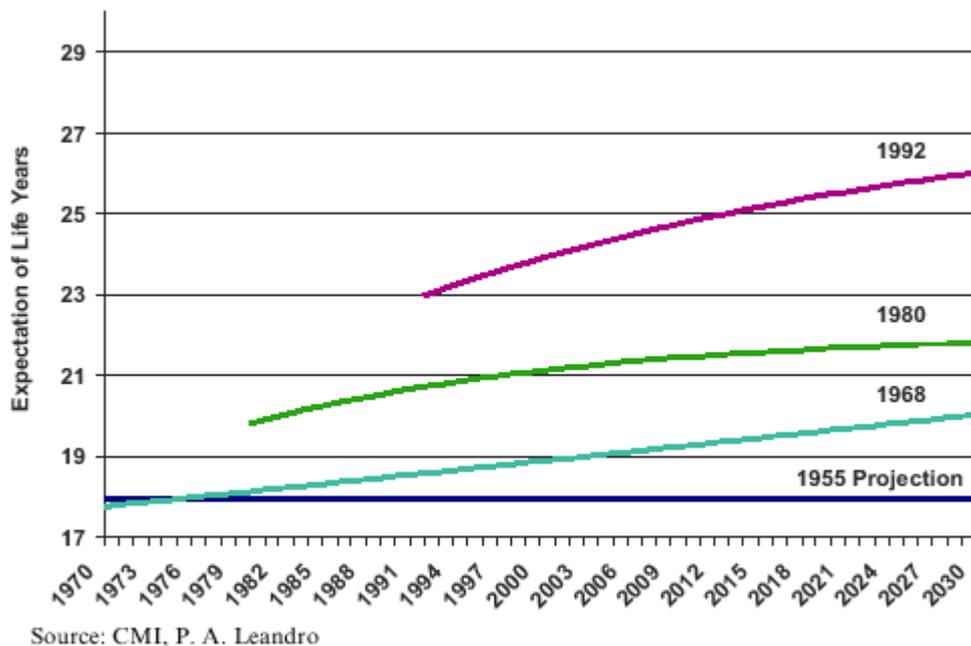


Figure R.2. Longer life, expectation of life for males aged 60

Grafik 52 Projektionen von Lebenserwartungen aus UK

Die Sterblichkeitsverbesserungen der I92 wurden Ende 2002 um zusätzliche geburtsjahrabhängige Sterblichkeitsverbesserungen ergänzt, siehe [CMI2]. Damit werden nun in UK jährliche Sterblichkeitsverbesserungen in Höhe von bis zu 6,15%

($= 1 - \frac{q_{73,1999}}{q_{73,1998}}$) angesetzt.

Anhang 16 Konfidenzintervall für Sterblichkeitstrend

In diesem Anhang wird die Schätzunsicherheit bei der Schätzung des Sterblichkeitstrends quantifiziert. Betrachtet wird das traditionelle Modell auf Basis der abgekürzten Sterbetafeln St 1971/73 bis St 1998/2000 für Westdeutschland. In den Grafiken 53 und 54 sind die geschätzten Trendkoeffizienten $F(x)$ und die zugehörigen einseitigen oberen 95%-Konfidenzintervalle dargestellt. Es ist erkennbar, dass die Schätzunsicherheit relativ klein ist.

Die mittlere Sterblichkeitsverbesserung für die Alter 60 bis 89 Jahre wird mittels $\frac{1}{30} \sum_{x=60}^{89} (1 - \exp(-F(x)))$ berechnet und beträgt bei Männern 1,67%. Der mittlere additive Zuschlag aufgrund des einseitigen oberen 95%-Konfidenzintervalls beträgt nur 0,15 Prozentpunkte. Bei Frauen beträgt die mittlere Sterblichkeitsverbesserung 2,05% und der mittlere additive Zuschlag aufgrund der Schätzunsicherheit beträgt 0,14 Prozentpunkte. Bei den Männern entspricht dies einem prozentualen Zuschlag von 8,8% auf die Sterblichkeitsverbesserung und bei Frauen beträgt der prozentuale Zuschlag 6,7%.

Im Folgenden werden die Formeln dargestellt, mit welchen die Konfidenzintervalle berechnet werden.

Im Rahmen der Kleinst-Quadrate-Schätzung können zu den geschätzten Koeffizienten stets Konfidenzintervalle angegeben werden. Dies ist also auch bei den altersabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen $F(x)$ möglich. Das traditionelle Modell

$$\ln(q_{x,t}) = \ln(q_{x,t_0}) - (t - t_0)F(x)$$

wird mit altersabhängigen Sterblichkeitsverbesserungen $F(x)$ und Basistafel $\ln(q_{x,t_0})$ geschätzt. Für dieses Modell gilt, dass der gewöhnliche (OLS) und der verallgemeinerte (GLS) Kleinst-Quadrate-Schätzer identisch sind, es ist also möglich, für jedes Alter x eine separate Regression durchzuführen. Die äquivalente simultane Schätzung erfolgt, indem das traditionelle Modell in Form des der linearen Regressionsmodells

$$y = Az + e$$

dargestellt wird. Hierbei ist y der $(T \times 1)$ -Vektor der beobachteten Daten $\ln(q_{x,t})$ für $x = 20, \dots, 89$ und $t = 1972, \dots, 1999$, A ist die $(T \times K)$ Regressormatrix, z ist der $(K \times 1)$ -Vektor der zu schätzenden Koeffizienten $F(x)$ und e ist der $(T \times 1)$ -Vektor der Modellfehler mit Erwartungswert 0 und Kovarianzmatrix $\sigma^2 I_T$. Hierbei ist $K = 89 - 20 + 1 = 70$ die Anzahl der Regressoren und $T = K * (1999 - 1972 + 1) = 1960$ ist die Anzahl der Beobachtungen.

Der OLS-Schätzer für die Koeffizienten und die Kovarianzmatrix lauten, siehe [JHGLL], Kapitel 6:

$$\text{Koeffizienten } \tilde{z} : \quad \tilde{z} = (A' A)^{-1} A' y$$

$$\text{Kovarianzmatrix von } \tilde{z} : \quad \text{Var}(\tilde{z}) = \tilde{\sigma}^2 (A' A)^{-1}$$

Hierbei ist $\tilde{\sigma}^2 = \tilde{e}' \tilde{e} / (T - K)$ die geschätzte Fehlervarianz.

Ein einseitiges oberes $(1 - \alpha) * 100\%$ -Konfidenzintervall für den i -ten Koeffizienten z_i ergibt sich als

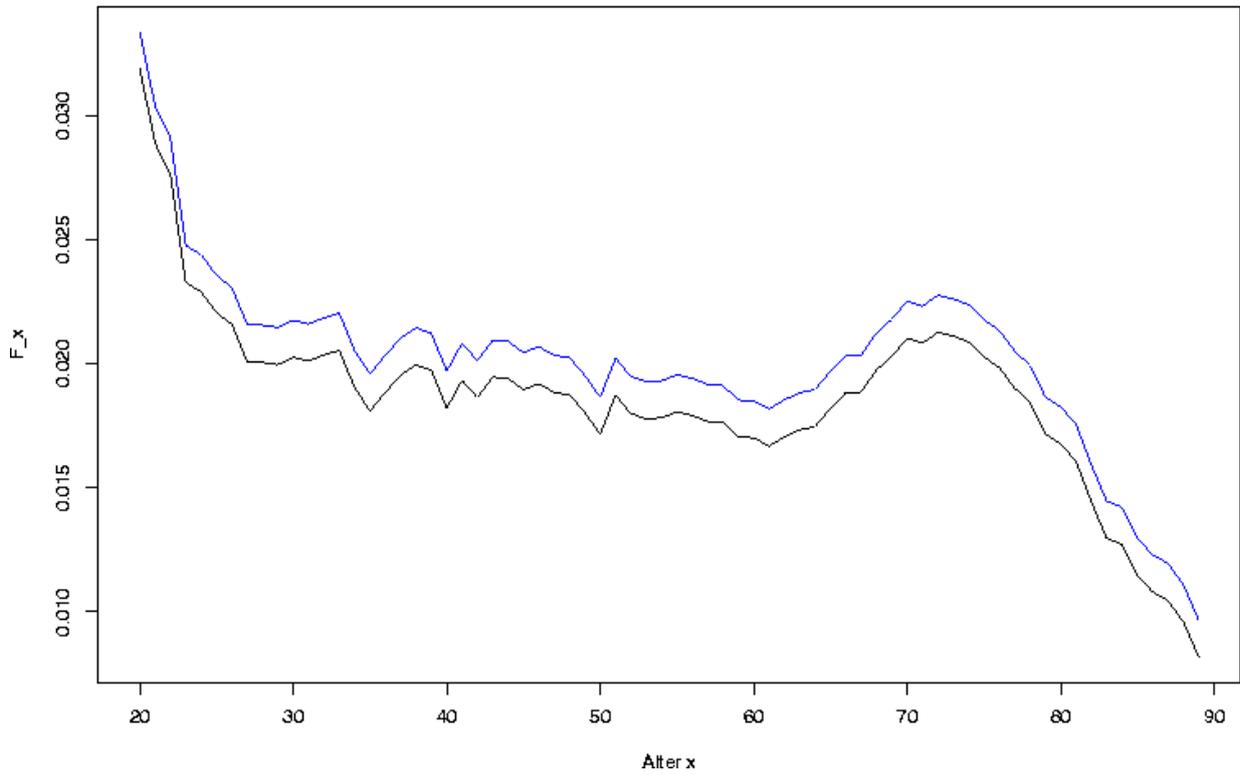
$$\tilde{z}_i + u_{1-\alpha} \cdot \sqrt{\text{Var}(\tilde{z})_i},$$

wobei \tilde{z}_i der geschätzte Koeffizient ist, seine Varianz $\text{Var}(\tilde{z})_i$ ist das i -te Hauptdiagonalelement von $\text{Var}(\tilde{z})$ und $u_{1-\alpha}$ ist das $(1 - \alpha)$ -Quantil der Standardnormalverteilung. Im Fall des hier betrachteten oberen 95%-Konfidenzintervall ist $u_{1-0,95} = 1,64$.

Die Regression hat aufgrund ihrer speziellen Struktur (die Regressormatrix A enthält nur sogenannte Dummy-Variablen) eine Besonderheit: Während die geschätzten Trendkoeffizienten $F(x)$ über die betrachteten Alter variieren, sind die zugehörigen Varianzen für alle Alter untereinander gleich. Die additiven Zuschläge auf die Trendkoeffizienten $F(x)$ sind also für alle x gleich. Für die Sterblichkeitsverbesserungen $1 - \exp(-F(x))$ gilt dies natürlich nicht mehr exakt aber approximativ mit einer sehr guten Näherung. Die prozentualen Zuschläge für die Trendkoeffizienten variierenden hingegen über x und steigen für höhere Alter an.

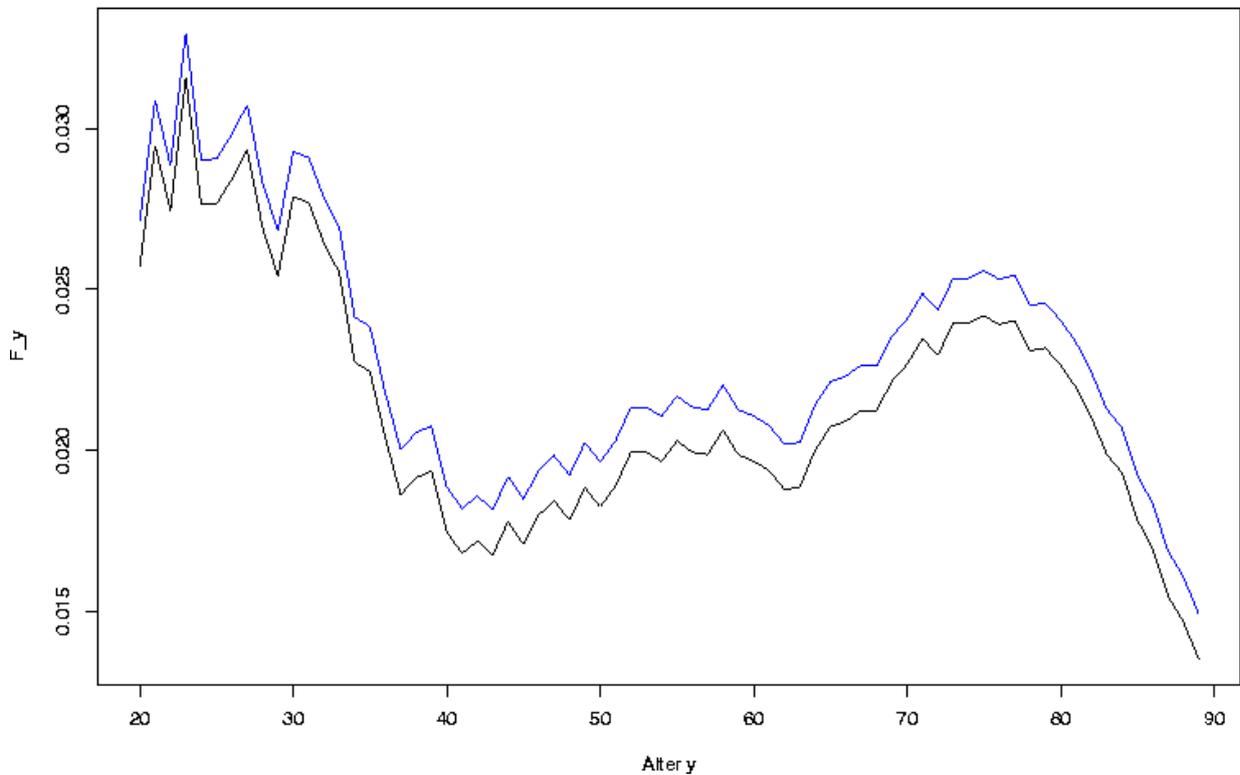
Zur Interpretation wird auf Folgendes hingewiesen: Das traditionelle Modell wird hier für alle Alter gemeinsam in einer einzigen Regression geschätzt. Diese simultane Schätzung hat wegen der Gleichheit von OLS und GLS im traditionellen Modell keinen Einfluss auf die Schätzungen für $F(x)$. Allerdings hat sie einen Einfluss auf die geschätzte Größe $\tilde{\sigma}^2$, welche nun nicht für jedes Alter einzeln bestimmt wird, sondern gemeinsam für alle Alter. Dies hat jedoch keinen großen Einfluss auf die Ergebnisse.

Männer: Trend-Koeffizienten: jährliche altersabhängige Sterblichkeitsverbesserung mit einseitigem oberen 95% Konfidenzintervall



Grafik 53: Konfidenzintervall für Trend, Männer

Frauen: Trend-Koeffizienten: jährliche altersabhängige Sterblichkeitsverbesserung mit einseitigem oberen 95% Konfidenzintervall



Grafik 54: Konfidenzintervall für Trend, Frauen

Anhang 17 Vergleich mit Ergebnissen des IBS

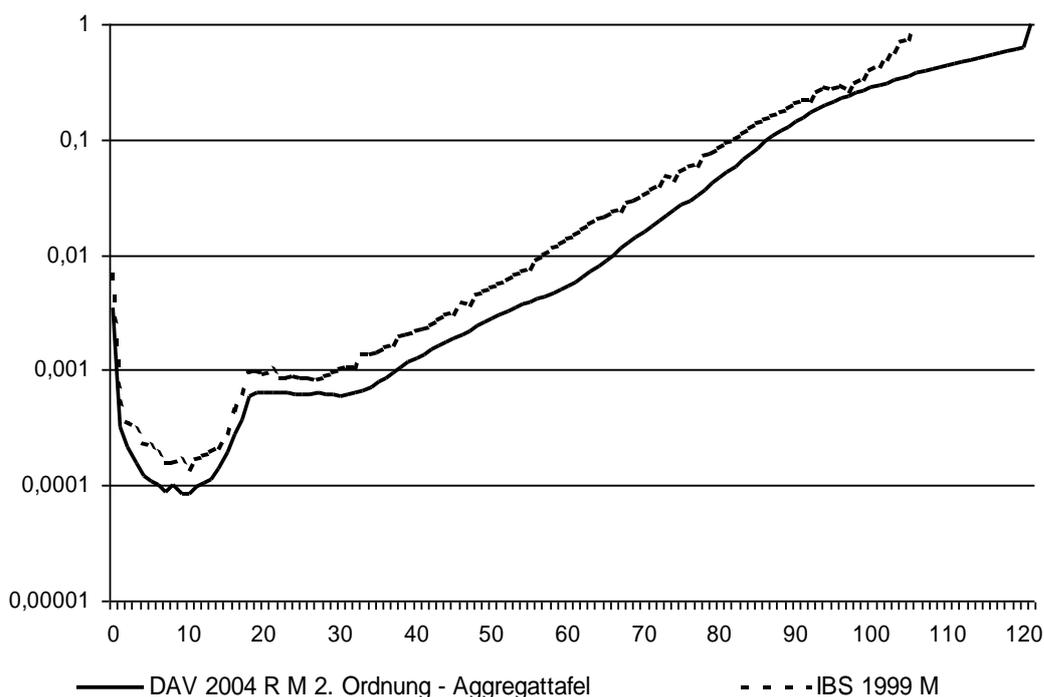
Im Rahmen der Rentenreform 2000 wurden vom Institut für Bevölkerungsforschung und Sozialpolitik der Universität Bielefeld (im folgenden IBS genannt) demographische Projektionsrechnungen durchgeführt. Dabei wurde der Zusammenhang zwischen dem Medianalter und der Lebenserwartung ab 1949 aus den Bevölkerungssterbetafeln ausgewertet und Annahmen über die Entwicklung im 21. Jahrhundert nach drei Szenarien zugrunde gelegt. Das Medianalter ist dabei das Alter, an dem von 100.000 lebend geborenen Personen noch 50.000 leben.

Das IBS stellt Bevölkerungssterblichkeiten dar, während in der DAV 2004 R für die Basistafel die Sterblichkeiten 2. Ordnung rentenhöhenengewichtet aus Versichertensterblichkeiten abgeleitet wurden.

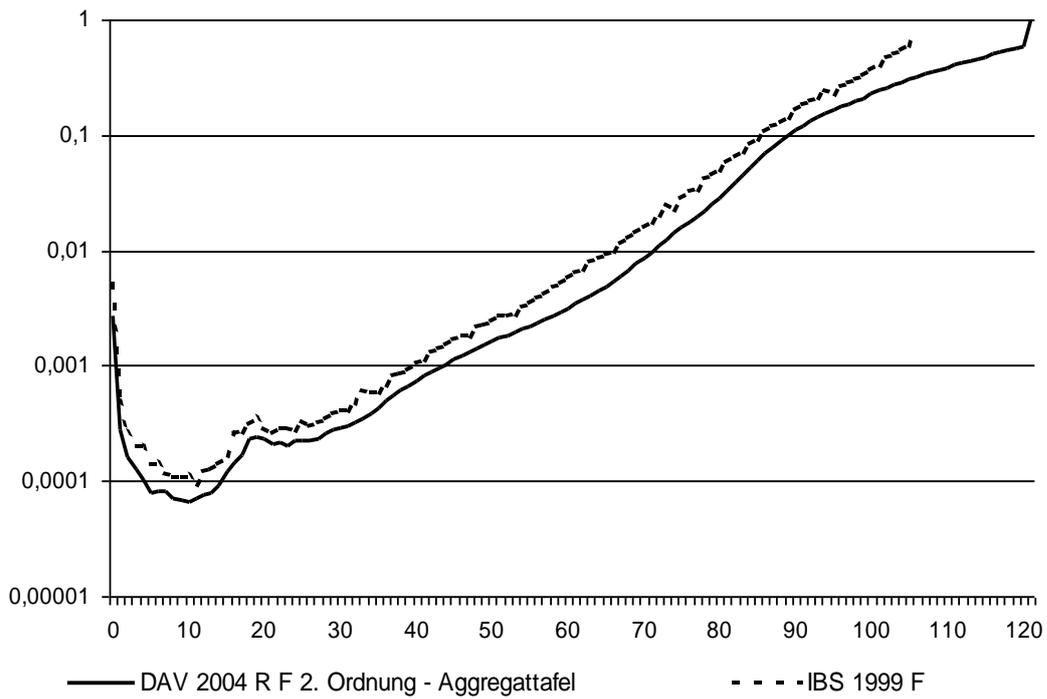
Im folgenden wird ein Vergleich der Ergebnisse des hohen Szenarios des IBS mit den Sterblichkeiten 2. Ordnung der DAV 2004 R durchgeführt, wobei beispielhaft die Parameterkombination ($T_1=10, T_2=15$) für den Sterblichkeitstrend 2. Ordnung der DAV 2004 R verwendet wird:

- a) Basistafel 1999 mit IBS-Sterbewahrscheinlichkeiten für das Jahr 1999 (logarithmisch):

Männer:

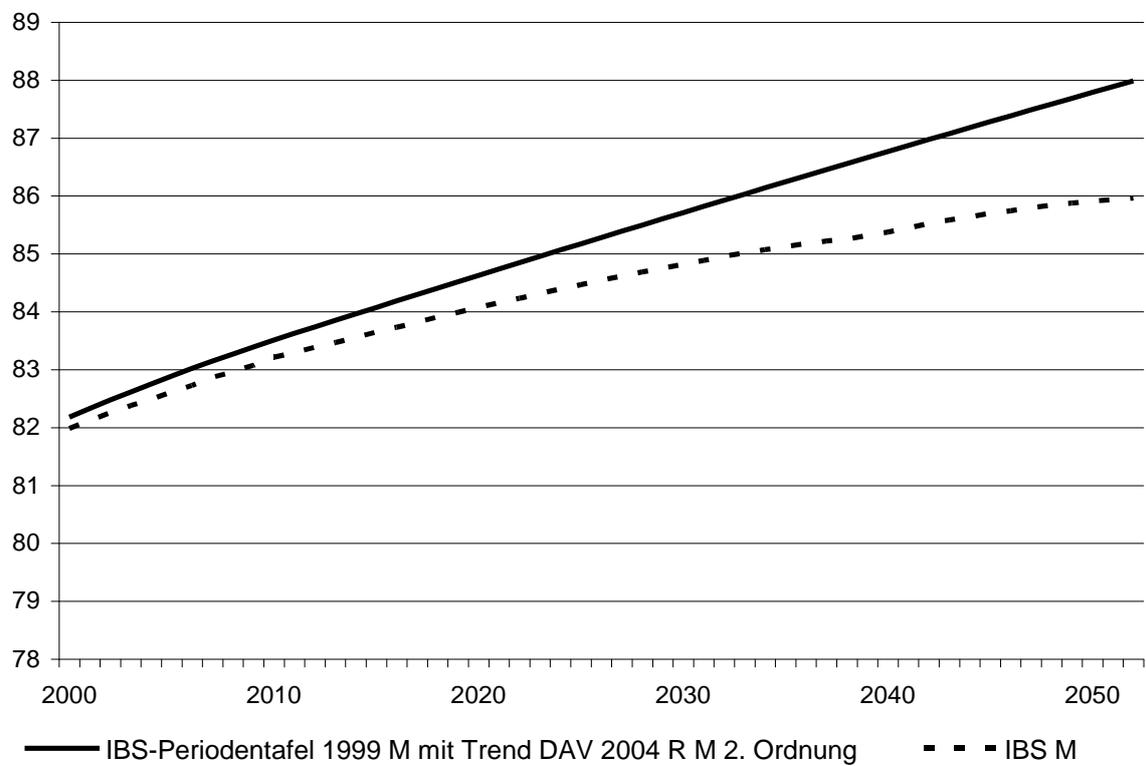


Frauen:

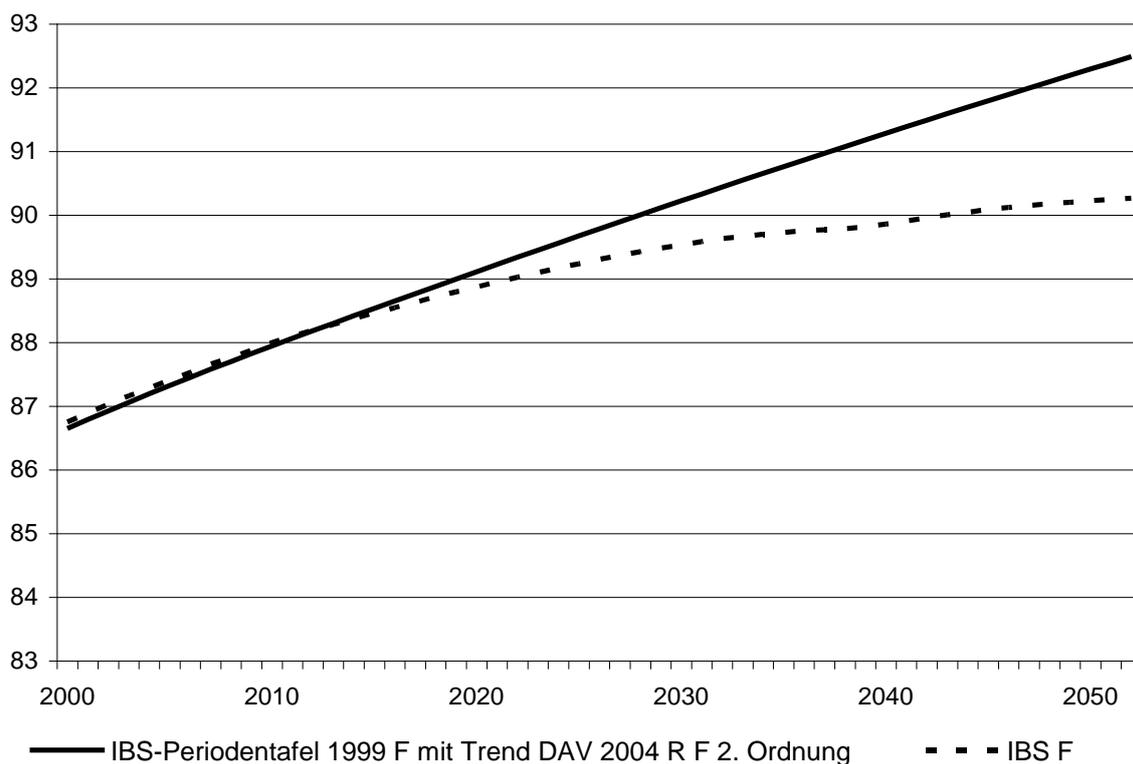


b) Projektion der Sterblichkeiten bis 2050

Entwicklung der Lebenserwartung eines 65-jährigen Mannes:

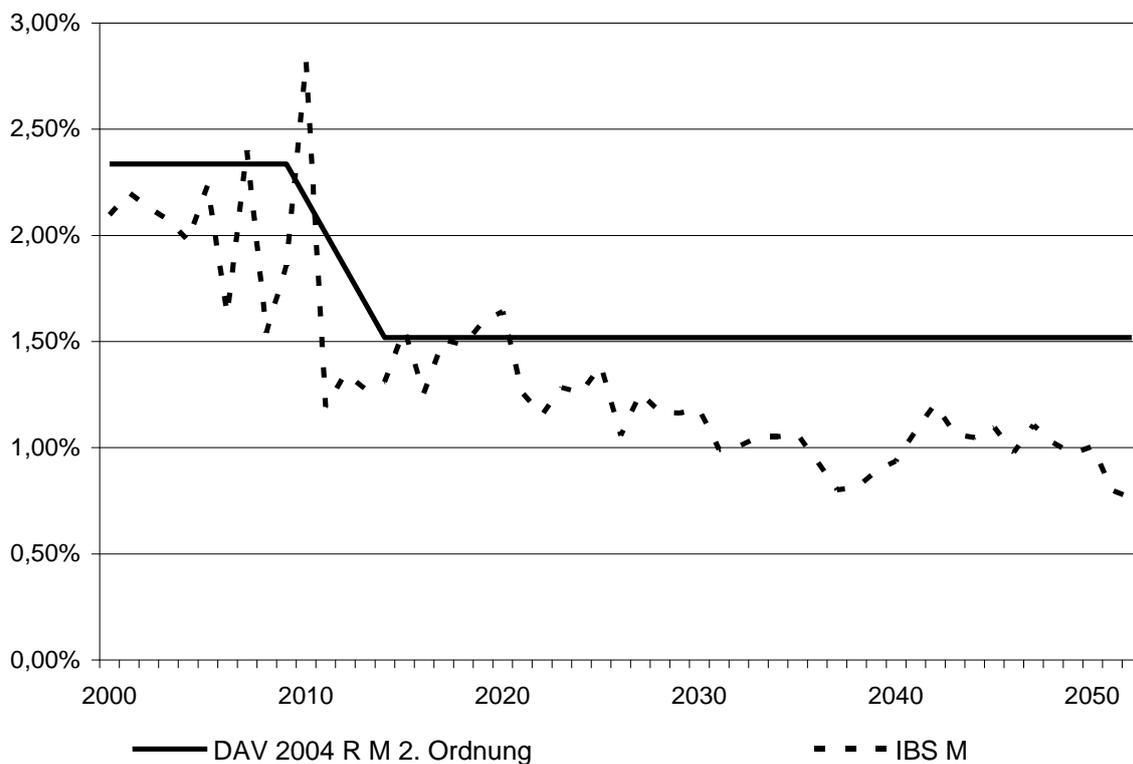


Entwicklung der Lebenserwartung einer 65-jährigen Frau:

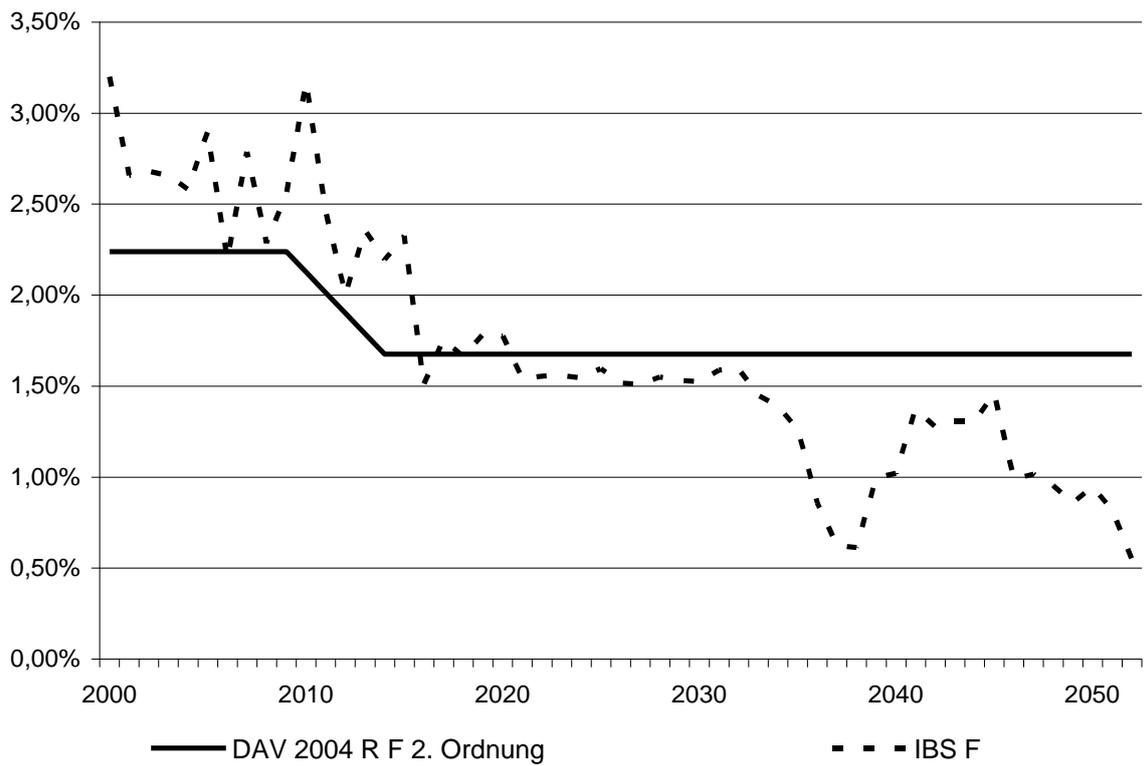


Mit den Annahmen im Verfahren des IBS ergibt sich analog der Annahme für die DAV 2004 R 2. Ordnung eine Abschwächung der Sterblichkeitstrends.

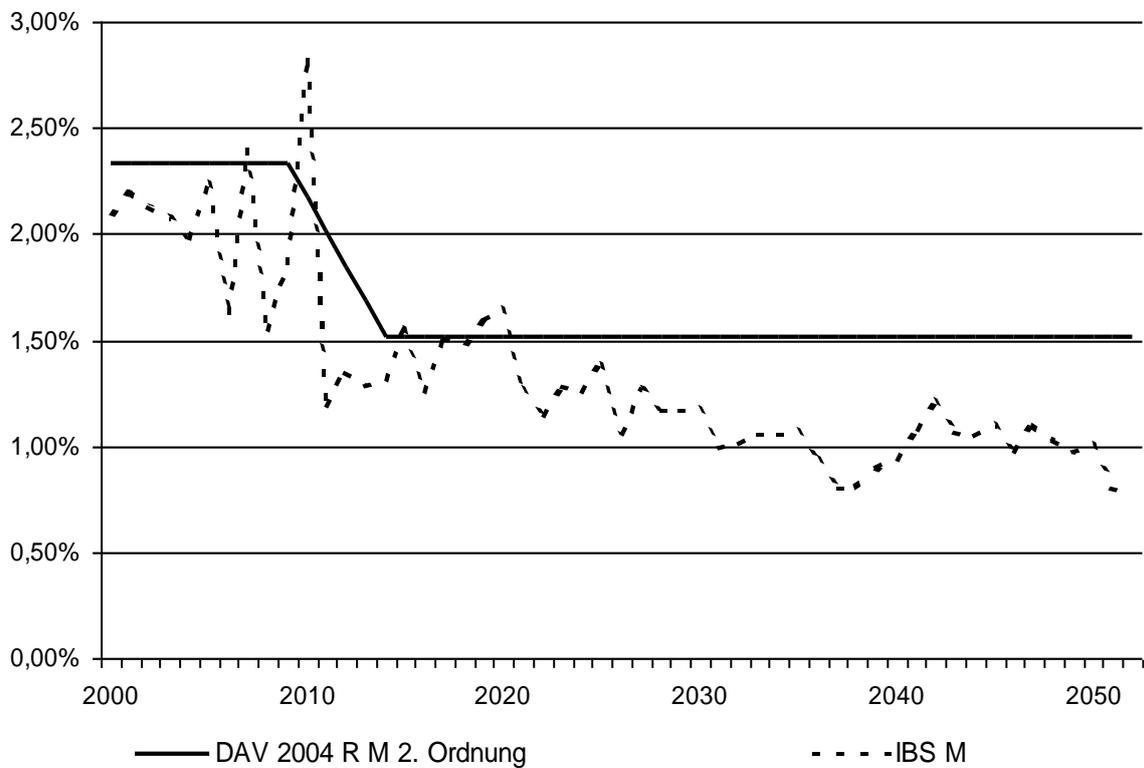
Sterblichkeitstrend für einen 65-jährigen Mann:



Sterblichkeitstrend für eine 65-jährige Frau:



Mittlerer Sterblichkeitstrend 65 bis 90-jähriger Männer



Mittlerer Sterblichkeitstrend 65 bis 90-jähriger Frauen:

