DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Fachgrundsatz der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

Optionsbewertung

Hinweis

Köln, 4. März 2019

Präambel

Die Deutsche Aktuarvereinigung (DAV) e. V. hat entsprechend dem Verfahren zur Feststellung von Fachgrundsätzen vom 25. April 2013 den vorliegenden Fachgrundsatz festgestellt.[1] Fachgrundsätze zeichnen sich dadurch aus, dass sie

- aktuarielle Fachfragen behandeln,
- von grundsätzlicher und praxisrelevanter Bedeutung für Aktuare sind,
- berufsständisch durch ein Feststellungsverfahren legitimiert sind, das allen Aktuaren eine Beteiligung an der Feststellung ermöglicht, und
- ihre ordnungsgemäße Verwendung seitens der Mitglieder durch ein Disziplinarverfahren berufsständisch abgesichert ist.

Dieser Fachgrundsatz ist ein *Hinweis*. Hinweise sind Fachgrundsätze, die bei aktuariellen Erwägungen zu berücksichtigen sind, über deren Verwendung aber im Einzelfall im Rahmen der Standesregeln frei entschieden werden kann und die nur aus Grundlagenwissen zu konkreten Einzelfragen bestehen.

Anwendungsbereich

Der sachliche Anwendungsbereich dieser Ausarbeitung umfasst Lebensversicherungsunternehmen. Der Verantwortliche Aktuar muss sich gemäß § 4 Abs. 6 Aktuarverordnung zur Bewertung der in die Versicherung eingebetteten Optionen äußern, zumindest sofern es sich um Rückstellungen für drohende Verluste handelt. Innerhalb von Solvency II sind die versicherungstechnischen Rückstellungen unter Berücksichtigung der in die Verträge eingebetteten Optionen und Garantien zu bewerten. Optionen und Garantien sollten darüber hinaus grundsätzlich bei jeder Bewertung von Verpflichtungen in der Lebensversicherung, die Kapitalmarktrisiken beinhalten, berücksichtigt werden.[2]

Inhalt des Hinweises

In dem Hinweis wird zunächst aufgezeigt, an welchen Stellen Optionen und Garantien bei Lebensversicherungsprodukten auftreten können und weswegen deren Betrachtung wesentlich ist. Es werden zwei explizite Bewertungsansätze für Optionen und Garantien vorgestellt: einer aus der Optionspreistheorie und einer aus

---

[1] Der Vorstand dankt der Arbeitsgruppe *Bewertung von Garantien* des Ausschusses Lebensversicherung ausdrücklich für die geleistete Arbeit, namentlich Dr. Jürgen Bierbaum (Leitung), Dr. Holger Bartel, Nils Dennstedt, Dr. Tobias Dillmann, Wolfgang Engel, Dr. Marcus Keller, Karol Musialik, Dr. Andreas Niemeyer, Norbert Quapp, Dieter Rehner, Dr. Jens Winter.

[2] Dieser Fachgrundsatz ist an die Mitglieder der DAV gerichtet; seine sachgemäße Anwendung erfordert aktuarielle Fachkenntnisse. Dieser Fachgrundsatz stellt deshalb keinen Ersatz für entsprechende professionelle aktuarielle Dienstleistungen dar. Aktuarielle Entscheidungen mit Auswirkungen auf persönliche Vorsorge und Absicherung, Kapitalanlage oder geschäftliche Aktivitäten sollten ausschließlich auf Basis der Beurteilung durch eine(n) qualifizierte(n) Aktuar DAV/Aktuarin DAV getroffen werden.

dem Umfeld von Solvency II bzw. dem Market Consistent Embedded Value (MCEV). Wir stellen diese beiden Ansätze vor und vergleichen sie. Der Vergleich wird sowohl in einem theoretischen Ein-Perioden-Modell als auch praktisch anhand von zwei Beispielen durchgeführt. Da für die konkrete Berechnung meist Simulationsrechnungen auf Basis eines Unternehmensmodells notwendig sind, werden in diesem Hinweis auch Grundprinzipien von Unternehmensmodellen diskutiert. Da eine explizite Berechnung der Werte von Optionen und Garantien oft numerisch sehr aufwendig ist, werden zwei mögliche Approximationsverfahren vorgestellt.

Verabschiedung

Dieser Hinweis ist durch den Vorstand der DAV am 4. März 2019 verabschiedet worden. Er ersetzt den gleichnamigen, von der DAV-Arbeitsgruppe *Optionsbewertung* erstellten Hinweis vom 13. September 2007.

Inhaltsverzeichnis

1. Einleitung

Optionen und Garantien sind in den meisten Lebensversicherungsprodukten zu finden. Während traditionelle Lebensversicherungsverträge mit Überschussbeteiligung sich durch eine Vielzahl von Optionen und Garantien auszeichnen, sind meist auch in fondsgebundenen Rentenversicherungen gewisse Kapital- oder Rentengarantien zu finden. Ursprünglich wurden die Kosten für diese Optionen und Garantien implizit bei der Festlegung der Überschussbeteiligung, also pauschal und im Nachhinein berücksichtigt. In Anbetracht des ab dem Jahr 2000 zunehmend geringeren Zinsniveaus wurden die Margen bei den Bestandsverträgen - je nach Höhe des jeweiligen Rechnungszinses - zunehmend kleiner. Dadurch erlangten die in den Lebensversicherungsbeständen enthaltenen Optionen und Garantien mit Finanzcharakter eine solche Bedeutung, dass sich die Frage einer expliziten finanzmathematischen Bewertung stellte. Dies wurde durch die Diskussionen sowie die schrittweisen Entwicklungen im Bereich IFRS und Solvency II zunehmend verstärkt.

Als wichtigste Optionen mit Finanzcharakter sind neben der garantierten Kapitalleistung auch die Möglichkeit des Rückkaufs zu garantierten Werten, sowie die Möglichkeit, bei Ablauf einer aufgeschobenen Rente zwischen Kapitalauszahlung und Verrentung zu wählen, zu sehen. Diese Optionen können für sich, wie die letzten Jahre gezeigt haben, jeweils erheblich werthaltig sein. Kosten der Risiken aufgrund von Biometrie und Kosten werden in diesem Hinweis nicht explizit berücksichtigt, die Methoden lassen sich aber auf diese Anwendungen übertragen. Insbesondere kann es sinnvoll sein, einen integrierten Ansatz für alle Optionen zu wählen, weil die Optionen zusätzlich eine starke Korrelation untereinander haben.

Bei der Bewertung der Optionen ist zunächst grundsätzlich von einem (näherungsweise) finanzrationalen Verhalten der Versicherungsnehmer auszugehen. Eine Modellierung der Ausübungsentscheidungen, die einzig auf historischen Beobachtungen basiert und erwartete Entwicklungen im Verhalten nicht berücksichtigt, ist nur eingeschränkt aussagekräftig.

In diesem Hinweis werden zwei verschiedene Ansätze zur Bewertung von Optionen und Garantien dargestellt und untersucht. Ein Ansatz kommt aus der klassischen Finanzmathematik und kann als Put-Option, bzw. als Aktionärseinschuss interpretiert werden. Der andere Ansatz kommt aus dem Umfeld von MCEV und Solvency II und interpretiert die Differenz zwischen deterministischem und stochastischem Ertragswert als Kosten für die Option bzw. Garantie. Bei beiden Ansätzen erfolgt üblicherweise eine marktkonsistente Bewertung der Zahlungsströme.

Die in Versicherungen eingebetteten, langlaufenden Optionen können als komplexes Derivat aufgefasst werden. Aufgrund dessen Komplexität, insbesondere Pfadabhängigkeit, sind i. A. keine analytischen Bewertungsformeln verfügbar. Unabhängig vom verfolgten Bewertungsansatz wird daher für eine Bewertung der in Lebensversicherungsverträge eingebetteten Optionen und Garantien ein stochastisches Unternehmensmodell benötigt.

Dieser Hinweis ist wie folgt aufgebaut: In Abschnitt 2 werden die beiden verschiedenen Bewertungsansätze für Optionen und Garantien dargestellt und formal verglichen. Grundprinzipien für ein Unternehmensmodell werden im 3. Abschnitt diskutiert. In Abschnitt 4 werden die beiden Optionsbegriffe anhand zwei konkreter Beispiele untersucht. Zuletzt werden im 5. Abschnitt Approximationsverfahren dargestellt. In Abschnitt 6 ist die relevante Literatur zu finden.

2. Bewertungsansätze für Optionen und Garantien

Generell ist die explizite Bewertung der Kosten von Optionen und Garantien marktkonsistent – im Sinne des DAV-Ergebnisberichts „Market Consistent Embedded Value“ vom 10. April 2018 – durchzuführen[3].

Wie bereits oben beschrieben, werden in diesem Hinweis die folgenden beiden Ansätze untersucht:

(1) **Bewertungsansatz 1 („Put-Option“):** Dabei handelt es sich um den marktkonsistent bewerteten Shortfall, der definitionsgemäß dann eintritt, **wenn die garantierten Leistungen für die Versicherungsnehmer den vorhandenen Wert der zugeordneten Aktiva übersteigen**. Strukturell entspricht dies der Bewertung einer Put-Option deren Ausübungspreis die Leistungen für die Versicherungsnehmer (VN) und deren Underlying die Assets des Unternehmens (VU) sind. Der Wert der Put-Option ergibt sich dabei als Summe des inneren Wertes und des Zeitwertes. Dieser Ansatz war die Basis des vorangegangenen Hinweises „Optionsbewertung“ vom 13.09.2007.

(2) **Bewertungsansatz 2 („Differenz“):** Demgegenüber ist im Versicherungsbereich, insbesondere im Solvency II-Kontext sowie im Zusammenhang mit MCEV-Berechnungen ein anderer Optionsbegriff weit verbreitet. **Als Wert von Optionen und Garantien wird die Differenz eines deterministischen Barwertes zukünftiger VU-Erträge und eines stochastischen Barwertes der zukünftigen VU-Erträge definiert.**[4] Dieser Bewertungsansatz betrachtet damit die Abweichung der Erträge, die sich aus der Optionalität bzw. der Nichtlinearität in den Auszahlungen von Versicherungsverträgen ergibt. Der Bezug auf einen deterministischen Wert auf Basis der aktuellen Zinsstrukturkurve (Certainty-Equivalent-Pfad, auch CE-Pfad) lässt sich ggf. auch historisch aus der Entwicklung der Berechnungsmethoden des Embedded Value ableiten: zunächst deterministische Berechnungen auf dem CE-Pfad, im historischen Zeitverlauf dann zunehmend auch stochastische Ansätze. Insbesondere für sehr kleine Teilbestände kann dieses Verfahren aufgrund der Differenzenbildung zu numerisch instabilen Resultaten führen. Inhaltlich beinhaltet dieser Optionsbegriff eine Fokussierung auf den Zeitwert einer Option, d. h. er entspricht der Chance oder dem Risiko, dass mit verbleibender Zeit der Wert der Erträge oder Leistungen fallen oder steigen kann. Dieser Ansatz kann sowohl aus Sicht der Versicherungsnehmer als auch aus der des Versicherungsunternehmens betrachtet werden. Einerseits können die stochastischen und deterministischen Aktionärserträge verglichen

[3] Bei jeder marktkonsistenten Bewertung sollte überprüft werden, ob inaktive Marktsegmente vorliegen. In diesen sollte der Einfluss eines einzelnen Stichtags nicht vollständig auf ein kalibriertes Modell durchschlagen, sondern geeignete Glättungsmechanismen herangezogen werden (siehe z. B. Bierbaum et al., 2014).

[4] Wahlweise auch als Differenz des Barwertes der stochastischen Leistungen an die Versicherungsnehmer abzüglich des Barwertes der deterministischen Leistungen.

werden und andererseits die stochastischen und deterministischen Kundenerträge.

Für die weitere Analyse werden die eben skizzierten Bewertungsansätze formal entwickelt. Dabei gehen wir der Einfachheit halber von einer beitragsfreien Kapitalversicherung mit garantierten Rückkaufswerten aus.[5]

Wir verwenden die folgenden Bezeichnungen

T:	Minimum von Zeit bis zum Rückkauf (gemäß im Modell verwendeter Ausübungsregel) und verbleibender Aufschubdauer
$\delta_{0,T}$:	Diskontfaktor für den Zeitraum zwischen 0 und T
$\mathrm{Garantie}(T)$:	Garantierter Teil der vertraglichen Leistung bei Rückkauf bzw. Ablauf inklusive der bis zu diesem Zeitpunkt unwiderruflich zugesagten Überschüsse
$\mathrm{WertAssets}(T)$:	Wert der Assets bei Rückkauf bzw. Ablauf in T
$\mathrm{Beteiligungsquote}$:	Beteiligung des Kunden an den Kapitalerträgen
CE:	Entsprechende Größen im Certainty-Equivalent-Pfad

Diese Größen sind i. A. szenarioabhängig, d. h. stochastisch, da sie von der (simulierten) Entwicklung der Kapitalmärkte abhängen.

2.1. Bewertungsansatz 1 (Put-Option)

Als Optionen und Garantien werden hier die impliziten Optionen bezeichnet, die sich beispielsweise aus der Kapitalgarantie in Verbindung mit einem Asset-Liability-Mismatch oder der vertraglichen Optionen Rückkauf zu garantierten Rückkaufswerten und Kapitalwahl (bei aufgeschobenen Rentenversicherungen) ergeben. Weitere Optionen und Garantien, wie eine garantierte Sterbetafel, eine lebenslange Rente, Beitragsfreistellung oder Verlängerung, können entsprechend auch so interpretiert werden.

Dem hier gewählten Bewertungsansatz liegt die folgende Idee zugrunde: Kosten für finanzmarktabhängige Optionen und Garantien entstehen einem Versicherungsunternehmen dann, wenn seine Kapitalerträge nicht ausreichen, um die vertraglich zugesicherten Leistungen (aus Optionen und Garantien) zu finanzieren. Der Preis einer Absicherung, die die (positive) Differenz von benötigten und vorhandenen Erträgen („Shortfall") ausgleicht, lässt sich als Erwartungswert der Kosten von Optionen und Garantien interpretieren. Dieser Erwartungswert, den wir als Kosten von Optionen und Garantien bezeichnen, kann in einer stochastischen Simulation (Monte-Carlo-Verfahren) bestimmt werden.

[5] Eine entsprechende Darstellung ist auch für komplexere Versicherungen möglich, erfordert dann aber höheren Formulierungsaufwand.

Bei diesem Ansatz werden Optionen und Garantien aus Sicht des Versicherungsunternehmens bewertet, d. h. nur die Kosten der Absicherung negativer Kapitalmarktentwicklungen werden berücksichtigt. Bei einer Bewertung aus Versicherungsnehmersicht müsste dagegen auch die Abweichung von der garantierten Leistung bei günstigen Kapitalmarktentwicklungen betrachtet werden, d. h. der Wert zukünftiger Überschussbeteiligung und der Wert der Optionen Rückkauf und Kapitalwahl. Beispielsweise wird im DAV-Ergebnisbericht „Aktuarielle Anmerkungen zur Differenzierung der Überschussbeteiligung" die Versicherungsnehmersicht eingenommen, um die Überschussbeteiligung aktuariell angemessen zu differenzieren.

Der Ansatz ist speziell im (Re-)Pricing von Lebensversicherungsverträgen mit signifikantem Kapitalmarktrisiko von großer praktischer Bedeutung. Wichtige Beispiele sind Indexoptionen in indexgebundenen Lebensversicherungen oder Produkte aus der Klasse der Variable Annuities (vgl. Abschnitt 4.1).

Es existiert eine umfangreiche Literatur zur Preisbewertung von Finanzmarktinstrumenten. An dieser Stelle sei auf den Klassiker „Options, Futures, and Other Derivatives" von J. Hull verwiesen, der inzwischen in 10. Auflage vorliegt.

Formale Darstellung

Die Kosten von Optionen und Garantien einer derartigen Versicherung zum aktuellen Zeitpunkt 0 lässt sich vereinfachend[6] darstellen durch

$$\text{O\&G}_1 = \mathbb{E}\left[\delta_{0,T} \cdot \max(\text{Garantie}(T) - \text{WertAssets}(T); 0)\right], \tag{1}$$

wobei der Erwartungswert bezüglich eines an Marktdaten kalibrierten Martingalmaßes gebildet wird (marktkonsistente Bewertung). Allgemein wachsen die Kosten von Optionen und Garantien monoton mit der Höhe der Garantien bzw. der Auszahlungen der Optionen. Je höher der Anfangswert der Assets ist, desto geringer sind die Kosten von Optionen und Garantien.

2.2. ***Bewertungsansatz 2 (Differenz)***

Im Umfeld des MCEV sowie von Solvency II ist folgende Definition für den (Zeit-) Wert von Garantien und Optionen gebräuchlich.[7]

Der Wert der Garantien und Optionen wird in den Verträgen als Barwert-Differenz der Zahlungsströme an die Kunden zwischen gewichtetem Mittel und Certainty-Equivalent-Pfad (CE-Pfad) ermittelt. Dies ist mithilfe der Eigentümer-Zahlungsströme ebenso möglich, wenn auch mit umgekehrtem Vorzeichen. Da diese Kosten

[6] In der gewählten Darstellung sind beispielsweise nicht mehrere Perioden oder Versicherungsnehmeroptionen dargestellt. Der Ansatz wurde gewählt, damit die Darstellung übersichtlich bleibt. Sie kann ohne größere Probleme verallgemeinert werden.

[7] vgl. z. B: DAV-Ergebnisbericht „Market Consistent Embedded Value" vom 10. April 2018

direkt vom Versicherungsunternehmen getragen werden müssen, verändern sich dadurch die künftigen Erträge der Eigentümer.

Der innere Wert der finanziellen Optionen und Garantien wird dabei nicht explizit erfasst.

Formale Darstellung

Die Kosten von Optionen und Garantien einer derartigen Versicherung zum aktuellen Zeitpunkt 0 sind dann durch

(2) $$\mathrm{O\&G}_2 = \mathbb{E}[\mathrm{SH}_{\mathrm{det}} - \mathrm{SH}]$$

(3) $$\mathrm{SH} = \delta_{0,T} \cdot (\mathrm{WertAssets}(T) - \max[\mathrm{Beteiligungsquote} \cdot \mathrm{WertAssets}(T); \mathrm{Garantie}(T)])$$

(4) $$\mathrm{SH}_{\mathrm{det}} = \delta_{0,T}^{\mathrm{CE}} \cdot \big(\mathrm{WertAssets}^{\mathrm{CE}}(T) - \max\big[\mathrm{Beteiligungsquote} \cdot \mathrm{WertAssets}^{\mathrm{CE}}(T); \mathrm{Garantie}^{\mathrm{CE}}(T)\big]\big)$$

gegeben, wobei auch hier marktkonsistent bewertet wird. Die Darstellung ist, wie beim Bewertungsansatz 1, vereinfacht.

Bei diesem Ansatz lässt sich im Gegensatz zum Bewertungsansatz 1 keine allgemeine Monotonie in Abhängigkeit von der Höhe der Garantien oder der Höhe des Anfangswertes der Assets ableiten, da die Zahlungsflüsse u. a. von der Strategie zur Aktionärsbeteiligung und der ALM-Strategie abhängen.

2.3. Formale Überleitung und Abgrenzung

Der Zusammenhang zwischen den beiden O&G-Definitionen lässt sich gut in einem Ein-Perioden-Modell darstellen.

In dem Modell-Beispiel wird sich dabei auf die für die klassische Lebensversicherung originären Punkte Profit-Sharing (Aufteilung der Kapitalerträge zwischen VN und VU) und Garantiezusage des VU konzentriert.

Zusätzliche Annahmen:

R:	Rückstellung zum Zeitpunkt 0
r (im BE-Szenario r_0):	Kapitalertrag auf R
d (im BE-Szenario d_0):	Diskontfaktor
i:	Garantieverzinsung
b:	VN-Anteil

Optionsbegriff Finanzmarkt („PUT“):

$$\mathrm{O\&G}_1 = \mathbb{E}[d \cdot R \cdot \max(i - r; 0)]$$

Optionsbegriff „Differenz" (Solvency II):

$$\mathrm{O\&G}_2 = \mathbb{E}[\mathrm{SH}_{\mathrm{det}} - \mathrm{SH}]$$

mit

$$\mathrm{SH} = d \cdot R \cdot (r - \max(b \cdot r; i)) = d \cdot R \cdot \min(r \cdot (1-b); r - i)$$

$$\mathrm{SH}_{\mathrm{det}} = d_0 \cdot R \cdot \min(r_0 \cdot (1-b); r_0 - i)$$

Überleitung:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\mathrm{SH}] = R \cdot \mathbb{E}[d \cdot (r - \max(b \cdot r; i))]&\\ &= R \cdot \mathbb{E}[d \cdot (r - b \cdot r - \max(0; i - b \cdot r))]\\ &= R \cdot \mathbb{E}[d \cdot (r - b \cdot r)] - R \cdot \mathbb{E}\left[d \cdot b \cdot \max\left(0, \frac{i}{b} - r\right)\right]\\ &= R \cdot (1-b) \cdot \mathbb{E}[d \cdot r] - b \cdot \underbrace{\mathbb{E}\left[d \cdot R \cdot \max\left(0; \frac{i}{b} - r\right)\right]}_{=:\mathrm{O\&G}_1^*}\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}&\mathrm{O\&G}_2 = \mathrm{SH}_{\mathrm{det}} - R \cdot (1-b) \cdot \mathbb{E}[d \cdot r] + b \cdot \mathrm{O\&G}_1^*\\ &= d_0 \cdot R \cdot \min(r_0 \cdot (1-b); r_0 - i) - R \cdot (1-b) \cdot \mathbb{E}[d \cdot r] + b \cdot \mathrm{O\&G}_1^*\\ &= \begin{cases} R \cdot d_0 \cdot (r_0 - i) - R \cdot (1-b) \cdot \mathbb{E}[d \cdot r] + b \cdot \mathrm{O\&G}_1^*, & \text{falls } r_0 - i \leq r_0 \cdot (1-b)\\ R \cdot (1-b) \cdot (d_0 \cdot r_0 - \mathbb{E}[d \cdot r]) + b \cdot \mathrm{O\&G}_1^*, & \text{falls } r_0 - i > r_0 \cdot (1-b)\end{cases}\end{aligned}$$

Insbesondere gilt damit im Fall von $r_0 - i > r_0 \cdot (1-b)$ (d. h. im CE-Pfad erhält Eigentümer vollständigen Anteil der Kapitalanträge und es ist kein Garantieeinschuss erforderlich) und $d_0 \cdot r_0 = \mathbb{E}[d \cdot r]$, dass

$$\mathrm{O\&G}_2 = b \cdot \mathrm{O\&G}_1^*.$$

Damit ist $\mathrm{O\&G}_2$ sehr ähnlich zu $\mathrm{O\&G}_1$, allerdings wird der Garantiezins um den Faktor $1/b$ erhöht und damit ist $\mathrm{O\&G}_1^*$ erstmal größer als $\mathrm{O\&G}_1$. Dies wird dann durch die Multiplikation mit dem Faktor b wieder partiell ausgeglichen.

Falls $r_0 - i \leq r_0 \cdot (1-b)$ (d. h. im CE-Pfad muss der Eigentümer bereits zur Garantieerfüllung auf einen Anteil der Kapitalanträge verzichten oder bereits einen Garantieeinschuss leisten) und $d_0 \cdot r_0 = \mathbb{E}[d \cdot r]$, gilt

$$\mathrm{O\&G}_2 = \underbrace{R \cdot d_0 \cdot (b \cdot r_0 - i)}_{\substack{\text{deterministischer Verzicht/}\\ \text{Einschuss des Eigentümers}}} + b \cdot \mathrm{O\&G}_1^*,$$

wobei der erste Summand als deterministischer Verzicht/Einschuss des Eigentümers (VU) interpretiert werden kann.

$\mathrm{O\&G}_2$ entspricht dem Zeitwert einer finanzmathematischen Option unter Berücksichtigung der Beteiligungsquote b. Der innere Wert ist schon in der Rückstellung nach Solvency II integriert.

Die zusätzliche Berücksichtigung einer zeitversetzten Weitergabe der Erträge (kollektive Reservepuffer) erfordert die Festlegung von Entscheidungsregeln für die

Deklaration. Aus Vereinfachungsgründen wurden keine Reservepuffer berücksichtigt. Dies gilt auch in den folgenden Beispielen in Abschnitt 4, wo als Näherung eine geglättete Kapitalanlage modelliert wird.

3. Stochastisches Unternehmensmodell

Das Thema stochastisches Unternehmensmodell ist sehr umfassend, weshalb in diesem Hinweis nur allgemeine Grundzüge dargestellt werden[8]. Die in Versicherungen eingebetteten, langlaufenden Optionen können als komplexes Derivat aufgefasst werden. Der Wert des Derivates hängt neben der Kapitalmarktentwicklung unter Umständen auch von der Versicherungsbestandszusammensetzung, der Reservesituation und unternehmensindividuellen Managementregeln ab. Um den Wert in die Lebensversicherungsverträge eingebetteten Optionen und Garantien zu ermitteln, wird meist aufgrund der Komplexität der in den Versicherungsverträgen eingebetteten Optionen ein Simulationsmodell benötigt.

Für eine sachgerechte Bewertung erscheint ein Unternehmensmodell mit einer dynamischen Risikosteuerung von Kapitalanlage sowie Überschussbeteiligung und Aktionärserträgen (Asset-Liability-Management, ALM) sinnvoll. Basierend auf Managementregeln für Asset-Allokation und Überschussbeteiligung können damit in jedem Szenario die Versicherungsleistungen innerhalb des Modellbestandes ermittelt werden.

Für die stochastische Simulation (Monte-Carlo-Verfahren) werden Szenarien für die Kapitalmarktentwicklung gemäß den Regeln der risikoneutralen Bewertung erzeugt. Die Anzahl der modellierten Asset-Klassen (z. B. Aktienkurse und Zinsstrukturkurven) und die Feinheit der Modellierung sollten angemessen zum gewählten Unternehmensmodell sein.

Um die Kosten, die durch Optionen der Versicherungsnehmer entstehen, zu bestimmen, müssen die Ausübungsentscheidungen der Versicherungsnehmer modelliert werden. Hierbei sollte von annähernd rationalem Verhalten ausgegangen, d. h. die Ausübungsentscheidungen basieren auf einem Vergleich der approximativen Werte der Alternativen, wobei der Kunde sich für die Alternative mit dem höheren Wert entscheidet. Eine Modellierung der Ausübungsentscheidungen, die einzig auf historischen Beobachtungen basiert, ist nicht aussagekräftig, da sie erwartete Entwicklungen nicht berücksichtigt. Die Entwicklung des Zweitmarktes für Lebensversicherungsprodukte und die zunehmende Ansprache von Bestandskunden durch Medien und Berater lassen für die Zukunft erwarten, dass Ausübungsentscheidungen häufiger aus rationalen Erwägungen getroffen werden als in der Vergangenheit. Es ist allerdings nicht zu erwarten, dass zukünftig alle Versicherungsnehmer rein finanzrational handeln werden. Daher sollte auch die Abhängigkeit der Ergebnisse vom Anteil rational handelnder Versicherungsnehmer untersucht werden.

Wegen der komplexen Interaktion zwischen Versicherungsnehmern und Versicherungsunternehmen („mehrperiodiges ökonomisches Spiel unter stochastischen Rahmenbedingungen") ist es sicherlich nicht möglich, eine vollständig rationale Entscheidungsregel zu finden.

[8] Siehe beispielsweise DAV-Ergebnisbericht „Market Consistent Embedded Value"

Es werden Cashflows an den Versicherungsnehmer bewertet: Durch pfadweise Diskontierung wird der Barwert der Leistungen berechnet. Durch Mittelung der Barwerte über alle Szenarien erhält man schließlich einen Erwartungswert (im Bewertungsansatz 2 i. A. für den Bestand, im Bewertungsansatz 1 auch den Wert eines Einzelvertrages). Dieser lässt sich in folgende Bestandteile zerlegen:

(1) Wert der garantierten Leistung (inklusive bereits unwiderruflich zugeteilter Überschüsse). Dieser Wert ergibt sich durch pfadweise Diskontierung der garantierten Cashflows. Dies entspricht für diesen Wert der Diskontierung mit den Diskontfaktoren, die sich aus der anfänglichen Zinsstrukturkurve ergeben. Der Wert der garantierten Leistungen ist (zu Anfang) unabhängig von der Strategie des Unternehmens.

(2) Wert der zukünftigen Überschussbeteiligung. Dieser Wert hängt von der Gesamtstrategie des Unternehmens (Kapitalanlage und Überschussbeteiligung) ab.

(3) Im Falle des Bewertungsansatzes 1 lässt sich aus dem Gesamtwert des Vertrages der Wert der Optionen des Versicherungsnehmers ermitteln. Er wird als Differenz des Wertes des Vertrages abzüglich der Summe von 1 und 2 bestimmt. Dieser Wert ist damit ebenfalls von der Strategie des Unternehmens abhängig.

    Im Falle des Bewertungsansatzes 2 wird der Wert von Optionen und Garantien als Differenz des deterministischen Wertes der versicherungstechnischen Rückstellung (certainty equivalent) abzüglich des stochastischen Erwartungswertes der versicherungstechnischen Rückstellung bestimmt.

Falls inaktive Marktsegmente vorliegen, sollte der Einfluss eines einzelnen Stichtags nicht vollständig auf ein kalibriertes Modell durchschlagen (siehe z. B. Bierbaum et al., 2014 und DAV-Hinweis „Kalibrierung in inaktiven Marktsegmenten“).

4. Beispiele und Anwendungen

In diesem Abschnitt werden die beiden unterschiedlichen O&G-Definitionen anhand von zwei Beispielen diskutiert. Zunächst wird eine Variable Annuity betrachtet und in Anschluss vergleichen wir eine Klassik mit klassischen Produkten mit neuartigen Garantiemechanismen.

4.1. Beispiel 1 – Variable Annuity

Im Folgenden wird die Garantie aus einem Produkt mit Guaranteed Minimum Accumulation Benefit (GMAB) mit den beiden Bewertungsansätzen bestimmt. Wir betrachten eine GMAB, bei der das gesamte Vertragsguthaben in eine Aktie investiert wird und der Kunde zum Ende der Aufschubphase den Wert des Aktieninvestments, mindestens aber eine gewisse garantierte Summe, erhält. Diese Garantie möchten wir genauer untersuchen.

Dafür wird die Aktie als geometrische Brownsche Bewegung mit Volatilität σ modelliert. Zu Vertragsbeginn wird der Einmalbeitrag EB des Kunden in die Aktie investiert und die garantierte Summe sei $x \cdot \mathrm{EB}$, wobei x das gewählte Garantieniveau sei. Wir verwenden folgende beispielhafte Parametrisierung:

Parameter	Bezeichnung	Standardwert
Laufzeit	T	10
Einmalbeitrag	EB	10.000
Aktienvolatilität	σ	15%
risikoloser Zins	r	1%
Garantieniveau	g	100%
Aktionärsmarge	ν	10bp

Mit den Bezeichnungen aus der Tabelle ergibt sich folgende Auszahlung an den Kunden:

$$K = \mathrm{EB} \cdot \max\left(\mathrm{e}^{(r-\nu-0{,}5\cdot\sigma^2)\cdot T+\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot W_T}; x\right),$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ ein Standard-Wiener-Prozesses ist. Damit erhält der Aktionär

$$A = \mathrm{EB} \cdot \mathrm{e}^{(r-0{,}5\cdot\sigma^2)\cdot T+\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot W_T} - K.$$

Damit ergibt sich der Garantiewert nach Definition 1 zu

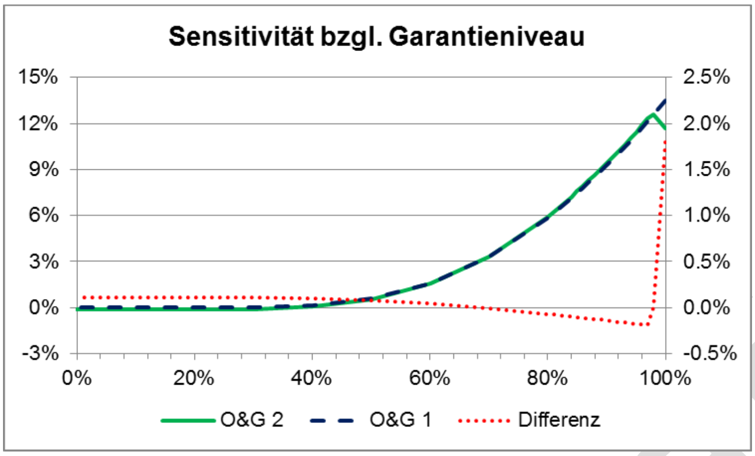
$$\mathrm{O\&G}_1 = \mathbb{E}[\mathrm{e}^{-r\cdot T} \cdot (-A)^+] = \mathbb{E}\left[\mathrm{e}^{-r\cdot T} \cdot \mathrm{EB} \cdot \left(x - \mathrm{e}^{(r-0{,}5\cdot\sigma^2)\cdot T+\sigma\cdot\sqrt{T}\cdot W_T}\right)^+\right].$$

Und nach Definition 2

$$\mathrm{O\&G}_2 = \mathrm{e}^{-r\cdot T} \cdot A_{\mathrm{det}} - \mathbb{E}[e^{-r\cdot T} \cdot A],$$

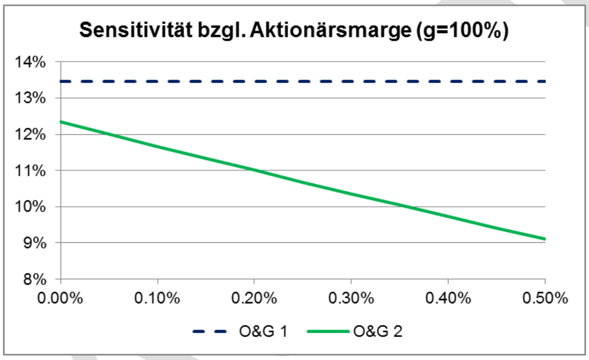
wobei A_{det} der deterministische Aktionärsertrag auf dem Certainty-Equivalent-Pfad ist, d. h. dem Median der Pfade. Daher sind die beiden Optionsbegriffe für den Fall $\nu = 0$ und $A_{\mathrm{det}} = 0$ gleich.

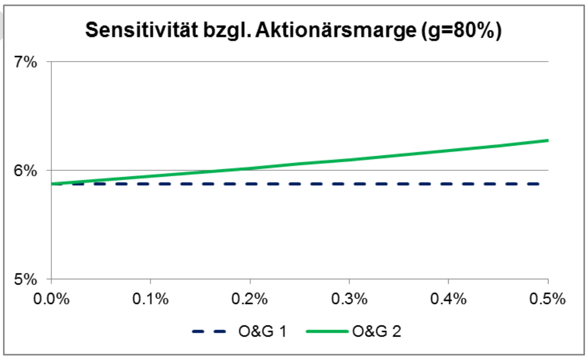
Zunächst betrachten wir die resultierenden Garantien in Anhängigkeit vom Garantieniveau. Wir stellen den Wert der Garantie relativ zum Einmalbeitrag dar. Die Differenz der beiden O&G-Definitionen ist in Rot auf der rechten Skala abgetragen.



$\mathrm{O\&G}_1$ führt stets zu einem positivem Garantiewert, während $\mathrm{O\&G}_2$ auch zu negativen Garantiewerten führen kann (−0,1% für geringe Garantieniveaus). Dies liegt daran, dass in diesen Fällen der stochastische Aktionärsertrag oberhalb des deterministischen liegt. Ab einem Garantieniveau von 97,8% kann nicht mehr der volle Aktionärsertrag auf dem Certainty-Equivalent-Pfad entnommen werden und der deterministische Aktionärsertrag sinkt sogar schneller als der stochastische ansteigt. Daher sinkt $\mathrm{O\&G}_2$ ab einem Garantieniveau von 97,8%.

In den nächsten beiden Schaubildern ist die Abhängigkeit der Garantiewerte von der Aktionärsmarge für die Garantieniveaus 100% und 80% dargestellt.





$\mathrm{O\&G}_1$ ist unabhängig von der Aktionärsmarge, was sich anhand der zweiten Darstellung von $\mathrm{O\&G}_1$ leicht überprüfen lässt. Bei einem Garantieniveau von 100% ist die Option auf dem deterministischen Pfad im Geld, weshalb die beiden Garantiebegriffe erst bei einem Garantieniveau von 80% und einer Aktionärsmarge von 0% übereinstimmen. Während bei einem Garantieniveau von 100% $\mathrm{O\&G}_2$ bei einer steigenden Aktionärsmarge sinkt, steigt $\mathrm{O\&G}_2$ bei einem Garantieniveau von 80% mit der Aktionärsmarge an. Allerdings ist im letzteren Fall die Steigung des Anstieges sehr gering. $\mathrm{O\&G}_2$ sinkt für ein Garantieniveau von 100% mit steigender Aktionärsmarge, da der deterministische Ertrag negativ und damit unabhängig von der Aktionärsmarge ist. Der stochastische Ertrag steigt allerdings mit erhöhter Aktionärsmarge, sodass $\mathrm{O\&G}_2$ sinkt. Bei einem Garantieniveau von 80% ist dies anders: Hier profitiert der deterministische Ertrag voll von der steigender Aktionärsmarge und der stochastische nur teilweise. Daher steigt $\mathrm{O\&G}_2$. Bei einem Garantieniveau von 80% kann ab einer Aktionärsmarge von ca. 2,1% der deterministische Ertrag nicht weiter steigen, sodass ab diesem Zeitpunkt $\mathrm{O\&G}_2$ wieder entsprechend sinkt.

Anmerkung:

(a) In dem Beispiel wurden dem Versicherungsnehmer die Garantiekosten separat in Rechnung gestellt, sodass der Einmalbeitrag in diesem Beispiel der Anlagebetrag nach Garantiegebühr ist.

(b) Die Volatilität ist ein entscheidender Treiber für die Höhe der Optionen und Garantien. Eine Veränderung der Volatilität wirkt sich zwar stark auf die im Beispiel gezeigten Zahlen aus, allerdings bleiben die Aussagen und Zusammenhänge bestehen.

4.2. Beispiel 2 – Klassik vs. klassische Produkte mit neuartigen Garantiemechanismen

Im Folgenden vergleichen wir jeweils gegen einen Einmalbeitrag eine Klassik mit einem klassischen Produkt mit neuartigen Garantiemechanismen, welche auch kapitaleffiziente Klassik genannt wird. Dabei verwenden wir als kapitaleffiziente Klassik drei Varianten. Den gedanklichen Rahmen dafür übernehmen wir aus Reuß et al (2015), bei dem endfällig ein Zins i garantiert wird, aber in einzelnen Jahren die Verzinsung des Vertrages auf u reduziert werden kann. Genauer berechnet sich die implizite Garantieverzinsung $i(t)$ der kapitaleffizienten Klassik als

$$i(t) = \max\left(u, \frac{\mathrm{EB} \cdot (1+i)^T}{V(t) \cdot (1+i)^{T-t}} - 1\right),$$

wobei EB der Einmalbeitrag und $V(t)$ das Vertragsguthaben zum Zeitpunkt t ist.

Wir betrachten folgende drei Varianten der kapitaleffizienten Klassik:

(a) $i = 0\%$, $u = 0\%$, dies entspricht einer gewöhnlichen Klassik mit einem Rechnungszins von 0%.

(b) $i = \mathrm{RZ} = 0{,}9\%$, $u = 0\%$, wobei RZ der aktuell gültige Höchstrechnungszins ist. Bei dieser Variante ist die endfällige Garantie gleich hoch wie bei der Klassik, es darf aber nach Jahren mit einer hohen Deklaration das Vertragsguthaben mit 0% verzinst werden.

(c) $i = \mathrm{RZ} = 0{,}9\%$, $u = -\infty$, diese Variante entspricht der zweiten, wobei das Vertragsguthaben ggf. auch mit einem negativen Zins verzinst wird.

Die Beispiele sollen nur zur Illustration dienen. Es wurde nicht überprüft, ob diese rechtlichen Anforderungen entsprechen.

In unserem numerischen Beispiel modellieren wir folgendes:

- Mit Hilfe des Szenariogenerators, welcher vom GDV im Rahmen des Branchensimulationsmodells zur Verfügung gestellt wird, werden 10.000 Aktien- und Zinspfade simuliert, wobei die Aktien anhand einer geometrisch

Brownschen Bewegung und die Zinsen mit Hilfe des Hull-White Modells modelliert werden.

- Die Kalibrierung erfolgt anhand des Kapitalmarkts von Ende 2015.
- Es werden keine Biometrie, keine Kosten und weder Aktiv- noch Passivpuffer modelliert.
- Die Nettoverzinsung $z(t)$ ergibt sich als gewichtetes Mittel aus dem 5-jährigen Schnitt der 10-jährigen Renditen und der Aktienrendite des vergangenen Jahres. Die Aktienquote bezeichnen wir mit q.
- Die Klassik erhält als Verzinsung $\max(z(t) \cdot b, i)$, wobei b die Beteiligungsquote des Kunden am Kapitalertrag ist.
- Die kapitaleffiziente Klassik erhält als Verzinsung $\max\big(z(t) \cdot b + s, i(t)\big)$, wobei s der Spread zur Kompensation des Kunden für die verringerte Garantie ist. Details zur Herleitung eines solchen Spreads sind dem Ergebnisbericht „Aktuarielle Anmerkungen zur Differenzierung der Überschussbeteiligung" vom 16. November 2017 zu entnehmen.
- In Jahren, in denen die Nettoverzinsung nicht ausreicht, muss der Aktionär die Differenz begleichen. Ansonsten erhält er den Restbetrag aus Nettoverzinsung und Kundenverzinsung.

Parameter	Bezeichnung	Standardwert
Laufzeit	T	30
Einmalbeitrag	EB	10.000
Aktienquote	q	5%
Beteiligungsquote	b	90%
Höchstrechnungszins	RZ	0,9%
Spread	s	0,0%

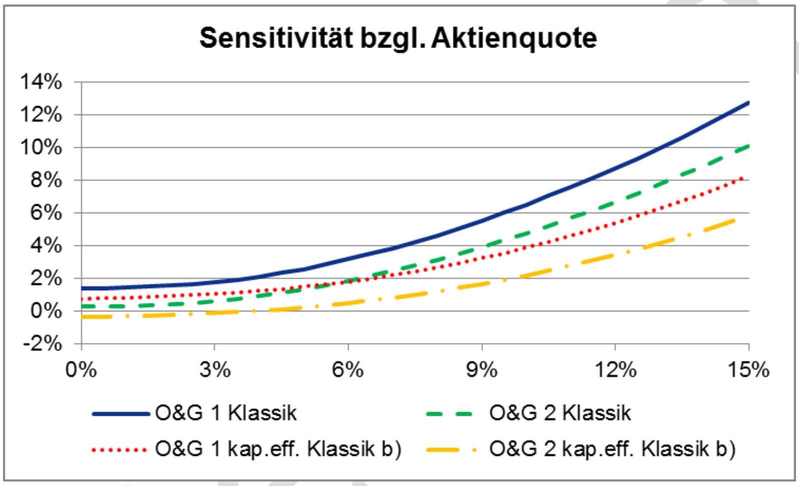
Zur Herleitung der Nettoverzinsung wird als Startwert für die Mittelung eine historische Verzinsung von 1,88% angenommen. Damit erhalten wir die folgenden Ergebnisse in Prozent des Einmalbeitrags:

Produkt	$\mathrm{O\&G_1}$	$\mathrm{O\&G_2}$
Klassik	2,57%	1,34%
Kapitaleffiziente Klassik (a)	0,76%	-0,49%
Kapitaleffiziente Klassik (b)	1,47%	0,21%
Kapitaleffiziente Klassik (c)	1,35%	0,10%

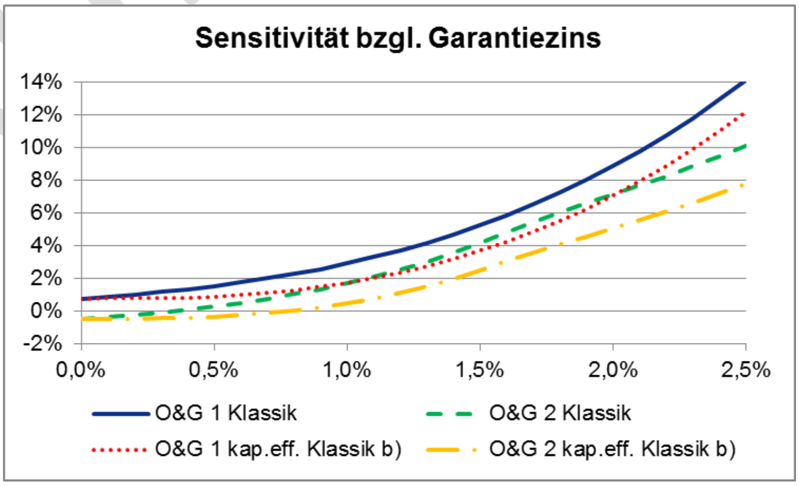
Diese Ergebnisse sind, sofern dargestellt, in der gleichen Größenordnung wie im Ergebnisbericht „Aktuarielle Anmerkungen zur Differenzierung der Überschussbeteiligung“ (dort nur $\mathrm{O\&G}_1$ betrachtet). Kleinere Abweichungen ergeben sich insbesondere durch eine unterschiedliche Laufzeit und eine Kalibrierung zu einem anderen Stichtag.

Es entspricht der Intuition, dass für beide O&G-Methoden die kapitaleffiziente Klassik (a) die niedrigsten Garantien beinhaltet, gefolgt von Variante (c) und (b) sowie der Klassik. Die Werte nach der $\mathrm{O\&G}_2$-Methode sind in einem Fall sogar negativ, da die stochastischen Aktionärserträge höher sind als der deterministische[9].

Sensitivitätsanalysen



Diese Sensitivität zeigt, dass die O&G-Werte natürlich bei höherer Volatilität – ausgelöst durch eine höhere Aktienquote – deutlich ansteigen. Allerdings ist der Anstieg bei der kapitaleffizienten Klassik deutlich geringer als bei der gewöhnlichen Klassik.



[9] Die O&G-Werte unterstreichen, dass aus aktuariellen Gesichtspunkten eine risikodifferenzierte Überschussbeteiligung angemessen ist. In dem Ergebnisbericht „Aktuarielle Anmerkungen zur Differenzierung der Überschussbeteiligung“ wird eine solche Differenzierung hergeleitet, allerdings über den erwarteten Barwert der Kundenleistungen.

Ein ähnliches Bild erhalten wir bei der Sensitivität bzgl. des Garantiezinses. Mit steigendem Garantiezins erhöht sich zunächst die absolute Abweichung zwischen Klassik und kapitaleffizienter Klassik. Allerdings erhöht sie sich ab einem Zinsniveau von ca. 2% kaum noch.

In den beiden Sensitivitäten ergeben sich teils sehr hohe O&G-Werte. In dem Beispiel wurde u. a. vereinfachend angenommen, dass keine Puffermittel vorhanden sind, weder Kosten noch Biometrie abgebildet, es keine anderen Verträge gibt und auch die Kapitalanlage wurde stark vereinfacht. Eine genauere Abbildung dieser Umstände würde die O&G-Kosten drastisch reduzieren.

5. Approximationsverfahren zur Bestimmung von Optionen und Garantien

In der Praxis ist es oft sehr aufwendig den tatsächlichen Wert von Optionen und Garantien zu bestimmen. Daher werden für manche Anwendungen[10] Approximationsverfahren verwendet, um den wahren Wert so gut es geht zu approximieren. Im Folgenden werden zwei Verfahren kurz vorgestellt.

5.1. Approximationsverfahren nach Solvency II

Im Rahmen von Solvency II treten sowohl bei der Berechnung des eigentlichen Solvenzkapitals, als auch bei der Berechnung von Optionen und Garantien Simulationen innerhalb von Simulationsrechnungen auf (sogenannte „Nested Simulations"). Daher gibt es im Rahmen von Solvency II eine Reihe von Veröffentlichungen, die sich mit entsprechenden Approximationsverfahren beschäftigen.[11] Ein prominentes Beispiel ist eine entsprechende Vorabberechnung der inneren Simulation durchzuführen und das Ergebnis durch eine Kurve oder allgemein durch eine Fläche anzunähern. Dann kann bei der eigentlichen Berechnung für jeden simulierten Punkt das Ergebnis aus der approximierten Fläche verwendet werden. Dieses Verfahren ist u. a. in dem Artikel „Curve Fitting – eine effiziente Methode zur Berechnung des Solvenzkapitals" beschrieben, der unter https://www.ifa-ulm.de/fileadmin/user_upload/download/sonstiges/2012_ifa_Wieland_Curve-Fitting-eine-effiziente-Methode-zur-Berechnung-des-Solvenzkapitals.pdf abgerufen werden kann.

5.2. Zinsabschläge

Eine andere Methode zur Approximation des Wertes von Optionen und Garantien ist die sogenannte Zinsabschlagsmethode. Wir erläutern diese anhand eines generischen Beispiels. Dazu betrachten wir eine beitragsfreie Kapitallebensversicherung ohne garantierte Rückkaufswerte mit Rechnungszins 0,9 % und verbleibender Restlaufzeit von 20 Jahren.

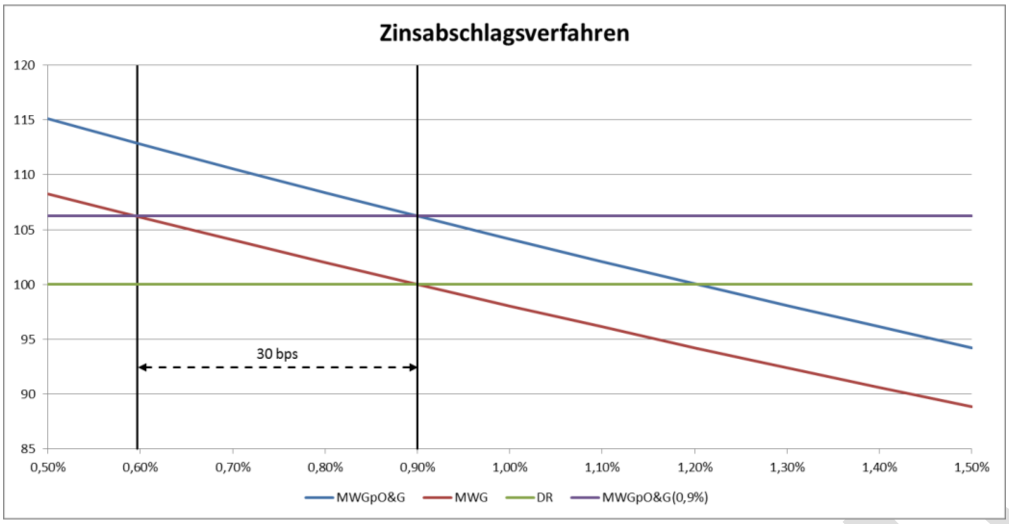
Die folgende Graphik zeigt die Deckungsrückstellung, den Marktwert der Garantien und den Marktwert der Garantien plus O&G (Kosten von Optionen und Garantien).

Um den Abschlag bei gegebenem Marktzins (z. B. 0,90%) zu finden, bestimmt man zunächst den Marktwert der Garantien plus O&G (MWGpO&G) bei diesem Zins (MGWpO&G(0,90%) bei Marktzins 0,90% ist 106,25) und sucht dann den Zinssatz, bei dem der Marktwert der Garantien ohne Kosten von Optionen und Garantien diesen Wert annimmt ($\mathrm{MW_G}$ = 106,25 bei Marktzins = 0,60%). Die Differenz zwischen den beiden Zinssätzen definiert den Zinsabschlag (0,90% – 0,60% = 30bp).

---

[10] Solche Verfahren können beispielsweise bei der Risikobewertung langfristiger Garantien (siehe DAV-Hinweis „Risikobewertung langfristiger Garantien") verwendet werden.

[11] Genannt sei hier der DAV-Ergebnisbericht „Proxy-Modelle für die Risikokapitalberechnung".



Mit Hilfe von dieser Methode kann man also den Marktwert inklusive der Optionen und Garantien annähern, in dem man einen vorher berechneten Abschlag auf die Zinsen vornimmt und mit diesen reduzierten Zinsen dann den Marktwert bestimmt.

6. Literatur

Bierbaum, J.; Bartel, H.; Dennstedt, N.; Dillmann, T.; Engel, W.; Keller, M.; Musialik, K.; Pauls, T.; Quapp, N.; Winter, J. Practical valuation of long-term guarantees in inactive financial markets. Eur. Actuar. J. 2014, 4, 101–124.

DAV Ergebnisbericht „Aktuarielle Anmerkungen zur Differenzierung der Überschussbeteiligung" des Ausschusses Lebensversicherung vom 16. November 2017.

DAV-Ergebnisbericht „Market Consistent Embedded Value" des Ausschusses Lebensversicherung vom 10. April 2018.

DAV-Ergebnisbericht „Proxy-Modelle für die Risikokapitalberechnung" des Ausschusses Investment vom 8. Juli 2015.

DAV-Hinweis „Kalibrierung in inaktiven Marktsegmenten" des Ausschusses Investment vom 4. Dezember 2014.

DAV-Hinweis „Risikobewertung langfristiger Garantien" des Ausschusses Lebensversicherung vom 20. Dezember 2017.

Hull, J. (2017). „Options, Futures, and Other Derivatives", 10. Auflage, Pearson.

Reuß, A., Ruß, J., Wieland, J. (2015). Participating life insurance contracts under risk based solvency frameworks: How to increase capital efficiency by product design. In Innovations in quantitative risk management (pp. 185-208). Springer International Publishing.