



DAV

DEUTSCHE  
AKTUARVEREINIGUNG e.V.



IVS

INSTITUT DER  
VERSICHERUNGSMATHEMATISCHEN  
SACHVERSTÄNDIGEN  
FÜR ALTERSVERSORGUNG e.V.

Fachgrundsatz der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

## **Biometrische Rechnungsgrundlagen bei Pensionskassen und Pensionsfonds**

Hinweis

Köln, 28.01.2019

## **Präambel**

Die Deutsche Aktuarvereinigung (DAV) e. V. hat entsprechend dem Verfahren zur Feststellung von Fachgrundsätzen vom 25. April 2013 den vorliegenden Fachgrundsatz festgestellt.<sup>1</sup> Fachgrundsätze zeichnen sich dadurch aus, dass sie

- aktuarielle Fachfragen behandeln,
- von grundsätzlicher und praxisrelevanter Bedeutung für Aktuare sind,
- berufsständisch durch ein Feststellungsverfahren legitimiert sind, das allen Aktuaren eine Beteiligung an der Feststellung ermöglicht, und
- ihre ordnungsgemäße Verwendung seitens der Mitglieder durch ein Disziplinarverfahren berufsständisch abgesichert ist.

Dieser Fachgrundsatz ist ein *Hinweis*. Hinweise sind Fachgrundsätze, die bei aktuariellen Erwägungen zu berücksichtigen sind, über deren Verwendung aber im Einzelfall im Rahmen der Standesregeln frei entschieden werden kann und die nur aus Grundlagenwissen zu konkreten Einzelfragen bestehen.

## **Anwendungsbereich**

Der sachliche Anwendungsbereich dieser Ausarbeitung betrifft die Aktuare der Pensionskassen und Pensionsfonds.<sup>2</sup>

## **Inhalt des Hinweises**

Dieser Hinweis ist eine grundlegende Überarbeitung und Erweiterung des Hinweises vom 9. Juli 2002 und beschäftigt sich im Zusammenhang mit den biometrischen Rechnungsgrundlagen mit der Berücksichtigung von unterschiedlichen Risiken, wie sie sich bei der Erstellung von biometrischen Rechnungsgrundlagen und deren Anwendung realisieren können, ferner werden Vorgehensweisen und Methoden dargestellt, um biometrische Rechnungsgrundlagen auf ihre Anwendbarkeit hin zu untersuchen; hierbei werden auch die materiellen Auswirkungen in die Überprüfung einbezogen. Exemplarisch wird dargestellt, wie Modifikationen von biometrischen Rechnungsgrundlagen für Pensionskassen und Pensionsfonds vorgenommen werden können.

---

<sup>1</sup> Die Vorstände von DAV und IVS danken der Arbeitsgruppe *Biometrische Rechnungsgrundlagen* des Fachausschusses Altersversorgung ausdrücklich für die geleistete Arbeit, namentlich Dr. Helmut Aden, Dr. Ingo Budinger, Carsten Ebsen, Ralf Fath, Christoph Heinrich, Dr. Richard Herrmann (Leitung), Korbinian Meindl, Johannes Nattermann, Thomas Pralle, Dr. Bodo Schmithals, Katrin Schulze, Dr. Christoph Schulte, Dr. Andreas Vogt, Marius Wenning, Dr. Horst-Günther Zimmermann.

<sup>2</sup> Dieser Fachgrundsatz ist an die Mitglieder der DAV gerichtet; seine sachgemäße Anwendung erfordert aktuarielle Fachkenntnisse. Dieser Fachgrundsatz stellt deshalb keinen Ersatz für entsprechende professionelle aktuarielle Dienstleistungen dar. Aktuarielle Entscheidungen mit Auswirkungen auf persönliche Vorsorge und Absicherung, Kapitalanlage oder geschäftliche Aktivitäten sollten ausschließlich auf Basis der Beurteilung durch eine(n) qualifizierte(n) Aktuar DAV/Aktuarin DAV getroffen werden.

Obwohl zurzeit für Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung noch keine geschlechtsunabhängigen biometrischen Rechnungsgrundlagen (Unisex tafeln) vorgeschrieben sind, werden Hinweise zur Erstellung von Unisex tafeln auf der Grundlage von geschlechtsabhängigen biometrischen Rechnungsgrundlagen gegeben.

### **Verabschiedung, Gültigkeitszeitraum und Erstanwendung**

Dieser Hinweis wurde durch den Vorstand der DAV am 28. Januar 2019 verabschiedet und zusätzlich vom Vorstand des IVS bestätigt.

Der Hinweis tritt mit der Bekanntgabe auf der Internetseite der DAV in Kraft. Er ersetzt den Hinweis „Biometrischen Rechnungsgrundlagen für Pensionskassen und Pensionsfonds“ vom 9. Juli 2002.

## Inhaltsverzeichnis

<b>1. Einleitung .....</b>	<b>6</b>
<b>2. Berücksichtigung von Risiken .....</b>	<b>8</b>
2.1. Änderungsrisiko .....	9
2.2. Irrtumsrisiko .....	10
2.2.1. Selektionsrisiko .....	10
2.2.2. Allgemeines Irrtumsrisiko .....	13
2.3. Schwankungsrisiko .....	14
2.3.1. Berücksichtigung des Schwankungsrisikos bei den Ausscheidewahrscheinlichkeiten .....	16
2.3.2. Berücksichtigung des Schwankungsrisikos auf Bewertungsebene .....	17
2.4. Mögliche Vorgehensweisen .....	21
2.5. Berücksichtigung von Risiken in aktuellen Tafelwerken .....	22
<b>3. Überprüfung der biometrischen Rechnungsgrundlagen .....</b>	<b>27</b>
3.1. Überprüfung nach Anzahlen .....	28
3.2. Überprüfung nach Leistungshöhe .....	28
3.3. Überprüfung nach riskiertem Kapital .....	28
3.4. Überprüfung anhand statistischer Testverfahren .....	29
3.4.1. Der Vorzeichentest .....	30
3.4.2. Der Iterationstest .....	31
3.4.3. Der $\chi^2$ - Test .....	32
3.4.4. Der Poisson-Test .....	34
<b>4. Modifikation von Rechnungsgrundlagen am Beispiel der Richttafeln     2005 G .....</b>	<b>36</b>
4.1. Modifikation der Jahrestafel .....	36
4.1.1. Modifikation der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten .....	37
4.1.2. Modifikation der Rentnersterblichkeit .....	37
4.2. Bestimmung von neuen Generationentafeln aus der modifizierten Jahrestafel .....	39
<b>5. Unisex-Rechnungsgrundlagen .....</b>	<b>41</b>
5.1. Worst-Case-Biometrie .....	41
5.2. Biometrie nach Mischungsverhältnis .....	43
<b>6. Best Estimate .....</b>	<b>45</b>
<b>Literaturverzeichnis .....</b>	<b>46</b>

Außer Kraft

## 1. Einleitung

Die aktuarielle Beurteilung von biometrischen Rechnungsgrundlagen ist stets im Kontext mit den rechtlichen Vorgaben zu sehen, die daher im Folgenden zusammengestellt sind.

Pensionskassen und Pensionsfonds sind Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung, die unter die EbAV-Richtlinie (Richtlinie 2016/2341 vom 14.12.2016 über die Tätigkeiten und die Beaufsichtigung von Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung (EbAV)) fallen. Sofern die Einrichtung biometrische Risiken abdeckt, muss sie nach Artikel 13 Abs. 2 der EbAV-Richtlinie auch in Hinblick auf die biometrischen Risiken ausreichende versicherungstechnische Rückstellungen bilden. Nach Artikel 13 Abs. 4 Buchstabe a) der EbAV-Richtlinie ist der Mindestbetrag der versicherungstechnischen Rückstellungen nach einem hinreichend vorsichtigen versicherungsmathematischen Verfahren zu berechnen, wobei die wirtschaftlichen und versicherungstechnischen Annahmen für die Bewertung der Verbindlichkeiten mit der gebotenen Vorsicht zu wählen sind und ggf. eine angemessene Marge für negative Abweichungen vorzusehen ist. Gemäß Artikel 13 Abs. 4 Buchstabe c) der EbAV-Richtlinie ist den zur Berechnung der versicherungstechnischen Rückstellungen verwendeten biometrischen Tafeln das Vorsichtsprinzip zugrunde zu legen, wobei die wichtigsten Merkmale der Versorgungsanwärter und der Altersversorgungssysteme und insbesondere die zu erwartenden Änderungen der relevanten Risiken zu beachten sind.

Vorgaben im nationalen Recht finden sich allgemein formuliert in § 138 des Versicherungsaufsichtsgesetzes [VAG] sowie den §§ 341e, 341f des Handelsgesetzbuches [HGB]. Darüber hinaus gilt das allgemeine Vorsichtsprinzip nach § 252 Abs. 1 Nr. 4 HGB zu Bewertungsvorschriften im Jahresabschluss auch für Deckungsrückstellungen. Auch in § 25 Abs. 1 der Versicherungsunternehmens-Rechnungslegungsverordnung [RechVersV] bzw. § 13 Abs. 1 der Pensionsfonds-Rechnungslegungsverordnung [RechPensV] wird der Ansatz angemessener Sicherheitszuschläge für die Berechnung der Deckungsrückstellung gefordert.

Für Verträge bei Pensionskassen, denen keine aufsichtsbehördlich genehmigten Tarife zugrunde liegen, gilt darüber hinaus die Deckungsrückstellungsverordnung [DeckRV]. Gemäß § 5 Abs. 1 Satz 1 bis 4 DeckRV gilt:

„Bei der nach versicherungsmathematischen Methoden vorzunehmenden Ableitung von Rechnungsgrundlagen sind sämtliche Umstände, die Änderungen und Schwankungen der aus den zugrunde liegenden Statistiken gewonnenen Daten bewirken können, zu berücksichtigen und nach versicherungsmathematischen Grundsätzen geeignet zu gewichten. Die Ableitung von Rechnungsgrundlagen auf der Basis eines besten Schätzwertes genügt nicht. Die Abschätzung künftiger Verhältnisse muss eine nachteilige Abweichung der relevanten Faktoren von den getroffenen, aus den Statistiken abgeleiteten Annahmen beinhalten. Dies gilt sowohl für die grundsätzlich auf ein einzelnes Risiko abzustellende Bewertung als auch

sinngemäß für die Bewertung bei nicht individualisierbaren Risiken, für die keine ausreichenden Statistiken verfügbar sind.“

Eine fast gleichlautende Formulierung findet man in § 23 Abs. 1 der Pensionsfonds-Aufsichtsverordnung [PFAV] für Pensionsfonds, soweit sie versicherungsförmige Garantien übernehmen. Soweit es sich um Zusagen ohne versicherungsförmige Garantien im Sinne von § 24 Abs. 1 PFAV handelt, ist gemäß § 24 Abs. 1 PFAV § 23 Abs. 1 mit der Maßgabe anzuwenden, dass die Rechnungsgrundlagen auf Basis eines besten Schätzwertes unter Einbeziehung einer Sicherheitsspanne, die insbesondere den zeitlichen Abstand bis zur nächsten Neufeststellung der künftig vom Arbeitgeber zu erbringenden Leistungen berücksichtigt, abgeleitet werden. Soweit es sich um Zusagen ohne versicherungsförmige Garantien im Sinne von § 236 Abs. 2 VAG handelt, ist gemäß § 24 Abs. 2 PFAV § 23 Abs. 1 mit der Maßgabe anzuwenden, dass die Rechnungsgrundlagen auf Basis eines besten Schätzwertes unter Einbeziehung ihrer künftigen Veränderungen abgeleitet werden.

Konsequenterweise wird auch in § 4 Abs. 4 Nr. 3 der Aktuarverordnung [AktuarV] bzw. § 1 Abs. 4 Nr. 3 der [PFAV] für den jeweiligen Erläuterungsbericht des Verantwortlichen Aktuars die Darlegung ausreichender Sicherheitsspannen bei der Berechnung der Deckungsrückstellung sowie in § 4 Abs. 4 Satz 2 AktuarV bzw. § 1 Abs. 4 Satz 2 PFAV eine begründete Einschätzung der zukünftigen Entwicklung dieser Sicherheitsspannen verlangt.

Für Pensionskassen hat die Aufsichtsbehörde zudem Empfehlungen und Mindeststandards, die bei der Festlegung der biometrischen Rechnungsgrundlagen von Pensionskassen beachtet werden sollten, 1998 in [BAV] veröffentlicht, in 2004 [BaFin1] bzgl. einer Mindestanforderung an die Sterbetafel für nach dem 31.12.2004 abgeschlossenen Rentenverträge<sup>3</sup>, denen keine aufsichtsbehördlich genehmigten Tarife zu Grunde liegen und die Garantien vorsehen, erweitert und am 4.10.2016 in [BaFin2] in Bezug auf die Berücksichtigung des Trends zur Erhöhung der Lebenserwartung für neue Tarife mit Erlebensfallcharakter modifiziert. Danach wird insbesondere erwartet, dass die aus Statistiken abgeleiteten, dem Erwartungswert-Prinzip entsprechenden Rechnungsgrundlagen mit ausreichenden Sicherheitszu- bzw. -abschlägen versehen werden. Auch bezüglich der in den folgenden Abschnitten betrachteten Komponenten des versicherungstechnischen Risikos finden sich dort konkrete Hinweise.

Im Weiteren wird zunächst auf den Umgang mit Risiken, die mit der Erstellung von biometrischen Rechnungsgrundlagen verbunden sind, eingegangen und im letzten Abschnitt die Frage eines besten Schätzwertes angesprochen.

---

<sup>3</sup> gilt für Lebensversicherungen, Pensionskassen und Pensionsfonds

## 2. Berücksichtigung von Risiken

Der tatsächliche Risikoverlauf im Versichertenbestand einer Pensionskasse oder eines Pensionsfonds kann von dem auf Basis von Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung erwarteten Verlauf abweichen<sup>4</sup>. Aus diesen möglichen Abweichungen und den daraus resultierenden Gewinnen oder Verlusten ergibt sich für Pensionskassen und Pensionsfonds ein spezifisches Risiko, das sogenannte versicherungstechnische Risiko.

Die Abweichungen vom erwarteten Risikoverlauf können durch verschiedene Einflüsse verursacht werden. Für deren Erklärung wird das versicherungstechnische Risiko in der Regel in folgende Komponenten unterteilt (vgl. [Far]):

- das *Änderungsrisiko*,
- das *Irrtumsrisiko* und
- das *Schwankungsrisiko*

Das **Änderungsrisiko** beruht bei biometrischen Rechnungsgrundlagen auf dem Umstand, dass sich die biometrischen Verhältnisse im Zeitablauf in unvorhersehbarer Weise ändern können. Gegen diese Änderungen ist Vorsorge zu treffen (vgl. Abschnitt 3.2. in [BAV]).

Das **Irrtumsrisiko** entsteht aus der Möglichkeit, dass die biometrischen Rechnungsgrundlagen unzutreffend geschätzt wurden, so dass für die Kalkulation nicht die wirklichen, sondern falsch eingeschätzte Rechnungsgrundlagen zu Grunde gelegt werden. Das für Versicherungsträger im Allgemeinen wirtschaftlich bedeutendste Irrtumsrisiko ist aller Erfahrung nach das **Selektionsrisiko**, das in der Möglichkeit eines Fehlers in der Einschätzung des versicherten Kollektivs, also einer Abweichung zwischen dem für die Gewinnung der Rechnungsgrundlagen betrachteten und dem später tatsächlich versicherten Kollektiv besteht, vgl. Abschnitt 3.4 in [BAV].

Das **Schwankungsrisiko** resultiert aus dem Umstand, dass selbst bei Vorliegen geeigneter, d. h. im Erwartungswert zutreffender Rechnungsgrundlagen, zufallsbedingte Schwankungen im Risikoverlauf auftreten können.

Zum Teil wurde in der Vergangenheit auch nur eine Zweiteilung des versicherungstechnischen Risikos in das sog. Zufallsrisiko und das Irrtumsrisiko vorgenommen. Das Zufallsrisiko entspricht hierbei dem Schwankungsrisiko. Das Irrtumsrisiko wird bei dieser Kategorisierung unterteilt in ein *Diagnoserisiko* und ein *Prognoserisiko* (vgl. [Alb]).

---

<sup>4</sup> Vgl. auch die Richtlinie Biometrische Rechnungsgrundlagen und Rechnungszins bei Pensionskassen und Pensionsfonds



Bei der Festlegung von Rechnungsgrundlagen werden üblicherweise unterschiedliche (explizit oder implizit bestimmte) Sicherheitszuschläge zur Abdeckung der Komponenten des versicherungstechnischen Risikos angesetzt.

Im Folgenden werden die Komponenten des versicherungstechnischen Risikos und deren Berücksichtigung in aktuellen Tafelwerken eingehender beschrieben.<sup>5</sup>

## **2.1. Änderungsrisiko**

Sachlogisch begründete Algorithmen als „Leitfaden“ zur Ableitung von Änderungszuschlägen für die Lebens- und Pensionsversicherung sind in der Literatur nur selten zu finden. Im Gegensatz zu statistischen Schwankungszuschlägen, deren algorithmische Herleitung allgemein z. B. in [PS] oder speziell für Pensionskassen in [BAV] in den Grundzügen beschrieben wird, wird für das Änderungsrisiko nur dessen Berücksichtigung gefordert, ohne dass methodische oder gar algorithmische Aussagen getroffen werden.

Eine Zusammenstellung von im angelsächsischen Raum verbreiteten diesbezüglichen Ansätzen enthält die Arbeit [JQ]. Hierin wird unterschieden zwischen (vgl. [JQ], section C - Inherent Variability)

- a. allgemeinen, alle Marktteilnehmer grundsätzlich gleich betreffenden Quellen für das Änderungsrisiko einerseits und
- b. für das Lebensversicherungsunternehmen oder die Pensionseinrichtung spezifischen Ursachen andererseits.

Die *allgemeinen*, für die Pensionskasse oder den Pensionsfonds *unspezifischen* Ursachen nachteiliger Änderungen sind zu klassifizieren nach den Kategorien

- a) Änderungen der rechtlichen Rahmenbedingungen (z. B. Hinterbliebenenrente für eingetragene Lebenspartner, Versorgungsausgleich),
- b) Änderungen in der Anerkennungspraxis der gesetzlichen Rentenversicherung,
- c) Veränderungen der sozioökonomischen Verhältnisse (z. B. Familienstruktur, allgemeine Arbeitsbedingungen),
- d) Verhaltensänderungen (Rauchverhalten, Drogen- und Alkoholmissbrauch, Ernährung, Freizeitverhalten),
- e) Änderungen im medizinischen Bereich (medizinischer Fortschritt, Qualität in der Gesundheitsversorgung, neue Krankheiten)

---

<sup>5</sup> Dabei wird die klassische Unterteilung des versicherungstechnischen Risikos in Änderungs-, Irrtums- und Schwankungsrisiko zugrunde gelegt.

Als für einzelne Pensionskassen oder Pensionsfonds *spezifische* Ursachen für das Änderungsrisiko können auftreten:

- a) Änderungen im versicherten Personenkreis (im Zeitablauf beispielsweise durch Ausscheiden oder Hinzukommen von Trägerunternehmen, Änderungen der Arbeitsbedingungen und der Einstellungspraxis im Hinblick auf das Geschlecht in einzelnen Trägerunternehmen; abzugrenzen vom Selektionsrisiko, das in einer bereits anfänglichen Diskrepanz zwischen rechnermäßig und tatsächlich versichertem Personenkreis besteht)
- b) Rechtsprechung bzgl. bedingungs- oder satzungsgemäßer Risikoabschlüsse oder der Regulierungspraxis
- c) Veränderung der Anzahl ausgelöster Leistungsfälle in Folge einer Änderung der personalpolitischen Zielsetzungen

Dabei ist eine Orientierung hinsichtlich der für die Pensionskasse oder den Pensionsfonds spezifischen Ursachen nachteiliger Änderungen

- a) an der Risikoexposition vergleichbarer Pensionskassen oder Pensionsfonds,
- b) an eigenen oder veröffentlichten fremden Erfahrungen von Pensionskassen oder Pensionsfonds (z. B. Unterschiede zwischen historisch günstigstem und ungünstigstem Risikoverlauf)

als Kriterium für das Ausmaß potentieller Änderungen möglich (vgl. [JQ] für britische Lebensversicherungen). Problematisch ist hier offensichtlich die Beschaffung und Analyse der relevanten Daten.

Zur Untersuchung der allgemeinen und spezifischen Ursachen für das Änderungsrisiko sind statistische Analysen wenig hilfreich. Stattdessen wird die *Orientierung an in der Vergangenheit beobachteten Änderungen* vorgeschlagen.

## **2.2. Irrtumsrisiko**

### **2.2.1. Selektionsrisiko**

Versicherungsbestände von Pensionskassen und Pensionsfonds sind im Vergleich zu denen von Lebensversicherungsunternehmen oft deutlich kleiner, so dass sich aus dem eigenen Versicherungsbestand eigenständige Rechnungsgrundlagen kaum zuverlässig ableiten lassen. Vielmehr greifen Pensionskassen und Pensionsfonds überwiegend auf allgemein anerkannte biometrische Rechnungsgrundlagen oder auf Primärdaten einer hinreichend großen Referenzgruppe (im Allgemeinen der in der gesetzlichen Rentenversicherung Versicherten oder der Gesamtbevölkerung) zurück und modifizieren diese gegebenenfalls, um den Besonderheiten des eigenen Versicherungsbestandes Rechnung zu tragen.

Unter dem Selektionsrisiko wird das Risiko verstanden, dass die für eine Ableitung von Rechnungsgrundlagen getroffenen Annahmen über die Zusammensetzung und die Risikoexposition des versicherten Kollektivs von den tatsächlichen Verhältnissen abweichen. Bereits bei der Auswahl des Kollektivs, aus dem die Primärdaten der Rechnungsgrundlagen gewonnen werden, besteht ein Selektionsrisiko, da ja implizit stets die Vergleichbarkeit dieses Kollektivs mit dem später versicherten Kollektiv unterstellt wird.

Das Selektionsrisiko bemisst sich am Abstand zwischen der Risikosituation der Versicherten und derjenigen, die bei der Ermittlung der Rechnungsgrundlagen als Referenzgruppe diene. Dieser Abstand hat mehrere Gründe, von denen die wichtigsten nachfolgend aufgeführt sind:

- a) Bei Versicherungsträgern der betrieblichen Altersversorgung zeigt sich u.a. aus sozioökonomischen Gründen eine im Allgemeinen abweichende Sterblichkeit gegenüber der Gesamtbevölkerung. Hierzu sei auf Studien verwiesen, die Lebenserwartungsunterschiede nach Bildung, Einkommen und beruflicher Stellung nachgewiesen haben (vgl. [Hoff], [Vilp], [BRT]).
- b) Als Konsequenz einer Selbsteinschätzung der eigenen Langlebigkeit haben in der privaten Lebensversicherung Versicherte mit sofort beginnenden Rentenversicherungen sowie aufgeschobenen Rentenversicherungen bei Nichtausübung eines häufig vorhandenen Kapitalwahlrechts eine in der Regel geringere Sterblichkeit als die Gesamtbevölkerung. Dieser Effekt ist spezifisch für das Erlebensfallrisiko bei Lebensversicherern, bei Pensionskassen und Pensionsfonds aber grundsätzlich von geringerer Bedeutung; er kann sich beispielsweise im Zusammenhang mit selten eingeräumten Kapitalwahlrechten für Rentenleistungen bemerkbar machen. Zur Vermeidung einer negativen Selektion erscheint es zweckmäßig, eine Mindestfrist von drei Jahren, die zwischen Ausübung der Option und Eintritt des Versicherungsfalls liegen muss, zu verlangen.
- c) Die Kalkulation mit Unisex-Rechnungsgrundlagen führt in den meisten Fällen zu einer Veränderung des Beitrags-/ Leistungsverhältnisses gegenüber einer geschlechtsabhängigen Kalkulation. So ergeben sich für Altersrenten in Folge einer Unisex-Kalkulation für Männer bei gleichem Beitrag geringere Renten als bei einer geschlechtsabhängigen Kalkulation. Dies könnte die Attraktivität von Rentenversicherungen beeinflussen und zu Selektionseffekten führen. Gleiches gilt für den Fall eines eingeräumten Kapitalwahlrechts zu Rentenbeginn. In der betrieblichen Altersversorgung ist dieses Selektionsrisiko nicht so stark ausgeprägt wie in der Lebensversicherung. Grund dafür ist, dass es sich in der betrieblichen Altersversorgung häufig um kollektive Systeme mit obligatorischer Anmeldung handelt, bei denen Kapitalwahlrechte nur selten eingeräumt werden. Auch die in der betrieblichen Altersversorgung verbreitete Verwendung von Kompaktтарifen (mit obligatorischem Einschluss einer Hinterbliebenenrente) führt zu deutlich

geringeren Leistungsunterschieden zwischen Männern und Frauen bei Unisex-Kalkulation.

- d) Als Konsequenz einer Risikoprüfung, die eine Pensionskasse oder ein Pensionsfonds vor Annahme eines Antrags auf freiwilligen Abschluss oder freiwillige Höherversicherung (z. B. durch Entgeltumwandlung) vornimmt, zeigen die Versicherten in der Regel in den ersten 3 bis 5 Jahren einen günstigeren Risikoverlauf. Dieser Effekt ist spezifisch für das Todesfallrisiko sowie das Invaliditätsrisiko (Berufsunfähigkeit, teilweise oder volle Erwerbsminderung), Hinterbliebenenversorgung etc. Demgegenüber kann es bei freiwilliger Höherversicherung ohne Risikoprüfung zu einer Verschlechterung der Risikosituation durch Gegenauselektion kommen.

Diesem Selektionsrisiko kann grundsätzlich am besten dadurch begegnet werden, dass originäre Primärdaten des versicherten Bestandes und nach Alter und abgelaufener Versicherungsdauer doppelt abgestufte Rechnungsgrundlagen verwendet werden. Dies ist jedoch mangels - hinsichtlich Qualität und Quantität - ausreichender Daten in der Praxis fast nie möglich. Daher werden in der Praxis im Allgemeinen nur Pauschalansätze verwendet, die mittels Untersuchungen von Referenzbeständen geschätzt werden (vgl. [Loe] und [Sch]).

Darüber hinaus kommt der Tarifgestaltung bei der Vermeidung von Selektionsrisiken eine hohe Bedeutung zu. Einige Beispiele werden im Folgenden beschrieben:

- a) Rentenzusagen ohne Kapitalabfindungswahlrechte oder ausreichend lange Vorlauffristen für die Ausübung der Option vermeiden die zuvor unter b) beschriebenen Selektionsrisiken.
- b) Für den Fall des Invaliditätsrisikos äußert sich das Selektionsrisiko neben der Abhängigkeit von der seit der Risikoprüfung abgelaufenen Dauer und der Höhe des Rentenanspruchs vor allem in der Selektion der versicherten Berufe und ihrer spezifischen Invalidisierungswahrscheinlichkeiten. Für Pensionskassen oder Pensionsfonds mit obligatorischer Mitgliedschaft und einheitlichem Leistungsplan sowie einem hinsichtlich der Berufsgruppe homogenen Versichertenbestand ist dieses Risiko eher gering; bei freiwilligem Abschluss und eigenbestimmter Höhe der Risikodeckung steigt seine Relevanz dagegen deutlich an, wie dies z. B. für die Lebensversicherung in [KLM] belegt wird. Bei der Entwicklung von Tarifen bieten die Beschränkung auf Berufsgruppen oder Branchen, die obligatorische Risikoprüfung, Höchstgrenzen für Beiträge oder Leistungen, Wartezeiten und ggf. die Einschränkung von Zurechnungszeiten für Invaliditätsleistungen entsprechenden Gestaltungsspielraum.
- c) Bei Einrichtungen der betrieblichen Altersversorgung, die gleichzeitig mehrere Tarife für Neuzugänge anbieten, besteht ein zusätzliches Selektionsrisiko.

- d) Die Anwartschaft auf Hinterbliebenenversorgung wird bei Rentenbeginn – sofern keine hinterbliebenenberechtigten Personen vorhanden sind – ausgeschlossen und durch die Gewährung einer höheren Altersrente kompensiert. Hierdurch kann die Selektion nach Verheirateten und Unverheirateten vermieden werden. Allerdings ist dieser „Ledigenzuschlag“ bei der Bewertung entsprechend zu berücksichtigen.

In den Fällen b) und c) kann es erforderlich sein, die Ausscheideordnung entsprechend anzupassen, insbesondere wenn durch die Ausübung einer Option sich ein Erlebensfallrisiko in ein Todesfallrisiko wandelt. Je nach Gestaltung des Leistungsspektrums und der Leistungshöhe können die Anpassungen die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten, die Sterbewahrscheinlichkeiten, die Wahrscheinlichkeiten im Todeszeitpunkt verheiratet zu sein und die Altersdifferenz zu dem verstorbenen Ehegatten betreffen.

### *2.2.2. Allgemeines Irrtumsrisiko*

In dem Maße, wie die zur Herleitung der biometrischen Rechnungsgrundlagen und der Sicherheitszuschläge verwendeten Daten oder methodischen Ansätze von ihrem Grundgedanken her als eher unsicher einzuschätzen sind, erscheint die Einrechnung eines (einfacherweise z. B. multiplikativen) expliziten Zuschlags für das Irrtumsrisiko naheliegend. Dieser allgemeine Irrtumszuschlag deckt gleichzeitig auch sonstige, nicht näher analysierte und quantifizierte Risiken ab.

Die Höhe eines solchen Irrtumszuschlags hängt offenbar ab von der Einschätzung des erreichten Gesamtniveaus der Sicherheitszuschläge und damit auch von der Einschätzung der für das Schwankungs- und Änderungsrisiko sowie das Selektionsrisiko bereits eingerechneten Margen. Die Höhe eines weiteren Irrtumszuschlags ist demzufolge in einem gewissen Rahmen Ermessenssache.

Lässt das methodische Vorgehen eine Bewertung des Gesamtniveaus der Sicherheitszuschläge als Schätzung des zu einem gewünschten Sicherheitsniveau mindestens erforderlichen Zuschlags zu, so liegt ein expliziter Zuschlag für das Irrtumsrisiko insofern nahe, als er die Irrtumsmöglichkeit hinsichtlich des Versuchs einer „punktgenauen“ Schätzung abdeckt. Ein Beispiel hierfür liefert die Behandlung des Irrtumsrisikos in den Tafeln DAV 2001 EM(-T) [EM2001], wo ein expliziter Irrtumszuschlag von 10 % angesetzt wird (siehe 2.5).

Sofern der Versicherungsträger keine ausreichend gesicherten Erkenntnisse zum Risiko im eigenen Bestand hat, kommt ebenfalls ein Irrtumszuschlag in Betracht (vgl. z. B. [Pa] zur Wahl eines zu einer gegebenen Standardtafel proportionalen Ansatzes sowie zum Ansatz eines zusätzlichen unternehmensindividuellen Irrtumszuschlags in Höhe von bis zu 15 % in [T2008]).

Führt das methodische Vorgehen bereits zu dem vorsichtigen Ansatz reichlicher Margen bei der Bestimmung der anderen Komponenten des Gesamt-Sicherheits-

zuschlags, so kann gegebenenfalls auf einen allgemeinen Irrtumszuschlag verzichtet werden, da in diesem Fall bereits vom Vorliegen eines impliziten Irrtumszuschlags ausgegangen werden kann (vgl. auch Abschnitt 3.5 in [BAV]). Ebenso kann bei Vorliegen hinreichend sicherer Daten und Methoden auf einen Zuschlag für das Irrtumsrisiko verzichtet werden. Beispiele hierfür sind die Berufsunfähigkeits-Rechnungsgrundlagen DAV 1997 I, bei denen die Qualität der Daten und Methoden und die explizite Behandlung der Einflüsse von Selektion und Berufsstruktur Zuschläge für ein verbleibendes allgemeines Irrtumsrisiko entbehrlich erscheinen ließ.

### **2.3. Schwankungsrisiko**

Der tatsächliche Risikoverlauf in einem Versichertenbestand ist bekanntlich Schwankungen unterworfen, die sich bei Vorliegen ansonsten geeigneter, d. h. im Erwartungswert zutreffender Rechnungsgrundlagen als Abweichung vom Erwartungswert äußern. Die Pensionskasse oder der Pensionsfonds muss bis zu einem durch die Festlegung der Sicherheitswahrscheinlichkeit zu bestimmenden Grad in der Lage sein, zufallsbedingte Schwankungen im Risikoverlauf und damit verbundene Aufwendungen aus eigenen Mitteln tragen zu können, sofern das Risiko von der Pensionskasse oder dem Pensionsfonds selbst getragen werden muss. Mit welcher Wahrscheinlichkeit und in welchem Umfang zufallsbedingte Schwankungen auftreten können, hängt ab

- a) von der Größe des Bestandes, d. h. von der Möglichkeit des Risikoausgleichs innerhalb des eigenen Bestandes der Pensionskasse oder des Pensionsfonds,
- b) von dem Leistungsspektrum (Altersrente, Invalidenrente, Hinterbliebenenrente, Kapitalleistung) und dem Leistungsplan der Pensionskasse oder des Pensionsfonds.

Die Beurteilung des Schwankungsrisikos und damit auch seine Berücksichtigung müssen sich an den materiellen Auswirkungen auf die wirtschaftliche Lage der Kasse und der Erfüllbarkeit der satzungsmäßigen Leistungen orientieren.

Die aktuarielle Berücksichtigung des Schwankungsrisikos setzt voraus, dass zunächst eine Aussage über das maximale von der Pensionskasse oder dem Pensionsfonds zu tragende Risiko getroffen wird. Dies geschieht üblicherweise durch Festlegung einer Sicherheitswahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$ , so dass eine zufallsbedingte Abweichung des tatsächlichen Risikoverlaufs vom erwarteten eine vorgegebene Grenze höchstens mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  überschreiten darf. Ob und in welchem Umfang eine Abweichung zu verzeichnen ist, kann an unterschiedlichen Kriterien festgemacht werden:

- a) die über die vorgegebene Grenze hinausgehende Abweichung in der Anzahl der aufgrund einer einzelnen Ausscheideursache ausgeschiedenen Personen darf in jedem Alter jeweils höchstens mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  eintreten

- b) die über die vorgegebene Grenze hinausgehende Abweichung in der Anzahl der aufgrund einer einzelnen Ausscheideursache ausgeschiedenen Personen darf in festgelegten Altersintervallen (oder in allen Altern insgesamt) jeweils höchstens mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  eintreten
- c) der aufgrund der zufälligen Schwankung eingetretene Risikoverlust darf eine vorgegebene Grenze höchstens mit Wahrscheinlichkeit  $\alpha$  überschreiten

Insbesondere bei Pensionskassen, die nur in mehrjährigen Abständen ein versicherungsmathematisches Gutachten erstellen lassen, ist es wichtig, darauf zu achten, dass sich die oben genannten Punkte immer auf einen Zeitraum von i. d. R. einem Jahr beziehen.

Ob die Berücksichtigung des Schwankungsrisikos auf der Ebene der Ausscheidewahrscheinlichkeiten oder auf der Ebene der Bewertung vorgenommen wird hängt insbesondere von der jeweiligen Risikosituation ab (Auffüllungs- oder Erlebensfallrisiko, vgl. 2.3.2). Werden die biometrischen Rechnungsgrundlagen nur zur Beurteilung einer Ausscheideursache benötigt und ergibt sich bei Ausscheiden der Person immer ein Verlust für den Versicherungsträger, so kann jedes der o. g. Kriterien herangezogen werden (Beispiel: reine Todesfallversicherung, gemischte Lebensversicherung). Tarife bei Pensionskassen und Pensionsfonds sehen jedoch in der Regel keine Leistungen vor, die ausschließlich mit einem Todesfall- (bzw. Invaliditäts-) oder einem reinen Erlebensfallrisiko verbunden sind. Sind in der Satzung der Pensionskasse oder im Pensionsplan des Pensionsfonds sowohl Rentenleistungen bei Erreichen der Altersgrenze als auch Hinterbliebenenrenten bei Tod des Berechtigten vorgesehen, so ist bei Beginn der Anwartschaftszeit durch die Pensionskasse oder den Pensionsfonds ein Todesfallrisiko zu tragen, da der Barwert der Witwenrente bei Tod in den ersten Versicherungsjahren im allgemeinen höher ist als die Deckungsrückstellung des Anwärters. In späteren Jahren kurz vor Erreichen der Altersgrenze kehrt sich das Vorzeichen des riskierten Kapitals um; anstelle des Todesfallrisikos trägt die Pensionskasse oder der Pensionsfonds nun ein Erlebensfallrisiko. Der Wechsel vom Todesfallrisiko zum Erlebensfallrisiko tritt jedoch nicht für sämtliche Versicherte in demselben Alter ein. Der Zeitpunkt des Wechsels hängt von dem Leistungsplan der Pensionskasse bzw. dem Pensionsplan des Pensionsfonds (z. B. mit oder ohne Zurechnungszeit bei der Hinterbliebenenrente) und von dem Alter bei Beginn des Versicherungsverhältnisses ab. Ein Zuschlag zur Sterbewahrscheinlichkeit, um das Schwankungsrisiko zu berücksichtigen, kann damit bei dem einen Versicherten zur Erhöhung der Sicherheit, bei einem anderen jedoch zu einer Verringerung der Sicherheit führen. Bei größeren Beständen und kollektiver Tarifikalkulation kann auf Basis der Bestandsdaten ein (geschlechtsabhängiges) Grenzalter bestimmt werden, bei dem sich die Todesfall- und Erlebensfall-Leistungen treffen. Vor diesem Grenzalter kann dann ein Zuschlag, danach ein Abschlag zur Sterbewahrscheinlichkeit mit einem geeignet gewählten Übergang angesetzt werden.

Unabhängig von der Methode zur Berücksichtigung des Schwankungsrisikos muss die Bestimmung der Sicherheitswahrscheinlichkeit einerseits zu ausreichenden

statistischen Schwankungszuschlägen führen und darf andererseits nicht so hoch festgelegt werden, dass beim Versicherungsträger eine über das erforderliche Maß hinausgehende Mittelansammlung erfolgt.

### *2.3.1. Berücksichtigung des Schwankungsrisikos bei den Ausscheidewahrscheinlichkeiten*

Wird die Berücksichtigung des Schwankungszuschlages bei den einzelnen Ausscheidewahrscheinlichkeiten vorgenommen, so ist zu entscheiden, ob die Sicherheitswahrscheinlichkeit für jedes einzelne Alter, für zusammengefasste Alter oder für sämtliche Alter einzuhalten ist. Im Ergebnis führt die Forderung für jedes einzelne Alter zu sehr hohen, kaum noch begründbaren Schwankungszuschlägen bei kleineren Beständen und nur bei sehr großen Beständen zu annehmbaren Schwankungszuschlägen. Aus diesem Grund wurde die Sicherheitswahrscheinlichkeit von 95 % bei der Herleitung der Sterbetafel DAV 2008 T nur für die Anzahl der Todesfälle insgesamt, d. h. im gesamten Altersbereich, gefordert (entsprechend o. g. Punkt 2).

Die Vorgehensweise zur Ermittlung der Schwankungsabschläge bei der Sterbetafel DAV 2004 R für Erlebensfallrisiken ist grundsätzlich die gleiche wie für die Sterbetafel DAV 2008 T. Der Abschlag wird so festgesetzt, dass die mit den modifizierten Sterbewahrscheinlichkeiten für den Modellbestand berechnete erwartete freiwerdende Deckungsrückstellung des gesamten Bestandes eine untere Konfidenzschranke zum Niveau  $1 - \alpha$  für die Zufallsvariable der durch Tod im Modellbestand freiwerdenden Deckungsrückstellung ist. Bei einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit von ebenfalls  $1 - \alpha = 95 \%$  wurde der gesamte Altersbereich der Tafel in (für Männer und Frauen verschiedene) Altersintervalle unterteilt und die Schwankungsabschläge ermittelt (vgl. [R2004], Abschnitt 3.4.1), so dass die vorgegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit für den Altersbereich der Tafel insgesamt erreicht wird.

Das statistische Schwankungsrisiko wird auch in den Tafeln DAV 1997 I, DAV 1997 TI und DAV 1997 RI in ähnlicher Weise wie in den o. g. Tafeln berücksichtigt. Auch in den Tafeln DAV 1997 I, DAV 1997 TI und DAV 1997 RI wird eine Sicherheitswahrscheinlichkeit von  $1 - \alpha = 95 \%$  gefordert. Die Festlegung der statistischen Schwankungszuschläge erfolgt dergestalt, dass die vorgegebene Sicherheitswahrscheinlichkeit insgesamt erreicht wird. Zur Klarstellung sei darauf hingewiesen, dass unter dem Begriff des Schwankungszuschlags zu einer Ausscheidewahrscheinlichkeit auch ein Abschlag zur Berücksichtigung des Schwankungsrisikos zu verstehen ist.

Die Vorgehensweise zur Ermittlung des Schwankungszuschlags kann beispielsweise [KLM] entnommen und auf allgemeinere Fälle, wie z. B. die Ermittlung eines Abschlags anstelle eines Zuschlags, übertragen werden.



### 2.3.2. Berücksichtigung des Schwankungsrisikos auf Bewertungsebene

Das in einer Pensionskasse und in einem Pensionsfonds versicherte Leistungsspektrum besteht in der Regel aus Alters-, Invaliden- und Hinterbliebenenrente; der Leistungsplan kann ergänzend vorsehen, dass ein Anspruch auf Leistungen erst nach Erfüllen einer Wartezeit besteht. Bis zur Vollendung der Wartezeit trägt die Pensionskasse bzw. der Pensionsfonds ausschließlich ein **Erlebensfallrisiko** (auch bei Invalidität), d. h. bei Realisierung des Risikos erfolgt eine Auflösung der Deckungsrückstellung. Nach Ablauf der Wartezeit stellt die Hinterbliebenenversorgung ein Todesfallrisiko dar, das mit dem Risiko der Auffüllung der Deckungsrückstellung verbunden ist. Bei Eintritt der Invalidität unmittelbar nach Ablauf der Wartezeit ist die Deckungsrückstellung in der Regel ebenfalls aufzufüllen.

Im Folgenden wird das Risiko, bei Eintritt eines Leistungsfalls die Deckungsrückstellung erhöhen zu müssen, als **Auffüllungsrisiko** bezeichnet. Gegen Ende der Anwartschaftszeit wird das Risiko aus der Hinterbliebenenversorgung ein Erlebensfallrisiko. Nach Rentenbeginn trägt dann die Pensionskasse bzw. der Pensionsfonds nur noch ein Erlebensfallrisiko, wenn man den (seltenen) Fall außer Acht lässt, dass bei Tod des Rentners der Hinterbliebenenrentenbarwert höher als der Rentenbarwert des Verstorbenen ist.

	Auffüllungsrisiko	Erlebensfallrisiko
I. Während der Anwartschaft		
Invalidität vor Ablauf der Wartezeit		<b>X</b>
Invalidität nach Ablauf der Wartezeit	<b>X</b>	
Tod vor Ablauf der Wartezeit		<b>X</b>
Tod nach Ablauf der Wartezeit	<b>X</b> (bis zu einem individuellen oder kollektiv ermittelten Grenzalter)	<b>X</b> (ab einem individuellen oder kollektiv ermittelten Grenzalter)
II. Nach Rentenbeginn		
Rentner		<b>X</b>
Hinterbliebener		<b>X</b>

Um die unterschiedlichen Risikokonstellationen bei der Ermittlung des Schwankungszuschlags berücksichtigen zu können, wird im Folgenden ein möglicher Ansatz zur Ermittlung eines Zusatzbetrages zur Deckungsrückstellung dargestellt, mit dessen Hilfe die geforderte Sicherheitswahrscheinlichkeit erreicht werden kann, indem die Schadenverteilungsfunktion verwendet wird. Eine ausführliche Darstellung findet sich in [Her].

Im Weiteren wird für jedes Mitglied einer Pensionskasse bzw. eines Pensionsfonds angenommen, dass es neben dem Verbleib in der Hauptgesamtheit  $m$  unterschiedliche Ursachen für ein Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit gibt.

Bezeichne

$$q_h^{(j)}, \quad j = 1, \dots, m, h=1, \dots, n$$

die individuelle rechnungsmäßige Wahrscheinlichkeit für eine Person  $h$  der Hauptgesamtheit, innerhalb des folgenden Jahres wegen der Ausscheideursache  $j$  aus der Hauptgesamtheit auszusteiden. Für die Wahrscheinlichkeit, in der Hauptgesamtheit zu verbleiben, gilt

$$q_h^{(0)} = 1 - \sum_{j=1}^m q_h^{(j)}.$$

Dann lautet die Rekursionsformel der Deckungsrückstellung wie folgt:

$${}_0V_h = L_h + q_h^{(0)} \cdot v \cdot {}_1V_h^{(0)} + q_h^{(1)} \cdot v \cdot {}_1V_h^{(1)} + \dots + q_h^{(m)} \cdot v \cdot {}_1V_h^{(m)} = L_h + v \cdot \sum_{j=0}^m q_h^{(j)} \cdot {}_1V_h^{(j)},$$

wobei  ${}_1V_h^{(j)}$  die für Person  $h$  ( $h=1, \dots, n$ ) zu bildende Rückstellung am Jahresende nach Ausscheiden aufgrund der Ausscheideursache  $j$  ( $j=1, \dots, m$ ) bzw. Verbleib in der Hauptgesamtheit ( $j=0$ ) und  $v$  den Abzinsungsfaktor bezeichnen. Je nach Status der versicherten Person bezeichnet  $L_h$  bei einem Rentner die zu Jahresbeginn vorschüssig zahlbare Rente und bei einem Beitragszahler die jährlich vorschüssig zahlbare Prämie, während bei einem beitragsfreien Anwärter  $L_h = 0$  ist.

Bezeichne die Zufallsvariable  $S_h$  ( $h=1, \dots, n$ ) für eine Person  $h$  der Hauptgesamtheit die auf den Jahresbeginn diskontierte Rückstellung am Jahresende zzgl.  $L_h$ , d.h.  $S_h$  besitzt die Ausprägungen

$$s_h^{(j)} = v \cdot {}_1V_h^{(j)} + L_h, \quad j = 0, 1, \dots, m,$$

und für die einzelnen Realisationen gelten die Wahrscheinlichkeiten

$$P(S_h = s_h^{(j)}) = q_h^{(j)} \quad h = 1, \dots, n, j = 0, \dots, m$$

Bezeichne

$$S = \sum_{h=1}^n S_h$$

den „Gesamtschaden“, dann ergibt sich als Erwartungswert

$$E(S) = \sum_{h=1}^n E(S_h) = \sum_{h=1}^n \left( \sum_{j=0}^m q_h^{(j)} \cdot (v \cdot {}_1V_h^{(j)} + L_h) \right) = \sum_{h=1}^n \left( L_h + \sum_{j=0}^m q_h^{(j)} \cdot v \cdot {}_1V_h^{(j)} \right) = \sum_{h=1}^n {}_0V_h,$$

d.h. der Erwartungswert von  $S$  entspricht genau der Summe der mit den rechnungsmäßigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten ermittelten Deckungsrückstellung für die betrachtete Hauptgesamtheit.

Soll die Berücksichtigung des Schwankungsrisikos auf Bewertungsebene erfolgen, dann ist nun ein Zuschlag  $X_\alpha$  zu ermitteln, so dass die Wahrscheinlichkeit, dass der „Gesamtschaden“  $S$  die Deckungsrückstellung um mehr als  $X_\alpha$  übersteigt, höchstens  $\alpha$  beträgt. Der Ansatz lautet also:

$$P(S > E(S) + X_\alpha) = P(S - E(S) > X_\alpha) \stackrel{!}{\leq} \alpha$$

Die exakte Verteilung von  $S$  kann als Faltung der Wahrscheinlichkeitsverteilungen der  $S_h$  ermittelt werden. Daneben besteht die Möglichkeit, die Verteilung von  $S$  näherungsweise mittels Approximation durch eine zusammengesetzte Poissonverteilung oder die Normalverteilung zu bestimmen (vgl. [Her], S. 636 ff.).

### Approximation durch die Poissonverteilung

Hierzu wird die (unwesentliche) zusätzliche Annahme getroffen, dass die möglichen Werte für den Aufwand ganzzahlig sind.

Die Rekursionsformel für die Deckungsrückstellung lässt sich auch äquivalent darstellen als Summe der (erwarteten) riskierten Kapitale zzgl. der zu Jahresbeginn vorschüssig zahlbaren Leistung/Prämie und der diskontierten Rückstellung, die sich bei Verbleib in der Hauptgesamtheit ergibt:

$$\begin{aligned} {}_0V_h &= L_h + \left(1 - \sum_{j=1}^m q_h^{(j)}\right) \cdot v \cdot {}_1V_h^{(0)} + q_h^{(1)} \cdot v \cdot {}_1V_h^{(1)} + \dots + q_h^{(m)} \cdot v \cdot {}_1V_h^{(m)} \\ &= L_h + v \cdot {}_1V_h^{(0)} + \sum_{j=1}^m q_h^{(j)} \cdot v \cdot ({}_1V_h^{(j)} - {}_1V_h^{(0)}) \\ &= L_h + v \cdot {}_1V_h^{(0)} + \sum_{j=0}^m q_h^{(j)} \cdot v \cdot ({}_1V_h^{(j)} - {}_1V_h^{(0)}) \end{aligned}$$

Wir betrachten nun als Gesamtschaden die Summe der riskierten Kapitale:

$$\tilde{S} := \sum_{h=1}^n \left( \sum_{j=0}^m v \cdot ({}_1V_h^{(j)} - {}_1V_h^{(0)}) \right) = \sum_{h=1}^n \tilde{S}_h$$

mit

$$\tilde{S}_h := \sum_{j=0}^m v \cdot ({}_1V_h^{(j)} - {}_1V_h^{(0)}).$$

$\tilde{S}_h$  besitzt die Ausprägungen

$$\tilde{s}_h^{(j)} = v \cdot ({}_1V_h^{(j)} - {}_1V_h^{(0)}), \quad j = 0, \dots, m,$$

und für die einzelnen Realisationen gelten die Wahrscheinlichkeiten

$$P(\tilde{S}_h = \tilde{s}_h^{(j)}) = q_h^{(j)} \quad h=1, \dots, n, j=0, \dots, m.$$

Dann ergibt sich als Erwartungswert:

$$\begin{aligned} E(\tilde{S}) &= \sum_{h=1}^n E(\tilde{S}_h) = \sum_{h=1}^n \left( \sum_{j=0}^m q_h^{(j)} \cdot v \cdot ({}_1V_h^{(j)} - {}_1V_h^{(0)}) \right) \\ &= \sum_{h=1}^n ({}_0V_h - L_h - v \cdot {}_1V_h^{(0)}) \\ &= E(S) - \sum_{h=1}^n (L_h + v \cdot {}_1V_h^{(0)}) \end{aligned}$$

$\tilde{S}$  lässt sich durch Übergang vom individuellen auf das kollektive Modell auch darstellen als

$$\tilde{S} = \sum_{h=1}^n \tilde{S}_h = \sum_{i=1}^N Y_i$$

mit

$$\begin{aligned} N &= \text{Anzahl der Personen mit } \tilde{S}_h > 0, \\ Y_i &= \text{Höhe des riskierten Kapitals für die } i\text{-te Person.} \end{aligned}$$

$N, Y_1, \dots, Y_N$  sind unabhängig und  $N$  folgt einer Poissonverteilung mit Parameter

$$\lambda := E(N) = \sum_{h=1}^n P(\tilde{S}_h > 0).$$

Die Verteilung der  $Y_i$  ist gegeben durch

$$P(Y_i = l) = \frac{q_l}{q},$$

wobei  $q = \sum_{k=1}^{\tilde{s}_{\max}} q_k$ ,  $q_k = \sum_{h=1}^n q_{hk}$ ,  $\tilde{s}_{\max} = \max_{h=1, \dots, n} \left( \max_{j=1, \dots, m} \tilde{s}_h^{(j)} \right)$

und  $q_{hk} = \begin{cases} q_h^{(j)}, & \text{falls ein } j=1, \dots, m \text{ existiert mit } k = \tilde{s}_h^{(j)} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}.$

Die Verteilung von  $\tilde{S}$  ist dann näherungsweise gegeben durch

$$P(\tilde{S} = x) = \sum_{k=0}^{\infty} p^{*k}(x) e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}.$$

Der für die Sicherheitswahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$  erforderliche Zuschlag  $X_\alpha$  auf die Deckungsrückstellung kann dann aus der Verteilung von  $\tilde{S}$  ermittelt werden, da  $X_\alpha$  wegen

$$\tilde{S} = S + \sum_{h=1}^n (L_h + v \cdot {}_1V_h^{(0)})$$

die Bedingung

$$\begin{aligned} P(S \leq E(S) + X_\alpha) &= P\left(\tilde{S} \leq E(S) - \sum_{h=1}^n (L_h + v \cdot {}_1V_h^{(0)}) + X_\alpha\right) \\ &= P\left(\tilde{S} \leq \sum_{h=1}^n ({}_0V_h - (L_h + v \cdot {}_1V_h^{(0)})) + X_\alpha\right) \geq 1 - \alpha \end{aligned}$$

erfüllen muss.

### Approximation durch die Normalverteilung

Die Einzelschäden  $S_h$  ( $h=1, \dots, n$ ) sind zwar unabhängig aber nicht identisch verteilt. Aus diesem Grund ist der zentrale Grenzwertsatz nur unter zusätzlichen Voraussetzungen erfüllt. Gilt z. B. die Ljapunoff-Bedingung, so ist der Gesamtschaden asymptotisch normalverteilt mit Erwartungswert  $E(S)$  und Varianz  $\text{Var}(S)$ .

$$\frac{S - E(S)}{\sqrt{\text{Var}(S)}} \sim N(0,1)$$

Der für die Sicherheitswahrscheinlichkeit  $(1 - \alpha)$  erforderliche Zuschlag  $X_\alpha$  kann dann aus der Standard-Normalverteilung ermittelt werden:

$$X_\alpha = u_{1-\alpha} \sqrt{\text{Var}(S)}$$

Hierbei bezeichnet  $u_{1-\alpha}$  das  $(1 - \alpha)$ -Quantil der Standard-Normalverteilung.

## 2.4. Mögliche Vorgehensweisen

Die Berücksichtigung der angesprochenen Risiken kann aktuariell auf unterschiedliche Weise erfolgen. Ziel bei der Vorgehensweise muss es sein, dass - ausgehend von einer vorgegebenen Sicherheitswahrscheinlichkeit - die Risiken insgesamt in ausreichendem Umfang berücksichtigt werden. Sollten die erforderlichen Sicherheiten mit vorhandenen biometrischen Rechnungsgrundlagen für die Pensionskasse oder den Pensionsfonds nicht ausreichen, so kann die erforderliche Sicherheit auf zwei Wegen erreicht werden:

- a) durch Modifikation der einzelnen Ausscheidewahrscheinlichkeiten und der sonstigen biometrischen Größen oder
- b) durch Zuschläge auf der Bewertungsebene, wobei die Bewertung auch auf Grundlage von nicht modifizierten Ausscheidewahrscheinlichkeiten vorgenommen werden kann

Ebenfalls möglich ist die Kombination beider genannter Vorgehensweisen. Welche Vorgehensweise angemessen ist, hängt unter anderem ab von

- a) der Größe des versicherten Kollektivs,
- b) dem Leistungsspektrum,
- c) dem Tarif bzw. dem Pensionsplan,
- d) der von der Pensionskasse bzw. dem Pensionsfonds ausgesprochenen versicherungsförmigen Garantie,
- e) ggf. im Tarif bzw. im Pensionsplan enthaltenen Leistungsvorbehalten und Beitrags- oder Leistungsanpassungsklauseln,
- f) ggf. vom Arbeitgeber ausgesprochenen Garantieerklärungen.

Es obliegt dem zuständigen Aktuar, vorhandene biometrische Rechnungsgrundlagen auf ihre Anwendbarkeit bei der Pensionskasse bzw. dem Pensionsfonds zu prüfen und unter Einbeziehung der genannten Kriterien zu entscheiden, auf welche Weise die für angemessen erachteten Sicherheiten zu gewährleisten sind.

## **2.5. Berücksichtigung von Risiken in aktuellen Tafelwerken**

- Richttafeln 2005 G

Für die Sterblichkeit im Aktiven- und im Rentnerbestand wurde die künftige Veränderung der Sterblichkeiten in einer Kombination von mittel- und langfristigem Trend der Bevölkerungssterblichkeit berücksichtigt. Zuschläge zur Berücksichtigung des Änderungsrisikos sind – dies gilt ganz generell für Sicherheitszuschläge – nicht enthalten.

- DAV 2004 R

### Schwankungsrisiko:

Für die Sterbetafel DAV 2004 R wurde ein altersunabhängiger Schwankungsabschlag von 6,26 % für Männer und 7,22 % für Frauen ermittelt. Dazu wurde das vorgegebene Sicherheitsniveau mit  $1 - \alpha = 95 \%$  für einen Modellbestand von 200.000 Versicherten (je 100.000 Männer und Frauen) vorgegeben. Das Sicherheitsniveau wird auf die Deckungsrückstellung des Musterbestands bezogen, d. h. es beschreibt die Wahrscheinlichkeit, dass die erwartete, durch Tod freiwerdende Deckungsrückstellung im Modellbestand mindestens der unter der reduzierten Rechnungsannahme freiwerdenden Deckungsrückstellung entspricht.

### Irrtumsrisiko:

Abschläge für das Irrtumsrisiko werden von der Tafel DAV 2004 R durch eine feste Komponente in Höhe von 10 % auf die Basistafel angesetzt.

### Gesamteffekt bezogen auf die Basistafel:

Die Abschläge für Irrtumsrisiko und Schwankungsrisiko werden multiplikativ zusammengesetzt. Der Gesamtabschlag auf die Sterblichkeiten 2. Ordnung der Tafel DAV 2004 R (Basistafel) ergibt sich mit 15,6 % (Männer) bzw. 16,5 % (Frauen).

### Änderungsrisiko:

Das auf den Sterblichkeitstrend bezogene Änderungsrisiko wird in der Tafel DAV 2004 R durch zwei Komponenten abgesichert. Die erste Komponente berücksichtigt das Risiko, dass die modellgemäße Trenddämpfung im Zeitablauf nicht eintritt (Modellrisiko), d. h. es wird unterstellt, dass der Starttrend 2. Ordnung über die ganze Projektionsdauer unverändert bleibt. Die zweite Komponente bewertet das Risiko einer zukünftigen temporären weiteren Trendbeschleunigung. Sie wird durch eine altersunabhängige Erhöhung der jährlichen Sterblichkeitsverbesserungen 2. Ordnung um 0,25 % berücksichtigt. Bezogen auf die Deckungsrückstellung des Modellbestands bewirken beide Komponenten eine Erhöhung von jeweils ca. 2 %.

- DAV 1997 I, DAV 1997 TI und DAV 1997 RI

### Schwankungsrisiko:

Das Schwankungsrisiko wird in der Tafel DAV 1997 I durch einen additiven Zuschlag in Höhe von 7,6 % für Männer und 11,3 % für Frauen berücksichtigt. Grundlage für die Berechnung war ein Modellbestand von 200.000 Aktiven (je 100.000 Männer und Frauen), für den das Sicherheitsniveau mit  $1 - \alpha = 95\%$  vorgegeben wurde. Der Unterschied in der Höhe des Sicherheitszuschlages kommt durch die verschiedenen Bestandszusammensetzungen zustande. Die erwarteten Invalidisierungsfälle liegen für Frauen unter der Zahl für die Männer, die Streuung verringert sich aber nicht in gleichem Maße. Die verhältnismäßig größere Schwankungsbreite der Werte der Frauen erfordert einen entsprechend höheren Zuschlag für das Schwankungsrisiko.

Für das Schwankungsrisiko in den Tafeln DAV 1997 TI und DAV 1997 RI ergibt sich für ein Sicherheitsniveau von 95 % für die Anzahl der Todesfälle Invaliden bzw. Anzahl der Reaktivierungen im Modellbestand ein multiplikativer Abschlag von 22 % für Männer und 26 % für Frauen auf die Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung und ein multiplikativer Abschlag von 21 % für Männer und 17 % für Frauen auf die Reaktivierungswahrscheinlichkeiten 2. Ordnung.

### Änderungsrisiko:

Da der subjektive Anteil am Invaliditätsrisiko außerordentlich hoch sein kann, ist eine zuverlässige quantitative Ermittlung eines Zuschlages zur Absicherung für das Änderungsrisiko in der Tafel DAV 1997 I nahezu unmöglich. Deshalb wurde ein pauschaler Zuschlag von 10 % angenommen, der anhand eines Vergleichs der Daten des Zeitraums 1983-1985 mit denjenigen des Zeitraums 1987-1991 hergeleitet wurde.

Da Änderungsaussagen zur Sterblichkeit und Reaktivierung der Invaliden aus den gegebenen Daten nicht zu quantifizieren sind, wird für die Tafel DAV 1997 TI und die Tafel DAV 1997 RI ebenfalls ein pauschaler Änderungsabschlag von 10 % angesetzt.

### Gesamteffekt:

Für die Tafel DAV 1997 I ergeben statistischer Schwankungszuschlag und Zuschlag für das Änderungsrisiko zusammen einen Sicherheitszuschlag von 18,4 % für Männer und 22,4 % für Frauen.

Für die Tafel DAV 1997 TI ergibt sich damit ein multiplikativer Sicherheitsabschlag von 29,8 % für Männer und 33,4 % für Frauen auf die Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung.

Für die Tafel DAV 1997 RI beträgt der Sicherheitsabschlag für das Schwankungs- und Änderungsrisiko 28,9 % für Männer und 25,3 % für Frauen auf die Reaktivierungswahrscheinlichkeiten 2. Ordnung. Diese Abschläge erhöhen sich noch um jeweils 5% für den Fall, dass für die Deckungsrückstellung nach Reaktivierung im Vorhinein keine Reservebildung vorgenommen wurde.

### • DAV 1998 EU

#### Schwankungsrisiko:

Der altersunabhängige Zuschlag für das Schwankungsrisiko bei den Erwerbsunfähigkeitswahrscheinlichkeiten der Tafel DAV 1998 EU unterscheidet sich lediglich um einen multiplikativen Faktor von dem Schwankungszuschlag der Tafel DAV 1997 I (siehe oben) und beträgt 11,0 % für Männer und 16,0 % für Frauen.

#### Irrtums- und Änderungsrisiko:

Bei den Erwerbsunfähigkeitswahrscheinlichkeiten der Tafel DAV 1998 EU wird ein pauschaler Zuschlag für das Änderungs- und Irrtumsrisiko in Höhe von 15 % angesetzt. Von diesem Zuschlag entfallen 10 % auf das Änderungsrisiko und 5 % auf das Irrtumsrisiko.

#### Gesamteffekt:

Der Gesamtsicherheitszuschlag in den Erwerbsunfähigkeitswahrscheinlichkeiten der Tafel DAV 1998 EU wird multiplikativ aus dem Zuschlag für das Änderungs- und Irrtumsrisiko und dem Zuschlag für das Schwankungsrisiko bestimmt. Auf



diese Weise ergibt sich ein Gesamtzuschlag von 28,0 % für Männer und 33,0 % für Frauen.

- DAV 2001 EM und DAV 2001 EM-T

Schwankungsrisiko:

Der Zuschlag für das Schwankungsrisiko in den Tafeln DAV 2001 EM(-T) wird mittels eines Proportionalitätsfaktors aus den Tafeln DAV 1997 I/TI/RI abgeleitet und beträgt bei der Tafel DAV 2001 EM 7,9 % für Männer und 11,4 % für Frauen sowie bei der Tafel DAV 2001 EM-T 11,6 % für Männer und 16,1 % für Frauen.

Irrtumsrisiko:

Im Vergleich zu den Tafeln DAV 1997 I/RI/TI muss bei den Tafeln DAV 2001 EM(-T) aufgrund des gewählten Ansatzes für die Herleitung der Eintrittswahrscheinlichkeiten für die Erwerbsminderung mit einem deutlich höheren Irrtumsrisiko gerechnet werden. Zur Berücksichtigung dieser Unsicherheit wird ein Irrtumszuschlag in Höhe von 10 % angesetzt.

Änderungsrisiko:

Wie bei den Tafeln DAV 1997 I/TI/RI und DAV 1998 EU wird bei den Tafeln DAV 2001 EM(-T) ein pauschaler Änderungszuschlag von 10 % angesetzt.

Gesamteffekt:

Für die Ermittlung des Gesamtzuschlages in den Tafeln DAV 2001 EM(-T) werden die Zuschläge für das Änderungs- und Irrtumsrisiko addiert und mit den Zuschlägen für das Schwankungsrisiko multipliziert. Auf diese Weise ergibt sich bei der Tafel DAV 2001 EM ein Gesamtzuschlag von 29,5 % für Männer und 33,7 % für Frauen sowie bei der Tafel DAV 2001 EM(-T) ein Gesamtzuschlag von 33,9 % für Männer und 39,3 % für Frauen.

- DAV 2008 T

Schwankungsrisiko:

Für den gesamten Modellbestand im Alter von 20 bis 65 Jahren wird ein alters- und geschlechtsunabhängiger Schwankungszuschlag hergeleitet und gefordert, dass die statistischen Schwankungszuschläge ein Sicherheitsniveau von 95 % ergeben. Die Anzahl der inklusive Schwankungszuschlag für den Modellbestand erwarteten Toten soll eine obere Grenze zum Niveau  $1-\alpha$  für die Zufallsvariable der Anzahl der Toten im Modellbestand sein. Mit diesem Vorgehen und den zugrundeliegenden Annahmen ergibt sich ein alters- und geschlechtsunabhängiger Schwankungszuschlag in Höhe von 7,4 %.

#### Irrtumsrisiko:

Der Zuschlag für das Irrtumsrisiko setzt sich aus zwei Komponenten zusammen. Für Parameterschätzunsicherheiten wird ein Zuschlag von 10 %, für das Modellrisiko ein zusätzlicher Zuschlag von 15 % angesetzt.

#### Änderungsrisiko:

Die Tafel DAV 2008 T verzichtet auf den Ansatz eines expliziten Zuschlags für das Änderungsrisiko, da dieses Risiko durch die Nicht-Berücksichtigung der im Zeitablauf tatsächlich abnehmenden Sterblichkeit abgesichert ist.

#### Gesamteffekt:

Die Zuschläge für Irrtumsrisiko und Schwankungsrisiko werden multiplikativ zusammengesetzt. Der alters- und geschlechtsunabhängige Gesamtzuschlag auf die Sterblichkeiten 2. Ordnung der DAV 2008 T ergibt sich zu 34,3 % bzw. – bei Verzicht auf den Zuschlag für das Modellrisiko – zu 18,1 %.

### **3. Überprüfung der biometrischen Rechnungsgrundlagen**

Ob und inwieweit die verwendeten Rechnungsgrundlagen einer Pensionskasse oder eines Pensionsfonds im Laufe der Jahre weiterhin zur Anwendung kommen können, hängt vornehmlich von dem Ergebnis der Risikoanalysen anlässlich der turnusmäßigen versicherungsmathematischen Gutachten ab. Erweisen sich die einzelnen verwendeten Rechnungsgrundlagen längerfristig als nicht mehr angemessen, weil sie keine ausreichenden Sicherheiten mehr enthalten, dann ist ein Übergang auf vorsichtigere Rechnungsgrundlagen unerlässlich. Mit einem sofortigen Übergang verbindet sich mitunter ein erheblicher Auffüllungsbedarf der Deckungsrückstellung mit einer entsprechenden Belastung des jeweiligen Geschäftsjahres und damit entsprechend reduzierter Überschussbeteiligung. Die Aufsichtsbehörde erlaubt in der Regel einen zeitlich gestreckten Übergang im Altbestand (genehmigter Tarif) mit zwischenzeitlich pauschalen Erhöhungen der Deckungsrückstellung. Ein Übergang auf vorsichtigere Rechnungsgrundlagen setzt im Altbestand allerdings ausnahmslos eine Änderung des Technischen Geschäftsplans voraus, die erst nach ihrer aufsichtsbehördlichen Genehmigung umgesetzt werden darf; im Neubestand einer Pensionskasse oder eines Pensionsfonds ist nach § 143 VAG die Anzeige bei der Aufsichtsbehörde erforderlich.

Das versicherungsmathematische Gutachten muss darüber berichten, ob und in welchem Umfang Abweichungen zwischen dem tatsächlichen Verlauf und den verwendeten Rechnungsgrundlagen vorliegen und ob die Rechnungsgrundlagen einer dementsprechenden Anpassung bedürfen (Rundschreiben der BaFin R 2/2018 vom 25.01.2018 für Pensionskassen bzw. R3/2018 vom 25.01.2018 für Pensionsfonds).

Im Allgemeinen kommt der Sterblichkeit der aktiven Bestände nur eine untergeordnete Bedeutung zu, vor allem dann, wenn sich das Todesfallrisiko mit dem Erlebensfallrisiko weitgehend ausgleicht. Großen Einfluss hat dagegen die Entwicklung der Lebenserwartung bei den Rentnerbeständen; hier löst eine Untersterblichkeit unmittelbare Risikoverluste aus.

Ein Risiko besonderer Art ist die Invalidität. Die Erfahrungen bei größeren Versichertenbeständen bestätigen, dass die Invalidisierungsquote in Zeiten einer wirtschaftlichen Rezession – also außerhalb rein biologisch bedingter Kriterien – höher ist als in der Hochkonjunktur. Bei der Überprüfung der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten anhand der tatsächlich eingetretenen Frühpensionierungsfälle ist außerdem zu beachten, dass keine vorzeitigen Alterspensionierungen enthalten sind. Andernfalls ist eine Überprüfung auf Invalidität in diesem Altersbereich nicht möglich.

Sofern bei Erstellung der Unisex-Tafel das Mischungsverhältnis der Geschlechter explizit berücksichtigt wurde, ist auch eine Überprüfung dieser Annahme erforderlich.

Für die biometrischen Risikountersuchungen können z. B. die einzelnen Bestände nach Geschlecht, Geburtsjahren bzw. Altersklassen und ggf. nach der Leistungshöhe aufbereitet werden. Den unter einjährigem Risiko stehenden Untersuchungsbestand erhält man entsprechend der Altersdefinition des verwendeten Tafelwerks beispielsweise aus dem Ausgangsbestand gleichartiger Versicherter zu Beginn des Beobachtungsjahres zuzüglich halbem Zugang und abzüglich halbem Abgang während des Beobachtungsjahres. Zur Ausschaltung zufälliger Risikoschwankungen zieht man regelmäßig auch die Beobachtungswerte früherer Untersuchungsjahre heran. Erst eine solche Zusammenfassung über einen mehrjährigen Zeitraum lässt erkennen, ob und in welchen Untersuchungsbereichen längerfristige Risikoveränderungen erwartet werden müssen und welche Anpassungserfordernisse sich daraus ableiten.

### **3.1. Überprüfung nach Anzahlen**

Das Verhältnis der im Beobachtungsjahr eingetretenen gleichartigen Risikofälle zur Personenzahl im Untersuchungsbestand bestimmt die relative Häufigkeit des untersuchten biometrischen Risikos für das entsprechende Alter/Geschlecht.

### **3.2. Überprüfung nach Leistungshöhe**

Das Verhältnis der im Beobachtungsjahr eingetretenen gleichartigen Risikofälle gewichtet mit der entsprechenden Leistungshöhe zur Personenzahl im Untersuchungsbestand bestimmt die relative Häufigkeit des untersuchten biometrischen Risikos.

Die Überprüfung nach der Leistungshöhe hat im Vergleich zur Überprüfung nach den Anzahlen den Vorteil, dass die sozioökonomischen Selektionseffekte sichtbar werden und dass somit eine entsprechende Anpassung der Rechnungsgrundlagen vorgenommen werden kann.

Bei dieser Methode sind jedoch die besonderen Verhältnisse der Einrichtung zu berücksichtigen. Der Leistungsplan (Limitierung des Beitrags (Höchstbeitrag)/Einheitsbeitrag) bzw. die Zugangsvoraussetzungen (z. B. Öffnung der Pensionskassen erst zu einem späteren Zeitpunkt für Arbeiter bzw. niedrigere Lohngruppen) hat Auswirkung auf die zu beobachtende Leistungshöhe. Eine Auswertung mit Leistungshöhenengewichtung ohne die Berücksichtigung der besonderen Verhältnisse der Einrichtung kann damit die Beurteilung des tatsächlichen Ausscheideverhaltens verzerren.

### **3.3. Überprüfung nach riskiertem Kapital**

Das riskierte Kapital (vgl. 2.3.2) bestimmt sich als Differenz der diskontierten Deckungsrückstellung nach Eintritt des biometrischen Ereignisses (Erwartungswert der Leistungen) und der auf den Beginn des Jahres diskontierten Deckungsrückstellung zu Ende des Geschäftsjahres bei Verbleib in der Hauptgesamtheit. Die Überprüfung erfolgt für jede einzelne Ausscheideursache.

In der Summe über alle biometrischen Ausscheideursachen entspricht das Ergebnis einer Überprüfung nach dem riskierten Kapital dem versicherungstechnischen Risikoergebnis des entsprechenden Geschäftsjahres.

### **3.4. Überprüfung anhand statistischer Testverfahren**

Mithilfe geeigneter statistischer Testverfahren kann beurteilt werden, ob biometrische Rechnungsgrundlagen wie Sterbe- oder Invalidisierungswahrscheinlichkeiten auf einem vorgegebenen Signifikanzniveau für eine Grundgesamtheit als nicht angemessen erscheinen.

Dazu wird die anhand einer Stichprobe ermittelte Anzahl der beobachteten Ausgeschiedenen mit den rechnerisch erwarteten Ausgeschiedenen verglichen. Hierbei ist von Interesse, ob die ermittelten relativen Ausscheidehäufigkeiten der unterstellten Ausscheidetafel widersprechen oder nicht.

Zur Anwendung eines statistischen Testverfahrens ist die Nullhypothese  $H_0$  bzw. die Alternativhypothese  $H_1$  wie folgt zu formulieren:

$H_0$  : Die tatsächlichen Ausscheidewahrscheinlichkeiten und die rechnerisch unterstellten Ausscheidewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung stimmen überein.

$H_1$  : Die tatsächlichen Ausscheidewahrscheinlichkeiten und die rechnerisch unterstellten Ausscheidewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung sind verschieden.

Zur Beurteilung der Qualität eines Tests – und damit der getroffenen Entscheidung – wäre es wünschenswert, die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Prüfgröße (Teststatistik) unter Gültigkeit sowohl der Nullhypothese als auch der Alternative zu kennen. In den allermeisten Fällen lässt sich die Verteilung jedoch nur unter der Gültigkeit der Nullhypothese angeben. Wie bei jeder Entscheidung kann auch bei Anwenden eines statistischen Tests falsch entschieden werden, nämlich für  $H_1$  obwohl  $H_0$  gilt (Fehler 1. Art oder  $\alpha$ -Fehler) oder für  $H_0$  obwohl  $H_1$  gilt (Fehler 2. Art oder  $\beta$ -Fehler). Ist die Wahrscheinlichkeitsverteilung lediglich unter Gültigkeit der Nullhypothese bekannt, so kann nur der Fehler 1. Art quantifiziert werden. Ergibt der Test, dass die Nullhypothese auf dem vorgegebenen Signifikanzniveau nicht abgelehnt werden kann, so kann der Fehler dieser Entscheidung (Fehler 2. Art) nicht quantifiziert werden. Daher gibt es Konstellationen großer Abweichungen der rechnerischen Sterbewahrscheinlichkeiten von den tatsächlichen Sterbewahrscheinlichkeiten, bei denen ein Test nicht anschlägt.

Im Folgenden werden einige Testverfahren, die für Sterblichkeitsuntersuchungen oder allgemein für die Beurteilung biometrischer Rechnungsgrundlagen herangezogen werden können, vorgestellt. Dabei unterscheidet man im Wesentlichen zwei Arten:

- Testverfahren für die Regellosigkeit der Richtung der Abweichungen zwischen beobachteten und erwarteten Werten

- Testverfahren für die betragsmäßige Abweichung zwischen den beobachteten und den erwarteten Werten

Aufgrund der unterschiedlichen Formen der Teststatistiken unterschiedlicher Testverfahren können Abweichungen zwischen den rechnerischen und den tatsächlichen Ausscheidewahrscheinlichkeiten nicht von allen Testverfahren in gleicher Weise erkannt werden. Es ist die Aufgabe des Aktuars, das aus seiner Sicht am besten geeignete Testverfahren auszuwählen.

Für die Darstellung der verschiedenen Teststatistiken werden folgende Bezeichnungen verwendet:

$j = 1, \dots, N$	seien die betrachteten Alter (oder Altersklassen)
$n_j$	sei die Anzahl der Lebenden des Alters $j$
$q_j$	bezeichne die rechnermäßige Ausscheidewahrscheinlichkeit im Alter $j$
$\{Z_{ij}\}_{i=1, \dots, n_j, j=1, \dots, N}$	seien stochastisch unabhängige Zufallsvariablen mit
	$Z_{ij} := \begin{cases} 1, & \text{wenn die } i\text{-te Person des Alters } j \text{ ausscheidet} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
$Z_j := \sum_{i=1}^{n_j} Z_{ij}$	sei die Anzahl der Ausgeschiedenen des Alters $j$
$E_j := n_j \cdot q_j$	sei die Anzahl der rechnermäßig erwarteten Ausgeschiedenen im Alter $j$

### 3.4.1. Der Vorzeichentest

Geht man davon aus, dass die tatsächlichen und die unterstellten Ausscheidewahrscheinlichkeiten übereinstimmen, dann kann man erwarten, dass bei den Differenzen zwischen beobachteten und rechnermäßig erwarteten Ausgeschiedenen gleich viele positive wie negative Vorzeichen auftreten.

Die Teststatistik  $T$  des Vorzeichentests lautet

$$T = \sum_{j=1}^N 1_{\{Z_j > E_j\}},$$

d. h. man zählt die positiven Vorzeichen, die sich bei den Differenzen aus beobachteten und erwarteten Ausgeschiedenen ergeben.

Unter Gültigkeit der Nullhypothese und bei einer hinreichend großen Anzahl erwarteter Ausscheidetfälle ist  $T$  binomialverteilt mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  für jedes Vorzeichen, d. h. es gilt

$$T \sim \text{Bin}\left(N, \frac{1}{2}\right).$$

Zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau  $\alpha$  (Fehler 1. Art) werden dann die kritischen Werte  $n_\alpha$  und  $N-n_\alpha$  bestimmt, so dass die Nullhypothese  $H_0$  abgelehnt wird, wenn der Wert der Teststatistik  $n_\alpha$  unterschreitet bzw.  $N-n_\alpha$  überschreitet. Dabei wird  $n_\alpha$  wegen der Symmetrie der Binomialverteilung bestimmt aus

$$2 \cdot P(T < n_\alpha) = 2 \cdot \sum_{k=0}^{n_\alpha-1} \binom{N}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-k} \leq \alpha.$$

Die Teststatistik ist leicht zu ermitteln und die erforderlichen Schranken stehen in der Regel tabelliert zur Verfügung. Außerdem prüft der Test, ob sich die Abweichungen zwischen beobachteten und erwarteten Werten in beiden Richtungen in einem ausgewogenen Verhältnis befinden.

Da aber lediglich die Anzahl und nicht die Reihenfolge der positiven Vorzeichen in die Berechnung der Testgröße mit einfließen, können systematische Abweichungen in der Regel nicht mittels dieses Tests erkannt werden. So würden beispielsweise zuerst 50 negative, dann 50 positive Vorzeichen nicht zu einer Ablehnung der Nullhypothese führen, obwohl hier offensichtlich zwei verschiedene Ausscheideverteilungen zugrunde liegen. Des Weiteren trifft der Test keine Aussage über die Größe der Abweichungen, d. h. bei 50 positiven von insgesamt 100 Vorzeichen würde der Test selbst dann keine Ablehnung der Nullhypothese bewirken, wenn die Differenzen zwischen beobachteten und erwarteten Ausgeschiedenen sehr groß sind.

### 3.4.2. Der Iterationstest

Wie beim Vorzeichentest bildet man auch beim Iterationstest die Differenzen zwischen den beobachteten und den rechnerisch erwarteten Ausgeschiedenen. Im Anschluss zählt man die aufgetretenen Vorzeichenwechsel der Differenzen und wählt als Teststatistik

$$T = \sum_{j=2}^N 1_{\{\text{Sign}(Z_j - E_j) \neq \text{Sign}(Z_{j-1} - E_{j-1})\}}.$$

Dieser Vorgehensweise liegt folgende Überlegung zugrunde: Wenn man davon ausgeht, dass die tatsächlichen und die unterstellten Ausscheidewahrscheinlichkeiten übereinstimmen, dann kann man folgern, dass das Auftreten der Vorzeichen „+“ und „-“ gleich wahrscheinlich ist.

Unter der Gültigkeit der Nullhypothese und bei einer hinreichend großen Anzahl erwarteter Ausscheidefälle ist  $T$  daher binomialverteilt mit Wahrscheinlichkeit  $\frac{1}{2}$  für jedes Vorzeichen, d. h. es gilt

$$T \sim \text{Bin}\left(N-1, \frac{1}{2}\right).$$

Zu vorgegebenem Signifikanzniveau  $\alpha$  wird der kritische Wert  $n_\alpha$  so bestimmt, dass die Nullhypothese abgelehnt wird, wenn der Wert der Teststatistik  $n_\alpha$  unterschreitet.

Dabei wird  $n_\alpha$  bestimmt aus

$$P(T < n_\alpha) = \sum_{k=0}^{n_\alpha-1} \binom{N-1}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{N-1-k} \leq \alpha$$

Der Iterationstest ist in der Handhabung ähnlich unkompliziert wie der Vorzeichen-test. Bei der Bestimmung des Werts der Teststatistik fließen nicht nur die Richtungen der Abweichungen mit ihrer Anzahl, sondern auch mit ihrer Reihenfolge ein, was eine Verbesserung gegenüber dem Vorzeichentest darstellt.

Aussagen über die Größe der Abweichungen sowie über systematische Abweichungen in bestimmten Altersbereichen können jedoch auch mit diesem Test nicht getroffen werden.

### 3.4.3. Der $\chi^2$ - Test

#### 3.4.3.1. Der anzahlgewichtete $\chi^2$ - Test

Die bisher vorgestellten Testverfahren zur Überprüfung biometrischer Rechnungsgrundlagen gehen von der Richtung der Abweichungen zwischen beobachteten und rechnerisch erwarteten Ausgeschiedenen aus. Beim  $\chi^2$ -Test hingegen steht die Vorstellung im Vordergrund, dass die beobachteten Daten nur dann eine Realisation der erwarteten sein können, wenn die Abweichungen zwischen ihnen nicht zu groß werden. Daher fließt bei der Berechnung des Werts der Teststatistik die Größe der Abweichungen mit ein.

Unter Gültigkeit der Nullhypothese sind die Zufallsvariablen  $Z_{ij}$  bernoulliverteilt mit Parameter  $q_j$ ,  $Z_{ij} \sim \text{Bin}(q_j)$ . Damit ist  $Z_j$  binomialverteilt mit den Parametern  $n_j$  und  $q_j$ ,  $Z_j \sim \text{Bin}(n_j, q_j)$ .

Sei

$$T_j := \frac{Z_j - E(Z_j)}{\sigma(Z_j)} = \frac{Z_j - E_j}{\sqrt{n_j q_j (1 - q_j)}} \quad \text{für } j = 1, \dots, N$$

Dann ist  $T_j$  unter Gültigkeit der Nullhypothese asymptotisch standardnormalverteilt, d. h. es gilt  $T_j \sim N(0,1)$ .

Damit ist die Teststatistik



$$T = \sum_{j=1}^N T_j^2 = \sum_{j=1}^N \frac{(Z_j - E_j)^2}{n_j q_j (1 - q_j)}$$

asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit N Freiheitsgraden.

Zu einem vorgegebenen Signifikanzniveau  $\alpha$  wird nun als kritischer Wert das  $(1-\alpha)$ -Quantil  $\chi_{N;1-\alpha}^2$  der  $\chi^2$ -Verteilung mit N Freiheitsgraden bestimmt und die Nullhypothese abgelehnt, wenn der Wert der Teststatistik dieses überschreitet, d. h. falls  $T > \chi_{N;1-\alpha}^2$  ist.

Bei diesem Test wird also eine möglichst gute Anpassung der beobachteten an die erwarteten Werte gefordert. Im Gegensatz zum Vorzeichen- bzw. Iterationstest bleiben die Richtungen der Abweichungen allerdings unberücksichtigt, da die Abweichungen in der Teststatistik quadriert werden. D. h. Abweichungen, die zwar klein sind, aber überwiegend in eine Richtung gehen, werden vom  $\chi^2$ -Test nicht erkannt. Positiv zu bewerten ist auch hier die relativ leichte Ermittlung der Prüfgröße sowie die Möglichkeit, die Quantile der  $\chi^2$ -Verteilung aus Tabellenwerken ablesen zu können.

#### 3.4.3.2. Der leistungsgewichtete $\chi^2$ - Test

Wir betrachten die Zufallsvariable

$$\tilde{Z}_j := \sum_{i=1}^{n_j} Z_{ij} R_{ij} \quad \text{für } j = 1, \dots, N,$$

wobei  $R_{ij} > 0$  z. B. die Höhe der Anwartschaft oder der Rente der i-ten Person des Alters j bezeichne.  $\tilde{Z}_j$  ist also die Summe der durch Tod wegfallenden Anwartschaft bzw. der wegfallenden Rente der Personen im Alter j.

Unter Gültigkeit der Nullhypothese gilt:

$$E(\tilde{Z}_j) = E\left(\sum_{i=1}^{n_j} Z_{ij} R_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n_j} E(Z_{ij}) R_{ij} = q_j \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}$$

$$\text{Var}(\tilde{Z}_j) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n_j} Z_{ij} R_{ij}\right) = \sum_{i=1}^{n_j} \text{Var}(Z_{ij} R_{ij}) = \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}^2 \text{Var}(Z_{ij}) = q_j (1 - q_j) \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}^2$$

Als Teststatistik definieren wir

$$T = \sum_{j=1}^N \tilde{T}_j^2 \quad \text{mit} \quad \tilde{T}_j = \frac{\tilde{Z}_j - E(\tilde{Z}_j)}{\sigma(\tilde{Z}_j)} = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} Z_{ij} R_{ij} - q_j \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}}{\sqrt{q_j (1 - q_j) \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}^2}}.$$

Unter Gültigkeit der Nullhypothese ist  $\tilde{T}_j$  asymptotisch standardnormalverteilt (siehe weiter unten) und T somit asymptotisch  $\chi^2$ -verteilt mit N Freiheitsgraden.

Zu einem vorgegebenem Signifikanzniveau  $\alpha$  wird nun als kritischer Wert das  $(1-\alpha)$ -Quantil  $\chi^2_{N;1-\alpha}$  der  $\chi^2$ -Verteilung mit N Freiheitsgraden bestimmt und die Nullhypothese abgelehnt, wenn der Wert der Teststatistik dieses überschreitet, d. h. falls  $T > \chi^2_{N;1-\alpha}$  ist.

Da die Zufallsvariablen  $\tilde{Z}_{ij} := Z_{ij} R_{ij}$  für ein festes j zwar unabhängig, aber nicht identisch verteilt sind, ist zur Anwendung der Normalapproximation die Prüfung der Voraussetzungen des Zentralen Grenzwertsatzes von Lindeberg-Feller notwendig. Die Zufallsvariable  $\tilde{T}_j$  ist demnach dann asymptotisch standardnormalverteilt, wenn die so genannte Lindeberg-Bedingung gilt. Hinreichend hierfür ist die Erfüllung der Ljapunow-Bedingung:

$$\exists \delta > 0 \quad \frac{1}{s_{n_j}^{2+\delta}} \sum_{i=1}^{n_j} E \left| \tilde{Z}_{ij} - E(\tilde{Z}_{ij}) \right|^{2+\delta} \xrightarrow{(n_j \rightarrow \infty)} 0,$$

wobei  $s_{n_j}^2 := \sum_{i=1}^{n_j} \text{Var}(\tilde{Z}_{ij}) = q_j(1-q_j) \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}^2$

Ohne Einschränkung kann für alle  $\tilde{Z}_{ij}$  angenommen werden, dass die Momente 4. Ordnung existieren und durch eine Obergrenze  $M_j < \infty$  beschränkt sind. Ferner kann angenommen werden, dass die Varianzen der  $\tilde{Z}_{ij}$  nach unten durch

$c_j := q_j(1-q_j) \left( \min_{i=1, \dots, n_j} R_{ij} \right)^2 > 0$  beschränkt sind. Dann gilt für  $\delta = 2$ :

$$\begin{aligned} \frac{1}{s_{n_j}^4} \sum_{i=1}^{n_j} E \left( \tilde{Z}_{ij} - E(\tilde{Z}_{ij}) \right)^4 &\leq \frac{1}{s_{n_j}^4} n_j M_j \\ &= \frac{n_j M_j}{q_j^2 (1-q_j)^2 \left( \sum_{i=1}^{n_j} R_{ij}^2 \right)^2} \\ &\leq \frac{n_j M_j}{q_j^2 (1-q_j)^2 n_j^2 \left( \min_{i=1, \dots, n_j} R_{ij} \right)^4} \\ &= \frac{M_j}{c_j^2 n_j} \xrightarrow{(n_j \rightarrow \infty)} 0 \end{aligned}$$

#### 3.4.4. Der Poisson-Test

Unter Gültigkeit der Nullhypothese sind die Zufallsvariablen  $Z_j$  näherungsweise poissonverteilt mit Parameter  $E_j = n_j q_j$ , d. h. für Erwartungswert und Varianz von  $Z_j$  ergibt sich  $E(Z_j) = \text{Var}(Z_j) = E_j$ .

Als Teststatistik betrachtet man die Summe aller Ausgeschiedenen:

$$T = \sum_{j=1}^N Z_j$$

Damit ist  $T$  unter Gültigkeit der Nullhypothese ebenfalls poissonverteilt mit Para-

meter  $\lambda = \sum_{j=1}^N E_j = \sum_{j=1}^N n_j q_j$ ,  $T \sim \text{Pois}(\lambda)$ .

Bezeichne  $F$  die Verteilungsfunktion von  $T$  bzw.  $F^{-1}$  die Inverse, dann wird die Nullhypothese bei vorgegebenem Signifikanzniveau  $\alpha$  abgelehnt, falls

$$T < F^{-1}\left(\frac{\alpha}{2}\right) \text{ oder } T > F^{-1}\left(1 - \frac{\alpha}{2}\right).$$

Die Vorteile des Poisson-Tests liegen in der einfachen Bestimmung des Werts der Teststatistik sowie des kritischen Werts. Der Test prüft über alle Alter insgesamt, ob die Anzahl der Ausgeschiedenen signifikant von der bei rechnermäßigem Verlauf erwarteten Anzahl der Ausgeschiedenen abweicht. Ob sich die Anzahl der Ausgeschiedenen je Alter rechnermäßig verhält, kann jedoch mittels dieses Tests nicht geprüft werden.

#### 4. Modifikation von Rechnungsgrundlagen am Beispiel der Richttafeln 2005 G

Wird im Rahmen der Überprüfung der verwendeten Rechnungsgrundlagen festgestellt, dass eine Modifikation der biometrischen Rechnungsgrundlagen notwendig ist, so müssen bei der Modifikation die inneren Zusammenhänge in den verwendeten Rechnungsgrundlagen beachtet werden. Die Modifikationen sollten dabei zunächst auf Basis der Tafel 2. Ordnung vorgenommen werden. Erst danach sollte durch Verwendung entsprechender Sicherheitszu- oder -abschläge der Übergang auf die Tafel 1. Ordnung erfolgen.

Eine Überprüfung der Richttafeln 2005 G wird in der Regel anhand der zum Überprüfungszeitpunkt gültigen Jahrestafel erfolgen. Bei einer Modifikation empfiehlt es sich in zwei Schritten vorzugehen:

1. Modifikation der betrachteten Jahrestafel
2. Bestimmung von neuen Generationentafeln aus der modifizierten Jahrestafel

Als zu modifizierende Jahrestafel kommt sowohl die Basistafel der Richttafeln 2005 G (d.h. die Jahrestafel des Jahres 2005) als auch die für das Beobachtungsjahr gültige Jahrestafel in Betracht. Beide Ansätze führen aufgrund des multiplikativen Ansatzes der Projektivität zu sehr ähnlichen und sich nicht signifikant unterscheidenden Ergebnissen; Unterschiede entstehen nur aufgrund der Umrechnungen von abhängigen in unabhängige Wahrscheinlichkeiten und umgekehrt.

##### 4.1. Modifikation der Jahrestafel

Bei der Modifikation von Ausscheidewahrscheinlichkeiten in der Jahrestafel muss folgender fundamentaler Zusammenhang zwischen der Aktiven-, Invaliden- und Gesamtbestandssterblichkeit sowie der Invalidisierungswahrscheinlichkeit beachtet werden:

$$q_x^g = q_x^i - \frac{l_x^a}{l_x^g} \left( q_x^i - q_x^{aa} - i_x \frac{\frac{1}{2} q_x^i}{1 - \frac{1}{2} q_x^i} \right)$$

Eine isolierte Modifikation von Ausscheidewahrscheinlichkeiten im Aktivenbestand ist aufgrund dieser sogenannten 1. Konsistenzgleichung mathematisch nicht sinnvoll.

Sollte bei der Überprüfung der Rechnungsgrundlagen nur bei einer Ausscheidewahrscheinlichkeit eine signifikante Abweichung der tatsächlichen Häufigkeiten von den rechnungsmäßigen Häufigkeiten nachgewiesen werden können, so muss aufgrund der 1. Konsistenzgleichung dennoch mindestens eine weitere Ausscheidewahrscheinlichkeit der Jahrestafel angepasst werden.

Die von einer Modifikation betroffenen Ausscheidewahrscheinlichkeiten sollten auch dann neu ermittelt werden, wenn sie nicht in die Kalkulation der Pensionskasse oder des Pensionsfonds eingehen, da grundsätzlich alle durch eine Modifikation der Rechnungsgrundlagen veränderten Ausscheidewahrscheinlichkeiten nach der Modifikation überprüft und beurteilt werden sollten.

Modifikationen können entweder auf die abhängigen oder auf die unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten angewandt werden (im Sinne von Ziff. 2.2. [Heu]). Im Folgenden soll das Vorgehen für eine konsistente Modifikation auf Basis der abhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten an zwei in der Praxis häufig vorkommenden Fällen beschrieben werden. Für eine Darstellung des Vorgehens zur Modifikation der unabhängigen Ausscheidewahrscheinlichkeiten siehe [Heu3].

#### 4.1.1. Modifikation der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten

Ein in der Praxis häufig vorkommender Anwendungsfall für die Modifikation von Rechnungsgrundlagen ist, dass die beobachtete Anzahl an Invalidisierungsfällen niedriger ist als die gemäß der Richttafeln 2005 G erwartete Anzahl.

Da die Ursachen für veränderte Invalidisierungswahrscheinlichkeiten Auswirkungen auf die Aktiven- und Invalidensterblichkeit haben können, ist es in einem solchen Fall empfehlenswert, auch die Anzahl der Aktiven- und Invalidentodesfälle auf signifikante Abweichungen hin zu untersuchen.

Sollten (z. B. aufgrund eines nicht ausreichenden Datenmaterials) keine signifikanten Abweichungen bei den Sterbewahrscheinlichkeiten feststellbar sein, so ist ein mögliches Vorgehen, zuerst die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten an die festgestellten Verhältnisse anzupassen und dann die Aktivensterblichkeit in der Jahrestafel wie folgt aus der 1. Konsistenzgleichung (vgl. 4.1) neu zu bestimmen:

$${}^{\text{mod}}q_x^{\text{aa}} = \frac{l_x^g}{{}^{\text{mod}}l_x^a} (q_x^g - q_x^i) + q_x^i - {}^{\text{mod}}i_x \frac{\frac{1}{2}q_x^i}{1 - \frac{1}{2}q_x^i}$$

Die  ${}^{\text{mod}}l_x^a$  sind dabei auf Grundlage der  ${}^{\text{mod}}i_x$  und  ${}^{\text{mod}}q_x^{\text{aa}}$  neu zu bestimmen.

#### 4.1.2. Modifikation der Rentnersterblichkeit

Ein weiterer Anwendungsfall ist, dass für die Altersrentner eine Abweichung der im Bestand beobachteten Sterbehäufigkeiten von den rechnungsmäßigen Häufigkeiten festgestellt wird. Wird eine solche Abweichung festgestellt, so kann dies dadurch berücksichtigt werden, dass die Rentnersterblichkeit ab einem Alter  $z$  (z. B. Alter 65) auf einen Prozentsatz  $c_x$  der ursprünglichen Wahrscheinlichkeiten reduziert werden. Es soll also gelten:

$${}^{\text{mod}}q_x^r = c_x q_x^r \text{ für } x \geq z$$

Während die Rentnersterblichkeit ab dem 75. Lebensjahr unmittelbar angepasst werden kann, ist für die Rentnersterblichkeit vor dem 75. Lebensjahr zu beachten,

dass diese in den Richttafeln 2005 G gleich der Gesamtbestandssterblichkeit gesetzt wurde (siehe [Heu] Ziffer 3.2.1).

Ein pragmatischer Ansatz zur Modifikation der Rentnersterblichkeit ist, dass der beschriebene Zusammenhang zwischen Rentnersterblichkeit und Gesamtbestandssterblichkeit bei der Modifikation der Rechnungsgrundlagen nicht mehr berücksichtigt wird. Dann kann die Rentnersterblichkeit auch im Altersbereich  $z \leq x \leq 74$  unmittelbar gemäß

$${}^{\text{mod}}q_x^r = c_x q_x^r$$

angepasst werden. Konsequenterweise wird in diesem Fall die Rentnersterblichkeit der Generationentafeln im Altersbereich  $z \leq x \leq 74$  ebenfalls auf Grundlage der Projektivität der Richttafeln 2005 G für die Rentnersterblichkeit ab Alter 75 bestimmt werden.

Als problematisch an einem solchen Vorgehen könnte empfunden werden, dass schon bei  $c_x = 100\%$  Abweichungen zu den unmodifizierten Richttafeln auftreten. Um dies zu vermeiden kann zur Reduzierung der Rentnersterblichkeit im Altersbereich  $z \leq x \leq 74$  auf den gewünschten Prozentsatz  $c_x$  der ursprünglichen Werte auch die Gesamtbestandssterblichkeit entsprechend modifiziert werden. Es muss also gelten:

$${}^{\text{mod}}q_x^g = c_x q_x^g \text{ für } z \leq x \leq 74$$

Um dies zu erreichen, müssen weitere Annahmen zur Modifikation der Aktiven- und Invalidensterblichkeit sowie der Invalidisierungswahrscheinlichkeit getroffen werden.

Ein mögliches Vorgehen hierbei ist, dass die Aktiven- und Invalidensterblichkeit im Altersbereich  $z$  bis 74 auf den gleichen Prozentsatz  $c_x$  angepasst werden, auf den die Rentnersterblichkeit in diesem Altersbereich modifiziert werden soll. Man setzt also:

$${}^{\text{mod}}q_x^{aa} = c_x q_x^{aa} \text{ für } z \leq x \leq 74$$

und

$${}^{\text{mod}}q_x^i = c_x q_x^i \text{ für } z \leq x \leq 74$$

Mittels der 1. Konsistenzgleichung (vgl. 4.1) wird dann die Invalidisierungswahrscheinlichkeit für  $z \leq x \leq 74$  wie folgt neu bestimmt:

$${}^{\text{mod}}i_x = \frac{1 - \frac{1}{2} {}^{\text{mod}}q_x^i}{\frac{1}{2} q_x^i} \left( \frac{{}^{\text{mod}}l_x^g}{{}^{\text{mod}}l_x^a} (q_x^g - q_x^i) + q_x^i - q_x^{aa} \right)$$

Die  ${}^{\text{mod}}l_x^a$  und  ${}^{\text{mod}}l_x^g$  sind dabei auf Grundlage der  ${}^{\text{mod}}i_x$ ,  ${}^{\text{mod}}q_x^{aa}$  und  ${}^{\text{mod}}q_x^g$  neu zu berechnen.

Eine Modifikation der Rentnersterblichkeit ab einem festen Alter  $z$  nach diesem Verfahren führt allerdings dazu, dass bei der Aktiven-, Invaliden- und Gesamtbestandssterblichkeit ein Sprung im Alter  $z$  entsteht. Aus diesem Grund ist es empfehlenswert, die Aktiven- und Invalidensterblichkeit vor dem gewählten Alter  $z$  daraufhin zu untersuchen, ob auch hier eine Anpassung notwendig ist.

Sollte (z. B. aufgrund eines nicht ausreichenden Datenmaterials) keine signifikante Abweichung bei der Aktiven- und Invalidensterblichkeit feststellbar sein, so kann der entstehende Sprung hilfsweise dadurch abgemildert werden, dass die Aktiven-, Invaliden- und Gesamtbestandssterblichkeit in einem Übergangszeitraum (von z. B. 5 Jahren) schrittweise auf den gewünschten Prozentsatz  $c_z$  im Alter  $z$  reduziert werden, d. h. im ersten Jahr des  $n$ -jährigen Übergangszeitraums erfolgt eine Reduzierung der Sterbewahrscheinlichkeiten um  $\frac{1}{n}(1-c_z)$ , im zweiten Jahr um  $\frac{2}{n}(1-c_z)$  usw. Die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten im Übergangszeitraum werden in diesem Fall wie für den Altersbereich  $z$  bis 74 dargestellt neu berechnet.

#### **4.2. Bestimmung von neuen Generationentafeln aus der modifizierten Jahrestafel**

Aus der modifizierten Jahrestafel können mittels der Trendfunktionen der Richttafeln (siehe 3.2 [Heu]) neue Generationentafeln erzeugt werden.

Eine Modifikation der Projektivität der Richttafeln 2005 G ist im Allgemeinen nicht zu empfehlen, da die zur Verfügung stehenden statistischen Daten in der Regel nicht ausreichend sind, um eine Anpassung der Trendfunktionen zu rechtfertigen.

Insofern empfiehlt es sich, die in der Ausgangstafel verwendeten Trendfunktionen auch im Falle einer Modifikation der Jahrestafel unmodifiziert zu verwenden.

Bei der Ermittlung der Aktivensterblichkeit der jeweiligen Generationentafel aus der modifizierten Jahrestafel ist zu beachten, dass die Projektivität auf die von der Invalidisierungswahrscheinlichkeit unabhängige Aktivensterblichkeit anzuwenden ist.

Aus diesem Grund müssen die abhängigen Wahrscheinlichkeiten  $q_x^{aa}$  und  $i_x$  der modifizierten Jahrestafel vor einer Berücksichtigung der Projektivität gemäß

$${}^*q_x^{aa} = \frac{1}{2}(2 + q_x^{aa} - i_x) - \sqrt{\left(\frac{1}{2}(2 + q_x^{aa} - i_x)\right)^2 - 2q_x^{aa}}$$

und

$${}^*i_x = \frac{i_x}{1 - \frac{1}{2} {}^*q_x^{aa}}$$

in unabhängige Wahrscheinlichkeiten umgewandelt werden.

Nach Berücksichtigung des Trends auf die unabhängige Aktivensterblichkeit  ${}^*q_{1x}^{aa}$  sind die resultierenden Wahrscheinlichkeiten  ${}_Gq_x^{aa}$  und  ${}_Gi_x$  der Generationentafel des Geburtsjahrgangs G wieder in abhängige Wahrscheinlichkeiten umzuwandeln gemäß:

$${}_Gq_x^{aa} = {}^*q_x^{aa} \left( 1 - \frac{1}{2} {}^*i_x \right)$$

und

$${}_Gi_x = {}^*i_x \left( 1 - \frac{1}{2} {}_Gq_x^{aa} \right)$$

Damit hat eine Modifikation der Invalidisierungswahrscheinlichkeiten in der Jahrestafel mittelbar auch eine Auswirkung auf die Aktivensterblichkeit der modifizierten Generationentafeln zur Folge.



## 5. Unisex-Rechnungsgrundlagen

In der betrieblichen Altersversorgung ist die Zusage von Unisex-Leistungen traditionell stark verbreitet. Ausgelöst durch die Unisex-Entscheidung des EuGH vom 1.3.2011 („Test-Achats-Urteil“), das sich formal nur auf private Versicherungsverträge bezieht, ist eine weiter zunehmende Tendenz zu Unisex-Tarifen zu erkennen. Die Leistungen sollen in sämtlichen Aspekten, also z. B. auch in Nebenleistungen wie dem Übertragungswert bei Portabilität oder bei Abfindungen/Kapitalauszahlungen sowie im Versorgungsausgleich unabhängig vom Geschlecht sein. Falls Unisex-Rechnungsgrundlagen verwendet werden sollen, stellt sich die Frage, wie aus den bestehenden geschlechtsspezifischen biometrischen Rechnungsgrundlagen Unisex-Rechnungsgrundlagen abgeleitet werden können. Es ist zu beachten, dass sich der Geschlechtermix je nach Teilbestand unterscheiden kann. So ist z. B. im Hinterbliebenenbestand ein deutlich größerer Frauenanteil zu erwarten als im Anwärterbestand und im Bestand der Alters- und Invalidenrentner. Ebenso ist zu berücksichtigen, dass sich aufgrund des Versorgungsausgleichs signifikante Veränderungen des Geschlechtermixes ergeben können.

Der erwartete Geschlechtermix wird damit zu einem zusätzlichen Bestandteil der biometrischen Rechnungsgrundlagen, der hinreichend vorsichtig zu berücksichtigen ist. Je nach Ausmaß über die (Un-)Sicherheit bezüglich des künftigen Geschlechtermixes können dabei beispielsweise der Ansatz der „Worst-Case-Biometrie“ oder der Ansatz „Biometrie nach Mischungsverhältnis“ gewählt werden. Diese Verfahren werden in den folgenden Abschnitten näher erläutert. Weitere methodische Hinweise sind auch in [DAV2013] zu finden.

### 5.1. Worst-Case-Biometrie

Wenn die geschlechtsunabhängige Kalkulation von Rechnungsgrundlagen nicht dem Prinzip einer besten Schätzung<sup>6</sup> genügen muss, sondern implizite Sicherheiten erwünscht sind, so bietet sich eine Ableitung aus vorhandenen geschlechtsspezifischen biometrischen Rechnungsgrundlagen nach dem Prinzip der größtmöglichen Vorsicht je Ausscheideursache an. In einer solchen Kalkulation wird jede Ausscheidewahrscheinlichkeit geschlechtseinheitlich entweder mit dem für Männer oder mit dem für Frauen maßgeblichen Ausgangswert angesetzt, je nachdem, welcher Wert unter den gegebenen Umständen vorsichtiger ist. Dabei ist natürlich der Zusammenhang zwischen den einzelnen Ausscheideursachen nach der 1. Konsistenzgleichung (vgl. 4.1) zu beachten.

Beispiel: Bei einer Zusage auf lebenslange Invaliden- und Altersrente in fester Höhe und einer bestehenden Biometrie

Invalidisierungswahrscheinlichkeit	$i_x(z), i_y(z)$
Sterblichkeit für den Aktivenbestand	$q_x^{aa}(z), q_y^{aa}(z)$

---

<sup>6</sup> vgl. Abschnitt 6. Best Estimate

Sterblichkeit für den Invalidenbestand	$q_x^i(z), q_y^i(z)$
Sterblichkeit für den Gesamtbestand	$q_x^q(z), q_y^q(z)$
Sterblichkeit für den Rentenbestand	$q_x^r(z), q_y^r(z)$

ergäbe sich eine Unisex-Zielbiometrie beispielsweise wie folgt:

$$i(z) = \max(i_x(z), i_y(z))$$

$$q^g(z) = \min(q_x^g(z), q_y^g(z))$$

$$q^i(z) = \min(q_x^i(z), q_y^i(z))$$

$$q^r(z) = \min(q_x^r(z), q_y^r(z))$$

und Ableitung von  $q^{aa}$  nach der 1. Konsistenzgleichung (vgl. Modifikation der Jahrestafel).

Soweit die Ausgangswahrscheinlichkeiten hinsichtlich Sterblichkeit und Invalidität für Männer höher sind als für Frauen, bedeutet dies also, dass für alle versicherten Personen die Invalidität der Männer und die Sterblichkeit der Frauen unterstellt wird. Dies führt zu einer geschlechtseinheitlichen Kalkulation und Bewertung der Leistungen mit impliziten Sicherheiten.

Auf gleiche Weise kann mit weiteren möglichen biometrischen Größen wie Witwen-/Witwersterblichkeit, der Verheiraturwahrscheinlichkeit im Todesfall sowie dem erwarteten Alter des hinterbliebenen Ehegatten verfahren werden.

Im Einzelfall mag die Frage, ob eine höhere oder niedrigere Ausscheidewahrscheinlichkeit zu einem vorsichtigeren Kalkulationsansatz führt, nicht immer offenkundig zu beantworten sein. Dies gilt im vorgenannten Beispiel etwa bei Einschluss einer Anwartschaft auf 60 % Hinterbliebenenleistung bei Tod als Aktiver oder Altersrentner. In diesem Fall wird die Sterblichkeit für junge Aktive wegen des Anfalls von Hinterbliebenenrenten zu Verlusten führen, für ältere Aktive wegen des Wegfalls der Altersrentenanwartschaft dagegen zu Gewinnen. Hier könnte ein Grenzalter  $Z_0$  bestimmt werden, so dass für Alter  $Z < Z_0$  für die Aktivensterblichkeit  $q^{aa}$  (bzw. – je nach Bestimmungsmethode – für die Gesamtbestandssterblichkeit  $q^g$ ) gilt:

$$q^{aa}(z) = \max(q_x^{aa}(z), q_y^{aa}(z)) \quad \text{für } z < Z_0$$

$$q^{aa}(z) = \min(q_x^{aa}(z), q_y^{aa}(z)) \quad \text{für } z \geq Z_0$$

Eine abgemilderte Variante der Worst-Case-Biometrie besteht darin, den Vergleich der geschlechtsbezogenen Größen nicht auf Ebene der Ausscheideursachen, sondern auf Ebene der Barwerte durchzuführen. Hierbei wird der Barwert sowohl nach

der Biometrie für Männer als auch nach der Biometrie für Frauen bestimmt und der vorsichtiger Wert angesetzt.

Die durch den Ansatz einer Worst-Case-Biometrie gewonnene Sicherheit lässt sich im Bestand durch Vergleich der so ermittelten Deckungsrückstellung mit einer auf Basis der geschlechtsspezifischen Ausgangstafeln kalkulierten Deckungsrückstellung messen.

## **5.2. Biometrie nach Mischungsverhältnis**

Zunächst ist für den zu versichernden Bestand die erwartete Aufteilung der zu versichernden Leistungen auf die Geschlechter zu ermitteln (Geschlechtermix 2. Ordnung). Dabei ist ggf. zu berücksichtigen, ob und in welchem Ausmaß mit Selektionseffekten zu rechnen ist. Dies ist z. B. dann nicht der Fall, wenn es sich um eine vom Arbeitgeber finanzierte obligatorische Altersversorgung handelt.

Auf Grund des Änderungs- und Irrtumsrisikos ist der Geschlechtermix 2. Ordnung mit zusätzlichen Sicherheiten zu modifizieren. Als Maßstab zur Beurteilung, in welcher Richtung der Geschlechtermix verändert werden soll, sind geschlechtsspezifische Leistungsbarwerte für Anwärter heranzuziehen. Das Geschlecht mit höheren Leistungsbarwerten ist stärker zu gewichten. Mit der Modifikation erhält man den Geschlechtermix 1. Ordnung.

Bei einem gegebenen Geschlechtermix 1. Ordnung in einem Anfangsbestand ändert sich die Geschlechterzusammensetzung bei Alterung des Bestandes durch die unterschiedlichen geschlechtsspezifischen Ausscheidewahrscheinlichkeiten. Die materiellen Auswirkungen sind auf Grund des geringen absoluten Niveaus der Ausscheidewahrscheinlichkeiten jedoch bis zum Pensionsalter so gering, dass auf eine Berücksichtigung der unterschiedlichen Entwicklung verzichtet werden kann (vgl. [Her2012]). In dem Altersbereich bis zum Beginn der Altersrente können die Unisex-Rechnungsgrundlagen für die Invalidisierungswahrscheinlichkeit, Aktiven- und Invalidenrentnersterblichkeit daher aus den geschlechtsspezifischen Werten durch Gewichtung mit dem festen Geschlechtermix 1. Ordnung gewonnen werden. Die Sterblichkeit im Gesamtbestand ist dann gemäß der 1. Konsistenzgleichung (vgl. 4.1) zu ermitteln.

Um den Geschlechtermix im Anfangsbestand der Altersrentner festzulegen, wird zunächst ermittelt, welcher Geschlechtermix sich für das Pensionsalter ergibt, wenn der Anfangsbestand der Anwärter gemäß den geschlechtsspezifischen Ausscheidewahrscheinlichkeiten abgewickelt wird. Dieser Wert wird von dem ursprünglich verwendeten Geschlechtermix 1. Ordnung nur geringfügig abweichen. Er sollte für die Geschlechteraufteilung im Anfangsbestand der Altersrentner verwendet werden, wenn die Abweichung zu erhöhten Sicherheiten führt.

Beispiel: Wenn die zugesagten Leistungen bei geschlechtsspezifischer Kalkulation für Frauen zu einem höheren Leistungsbarwert führen, als Geschlechtermix 1. Ordnung ein jeweils hälftiger Anteil beider Geschlechter angenommen wird und

die Entwicklung des Anwärterbestands zu einer Verschiebung des Frauenanteils auf 52 % führt, ist im Bestand der Altersrentner von einem Frauenanteil von 52 % auszugehen. Ist hingegen der Leistungsbarwert für Männer höher, kann auch für den Altersrentnerbestand der ursprüngliche Geschlechtermix 1. Ordnung angesetzt werden. Aus der Entwicklung der Teilbestände je Geschlecht gemäß den geschlechtsspezifischen Sterbewahrscheinlichkeiten wird dann die Sterbewahrscheinlichkeit im Gesamtbestand der Altersrentner abgeleitet. Die höhere Sterblichkeit der Männer führt dann zu einem sinkenden Männeranteil und einer Annäherung der Unisex-Sterblichkeit an die Sterblichkeit der Frauen.

In analoger Weise ist der Geschlechtermix für den Bestand der Hinterbliebenenrentner zu ermitteln. Der Geschlechtermix ist ein Bestandteil der Unisex-Rechnungsgrundlagen und deshalb ebenfalls zu überprüfen.

## 6. Best Estimate

Werden von dem Pensionsfonds bzw. der Pensionskasse keine versicherungsförmigen Garantien ausgesprochen, sind für die Bewertung der Verpflichtung (für die Bilanzierung oder zur Ermittlung des Kapitaldeckungsgrades) biometrische Rechnungsgrundlagen auf Basis eines besten Schätzwertes im Sinne eines Erwartungswertes („Best Estimate“) heranzuziehen (vgl. § 24 PFAV). Sicherheiten sind nicht zulässig mit Ausnahme eines möglichen Abschlags auf den Rechnungszins gemäß §§ 29, 37 PFAV. Dies bezieht sich sowohl auf die Ausscheidewahrscheinlichkeiten und andere Maßzahlen einer Basistafel als auch auf die Berücksichtigung von Trends. Dabei ist die „beste Schätzung“ immer auf den zu bewertenden Bestand bezogen, der im Vergleich zu allgemein anerkannten biometrischen Rechnungsgrundlagen Besonderheiten enthalten kann, die bei dem besten Schätzwert für den konkret vorliegenden Bestand zu berücksichtigen sind. Im Bereich der betrieblichen Altersversorgung kann es beispielsweise bei der Sterblichkeit einkommensabhängige oder branchenspezifische Abweichungen geben. Auf mögliche unternehmensspezifische Gegebenheiten wird in [DAV2014] in dem Abschnitt 3 hingewiesen.

Für eine beste Schätzung der biometrischen Rechnungsgrundlagen kommen dann die in Abschnitt 2. *Berücksichtigung von Risiken* dieses Hinweises dargestellten Zu- bzw. Abschläge bei den Ausscheidewahrscheinlichkeiten nicht in Betracht. Bei der Überprüfung der Rechnungsgrundlagen ist abweichend von Abschnitt 3 die Angemessenheit nicht anhand ausreichender enthaltener Sicherheiten zu bewerten. Die Rechnungsgrundlagen für Tarife ohne versicherungsförmige Garantien gelten bspw. dann als nicht mehr angemessen, wenn bei der Überprüfung regelmäßige und dauerhafte Abweichungen festgestellt werden. Auch die in Abschnitt 5.1. *Worst-Case-Biometrie* vorgestellte Vorgehensweise entspricht nicht einer besten Schätzung, bei Verwendung eines Geschlechtermixes gemäß Abschnitt 5.2 ist auf Sicherheiten zu verzichten.

## Literaturverzeichnis

- [AktuarV] Verordnung über die versicherungsmathematische Bestätigung, den Erläuterungsbericht und den Angemessenheitsbericht des Verantwortlichen Aktuars (Aktuarverordnung - AktuarV) vom 18.4.2016(BGBl. I S. 776)
- [Alb] Albrecht, P. / Schwake, E., Risiko, Versicherungstechnisches, in: HdV 1988, S. 651 ff.
- [BaFin1] Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht: Rundschreiben 9/2004 (VA), Anordnung betreffend die nach dem 31. Dezember 2004 abgeschlossenen Rentenversicherungsverträge  
<https://www.bafin.de/dok/7866742>
- [BaFin2] Bundesanstalt für Finanzdienstleistungsaufsicht: Auslegungsentcheidung zur Berücksichtigung des Trends zur Erhöhung der Lebenserwartung bei neuen Tarifen von regulierten Pensionskassen vom 04.10.2016.  
<https://www.bafin.de/dok/8376952>
- [BAV] Bundesaufsichtsamt für das Versicherungswesen: Biometrische Rechnungsgrundlagen bei Pensionskassen. VerBAV 8 (1998), S. 159-160
- [BRT] Heubeck, K.; Herrmann, R.: Sterbetafeln für Selbständige, Transactions of the 26th International Congress of Actuaries, Birmingham 1998, Volume 6, S. 295-316
- [DAV2013] DAV Fachgrundsatz Unisex-Reservierung in der Lebensversicherung vor dem Hintergrund des EuGH-Urteils, Hinweis vom 6. März 2013
- [DAV2014] DAV Fachgrundsatz Der Best Estimate für Biometrische Rechnungsgrundlagen in der Lebensversicherung, Hinweis vom 18.9.2014
- [DeckRV] Verordnung über Rechnungsgrundlagen für die Deckungsrückstellungen (Deckungsrückstellungsverordnung - DeckRV) vom 6. Mai 1996, Bundesgesetzblatt Jahrgang 1996 Teil I Nr. 25, S. 670-671
- [EM2001] Herleitung von Rechnungsgrundlagen für die Erwerbsminderung DAV 2001 EM DAV 2001 EM-T
- [EU98] Herleitung von Rechnungsgrundlagen für die Erwerbsunfähigkeitsversicherung DAV 1998 EU. DAV-Mitteilung Nr. 14 (1999)
- [Far] Farny, Dieter, Versicherungsbetriebslehre, 4. Auflage 2006, S. 83 ff
- [Ger] Gerber, U.: Lebensversicherungsmathematik, 2. Auflage, Berlin 1986

- [Her] Herrmann, R.: Value-at-Risk, Tail Value-at-Risk und Schadenverteilung in der Personenversicherung. Band XXVII, Heft 4 (2006), S. 629-645
- [Her2012] Herrmann, R.: Unisex-Rechnungsgrundlagen, Vortrag auf der 16. Tagung der PENSIONS-Gruppe am 25. April 2012 im Rahmen der Jahrestagung von DAV und DGVFM in Stuttgart
- [Heu] Heubeck, K., Herrmann, R., D'Souza, G.: Die Richttafeln 2005 G - Modell, Herleitung, Formeln. Blätter der DGVFM April 2006, S. 473
- [Heu3] Erläuterungsband zu HEURIKA 3, Heubeck Richttafeln GmbH
- [Hoff] Hoffmann, R.: Do socioeconomic mortality differences decrease with rising age?, Demographic Research, Volume 13, Article 2, 35-62
- [JQ] Jeffery, T.; Quinn, E.: Demographic Margins for Prudence. Transactions of the 26th International Congress of Actuaries, Birmingham 1998, Volume 6, S. 423-452
- [KLM] Kolster, N.; Loebus, H.; Mörtlbauer, W.: Neue Rechnungsgrundlagen für die Berufsunfähigkeitsversicherung DAV 1997. Blätter der DGVM Band XXIII Heft 4 (1998), S. 519-592, Transactions of the 26th International Congress of Actuaries, Birmingham 1998, Volume 6, S. 317-346, und DAV-Mitteilung Nr. 11 (1997)
- [Loe] Loebus, H.: Bestimmung einer angemessenen Sterbetafel für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter. Blätter der DGVM Band XXI Heft 4 (1994), S. 497-524
- [Neu] Neuburger, E.: Pensionsversicherungsmathematik, Schriftenreihe Angewandte Versicherungsmathematik, Heft 25, 2. Auflage, Karlsruhe 1997, S. 30-98
- [Pa] Pannenberg, M.: Zu einer Standardtafel proportionale Rechnungsgrundlagen. Blätter der DGVM Band XXIV Heft 1 (1999), S. 49-62
- [PFAV] Verordnung betreffend die Aufsicht über Pensionsfonds (Pensionsfonds-Aufsichtsverordnung - PFAV) vom 18.4.2016, (BGBl. I S. 842), zuletzt geändert durch Artikel 8 des Gesetzes vom 17. August 2017 (BGBl. I S. 3214)
- [PFDeckRV] Verordnung über Rechnungsgrundlagen für die Deckungsrückstellung von Pensionsfonds (Pensionsfonds-Deckungsrückstellungsverordnung - PFDeckRV) vom 20. Dezember 2001, Bundesgesetzblatt Jahrgang 2001 Teil I, S. 4183
- [PS] Pannenberg, M.; Schütz, E.: Sicherheitszuschläge für biometrische Rechnungsgrundlagen in der Lebensversicherung. Transactions of the 26th International Congress of Actuaries, Birmingham 1998, Volume 6, p. 481-511

- [R2004] Marcus Bauer: Herleitung der DAV-Sterbetafel 2004 R für Rentenversicherungen, Blätter der DGVFM, Band XXVII, Heft 2, Oktober 2005
- [RechPensV] Verordnung über die Rechnungslegung von Pensionsfonds (Pensionsfonds-Rechnungslegungsverordnung - RechPensV) vom 25. Februar 2003, Bundesgesetzblatt Jahrgang 2003 Teil I, S. 246
- [RechVersV] Verordnung über die Rechnungslegung von Versicherungsunternehmen (Versicherungsunternehmens-Rechnungslegungsverordnung - RechVersV) vom 8. November 1994, VerBAV 1/1995, S. 15-56
- [Sch] Schmithals, B.; Schütz, E.: Herleitung der DAV-Sterbetafel 1994 R für Rentenversicherungen. Blätter der DGVM Band XXII Heft 1 (1995), S. 29-69
- [T2008] Marcus Bauer et al.: Herleitung der DAV-Sterbetafel 2008 T für Lebensversicherungen mit Todesfallcharakter
- [Vilp] Vilpert, S.: Gender differences in social mortality differentials in Switzerland (1990-2005). Demographic Research, Volume 25, Article 8, p. 285-310