

*Leitfaden für das Grundwissen*

# Versicherungsmathematik

---

Köln, 16. April 2018

# Vorbemerkungen

Dieser Leitfaden skizziert Inhalte und verzichtet zugunsten der besseren Lesbarkeit teilweise auf mathematische Details bzw. Vollständigkeit.

Die exakten Formulierungen können in der Literatur nachgeschlagen werden.

## Hinweis:

Aus didaktischen Gründen werden die Lernziele 4.2.1 bis 4.2.4 zum Fach Versicherungsmathematik bereits im Abschnitt zu Grundlagen aktuarieller Kalkulation dieses Dokuments behandelt.

Bei der Erstellung dieses Leitfadens haben mitgewirkt:

Martin Egerer

Alfred Gohdes

Korbinian Meindl

Prof. Dr. Ulrich Orbanz

Chris-Erik Schillinger

Prof. Dr. Jan-Philipp Schmidt

Prof. Dr. Klaus J. Schröter

# Inhaltsverzeichnis

<b>1 Grundlagen aktueller Kalkulation</b>	<b>1</b>
1.1 Grundlegende Eigenschaften von Verträgen	1
1.2 Kalkulation von Prämien und Rückstellungen	4
1.2.1 Äquivalenzprinzip, Elemente der Prämienkalkulation und Rückstellungen	4
1.2.2 Prämienprinzipien	7
1.3 Risikoausgleich im Kollektiv und Modelle der Risikotheorie	10
1.3.1 Risikoausgleich im Kollektiv	10
1.3.2 Individuelles Modell	12
1.3.3 Kollektives Modell	14
1.4 Modellierung von Versicherungsprozessen	16
1.5 Risikoteilung	18
1.5.1 Grundlagen und Ziele von Risikoteilung	18
1.5.2 Proportionale Risikoteilung	19
1.5.3 Nicht-proportionale Risikoteilung	21
1.5.4 Prämienkalkulation bei Selbstbehalten	22
<b>2 Grundwissen Schadenversicherungsmathematik</b>	<b>24</b>
2.1 Schadenkennzahlen	24
2.2 Grundlagen der Tarifierung	28
2.2.1 Risiko- und Tarifmerkmale	28
2.2.2 Tarifierungsmodelle	28
2.2.3 Tarifierungsverfahren	30
2.3 Auswahl der Tarifmerkmale	34
2.4 Einsatz verallgemeinerter linearer Modelle in der Tarifierung	38
2.5 Basismodelle der Schadenreservierung	39
2.5.1 Grundlagen	39
2.5.2 Abwicklungsmuster	41
2.6 Basisverfahren der Schadenreservierung	43
2.7 Erweiterungen der Basisverfahren der Schadenreservierung	48
2.8 Verfahren zur Beurteilung der Prognosen aus Basismodellen	50
<b>3 Basismodell der Personenversicherungsmathematik</b>	<b>53</b>
3.1 Zustandsmodell	53
3.2 Rechnungsgrundlagen	56
3.3 Prämien- und Leistungsbarwerte	57
3.3.1 Erfüllungsbetrag	57
3.3.2 Allgemeine Darstellung von Leistungsbarwerten	59
3.3.3 Allgemeine Darstellung von Prämienbarwerten	60
3.3.4 Rückstellungen	60
3.3.5 Versicherungsmathematische Bilanzgleichung	61
3.4 Vertragskündigung	62
<b>4 Grundwissen Lebensversicherungsmathematik</b>	<b>64</b>
4.1 Rechnungsgrundlagen	64
4.1.1 Rechnungszins	65
4.1.2 Biometrische Rechnungsgrundlagen (SterbetafelIn, Invalidisierungstafeln)	65
4.1.3 Kostenzuschläge	65
4.1.4 Storno- und Kapitalwahlwahrscheinlichkeiten	65
4.1.5 Rechnungsgrundlagen der Reservierung	66
4.2 Standardformeln der klassischen Lebensversicherungsmathematik	66
4.2.1 Risikolebensversicherung	67
4.2.2 Todesfallversicherung	67
4.2.3 Reine Erlebensfallversicherung	68
4.2.4 Gemischte Versicherung	68
4.2.5 Leibrente	68
4.2.6 Aufgeschobene Leibrente	69

4.2.7	Temporäre Leibrente	69
4.3	Rekursive Ansätze zur Berechnung von Prämien	69
4.3.1	Einmalbeitrag für eine sofort beginnende Leibrente	70
4.3.2	Laufende Prämie für eine Risikolebensversicherung	70
4.3.3	Laufende Prämie für eine Kapitallebensversicherung	70
4.4	Überschussbeteiligung der Versicherungsnehmer	70
4.4.1	Entstehung von Überschüssen	71
4.4.2	Überschussdeklaration, Bezugsgrößen der Überschussbeteiligung, Überschussverwendungsformen	71
4.4.3	Funktion der Überschussbeteiligung im traditionellen Geschäftsmodell	72
4.4.4	Beteiligung der Versicherungsnehmer an den Bewertungsreserven	72
<b>5</b>	<b>Grundwissen Pensionsversicherungsmathematik</b>	<b>74</b>
5.1	Arbeitsrechtliches und betriebswirtschaftliches Umfeld	74
5.2	Bevölkerungsmodell und Rechnungsgrundlagen	76
5.2.1	Bevölkerungsmodell	76
5.2.2	Rechnungsgrundlagen und damit verbundene Risiken	78
5.3	Leistungsbarwerte	80
5.3.1	Barwert einer laufenden Rente	80
5.3.2	Anwartschaftsbarwerte und Invarianzsatz	81
5.3.3	Zuordnung von Leistungen auf Alter	82
5.4	Prämien und Reserven	82
5.4.1	Besonderheiten der Prämien- und Reserveermittlung	83
5.4.2	Wesentliche Bewertungsverfahren	83
<b>6</b>	<b>Grundwissen Krankenversicherungsmathematik</b>	<b>85</b>
6.1	Rechnungsgrundlagen	85
6.1.1	Rechnungszins	86
6.1.2	Ausscheideordnung	86
6.1.3	Kopfschäden	87
6.1.4	Zuschläge	88
6.2	Beitragsanpassung	89
6.2.1	Auslösender Faktor für Kopfschäden	90
6.2.2	Auslösender Faktor für Sterbewahrscheinlichkeiten	91
6.3	Prämienkalkulation	91
6.3.1	Neugeschäft	92
6.3.2	Bestand	93
6.4	Steigende Beiträge	94

# 1 Grundlagen aktuarieller Kalkulation

## 1.1 Grundlegende Eigenschaften von Verträgen

### Kerninhalte

- Definition von Versicherung
- Beispiele versicherbarer Risiken aus verschiedenen Sparten
- Leistung und Deckung von Versicherungsverträgen
- Versicherungsdauer
- weitere kalkulationsrelevante Merkmale von Versicherungsverträgen
- Beispiele typischer Verträge und deren Merkmale in einzelnen Sparten

Ein **Versicherungsvertrag**<sup>1</sup> ermöglicht einen Risikotransfer vom Kunden als Versicherungsnehmer auf ein Versicherungsunternehmen. Das Motiv des Versicherungsnehmers liegt in der Absicherung der finanziellen Folgen des Eintritts bestimmter (negativer) Ereignisse. **Versicherung** lässt sich hierbei definieren<sup>2</sup> als Deckung eines im Einzelnen ungewissen, insgesamt schätzbaren Mittelbedarfs unter Nutzung von Ausgleichsmechanismen im Kollektiv (vgl. Abschnitt 1.3.1). Je nach Versicherungssparte und -produkt handelt es sich um Versicherungsschutz vor sehr unterschiedlichen Risiken, die beispielsweise die eigene oder andere Personen sowie Sachobjekte im Eigen- oder Fremdbesitz betreffen können. Die große Bandbreite relevanter Risiken erstreckt sich von Tod, Invalidität, Krankheit, Pflegebedürftigkeit und Langlebigkeit über Unfälle (z. B. im Straßenverkehr oder Haushalt), Haftungsrisiken, Naturgefahren wie Sturm, Hagel, Erdbeben und Überschwemmungen, Feuergefahren, Kriminalitätsdelikte, Rechtsstreitigkeiten bis hin zu neuartigen Risiken wie z. B. Cyber-Angriffen. Der Begriff der Ungewissheit in o. g. Definition kann sich hierbei auf das zufallsbedingte Eintreten und/oder den Eintrittszeitpunkt und/oder die Höhe des aus dem Eintritt des versicherten Ereignisses resultierenden Mittelbedarfs beziehen. Zudem besitzt die quantitative Bewertbarkeit der betrachteten Risiken mittels aktuarieller Modelle große Bedeutung, d. h. die versicherbaren bzw. versicherten Risiken sollten (idealerweise) monetär quantifizierbar und das jeweils erforderliche Volumen zumindest im statistischen Mittel bestimmbar sein.

In anderen Worten stellen Versicherungsverträge im juristischen Sinne Rechtsgeschäfte mit bedingten Leistungsverpflichtungen gegen Zahlung einer Prämie dar. Für die Kalkulation von Prämien und teilweise auch von Rückstellungen (vgl. Abschnitt 1.2) ist es zunächst erforderlich die folgenden zentralen Bestandteile eines Versicherungsvertrages eindeutig festzulegen:

- den **Versicherungsfall** als das die Leistung auslösende versicherte Ereignis
- die **Höhe** der (Versicherungs-)Leistung
- die **Art** der (Versicherungs-)Leistung

Dabei fällt unter die Spezifizierung des Versicherungsfalls auch die Benennung der **versicherten Gefahren** in zahlreichen Zweigen<sup>3</sup> der Schadenversicherung. Zur objektiven Festlegung der Höhe der Versicherungsleistung greifen je nach Versicherungssparte und -zweig unterschiedlich komplexe Regelwerke. In den einfachsten Fällen - z. B. in der Risikolebensversicherung - wird bei Eintritt des Versicherungsfalls die vereinbarte **Versicherungssumme** (kurz: VS) fällig, während in komplizierteren Fällen eine aufwändige Bewertung der Situation vor und nach Eintritt des Versicherungsfalls erforderlich wird. Zusätzlich kann die

<sup>1</sup>Im Folgenden wird lediglich von Versicherungsverträgen gesprochen. Darunter werden hier auch Zusagen der betrieblichen Altersversorgung (kurz bAV) verstanden. Dies gilt sinngemäß auch für alle weiteren Begriffe, die den Ausdruck Versicherung enthalten.

<sup>2</sup>Definition nach Farny.

<sup>3</sup>In der Praxis wird hier oft der Begriff Sparte synonym verwendet.

Bemessung der Versicherungsleistung auch von bestimmten **Deckungssummen** (maximale Höhe der Entschädigung) abhängig sein (z. B. in vielen Zweigen der Schadenversicherung). Die Art der versicherten Leistung besteht in der Regel aus Geldleistungen, welche entweder als **einmalige** oder **wiederkehrende** Zahlungen (z. B. Renten) erfolgen. In selteneren Fällen gibt es auch Sachleistungen (z. B. in der Glasversicherung) oder Serviceleistungen (Assistanceversicherung). Inhaltlich lassen sich zudem Entschädigungs- und Vorsorgeleistungen unterscheiden.

Ein weiterer wichtiger Vertragsbestandteil ist die **Versicherungsdauer**, d. h. im Allgemeinen der Zeitraum für den Versicherungsschutz besteht<sup>4</sup>. Hinzu kommt noch der Begriff der **Leistungsdauer**, welcher in der Lebensversicherung (z. B. bei einer Berufsunfähigkeitsversicherung) auch länger als die Versicherungsdauer sein kann. Prinzipiell können Verträge in solche mit kurzer (z. B. einjähriger) oder langer (z. B. mehrere Jahrzehnte) Laufzeit kategorisiert werden. In diesem Zusammenhang fällt auch dem Ausgleich in der Zeit (vgl. Abschnitt 1.2) Bedeutung zu. Bei längerfristigen Vertragsverhältnissen werden (potenzielle) zukünftige Zahlungen mit Hilfe sog. Barwerte zum Bewertungszeitpunkt vergleichbar gemacht (vgl. Kapitel zur Personenversicherung dieses Leitfadens), wobei dem Zinsertrag hier ein größeres Gewicht im Vergleich zu kurzen Policendauern zukommt. Auch bei der Bewertung von Rückstellungen können die Versicherungs- und Leistungsdauer einfließen, z. B. bei einer Berufsunfähigkeitsversicherung vor Eintritt der BU. Kontextabhängig können aber auch andere Zeitdauern bei der Bemessung von Rückstellungen relevant sein. In der Schadenversicherung spielt beispielsweise die **Abwicklungsdauer** von Schäden in Abhängigkeit von Schadenart und Versicherungszweig eine wesentliche Rolle bei der Bewertung von Schadenreserven, während die Versicherungsdauer hierbei unerheblich ist. Ebenso hängt die Rückstellung bei Rentenversicherungen nach Beginn der Rentenzahlungen nicht mehr von der Versicherungsdauer ab.

Schließlich werden noch weitere **Vertragsdaten** basierend auf Informationen zum Versicherungsnehmer und/oder zum versicherten Risiko (z. B. versicherte Person oder versichertes Objekt) verwendet, wobei auch deren Überprüfbarkeit einen relevanten Aspekt darstellt. Je nach Versicherungssparte bzw. -zweig und Produkt fließt in die Kalkulation eine unterschiedliche Anzahl teils sehr verschiedener Daten ein. Dazu zählen unter anderem Angaben zu Alter, Familienstand und ggf. Familienangehörigen, Beruf, Wohnsitz, risikorelevanten Verhaltensweisen, Vorerkrankungen, vereinbarter Zahlweise, möglichen Selbstbehalten (kurz: SB), Schadenvergangenheit, Fahrleistung sowie Wert, Art oder Beschaffenheit von Fahrzeugen, Gebäuden oder Waren, installierte Brandschutzmaßnahmen oder Mitarbeiterzahl. Andererseits gibt es auch Daten, die aufgrund gesetzlicher Bestimmungen für die Kalkulation nicht oder nicht mehr verwendet werden dürfen, wie z. B. Herkunft oder Geschlecht einer Person.

Der letzt genannte Aspekt bedingt sog. **Unisex-Tarife**, da bis auf wenige Ausnahmen (z. B. bei Rückdeckungsversicherungen) aufgrund höchstrichterlicher Rechtsprechung seit dem 21.12.2012 Beiträge und Leistungen unabhängig vom Geschlecht der versicherten Person zu kalkulieren sind. Vor dem 21.12.2012 abgeschlossene Versicherungen bleiben mit ihren geschlechtsabhängig kalkulierten Beiträgen und Leistungen unverändert bestehen (sog. Bisex-Tarife). Mit dieser Anforderung ist eine Annahme bezüglich des Anteils an Männern bzw. Frauen am Neuzugang eines Tarifs erforderlich, die als Mischungsverhältnis in die Erstellung biometrischer Wahrscheinlichkeiten einfließt. Außerdem sei zur **Prämienzahlweise** noch angemerkt, dass trotz Kalkulation einer jährlichen Prämie (vgl. u.a. Abschnitt 1.2) in der Regel auch **unterjährige Prämienzahlungen** (monatlich, quartärllich oder halbjährlich) durch gewisse Adjustierungen möglich und üblich sind.

Exemplarisch zeigt Tabelle 1 für ausgewählte Versicherungsprodukte Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen den Sparten bzgl. kalkulationsrelevanter Merkmale von Verträgen.

Im Bereich der **Personenversicherung** (Lebensversicherung, Pensionsversicherung und Krankenversicherung) können verschiedene Ereignisse bezogen auf die versicherte Person den Leistungsfall und damit die Zahlung von Versicherungsleistungen auslösen. Die Höhe

---

<sup>4</sup>Hier im juristischen Sinne bezogen auf den materiellen Versicherungsbeginn.

Sparte	Produkt	Lstg.fall	Lstg.höhe	Lstg.art	Lstg.dauer
Leben	Risikolebensversicherung	Tod	VS + ÜB	einmalige Zahlung	Versicherungsdauer
Leben/ Pension	Rentenversicherung	Erleben	garantierte Rente + ÜB	wiederk. Zahlung	lebenslang
Pension	unmittelbare Pensionszusage	Alter, Invalidität, Tod	zuges. Leistung	wiederk. o. einm. Zahl.	bis Zahlung der Leistung
Kranken	Krankheitskostenvollversicherung	Erkrankung	Beh.kosten (abzgl. SB)	einmalige Zahlung	Versicherungsdauer
Komposit	Wohngebäudeversicherung	Sturm	Rep.kosten (abzgl. SB)	einmalige Zahlung	Versicherungsdauer
Komposit	Haftpflichtversicherung	Drittschaden	gedeckte Forderungen	einmalige Zahlung	Versicherungsdauer

Tabelle 1: Beispiele typischer Verträge verschiedener Sparten

der Leistung ist dabei in der Regel zu Vertragsbeginn fest vereinbart worden und garantiert (Summenversicherung). Ausnahmen innerhalb der Personenversicherung bilden die Krankenversicherung sowie Zusagen der betrieblichen Altersversorgung. In der Krankenversicherung orientiert sich die Versicherungsleistung in der Regel an den Kosten einer medizinisch notwendigen Heilbehandlung bzw. in der betrieblichen Altersversorgung an Parametern, die in der Zusage festgehalten sind. Exemplarisch sorgt ein Versicherungsnehmer mit einer klassischen aufgeschobenen Rentenversicherung finanziell fürs Alter vor, welche ab Erreichen des vertraglich festgelegten Renteneintrittsalters eine monatliche lebenslange Rentenzahlung leistet, deren Höhe ebenfalls bereits zu Vertragsbeginn garantiert wird und durch Überschüsse u. a. im Laufe einer oft langjährigen Aufschubphase zusätzlich ansteigt. Für die Kalkulation sind hier prinzipiell nur vergleichbar wenige Vertragsdaten entscheidend, nämlich das Alter zu Versicherungsbeginn und das Renteneintrittsalter sowie der Rechnungszins.

Im Bereich der **Kompositversicherung** (Schaden-/Unfallversicherung) bilden zusammengefasst üblicherweise Schäden am oder durch das versicherte Objekt bzw. an oder durch die versicherte Person den Versicherungsfall und lösen eine Leistungszahlung aus. Exemplarisch seien Werkstatt- und medizinische Behandlungskosten sowie Verdienstaufschlag in Folge eines Verkehrsunfalls in der Kraftfahrtversicherung oder Renovierungs- bzw. Reparaturkosten nach Sturm-, Feuer- oder Überschwemmungsschäden in der verbundenen Wohngebäudeversicherung genannt. Die wichtigsten Zweige im Firmenkundengeschäft<sup>5</sup> untergliedern sich in Sachversicherung (Gebäude, Inhalt und Betriebsunterbrechung), Haftpflichtversicherung (Betrieb, Produkt, Umwelt, Beruf), Transport (Waren, Kasko, Verkehrshaftung, Lagerhaltung) und Technische Versicherung (Maschinen, Elektronik, Bauleistungen). Die Versicherungsleistung ist im Kompositbereich in der Regel nach oben begrenzt<sup>6</sup> durch die Höhe des Schadens, durch den Wert des versicherten Objekts und/oder eine Versicherungs- bzw. Deckungssumme. Als weitere Besonderheit bzgl. der Versicherungsleistungen können hier auch Teil- und Mehrfachschäden pro Risiko bzw. Police und Jahr auftreten. Exemplarisch beträgt die Vertragsdauer in der Kraftfahrtversicherung jeweils nur ein Jahr. Im Vergleich zur Personenversicherung oder anderen Kompositzweigen wird hier für die Tarifierung typischerweise eine sehr große Anzahl von Vertragsdaten herangezogen, z. B. Alter aller versicherten Fahrer, Fahrzeualter, Wohnsitz des Halters (zwecks korrespondierender Regionalklasse), Fahrleistung, Selbstbehalte (vgl. Abschnitt 1.5), Schadenfreiheitsklasse (vgl. Abschnitt 1.4) oder Typklasse des Fahrzeugs.

In der Komposit- und ebenso in der Krankenversicherung ist sowohl ungewiss, *ob* ein Versi-

<sup>5</sup>in Ergänzung zur Spartenuntergliederung im Leitfaden des Fachs "Wirtschaftliches und Rechtliches Umfeld"

<sup>6</sup>Im Bereich der Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung gibt es teilweise auch Verträge mit unbegrenzter Deckung (sog. illimité Geschäft).

cherungsfall überhaupt einmal oder auch mehrmals eintritt, als auch *wann* und *in welcher Höhe* ggf. Versicherungsleistungen anfallen. Hingegen können in der Lebensversicherung diese drei Ungewissheiten jeweils entfallen: Bei einer Todesfall- und einer gemischten Lebensversicherung ist sicher, dass genau ein Versicherungsfall eintritt, bei einer Rentenversicherung stehen in der Phase des Rentenbezugs die Leistungszeitpunkte fest und die Höhe der garantierten versicherten Leistung - abgesehen von den zusätzlichen Leistungen aus der Überschussbeteiligung (kurz ÜB) und weiteren Spezialfällen - ist gewiss. Ähnliches gilt für die Zusagen der betrieblichen Altersversorgung.

### Lernergebnisse (B2)

Die Studierenden kennen versicherbare Risiken und kalkulationsrelevante Bestandteile von Versicherungsverträgen aus den einzelnen Sparten. Sie können anhand der Kriterien Leistung, Deckung und Versicherungsdauer konkrete Versicherungsprodukte aus allen Sparten benennen und umgekehrt gegebene Beispiele zuordnen und kategorisieren. Weitere Daten und Merkmale, die bei der Kalkulation bestimmter Sparten und Produkte Verwendung finden können, sind ebenfalls bekannt. Einfache vergleichende Betrachtungen zwischen den einzelnen Sparten können anhand der vorgestellten Begriffe durchgeführt werden.

## 1.2 Kalkulation von Prämien und Rückstellungen

### Kerninhalte

- Äquivalenzprinzip
- Elemente der Prämienkalkulation
- Rückstellungen
- Prämienprinzipien

### 1.2.1 Äquivalenzprinzip, Elemente der Prämienkalkulation und Rückstellungen

Für Übernahme von Risiken erheben die Unternehmen Prämien (oder einen sonstigen Finanzierungsbeitrag). Bei nachfolgenden Modellierungen bezeichne der Begriff **Risiko** eine Zufallsvariable  $X \geq 0$ , für die, falls erforderlich, die Eigenschaft  $0 < E(X) < \infty$ ,  $0 < \text{Var}(X) < \infty$  gilt. Für eine allgemeine Darstellung des Risikotransfers wird von einer Vertragsdauer von  $n \leq \infty$  Jahren ausgegangen.<sup>7</sup> Der Vertragsbeginn ist der Zeitpunkt 0. Das  $t$ -te Jahr wird durch das Intervall  $[t-1, t)$  dargestellt. Eine deterministische Diskontfunktion  $D : \{0, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{R}$  wird verwendet, um für die zukünftigen Zahlungsströme den finanzmathematischen Wert zum Zeitpunkt 0 zu bestimmen und so Zahlungsströme zu verschiedenen Zeitpunkten vergleichbar zu machen.  $D(t)$  diskontiert Zahlungen zum Zeitpunkt  $t$  auf den Zeitpunkt 0.

$L_t$  bezeichne die Leistungen zum Zeitpunkt  $t$ . Dann ist  $L_\bullet = (L_0, L_1, \dots, L_n)$  ein zeitdiskreter stochastischer Prozess, der Versicherungsleistungsprozess, und die Zufallsvariable

$$L = \sum_{t=0}^n D(t) \cdot L_t \quad (1.1)$$

entspricht dem Barwert aller Versicherungsleistungen. Analog kann der Prämienprozess  $P_\bullet = (P_0, P_1, \dots, P_n)$  und der Barwert aller Prämien (bzw. Finanzierungsbeiträge)

$$P = \sum_{t=0}^n D(t) \cdot P_t \quad (1.2)$$

<sup>7</sup>In der Schadenversicherung beträgt die Versicherungsdauer i. d. R. ein Jahr, d. h.  $n = 1$ . Eine Diskontierung spielt dort daher bei der Tarifikalkulation nahezu ausnahmslos keine Rolle.



definiert werden. Auch hier ist  $P_t$  zufällig, da Prämienzahlungen auch von der Existenz des Versicherungsvertrages zum jeweiligen Zeitpunkt  $t$  abhängen. Außerdem können Prämien auch vom zufälligen Schadenverhalten abhängig sein (z. B. in der Kfz-Versicherung).

Die Versicherungsleistungen und Prämienzahlungen erfüllen das **versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip**, wenn gilt:

$$E(P) = E(L). \quad (1.3)$$

Dieses Grundprinzip der Prämienkalkulation besagt, dass der erwartete Barwert der Prämienzahlungen gerade dem erwarteten Barwert der Versicherungsleistungen entspricht. Der Erwartungswert der Prämien ist somit äquivalent zum monetären Wert der erwarteten Leistung. Das ist die einfachste Form des Äquivalenzprinzips. Eine Herausforderung liegt dabei in der Schätzung des Erwartungswerts der Versicherungsleistungen. Der Erwartungswert ergibt sich (bei dieser diskreten Betrachtung) aus der diskontierten wahrscheinlichkeitsgewichteten Summe aller möglichen Leistungen.

Falls  $L$  und  $P$  das Äquivalenzprinzip erfüllen, dann heißt  $P$  **Nettorisikoprämienprozess** und die Prämie  $P_t$  ( $0 \leq t \leq n$ ) **Nettorisikoprämie**. Insbesondere ist die Prämie  $P_t := E[L_t] (0 \leq t \leq n)$  eine Nettorisikoprämie. Wenn es Wahrscheinlichkeiten  $w_1, \dots, w_n$  ( $w_t$  Wahrscheinlichkeit, dass es zur Prämienzahlung  $P_t$  kommt) und einen Wert  $\bar{P}$  gibt mit

$$P_t = \bar{P} \cdot w_t \quad \text{für } t = 0, \dots, n \quad (1.4)$$

und das versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip ist erfüllt, dann ist  $\bar{P}$  eine **konstante Nettorisikoprämie** des Leistungsprozesses  $L$ .

Die Kalkulation mit Erwartungswerten führt im Ergebnis dazu, dass die Prämieinnahmen gerade „im Mittel“ ausreichen, um die Versicherungsleistungen zu finanzieren. Sei  $E_t$  die Summe aller Einnahmen der Nettorisikoprämien eines Bestands und  $S_t$  die Summe aller Leistungen bis zum Zeitpunkt  $t$  (hier vernachlässigen wir die Diskontierung). Weiterhin sei  $R \geq 0$  die Anfangsreserve für diesen Bestand. Dann kann man unter geeigneten Voraussetzungen zeigen, dass für die Ruinwahrscheinlichkeit gilt:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} P \left( \sup_{t \in (0, T)} (S_t - E_t) > R \right) = 1. \quad (1.5)$$

Wenn also lediglich Nettorisikoprämien erhoben werden, kommt es bei unendlichem Planungshorizont sicher zur Insolvenz, unabhängig vom Anfangskapital (= Anfangsreserve) des Unternehmens bzw. der Einrichtung. Die Nettorisikoprämie stellt i. A. also nur eine Preisuntergrenze dar. Um ein hinreichendes Sicherheitsniveau zu erzielen, ist ein **Sicherheitszuschlag**  $c > 0$  erforderlich, welcher die Wahrscheinlichkeit für eine Insolvenz vermindert (siehe Lemma von Cantelli).

Die Vorschriften zur Kapitalausstattung von Versicherungsunternehmen legen fest, dass die Unternehmen nicht nur „im Mittel“, sondern sogar mit einer hohen Wahrscheinlichkeit (z. B. 99,5%) ausreichend Kapital für ein Geschäftsjahr besitzen und solvent sein sollten. Dieses Solvenzkapital wird von Kapitalgebern (in der Regel von den Aktionären) zur Verfügung gestellt, die auf dieses Kapital einen Zins über dem risikofreien Marktzins erwarten. Die Differenz zwischen der angestrebten Kapitalverzinsung und dem risikofreien Marktzins wird als Kapitalkosten bezeichnet. Diese müssen von den Versicherungsnehmern über die gezahlten Prämien aufgebracht werden, so dass die Summe aller Sicherheitszuschläge pro Risiko mindestens so groß sein muss wie die Kapitalkosten des Unternehmens. Die Summe der Sicherheitszuschläge ergibt also den erwarteten Gewinn der Aktionäre, so dass die Sicherheitszuschläge oft auch als Gewinnzuschläge interpretiert werden.

Die explizite Berechnung des **Sicherheitszuschlags**  $c$  eines Risikos erfolgt einerseits über Prämienprinzipien (vgl. Abschnitt 1.2.2 und andererseits über eine Zuordnung der gesamten Kapitalkosten auf die einzelnen Risiken (Allokation). Dieses Vorgehen ist typisch für die Schadenversicherung, in der die Nettorisikoprämie dem erwarteten Schaden entspricht.

Der Begriff **Risikoprämie** ist in der Praxis nicht eindeutig belegt und meint hier die Summe aus Nettorisikoprämie und explizitem Sicherheitszuschlag (auch Brutto-Risikoprämie genannt<sup>8</sup>).

In der Personenversicherung hingegen sind Sicherheitszuschläge schon implizit in der Nettorisikoprämie enthalten. Sie werden dadurch generiert, dass vorsichtige Annahmen für die Rechnungsgrundlagen (z. B. Sterblichkeit und Zins) verwendet werden. Vorsichtig bedeutet etwa bei der Sterblichkeit, dass die verwendeten Sterbewahrscheinlichkeiten zugunsten des Unternehmens von den erwarteten Sterbewahrscheinlichkeiten abweichen. Der Abgleich mit den Kapitalkosten erfolgt dann beispielsweise über einen Profit Test. Hier gibt es keine Risikoprämie im Sinne expliziter Sicherheitszuschläge. Der Begriff Risikoprämie dient in der Personenversicherung stattdessen der Abgrenzung des Sparvorgangs vom Risikoprozess.

Durch den Risikotransfer entstehen im Unternehmen verschiedene Kosten. Es kann unterschieden werden zwischen Kosten für den Vertragsabschluss (z. B. Werbung und Provisionen) und Kosten für die Verwaltung (z. B. Bestandsführung). Die Kosten für einen Versicherungsvertrag erhöhen die Netto- (bzw. Brutto)risikoprämie. Eine Prämie ohne die Berücksichtigung von Kosten heißt Nettoprämie. Wenn Kosten berücksichtigt sind, dann sprechen Aktuarien von Bruttoprämien<sup>9</sup>. Da ein Großteil der Kosten für einen Vertrag in der Regel zu Vertragsbeginn noch nicht feststeht, werden auch hier Annahmen getroffen. Auch hier besteht die Möglichkeit, Sicherheitszuschläge in die Prämienkalkulation einfließen zu lassen. Es wird zwischen additiven Komponenten (z. B. Stückkosten je Vertragsstück) und multiplikativen Zuschlagsfaktoren (z. B. Abschluss-, Verwaltungs- oder Betriebskosten) auf eine gewisse Bezugsgröße (z. B. Beitrag, Nettorisikoprämie, Beitragssumme, Rentenhöhe, Versicherungssumme, Schadenbedarf) unterschieden.

In der allgemeinen Form fordert das erweiterte Äquivalenzprinzip, dass die erwarteten Bruttoprämieneinnahmen gerade ausreichen, um die erwarteten Versicherungsleistungen und Kosten (inkl. von Zuschlägen für Sicherheit und Gewinn) zu finanzieren. Dies dient als Grundlage für die Festlegung der vom Kunden zu leistenden Prämie, die auch als **Beitrag** bezeichnet wird.

Allen Versicherungsverträgen liegt bei der Bewertung zukünftiger zufälliger Versicherungsleistungen folgendes aktuarielle Standardvorgehen zu Grunde: Mittels Beobachtungen aus Bestandsdaten der Vergangenheit und ggf. weiteren Datenquellen werden Rückschlüsse auf die Entwicklung in der Zukunft gezogen. Dieser Ansatz basiert auf der Grundannahme, dass das bisherige Geschehen sich auf ähnliche, zumindest vorhersehbare Weise auch zukünftig realisieren wird. Dazu werden in der Regel an die entsprechenden Vergangenheitsdaten geeignete Wahrscheinlichkeitsverteilungen angepasst. Zusätzlich oder alternativ können auch Marktdaten und/oder Expertenschätzungen zum Einsatz kommen. Besondere Sorgfalt ist dabei bzgl. möglicher Änderungen von Annahmen im zeitlichen Verlauf walten zu lassen, z. B. hinsichtlich der Sterblichkeit, des medizinischen Fortschritts oder der Rechtsprechung. Dieses Vorgehen führt nicht dazu, dass die zufälligen Versicherungsleistungen fehlerfrei prognostiziert werden – weder im gesamten Bestand und schon gar nicht für individuelle Verträge. Vielmehr existiert das Risiko, dass die tatsächlichen Leistungen und Kosten die erwarteten bzw. kalkulatorisch angesetzten überschreiten.

Um alle Komponenten im Äquivalenzprinzip zu berechnen und die Verträge quantitativ zu bewerten, werden Rechnungsgrundlagen festgelegt. In der Personenversicherungsmathematik bilden Rechnungszins, Ausscheideordnungen, Leistungen und Kosten die wesentlichen Rechnungsgrundlagen. Dabei dient der Rechnungszins der Barwertberechnung. Mit den Ausscheideordnungen können die erforderlichen Erwartungswerte für Prämien, Leistungen und Kosten berechnet werden.

In der Kompositversicherung spielen Rechnungszins und Ausscheideordnungen z. B. bei den Rentenkomponenten langabwickelnder Sparten eine Rolle. Von zentraler Bedeutung ist

---

<sup>8</sup>Vgl. Gabler Wirtschaftslexikon.

<sup>9</sup>Im Kontext von Rückversicherung werden die Begriffe Brutto und Netto auch zur Bezeichnung von Sachverhalten vor bzw. nach Abzug von Rückversicherung verwendet.

jedoch die Modellierung der Schäden mittels einer Vielzahl von Risikomerkmale, die einen Erklärungsgehalt für das Schadensgeschehen aufweisen. Vor allem in der Kraftfahrtversicherung wird in der Praxis ein großes Spektrum an Tarifmerkmalen für die Bestimmung der Prämie verwendet. Dabei stellen verallgemeinerte lineare Modelle (englisch: generalized linear models (GLM)) ein wichtiges methodisches Werkzeug in der Tarifikalkulation dar.

Verträge mit einer langen Vertragslaufzeit haben in der Lebensversicherung und mit Abstrichen in der Krankenversicherung typischerweise eine konstante Prämienzahlung über die gesamte Vertragslaufzeit. Ein anfänglich geringeres Risiko führt dazu, dass geleistete Prämien in den ersten Vertragsjahren im Vergleich zum erwarteten Risiko zu hoch sind und am Ende der Vertragslaufzeit im Vergleich zum erwarteten Risiko zu niedrig. Die über die Risikoprämie hinausgehende Prämienzahlung abzgl. Kosten wird zum Aufbau einer versicherungstechnischen Rückstellung (Reserve) genutzt (Ansparprozess). Diese Rückstellung wird gegen Vertragsende, wenn die Prämienzahlung unterhalb der Risikoprämie liegt, wieder abgebaut (Entsparprozess). Diese Kalkulation heißt in Deutschland „Kalkulation nach Art der Lebensversicherung“. Der Anspar- und Entsparprozess kann als Ausgleich in der Zeit bezeichnet werden.

In engem Zusammenhang zu Prämien stehen somit die versicherungstechnischen **Rückstellungen**. Sie dienen der Sicherstellung der dauernden Erfüllbarkeit der ungewissen Verpflichtungen aus den Verträgen eines Versicherers. Die Bedeutung von Rückstellungen ergibt sich aus aktuarieller Sicht insbesondere im Kontext der Rechnungslegung. Als zusammengefasst größte Position der Passivseite ihrer Bilanz weisen Versicherer ihre vertraglichen Verpflichtungen in Form der Rückstellungen unter Berücksichtigung zahlreicher Bewertungsvorschriften aus. Unter diesen Oberbegriff fallen Passivposten unterschiedlichen Charakters, z. B. Deckungsrückstellung, Rückstellung für noch nicht abgewickelte Versicherungsfälle, Schwankungsrückstellung, Rückstellung für Beitragsrückerstattungen (RfB) oder Beitragsüberträge. Neben diesen aufsichts- und handelsrechtlich auferlegten (externen) Pflichten im Rahmen des Reportings kommt den Rückstellungen auch im Rahmen der (internen) Unternehmensbewertung (Bestandsbewertung) eine hohe Bedeutung zu. Da die Steuerbilanz aus der Handelsbilanz abgeleitet wird, hat die Höhe der versicherungstechnischen Rückstellungen auch Einfluss auf die Besteuerung des Versicherers.

In der Personenversicherung ist zwischen der bilanziellen Deckungsrückstellung und der versicherungsmathematischen Deckungsrückstellung, dem sog. **Deckungskapital**, zu unterscheiden. Letzteres ergibt sich als Differenz aus dem erwarteten Barwert künftiger Leistungen und dem erwarteten Barwert künftiger Beiträge und kann auch negative Werte annehmen. Außerdem können i. A. die Rechnungsgrundlagen für die Berechnung von Rückstellungen von denen der Prämienberechnung abweichen. Bei unmittelbaren Leistungszusagen (Direktzusagen) erfolgt die Rückstellungsbildung auf Grundlage eines auszuwählenden Bewertungsverfahrens, mit konstantem oder variablem Beitrag, i. d. R. ohne Berücksichtigung von Kosten und Sicherheitszuschlägen in den Rechnungsgrundlagen.

In der Schadenversicherung werden Rückstellungen in Form sog. **Einzel Schadenreserven** für noch nicht vollständig abgewickelte Versicherungsfälle sowie pauschal für noch nicht gemeldete Versicherungsfälle gebildet. Für einen Risikoausgleich in der Zeit wird unter anderem eine **Schwankungsrückstellung** gebildet, welche vor allem für Versicherungszweige mit stark variierendem Schadenanfall in unterschiedlichen Kalenderjahren, wie z. B. der Kasko- oder Wohngebäudeversicherung, von Bedeutung ist.

## 1.2.2 Prämienprinzipien

Im Kontext der Prämienkalkulation, vornehmlich in der Schadenversicherung, führt der Ansatz unterschiedlicher Risikomaße zur Bemessung geeigneter expliziter Sicherheitszuschläge zu verschiedenen so genannten Prämienprinzipien. Das Risiko  $X$  (zu Beginn definiert als Zufallsvariable  $X \geq 0$  mit endlichem Erwartungswert und Varianz) repräsentiert dabei den Schaden einer Gefahr in einem Zeitraum bewertet in Geldeinheiten.

Ein **Prämienprinzip**  $H$  ist eine Abbildung von der Menge der nicht-negativen Zufallsvariablen (Risiken) auf die Menge der nicht-negativen reellen Zahlen (Prämien):

$$H : \{\text{Zufallsvariable auf } [0, \infty)\} \rightarrow \mathbb{R}^{\geq 0} \quad \text{mit } X \mapsto H(X).$$

Mithilfe von Prämienprinzipien werden den Risiken (angemessene) Prämien zugeordnet. Ein erster naheliegender Ansatz für die Festlegung einer Prämie ist das Äquivalenzprinzip:

$$H(X) = E(X), \tag{1.6}$$

d. h. die Prämie für die Übernahme des Risikos  $X$  stimmt mit dem Erwartungswert  $E(X)$  überein. Dieses Prämienprinzip wird auch als **Nettorisikoprinzip** bezeichnet und üblicherweise durch die den Ausgleich in der Zeit und den Ausgleich im Kollektiv beschreibenden Gesetze der großen Zahlen begründet. Dem stehen Ergebnisse der Ruintheorie gegenüber, die besagen, dass Prämien, die die durch (1.6) definierte **Nettorisikoprämie**  $E(X)$  nicht übersteigen, – unter schwachen Modellannahmen – „fast sicher“ zum technischen Ruin führen, wobei diese Ergebnisse rein theoretischer Natur sind.

Dass die Prämie (im Erwartungswert) die durch eintretende Leistungsfälle verursachten Finanzaufwände decken muss, ist selbstverständlich. Doch dieser Ansatz allein reicht bei Weitem nicht aus. Zusätzlich benötigt der Versicherer eine Prämie dafür, dass er bereit ist, ein Risiko zu übernehmen, also seine sichere Position vor Vertragsabschluss gegen eine unsichere danach zu tauschen. Dieser Teil der Prämie ist der **Sicherheits-** oder **Schwankungszuschlag**. Die meisten Prämienprinzipien basieren auf dem Äquivalenzprinzip. Genauer wird die Prämie  $H(X)$  mit dem Ansatz

$$H(X) = E(X) + SZ(X) \tag{1.7}$$

festgelegt, wobei der (hier explizite) **Sicherheitszuschlag**  $SZ(X)$  zum eigentlichen Instrument der Risikobewertung wird. Es stellt sich die Frage, welcher Sicherheitszuschlag (bei gegebener Verteilung  $P_X$ ) angemessen ist. Der Sicherheitszuschlag soll die zufälligen Schwankungen der Finanzaufwände ausgleichen und bei gleichem Erwartungswert benötigt der Versicherer für „gefährlichere“ Risiken einen höheren Sicherheitszuschlag. Es ergibt sich folglich die Notwendigkeit, die „Gefährlichkeit“ der Risiken fundiert zu bewerten und die Ergebnisse in den Sicherheitszuschlag und damit in die Prämienkalkulation einfließen zu lassen. Die wichtigsten einschlägigen Risikomaße, die in der Prämienkalkulation Anwendung finden, sind

- der **Erwartungswert**  $E(X)$  als klassisches (Volumen-)Maß für die Größe oder das Ausmaß des Risikos (das aber das Risiko i.e.S., etwa die Schwankung, nicht erfasst) und
- die bekannten Schwankungsmaße **Varianz**  $\text{Var}(X)$  und **Standardabweichung**  $\sigma(X)$ ,

sowie in Hinblick auf die Praxis schon mit deutlichen Abstrichen

- das Symmetriemaß **Schiefe**  $\gamma(X)$ ,
- die **Tail-Wahrscheinlichkeiten**  $P(X > t)$ ,
- die Ruin- und **Verlustwahrscheinlichkeiten**,
- der erwartete Nutzen oder **Bernoulli-Nutzen** und
- der Value at Risk (VaR), der Expected Shortfall und der Tail Value at Risk (TVar) (vgl. Leitfaden zum Fach "Finanzmathematik und Risikobewertung")

Aus diesen Ansätzen ergeben sich die folgenden wichtigsten **Prämienprinzipien**:

Das Prämienprinzip  $H$  mit

$$H(X) = E(X) + \delta \cdot E(X) = (1 + \delta) \cdot E(X)$$

heißt **Erwartungswertprinzip** mit Parameter  $\delta \geq 0$ . Offenbar ergibt sich für  $\delta = 0$  die Nettorisikoprämie (1.6) bzw. das Äquivalenz- oder Nettorisikoprinzip. Das Erwartungswertprinzip erfasst keinerlei Schwankungen. Als Bezugsgröße der Bemessung des Sicherheitszuschlags wird mit dem Erwartungswert kein Risikomaß i. e. S. verwendet.

Bei den beiden folgenden Prämienprinzipien sind die Sicherheitszuschläge hingegen proportional zur Varianz bzw. zur Standardabweichung, so dass das Schwankungsverhalten in die Prämie einfließt.

Das Prämienprinzip  $H$  mit

$$H(X) = E(X) + \delta \cdot \text{Var}(X)$$

heißt **Varianzprinzip** mit Parameter  $\delta \geq 0$ ; das Prämienprinzip

$$H(X) = E(X) + \delta \cdot \sqrt{\text{Var}(X)} = E(X) + \delta \cdot \text{Sd}(X)$$

heißt **Standardabweichungsprinzip** mit Parameter  $\delta \geq 0$ .

Man beachte, dass die Bezugsgrößen der Sicherheitszuschläge, also die Kennzahlen  $\text{Var}(X)$  und  $\sigma(X)$ , deutlich unterschiedliche Größenordnungen aufweisen können. Auch die Dimensionen der beiden Risikomaße sind mit quadrierten Geldeinheiten und Geldeinheiten unterschiedlich. Es ist somit beim Umgang mit diesen Größen Vorsicht geboten, was sich durch angemessene Wahl des Parameters  $\delta$  ausdrückt. (Für  $\delta = 0$  ergibt sich auch hier jeweils das Nettorisikoprinzip.)

Das Prämienprinzip  $H$  mit

$$H(X) = \frac{1}{a} \cdot \ln(E[e^{aX}])$$

heißt **Exponentialprinzip** mit Parameter  $a \geq 0$ . Es kann mit nutzentheoretischen Ansätzen der Entscheidungstheorie als ein ökonomisch sinnvolles Prämienprinzip hergeleitet werden. Näherungsweise entspricht es dem Varianzprinzip mit Parameter  $\delta = a/2$ .

Selbstverständlich gibt es in der einschlägigen Literatur noch eine Fülle weiterer Prämienprinzipien. Neben zusätzlichen Repräsentanten für **explizite** Prämienprinzipien vom Typ (1.7) existiert auch die Kategorie der **impliziten** Prämienprinzipien, die z. B. unter Zuhilfenahme von Nutzen-, Verlust- oder sonstigen Wertfunktionen ökonomisch sinnvolle Bestimmungsgleichungen für die implizite Festlegung von Prämien generieren.

Mit Hilfe der Ungleichung von Cantelli

$$P(X > E(X) + c) \leq \frac{\text{Var}(X)}{c^2 + \text{Var}(X)}, \quad c \geq 0,$$

ist der Sicherheitszuschlag  $SZ(X)$  derart anzusetzen, dass eine vorgegebene Verlustwahrscheinlichkeit  $\varepsilon > 0$  unterschritten wird, denn es gilt:

$$c \geq \sqrt{\frac{1-\varepsilon}{\varepsilon}} \cdot \sqrt{\text{Var}(X)} \iff P(X > E(X) + c) \leq \varepsilon.$$

Man beachte allerdings, dass durch die Verwendung der Ungleichung der tatsächlich erforderliche Sicherheitszuschlag stark überschätzt werden kann.

In der Risikotheorie gibt es umfangreiche Literatur, die sich damit befasst, welche Eigenschaften bei Prämienprinzipien wünschenswert oder kritisch sind und welche dieser Eigenschaften bei welchen Prämienprinzipien vorliegen. Hier werden nur kurz die wichtigsten Eigenschaften angesprochen.

Prämienprinzipien sind anwendbar auf den einzelnen Vertrag, auf Teilbestände oder auf den gesamten Bestand. Diese Ansätze ergeben in der Summe dasselbe, wenn das Prämienprinzip  $H$  **additiv** ist, d. h. wenn

$$H(X + Y) = H(X) + H(Y) \quad \text{für alle stochastisch unabhängigen Risiken } X, Y.$$

Ein Prämienprinzip  $H$  heißt **subadditiv**, wenn

$$H(X + Y) \leq H(X) + H(Y) \quad \text{für alle stochastisch unabhängigen Risiken } X, Y$$

gilt. Subadditive Prämienprinzipien berücksichtigen also den Risikoausgleich im Kollektiv. Insbesondere ist jedes additive Prämienprinzip auch subadditiv.

Das Äquivalenz- oder Nettorisikoprinzip, das Erwartungswertprinzip, das Varianzprinzip und auch das Exponentialprinzip sind additiv, das Standardabweichungsprinzip hingegen nicht.

Für ein beliebiges Prämienprinzip  $H$  ist der Sicherheitszuschlag der Teil der Prämie, der den Erwartungswert übersteigt:

$$SZ(X) = H(X) - E(X).$$

Ein Prämienprinzip  $H$  heißt **erwartungswertübersteigend**, wenn

$$SZ(X) \geq 0.$$

Sämtliche oben vorgestellten Prämienprinzipien sind für positive Parameter  $\delta$  erwartungswertübersteigend.

Hinweis: Abweichungen von den vorgestellten Kalkulationsprinzipien sind in jeder Sparte zu finden. Eine detailliertere Darstellung der Prämienkalkulation erfolgt in den spartenspezifischen Abschnitten (siehe unten).

### **Lernergebnisse (B2)**

Die Studierenden kennen die allgemeinen Elemente der Prämienkalkulation und können zwischen Netto- und Brutto-Risikoprämie unterscheiden. Außerdem können sie die Bedeutung und Erfordernis von Rückstellungen erläutern. Die Studierenden kennen die wichtigsten Prämienprinzipien und können diese auf gegebene Schadenverteilungen zur Bestimmung aktuariell angemessener Prämien anwenden.

## **1.3 Risikoausgleich im Kollektiv und Modelle der Risikotheorie**

### **Kerninhalte**

- Risikoausgleich im Kollektiv
- Homogene Bestände
- Individuelles Modell der Risikotheorie
- Kollektives Modell der Risikotheorie
- Erfüllbarkeit von Voraussetzungen in der Praxis
- Erwartungswert, Varianz, Variationskoeffizient und Verteilung des Gesamtaufwands in beiden Modellen
- Zusammenhänge zwischen beiden Modellen

### **1.3.1 Risikoausgleich im Kollektiv**

Neben dem Ausgleich in der Zeit (vgl. Abschnitt 1.2) besteht ein weiteres wesentliches Funktionsprinzip von Versicherung im **Risikoausgleich im Kollektiv**. Ein Kollektiv stellt eine Zusammenfassung von Risiken (Zufallsvariablen) dar, die durch gleichartige Gefahren bedroht sind. In der Praxis der Versicherungsmathematik sind solche Kollektive

- in der Lebensversicherung z. B. Bestände versicherter Personen, die auf den Todesfall versichert sind

- in der Pensionsversicherung z. B. Bestände von Personen, denen Leistungen aufgrund von Alter, Invalidität und Tod zugesagt wurden
- in der Krankenversicherung z. B. Bestände versicherter Personen, die eine private Krankenkostenversicherung haben
- in der Schadenversicherung z. B. Bestände versicherter Fahrzeuge, in deren Police eine Kfz-Vollkaskoversicherung eingeschlossen ist.

Die Risiken entsprechen den zufälligen finanziellen Belastungen, die sich aus dem Eintritt der spezifischen Gefahrenereignisse ergeben. Bezüglich der oben genannten Punkte lassen sich exemplarisch

- entgangene Einnahmen (nach dem Tod einer versicherten Person)
- Zahlung einer lebenslangen Rente (bei Eintritt eines Versorgungsfalles)
- Mehrkosten (in der Krankenversicherung)
- Schadenaufwendungen (in der Kfz-Kaskoversicherung)

anführen. Der hier verwendete Begriff des Kollektivs und die nachfolgenden Modellierungen setzen nicht notwendigerweise voraus, dass es sich dabei um versicherte Risiken handelt. Vielmehr beschreiben die Modelle verallgemeinert ausgedrückt die Zusammenfassung zufälliger finanzieller Zahlungsströme, die durch den Eintritt spezifischer Ereignisse ausgelöst werden. Im Bereich der Versicherungsmathematik entspricht dies jedoch naheliegender Weise in erster Linie dem Finanzaufwand, der aus dem Eintritt des Leistungsfalls eines Versicherungsvertrages resultiert.

Bei der Zusammenfassung vieler gleichartig bedrohter Risiken zu einem Kollektiv fällt der *durchschnittliche* Finanzaufwand bei Eintritt der betrachteten Gefahr pro Risiko *im Kollektiv* im Allgemeinen deutlich kleiner aus als die *mögliche* finanzielle Belastung jedes *einzelnen* Risikos des Kollektivs. Es sei darauf hingewiesen, dass der Risikoausgleich im Kollektiv auch ohne das Vorhandensein von Versicherung funktionieren kann. Die Versicherungswirtschaft stellt lediglich eine Form der Bündelung von Risiken zur Verfügung. Die mathematische Grundlage für den Risikoausgleich bildet das schwache Gesetz der großen Zahlen:

**Satz 1.1** (Schwaches Gesetz der großen Zahlen). Sei  $X_1, X_2, \dots$  eine Folge von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen mit

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = 0.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - E(X_i)) = 0 \quad \text{in } P\text{-Wahrscheinlichkeit.} \quad (1.8)$$

Für die nachfolgenden Modellierungen sei ein **Risiko**  $R$  definiert als Zufallsvariable  $R \geq 0$  mit  $0 < E(R) < \infty$ ,  $0 < \text{Var}(R) < \infty$ .

**Satz 1.2** (Risikoausgleich im Kollektiv). Sei  $R_1, R_2, \dots$  eine Folge von identisch verteilten und paarweise unkorrelierten Risiken. Dann gilt für die Summe  $S_n = R_1 + \dots + R_n$  der ersten  $n$  Risiken

(a)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \text{Vko}(S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Vko}(R_1)}{\sqrt{n}} = 0 \quad (1.9)$$

d. h.  $Sd(S_n)$  wächst bei wachsendem Kollektiv langsamer als  $E(S_n)$ .



(b)

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P\left(\left|\frac{S_n - E(S_n)}{E(S_n)}\right| > \epsilon\right) = 0 \quad \forall \epsilon > 0, \quad (1.10)$$

d. h. das Überschreiten einer prozentualen Maximalabweichung vom Erwartungswert wird bei wachsendem Kollektiv immer unwahrscheinlicher.

Die Finanzaufwände der zu einer Gefahrgemeinschaft gebündelten Risiken  $R_1, R_2, \dots$  können im Kontext der Versicherungsmathematik je nach Anwendung z. B. die kumulierten Jahresschäden einzelner Risiken in Beständen der Kranken- oder Schadenversicherung repräsentieren oder den Todesfalleistungen eines Bestandes von Risikolebensversicherungen entsprechen. Insbesondere die Gleichung (1.9) wird häufig als Begründung dafür herangezogen, dass der Risikoausgleich im Kollektiv insofern erfolgt, als dass der Variationskoeffizient als versicherungsspezifisches Risikomaß unter den genannten Regularitätsvoraussetzungen für wachsende Bestände gegen 0 konvergiert. Gleichung (1.10) drückt in anderen Worten aus, dass mit zunehmender Zahl von Risiken die Abweichung des arithmetischen Mittels vom Erwartungswert sinkt.

Der Risikoausgleich im Kollektiv wird im Allgemeinen durch **stochastische Unabhängigkeit** der Risiken begünstigt bzw. durch Abhängigkeit gefährdet. Außerdem hängt er vom Grad der Homogenität ab. Ein Kollektiv (bzw. Bestand) heißt **homogen**, wenn alle Risiken des Kollektivs (bzw. Bestandes) dieselbe Verteilung besitzen, andernfalls heißt es (bzw. er) heterogen. Die Homogenität in Form identischer Verteilungen im Kollektiv begünstigt im Allgemeinen den Risikoausgleich im Kollektiv, während er bei heterogenen Kollektiven tendenziell gefährdet ist. Insofern liegen bei *unabhängig identisch verteilten (i. i. d.)* Risiken tendenziell günstige Voraussetzungen für den Risikoausgleich im Kollektiv vor und die Voraussetzungen von Satz 1.2 sind erfüllt. Dennoch ist weder die Unabhängigkeit noch die Homogenität der Risiken eine notwendige Voraussetzung für den Risikoausgleich im Kollektiv. Vielmehr können z. B. bestimmte gegenläufige Abhängigkeiten der Risiken zu verbesserten Ausgleichseffekten führen.

In der Praxis sind die Unabhängigkeit und die Homogenität der Risiken jedoch (teils) nur näherungsweise erfüllt und sind daher jeweils kritisch zu prüfen. In der Feuerversicherung sind beispielsweise die Risiken nicht identisch verteilt aufgrund unterschiedlicher Gebäudegrößen und die Risiken benachbarter Gebäude nicht unkorreliert. Für die in der Tarifkalkulation übliche Praxis der Segmentierung von Risiken stellt die Homogenität zudem das einschlägige Kriterium dar. Dabei besteht bei der Zusammenfassung möglichst gleichartiger Versicherungsverträge ein Zielkonflikt bzgl. der Segmentgröße. Einerseits erfordert ein hoher Grad an Homogenität die Bildung kleiner Bestände, während andererseits die Bildung möglichst großer Bestände die statistische Stabilität erhöht.

Der Risikoausgleich im Kollektiv ist die Voraussetzung dafür, dass Prämien niedrig und gleichzeitig ausreichend sein können, und legitimiert den Einsatz von Erwartungswerten bei der Kalkulation von Prämien und ggf. Rückstellungen. Zudem finden, insbesondere in der Schadenversicherung, das individuelle Modell und das kollektive Modell der Risikotheorie Anwendung. Sie ermöglichen es dem Aktuar, den Finanzaufwand eines Kollektivs mathematisch zu modellieren und z. B. Erwartungswert oder Varianz abzuschätzen.

### 1.3.2 Individuelles Modell

Im **individuellen Modell** der Risikotheorie werden einzelne Risiken für einen vorgegebenen Zeitraum (z. B. ein Jahr) modelliert. Werden  $n \in \mathbb{N}$  Risiken betrachtet, so bezeichnet  $Y_i \geq 0$  den kumulierten Finanzaufwand des  $i$ -ten Risikos im zugrunde liegenden Zeitraum. Ein einzelnes Risiko kann dabei sowohl **keinen** Finanzaufwand generieren, d. h. es gilt

$$P(Y_i = 0) > 0 \quad (i = 1, \dots, n),$$



als auch mehrmals innerhalb des betrachteten Zeitraums (positive) Finanzaufwände verursachen, deren Summe dann  $Y_i$  bildet. Es wird zudem angenommen, dass die Risiken und damit deren kumulierten Finanzaufwände  $Y_i$  stochastisch unabhängig sind.

Der Gesamtaufwand, d. h. die Gesamtsumme aller Finanzaufwände eines Kollektivs von  $n$  Risiken, ergibt sich dann als folgende Zufallsvariable:

$$S^{\text{ind}} = \sum_{i=1}^n Y_i. \quad (1.11)$$

Repräsentiert  $Y_i$  beispielsweise im (Haupt-)Anwendungsgebiet der Schadenversicherungsmathematik den kumulierten Schaden des  $i$ -ten Risikos, so wird  $S^{\text{ind}}$  als **Gesamtschaden** (im individuellen Modell) bezeichnet.

Für die interessierende Zufallsvariable  $S^{\text{ind}}$  können weitere Kenngrößen bestimmt werden. Aufgrund der Linearität gilt für den Erwartungswert:

$$E(S^{\text{ind}}) = E\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n E(Y_i).$$

Die Varianz von  $S^{\text{ind}}$  lässt sich aufgrund der angenommenen Unabhängigkeit berechnen als:

$$\text{Var}(S^{\text{ind}}) = \text{Var}\left(\sum_{i=1}^n Y_i\right) = \sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i).$$

Somit folgt für den Variationskoeffizienten:

$$\text{Vko}(S^{\text{ind}}) = \frac{\sqrt{\text{Var}(S^{\text{ind}})}}{E(S^{\text{ind}})} = \frac{\sqrt{\sum_{i=1}^n \text{Var}(Y_i)}}{\sum_{i=1}^n E(Y_i)}$$

Wird zusätzlich angenommen, dass die  $Y_i$  *identisch verteilt* sind, so spricht man von einem **individuellen Modell für ein homogenes Kollektiv**.

Die beiden Spezialfälle identischer Erwartungswerte und identischer Varianzen der kumulierten Finanzaufwände, d. h.  $E(Y_i) = \mu$  und  $\text{Var}(Y_i) = \sigma^2 \forall i \in \{1, \dots, n\}$ , ermöglichen folgende Vereinfachungen, also insbesondere im Fall homogener Kollektive:

$$\begin{aligned} E(S^{\text{ind}}) &= n \cdot \mu \\ \text{Var}(S^{\text{ind}}) &= n \cdot \sigma^2 \\ \text{Vko}(S^{\text{ind}}) &= \frac{\sqrt{n \cdot \sigma^2}}{n \cdot \mu} = \frac{\sigma}{\sqrt{n} \cdot \mu} = \frac{\text{Vko}(Y_1)}{\sqrt{n}} \end{aligned}$$

Neben der Schätzung von Erwartungswert und Varianz des Gesamtaufwands  $S^{\text{ind}}$  kann auch dessen gesamte Verteilung  $P_{S^{\text{ind}}}$  von Interesse sein. Formal ergibt sich diese aus der Faltung der  $n$  Zufallsvariablen  $Y_1, \dots, Y_n$ :

$$P_{S^{\text{ind}}} = P_{Y_1} * \dots * P_{Y_n}$$

Im Fall homogener Kollektive wird die  $n$ -fache Faltung der Verteilung der  $Y_i$  gebildet:

$$P_{S^{\text{ind}}} = (P_{Y_1})^{*n}$$

Im Allgemeinen gelingt die (explizite) Berechnung der Verteilung des Gesamtaufwands nur in Spezialfällen und ist auch für ein homogenes Kollektiv äußerst aufwändig. Bei der Modellierung von  $S^{\text{ind}}$  kommen beispielsweise die Gamma- oder Lognormal-Verteilung zur Anwendung. Für gammad verteilte Zufallsvariablen und die Spezialfälle Exponential- und Erlang-Verteilung gelten folgende Zusammenhänge:

$$\begin{aligned}\Gamma(a, b)^{*n} &= \Gamma(a, n \cdot b) \\ \text{Exp}(a)^{*n} &= \Gamma(a, 1)^{*n} \\ &= \Gamma(a, n) = \text{Erl}(a, n) \quad a, b > 0, n \in \mathbb{N}.\end{aligned}$$

Durch den Wechsel der individuellen Betrachtungsweise *aller* Risiken, also auch derer ohne Finanzaufwand, hin zur ausschließlichen Berücksichtigung der *strikt positiven* Finanzaufwände eines Kollektivs (ohne Erfassung der jeweils betroffenen Risiken) erfolgt der Übergang zum kollektiven Modell.

### 1.3.3 Kollektives Modell

Auch im **kollektiven Modell** wird die Gesamtsumme aller durch die Risiken eines Kollektivs verursachten Finanzaufwände definiert. Dabei wird nicht berücksichtigt, welches Risiko des Kollektivs den jeweiligen Finanzaufwand verursacht hat. Stattdessen erfasst eine weitere Zufallsvariable  $N$  die nicht-negative Anzahl aller Finanzaufwände während des zugrunde liegenden Zeitraums im Kollektiv. Die einzelnen Finanzaufwände werden durch die Zufallsvariablen  $X_j$  mit  $j = 1, \dots, N$  beschrieben, wobei  $X_j$  der Höhe des Finanzaufwands des  $j$ -ten auslösenden Ereignisses entspricht. Das bedeutet, dass die Gesamtsumme aller Finanzaufwände eine zufällige Anzahl an Summanden besitzt, also eine Zufallssumme darstellt. Zudem wird angenommen, dass  $N, X_1, \dots, X_N$  stochastisch unabhängig und dass  $X_1, \dots, X_N \sim X$  identisch verteilt sind.

Der Gesamtaufwand des kollektiven Modells, d. h. die Gesamtsumme der ausgelösten Finanzaufwände, ergibt sich dann als folgende Zufallsvariable:

$$S^{\text{koll}} = \sum_{j=1}^N X_j = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbf{1}_{\{N=k\}} \sum_{j=1}^k X_j \quad (1.12)$$

Im Anwendungsgebiet der Schadenversicherungsmathematik entspricht dabei  $N$  der Schadenanzahl,  $X_j$  der Schadenhöhe des  $j$ -ten Schadens und  $S^{\text{koll}}$  dem **Gesamtschaden** (im kollektiven Modell).

Für den Erwartungswert gilt aufgrund der Modellannahmen nach der **ersten Formel von Wald**:

$$E(S^{\text{koll}}) = E(N) \cdot E(X),$$

d. h. der erwartete Gesamtaufwand entspricht dem Produkt aus der erwarteten Anzahl an Finanzaufwänden (bzw. auslösenden Ereignissen) und der erwarteten Höhe eines einzelnen Finanzaufwands. Im oben genannten Anwendungsfall entspricht also der erwartete Gesamtschaden dem Produkt aus erwarteter Schadenanzahl und erwarteter Einzelschadenhöhe.

Die Varianz des Gesamtaufwands ergibt sich nach der **zweiten Formel von Wald** als:

$$\text{Var}(S^{\text{koll}}) = E(N) \cdot \text{Var}(X) + (E(X))^2 \cdot \text{Var}(N).$$

Somit folgt für den Variationskoeffizienten:

$$\text{Vko}(S^{\text{koll}}) = \frac{\sqrt{\text{Var}(S^{\text{koll}})}}{E(S^{\text{koll}})} = \frac{\sqrt{E(N) \cdot \text{Var}(X) + (E(X))^2 \cdot \text{Var}(N)}}{E(N) \cdot E(X)} = \sqrt{\frac{(\text{Vko}(X))^2}{E(N)} + (\text{Vko}(N))^2}$$

Der Variationskoeffizient von  $S^{\text{koll}}$  ist also stets mindestens so groß wie der Variationskoeffizient der Anzahl  $N$ . Er kann aber sowohl größer als auch kleiner als der Variationskoeffizient der (identisch verteilten) einzelnen Finanzaufwände  $X_j$  sein.

Für den Spezialfall  $N \sim \mathcal{P}(\lambda)$  bezeichnet man die Verteilung des Gesamtaufwands  $S^{\text{koll}}$  auch als **zusammengesetzte Poisson-Verteilung** und erhält dann folgende vereinfachte Formeln:

$$\begin{aligned} E(S^{\text{koll}}) &= \lambda \cdot E(X) \\ \text{Var}(S^{\text{koll}}) &= \lambda \cdot E(X^2) \\ \text{Vko}(S^{\text{koll}}) &= \sqrt{\frac{1 + (\text{Vko}(X))^2}{\lambda}} \end{aligned}$$

Zudem ist folgende **Fundamentalformel** für die Analyse von  $S^{\text{koll}}$  und die Zurückführung auf die beiden Einzelkomponenten  $N$  und  $X$  hilfreich:

$$\psi_{S^{\text{koll}}}(t) = m_N(\psi_X(t)) \quad (1.13)$$

d. h. die charakteristische Funktion des Gesamtaufwands entspricht der Verkettung der wahrscheinlichkeitserzeugenden Funktion der Anzahl  $N$  und der charakteristischen Funktion der (identisch verteilten) einzelnen Finanzaufwände  $X_j$ .

Die Verteilung des Gesamtaufwands  $P_{S^{\text{koll}}}$  ergibt sich als gewichtete Summe der endlichen Faltungen der Verteilungen der Zufallsvariablen  $X_1, X_2, \dots$ :

$$P(S^{\text{koll}} \in A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot P\left(\sum_{j=1}^n X_j \in A\right) = \sum_{n=0}^{\infty} P(N = n) \cdot (P_X)^{*n}(A) \quad (1.14)$$

Exakte oder gar explizite Berechnungen der Verteilung von  $S^{\text{koll}}$  gelingen - wie im individuellen Modell bzgl.  $S^{\text{ind}}$  - nur in seltenen Fällen. Entsprechend stellt deren approximative Berechnung eine der Herausforderungen (in der Theorie) der Schadenversicherungsmathematik dar. Die wichtigsten Verteilungen für die Anzahl  $N$  stellen die Binomial-, Poisson- und Negative Binomialverteilung dar, welche zu einer einzigen parametrischen Klasse von Verteilungen, der sogenannten **Panjer-Klasse**, zusammengefasst und durch eine gemeinsame Rekursionsformel charakterisiert werden können. Von Bedeutung ist hierbei auch die **Panjer-Rekursion**, die für Anzahlverteilungen aus der Panjer-Klasse und für Zufallsvariable  $X_1, X_2, \dots$  auf einem äquidistanten Träger (z.B. Geldeinheiten)

$$d \cdot \mathbb{N}_0 = 0, d, 2d, 3d, \dots, \quad d > 0,$$

exakte Berechnungen der Verteilungsfunktion von  $S^{\text{koll}}$  ermöglicht.

Zwar beschreiben sowohl das individuelle als auch das kollektive Modell die gleiche Gesamtsumme

$$S^{\text{ind}} = S^{\text{koll}}, \quad (1.15)$$

dennoch besitzt das kollektive Modell gegenüber dem individuellen Modell mehrere Vorteile: Die Betrachtung einzelner auslösender Ereignisse (z. B. Schäden) und die Summation der Finanzaufwände dieser auslösenden Ereignisse erfordert keine Aggregation der Finanzaufwände pro Risiko und Zeitraum. Diese Zusammenfassung erweist sich zudem als realistischer bzgl. der Annahme unabhängig identisch verteilter Finanzaufwände und liefert im Allgemeinen eine bessere statistische Basis zur Schätzung der Verteilung von  $X$  als dies bei den nicht notwendig identisch verteilten  $Y_i$  im individuellen Modell der Fall ist.

Je nach Anwendungsfall ist für beide Modelle die Angemessenheit der Annahmen kritisch zu hinterfragen. Die Unabhängigkeit der Höhe der einzelnen Finanzaufwände wird verletzt,

wenn alle oder einige Risiken des Kollektivs derselben Gefahr ausgesetzt sind, z.B. Überschwemmung in der Wohngebäude-Versicherung. Bei Kumulereignissen können auch Abhängigkeiten zwischen Anzahl und Höhe der Finanzaufwände bestehen, z.B. steigen bei einer Überschwemmung mit zunehmendem Wasserstand zugleich Schadenanzahl und -höhe. In der Praxis werden diesbezüglich daher Finanzaufwände pro Ereignis (z.B. Event-Schäden) modelliert. Die Annahme, dass alle Finanzaufwände dieselbe Verteilung besitzen, wird beim individuellen Modell in der Praxis nur näherungsweise bei möglichst gleichartiger Zusammensetzung eines Kollektivs erfüllt. Im kollektiven Modell wird nicht erfasst, welches Risiko einen Finanzaufwand verursacht. Dort ist die Verteilung der Finanzaufwände nicht mehr die Eigenschaft eines einzelnen Risikos, sondern des Kollektivs. Die unterschiedlichen Finanzaufwände  $X_1, X_2, \dots$  entsprechen einer Anordnung, etwa einer chronologischen Reihenfolge, der in dem betrachteten Zeitraum eingetretenen auslösenden Ereignisse. Somit wird hier die Annahme identisch verteilter Finanzaufwände eher als unkritisch erachtet.

### Lernergebnisse (B3)

Die Studierenden können den Risikoausgleich im Kollektiv und den Vorteil homogener Bestände erklären. Sie sind in der Lage, das individuelle und das kollektive Modell der Risikotheorie zu beschreiben und die Unterschiede zwischen den beiden Modellen zu begründen. Zudem hinterfragen sie kritisch die Erfüllbarkeit der Voraussetzungen an konkreten (Praxis-)Beispielen. Die Formeln für Erwartungswert, Varianz und Variationskoeffizienten des Gesamtaufwands sind bekannt und konkrete Berechnungen können für einfache Beispiele durchgeführt werden. Außerdem kann formal die Verteilungsfunktion des Gesamtaufwands benannt und bei möglichen Spezialfällen explizit angegeben werden.

## 1.4 Modellierung von Versicherungsprozessen

### Kerninhalte

- Anwendung von Markov-Prozessen auf Versicherungsverträge
- Zustandsmodell der Personenversicherung
- Bonus-Malus-System in der Schadenversicherung
- Grenzen der Modelle

Zahlungsströme resultierend aus Versicherungsverträgen können durch stochastische Prozesse (vgl. Leitfaden zum Fach "Angewandte Stochastik") modelliert werden. Die relevanten Zustände und Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen ergeben sich dabei aus den Eigenschaften der jeweiligen Verträge.

In der Personenversicherung kommen Markov-Prozesse z. B. bei der Modellierung von zukünftigen Leistungen und Prämienzahlungen zum Einsatz. In Abbildung 1 ist ein vereinfachtes Zustandsmodell für die Pensionsversicherungsmathematik (in Anlehnung an das Heubeck-Modell) skizziert. Die versicherte Person befindet sich bei Eintritt in die betriebliche Altersversorgung im Zustand *aktiv*. Nun kann sich der Zustand der versicherten Person im Zeitverlauf ändern, so dass der Prozess unterschiedliche Zustände im Graphen annimmt (gemäß den entsprechenden Übergangswahrscheinlichkeiten).<sup>10</sup> Bedeutend für die aktuarielle Kalkulation ist nun die Annahme, dass der Prozess die Markov-Eigenschaft (vgl. Leitfaden zum Fach "Angewandte Stochastik") besitzt. Durch diese Annahme ergeben sich verschiedene Vereinfachungen in der Kalkulation. In vielen Fällen ist diese Annahme auch sachgerecht. Die Annahme ist z. B. kritisch in der Rentenphase zu bewerten. Denn hier können sich Überlebenswahrscheinlichkeiten signifikant dadurch unterscheiden, ob eine versicherte Person aus dem Zustand *aktiv* oder *invalid* das Rentenalter erreicht hat. Auch werden für die Abbildung von komplexeren Sachverhalten z.T. sehr viele Zustände benötigt (z. B. wenn die Höhe der Leistungen bei Invalidität vom Zeitpunkt des Eintritts der Invalidität abhängig ist).

<sup>10</sup>Dieses Zustandsmodell dient der Illustration. Einzelne Übergangswahrscheinlichkeiten sind hier irrelevant.

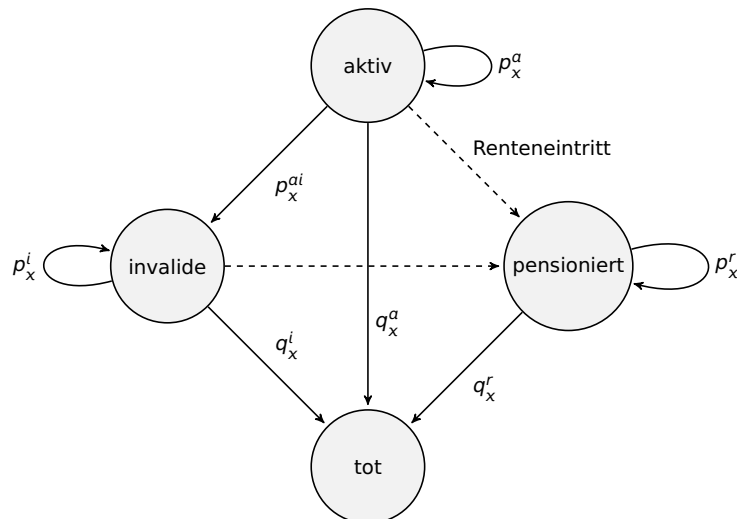


Abbildung 1: Vereinfachtes Zustandsmodell in der Pensionsversicherung

In der Schadenversicherung kommt (im Kontext des kollektiven Modells) der Poisson-Prozess als Vertreter der Markov-Prozesse häufig zum Einsatz. Hier wird angenommen, dass die zufällige Anzahl der Schäden durch einen Poisson-Prozess  $\{N_t\}_{t \geq 0}$  mit Intensität  $\lambda > 0$  mit Zustandsraum  $\mathbb{N}_0$  dargestellt werden kann. Der Prozess

$$S_t^{\text{koll}} = \sum_{j=1}^{N_t} X_j$$

modelliert dann den Gesamtschaden des Vertrags im Zeitverlauf. Die Verteilung von  $S_t$  für ein  $t \geq 0$  lässt sich mit Methoden der Wahrscheinlichkeitstheorie analysieren und auswerten.

Als praktische Anwendung können bei der Tarifierung zur Prämien differenzierung Bonus-Malus-Systeme basierend auf Markov-Ketten verwendet werden. Dabei hängt die individuelle Prämie von der beobachteten Schadenvergangenheit ab. Stellt sich hier im Zeitablauf ein Gleichgewichtszustand (Stationarität) ein, so spricht man von einer stationären Verteilung. Beispielsweise gibt es in der Kraftfahrtversicherung Schadenfreiheitsklassen (kurz SF-Klassen), bei denen der Versicherungsnehmer nach einem schadenfreien Jahr jeweils in die nächsthöhere Klasse bis zum Erreichen der höchsten Stufe aufsteigt oder in Abhängigkeit der Schadenanzahl in eine niedrigere Klasse zurückgestuft wird. Das SF-Klassenmodell wird in der Praxis jedoch durch weitere Besonderheiten, wie z. B. Rabattschutz (sog. rabattgeschützte SF-Klasse) oder Sondereinstufungen (sog. fiktive SF-Klasse) für Zweitfahrzeuge etc., von seiner Reinform verwässert. Außerdem ist das Erreichen eines Gleichgewichtszustands fraglich, da es in der Realität im zeitlichen Verlauf zu einer zunehmenden Anzahl von Risiken in der höchsten SF-Klasse kommt und deshalb gelegentlich SF-Staffelverlängerungen durchgeführt werden.

### Lernergebnisse (B3)

Die Studierenden können das Zustandsmodell der Personenversicherung und Bonus-Malus-Systeme erklären. Sie können Beispiele einfacher Versicherungsprozesse aus allen Sparten mit Markov-Prozessen modellieren und Grenzen dieser Modelle erörtern.

## 1.5 Risikoteilung

### Kerninhalte

- Proportionale vs. nicht-proportionale Risikoteilung
- Gründe und Ziele von Risikoteilung
- Grundbegriffe aus der Rückversicherung
- Formen von Risikoteilung
- Berechnung von Risikoanteilen (Selbstbehalt und Zession)
- Anwendungsbeispiele aus der Praxis

### 1.5.1 Grundlagen und Ziele von Risikoteilung

Versicherungsunternehmen können die mit dem Versicherungsvertrag übernommenen Risiken mit anderen Akteuren auf dem Versicherungsmarkt teilen. Dabei werden zunächst zwei grundlegende Arten von Risikoteilung unterschieden, nämlich **proportionale** Formen der Gestalt

$$X = (1 - q) \cdot X + q \cdot X \quad (0 < q < 1) \quad (1.16)$$

sowie **nicht-proportionale** Formen standardmäßig der Gestalt

$$X = \min(X; a) + \max(X - a; 0) \quad (a > 0), \quad (1.17)$$

wobei  $X$  im Allgemeinen die Höhe eines Einzelrisikos bzw. einer Versicherungsleistung bezeichne. Im Bereich der Schaden(rück-)versicherung beschreibt  $X$  kontextabhängig die Höhe eines Einzelschadens, eines (Kumul-)Schadenereignisses oder des (Jahres-)Gesamtschadens eines Kollektivs. Die Größe  $\min(X; a)$  wird dabei häufig als **Erstrisiko** bezeichnet, während

$$(X - a)^+ := \max(X - a; 0)$$

das **Zweitrisiko** darstellt. Die einzelnen Formen von Risikoteilung werden nachfolgend in den Abschnitten 1.5.2 und 1.5.3 beschrieben.

Risikoteilung findet bei Erstversicherungsunternehmen im Wesentlichen

- im **direkten Geschäft** zwischen Versicherungsnehmer und (Erst-)Versicherer sowie
- im Rahmen der **Rückversicherung** zwischen Erst- und Rückversicherer

statt, wobei dies strukturell bzw. mathematisch betrachtet keinen Unterschied bedeutet. Im direkten Geschäft führt die Risikoteilung zu Selbsthalten beim Versicherungsnehmer, in der Rückversicherung zu Selbsthalten, der sog. **Priorität**, beim Erstversicherer.

Die Risikoteilung erfolgt aus einer Vielzahl von Gründen und Zielen. Im Vordergrund stehen dabei keine gewinnorientierten, sondern risikopolitische Erwägungen, um die Folgen des Risikoeintritts zu verkleinern und die Risikoübernahme betriebswirtschaftlich für das Versicherungsunternehmen zu verbessern. Im direkten Geschäft spielen die Beeinflussung des moralischen Risikos, Kostenreduktion bei den Versicherungsnehmern, die sich als ein überdurchschnittlich gutes Risiko erachten, und Ausschluss von Kleinschäden beim Erstversicherer im Falle nicht-proportionaler Risikoteilung wichtige Rollen. Im Rahmen der Rückversicherung liegt der Hauptgrund in der Verringerung des versicherungstechnischen Risikos beim Erstversicherer, nämlich insbesondere der Schutz vor zufallsbedingten Großschäden wie z. B. den finanziellen Auswirkungen von Naturereignissen. Weitere Ziele von Rückversicherung liegen aus Sicht des Erstversicherers in einer Verbesserung der Solvenz, Reduktion der Kapitalkosten, Homogenisierung des Portefeuilles, Ausweitung der Zeichnungskapazität für Großrisiken, Unterstützung beim Ausbau neuer Sparten, Atomisierung von Risiken

und aus Sicht des Rückversicherers in einer besseren Diversifikation der Risiken als beim Erstversicherer.

Im Zusammenhang mit Rückversicherung sind auch folgende Unterscheidungen relevant: Zum einen bezeichnet **aktive** Rückversicherung das Anbieten von Rückversicherungskapazitäten und die Zeichnung von Rückversicherungsdeckungen. Fragt im Gegenzug ein Erst- oder Rückversicherer Rückversicherungsschutz nach, handelt es sich zum anderen um **passive** Rückversicherung. Zudem wird von **Retrozession** gesprochen, wenn in Rückdeckung genommene Risiken eines Rückversicherers wiederum (in Teilen) an andere Rückversicherer weitergegeben werden. Außerdem gibt es eine Unterteilung in **obligatorische** und **fakultative** Rückversicherung. Die obligatorische Form verpflichtet den Erstversicherer zur Übertragung aller vertraglich definierten Risiken ohne Ablehnungsrecht des Rückversicherers. Im fakultativen Falle erfolgt die Abgabe und Annahme von Risiken individuell und auf einzelvertraglicher Basis. Während die obligatorische Rückversicherung sich durch eine verhältnismäßig einfache Administration und den automatischen Einsatz im Massengeschäft auszeichnet und sowohl in der proportionalen wie auch der nicht-proportionalen Rückversicherung anzutreffen ist, zeichnet sich die fakultative Rückversicherung durch Einzelvereinbarungen aus und ist häufig in der nicht-proportionalen Risikoteilung gegeben.

Im Bereich der Leben-Rückversicherung, welche überwiegend aus proportionalen Formen besteht, wird nach Art der Abrechnung zwischen **Originalbasis**<sup>11</sup> und **Risikobasis** unterschieden. Bei RV-Verträgen auf Originalbasis erhält der Rückversicherer anteilig die Spar- und Risikoprämie<sup>12</sup> und muss ein Deckungskapital bilden. Hierbei gibt es die Variante mit und ohne Reservedepot des Rückversicherers beim Erstversicherer. Bei RV-Verträgen auf Risikobasis erhält der Rückversicherer nur einen Risikobeitrag und bildet kein Deckungskapital.

In der Praxis findet Risikoteilung häufig zwischen mehr als zwei Akteuren statt. Versicherungsnehmer tragen an ihren Originalrisiken zunächst bestimmte Selbstbehalte (Franchisen) und transferieren die übersteigenden Teile an Erstversicherer. Diese übertragen dann die transferierten Teile der Originalrisiken ggf. teilweise an Rückversicherer, welche unter Umständen wiederum (in Teilen) retrozediert werden. Weitere, im Folgenden nicht näher diskutierte Formen der Risikoteilung sind z. B. Mitversicherung, Konsortialverträge und Versicherungs-pools.

### 1.5.2 Proportionale Risikoteilung

*Hinweis:* Dieser Abschnitt verwendet die Notation des individuellen Modells<sup>13</sup> aus Formel (1.11) in Kapitel 1.3.2 mit den dazugehörigen Begriffen aus der Schadenversicherung (d. h. Schaden anstelle von Finanzaufwand etc.):

$$S^{\text{ind}} = \sum_{i=1}^n Y_i.$$

Bei der proportionalen Risikoteilung werden die Schäden zwischen den beiden Vertragspartnern proportional aufgeteilt. Dabei stehen diese Proportionen bereits bei Vertragsbeginn fest und sind unabhängig von etwaigen Schadenhöhen. Im Fall von Rückversicherung teilen sich dadurch Erst- und Rückversicherer das versicherungstechnische und -vertragliche Schicksal, welches unabhängig von den Entscheidungen des Erstversicherers ist. Im Rahmen der **Schicksalsteilung** übernimmt der Rückversicherer Anteile zufälliger Schäden und somit Teile des (Erst-)Versicherungsvertragsrisikos, aber nicht das kaufmännische oder unternehmerische Risiko des Erstversicherers. Proportionale Formen der Risikoteilung sind durch eine verhältnismäßig einfache Struktur und einfache quantitative Auswertbarkeit einerseits sowie geringe Flexibilität und geringe Eignung zur Erreichung gezielter Entlastungseffekte andererseits gekennzeichnet.

<sup>11</sup>Auch Bruttobasis oder Normalbasis genannt.

<sup>12</sup>In Deutschland netto ohne Beteiligung am Kostenprozess.

<sup>13</sup>Die hier getroffene Modellwahl dient der einheitlichen Beschreibung innerhalb dieses Abschnitts und stellt nur eine Möglichkeit der Bezeichnung dar.

Im direkten Geschäft existiert die proportionale Risikoteilung ausschließlich in Form der **proportionalen Selbstbeteiligung**. Sie tritt zum Beispiel bei partiellen Absicherungen von Pensionsverpflichtungen in der betrieblichen Altersversorgung oder bei Unterversicherung in der Hausratversicherung auf. Übernimmt das Versicherungsunternehmen einen Anteil  $q$  ( $0 < q < 1$ ) von jedem Schaden  $Y$ , so trägt das Versicherungsunternehmen den Anteil  $\underline{Y} = q \cdot Y$ , während der restliche Anteil  $\underline{Y} = (1 - q) \cdot Y$  beim Versicherungsnehmer verbleibt.

Die wichtigsten Formen der proportionalen Rückversicherung stellen die Quoten- und die Summenexzedentenrückversicherung dar:

Bei der **Quotenrückversicherung** einigen sich die Parteien in Analogie zur proportionalen Selbstbeteiligung auf eine feste Quotenabgabe  $q$  mit  $0 < q < 1$ , die auf den Gesamtschaden des Kollektivs wirkt. Die Abgabe bzw. Zession, d. h. der vom Rückversicherer übernommene Anteil am Gesamtschaden, ist gegeben durch

$$\underline{\underline{S}}^{\text{ind}} = \sum_{i=1}^n q \cdot Y_i = q \cdot \sum_{i=1}^n Y_i = q \cdot S^{\text{ind}},$$

während im Selbstbehalt des Erstversicherers der Wert  $\underline{S}^{\text{ind}} = (1 - q) \cdot S^{\text{ind}}$  verbleibt. Die Größe  $1 - q$  wird daher auch als Quotenselbstbehalt bezeichnet. Die Quotenrückversicherung eignet sich beim Auftreten vieler Klein- und Mittelschäden, zur Verringerung der Solvabilität, zum Aufbau von Geschäft oder zur Reduktion des Einflusses der größten Sparte (z. B. in der Kfz-Versicherung). In der Lebensversicherung ist anders als in der Schadenversicherung die Höhe der Versicherungsleistung bekannt.

Im Unterschied zur Quotenrückversicherung wird bei der **Summenexzedentenrückversicherung** ein Maximum  $v_0$  (Selbstbehalt) festgelegt. Wenn der  $i$ -te Versicherungsvertrag nun eine Versicherungssumme  $v_i$  (= Höchstgrenze der Entschädigung) besitzt, dann übernimmt der Rückversicherer von jedem Schaden den Anteil

$$q_i = \frac{\max\{v_i - v_0; 0\}}{v_i}.$$

Diese vertragsindividuelle Quote bestimmt dann die Höhe der Rückversicherungsleistung im  $i$ -ten Vertrag mit kumulierter Schadenhöhe  $Y_i \geq 0$  als

$$\underline{\underline{Y}}_i = q_i \cdot Y_i,$$

während der beim Erstversicherer verbleibende Teil von Vertrag  $i$

$$\underline{Y}_i = (1 - q_i) \cdot Y_i$$

beträgt. Selbstbehalt und Zession lauten dann:

$$\begin{aligned} \underline{S}^{\text{ind}} &= \sum_{i=1}^n \underline{Y}_i = \sum_{i=1}^n (1 - q_i) \cdot Y_i \\ \underline{\underline{S}}^{\text{ind}} &= \sum_{i=1}^n \underline{\underline{Y}}_i = \sum_{i=1}^n q_i \cdot Y_i \end{aligned}$$

Diese Form von Rückversicherung dient der Homogenisierung des Portefeuilles und der Reduktion von Spitzenrisiken und findet sich u.a. in der Feuer-, Unfall- oder Lebensversicherung. Ein Erstversicherer kann dadurch auch große Risiken zeichnen, wie z.B. hohe Versicherungssummen in der Risikolebensversicherung oder hohe Renten bei Berufsunfähigkeit. Typischerweise vereinbart der Rückversicherer eine Haftungsbegrenzung (in Form eines Vielfachen von  $v_0$ ). Zum Teil werden mehrere Summenexzedentenrückversicherungsverträge so aneinander gereiht, dass die erreichte Kapazität (= Maximum + Haftungstrecke) jeweils das Maximum des darauf folgenden Vertrages darstellt. Dies wird als **Layerung** bezeichnet.



### 1.5.3 Nicht-proportionale Risikoteilung

*Hinweis:* Dieser Abschnitt verwendet die Notation des kollektiven Modells<sup>14</sup> aus Formel (1.12) in Kapitel 1.3.3 mit den dazugehörigen Begriffen aus der Schadenversicherung (d. h. Schaden anstelle von Finanzaufwand etc.):

$$S^{\text{koll}} = \sum_{j=1}^N X_j$$

Alle Formen der Risikoteilung, die keine proportionale Aufteilung vorsehen, werden als nicht-proportional bezeichnet. Diese sind durch eine im Gesamtergebnis bzw. in der Kombination komplizierte Struktur (z. B. Naturgefahrenprogramm in der Rückversicherung) und schwierigere quantitative Analysen, aber flexible Gestaltungsmöglichkeiten und gute Eignung zur Erreichung gezielter Effekte charakterisiert.

Im direkten Geschäft dominiert unter den nicht-proportionalen Formen der Risikoteilung die sogenannte **Abzugsfranchise**. Zwischen dem Versicherungsnehmer und dem Erstversicherer wird eine Franchisegrenze absoluter Höhe  $a > 0$  vereinbart. Der Versicherungsnehmer trägt bei einem Schaden  $X$  das Erstrisiko  $\underline{X} = \min(X; a)$ , während das Zweitrisko, also der die Franchisegrenze  $a$  übersteigende Teil,

$$\underline{\underline{X}} = (X - a)^+ = \max(X - a; 0)$$

auf den Erstversicherer transferiert wird. Die Abzugsfranchise ist in vielen Zweigen der Schadenversicherung, etwa als Selbstbehalt in der Kraftfahrt-Kaskoversicherung, oder in der Privaten Krankenversicherung üblich.

Bei der selteneren **Integralfranchise** trägt der Versicherungsnehmer nur dann einen Selbstbehalt, wenn der Schaden kleiner als die Franchisegrenze  $a$  ist, nämlich den Teil

$$\underline{X} = X \cdot \mathbf{1}_{\{X < a\}}.$$

Das Erstversicherungsunternehmen übernimmt also den Teil

$$\underline{\underline{X}} = X \cdot \mathbf{1}_{\{X \geq a\}}.$$

Die Integralfranchise ist in der Transport- und der Haftpflichtversicherung anzutreffen.

Bei der **Zeitfranchise** trägt der Versicherungsnehmer jeden Schaden, der ab Beginn der Versicherungsdauer in einem gesetzlich oder vertraglich festgelegten Zeitraum (sog. Wartezeit) eintritt. Dies findet Anwendung in der privaten Kranken- und Pflegeversicherung sowie teilweise in der Rechtsschutzversicherung.

Die nicht-proportionale Rückversicherung weist eine Vielzahl von Rückversicherungsformen auf. Hier werden mit der (Einzel-)Schadenexzedenten-, der Kumulschadenexzedenten- und der Jahresschadenexzedentenrückversicherung nur die wichtigsten vorgestellt.

Die **(Einzel-)Schadenexzedentenrückversicherung** wird auch als XL-Rückversicherung (englisch: excess of loss) bezeichnet. Die Vertragsparteien vereinbaren eine Priorität  $a > 0$  und optional ein Limit  $l$ . Der Rückversicherer übernimmt den die Priorität übersteigenden Teil eines Einzelschadens  $X$  bis zum Limit:

$$\underline{\underline{X}} = \min\{\max\{X - a; 0\}; l\} \quad \text{bzw. im unlimitierten Fall } \underline{\underline{X}} = \max\{X - a; 0\}$$

Für Selbstbehalt und Zession gilt dann im unlimitierten Fall:

$$\underline{S}^{\text{koll}} = \sum_{j=1}^N (X_j - \max\{X_j - a; 0\}) = \sum_{j=1}^N \min\{a; X_j\}$$
$$\underline{\underline{S}}^{\text{koll}} = \sum_{j=1}^N \max\{X_j - a; 0\}$$

<sup>14</sup>Die hier getroffene Modellwahl dient der einheitlichen Beschreibung innerhalb dieses Abschnitts und stellt nur eine Möglichkeit der Bezeichnung dar.

In der Praxis ist die Haftung des Rückversicherers meist limitiert und man spricht vom **Layer  $l$  xs.  $a$**  und nennt die Obergrenze  $a + l$  **Plafond**. Es genügt jedoch den unlimitierten Fall zu betrachten, da sich aufgrund der folgenden **Layer-Identität** ein limitierter Layer als Differenz zweier unlimitierter Layer darstellen lässt:

$$\min\{\max\{X - a; 0\}; l\} = \min\{X; a + l\} - \min\{X; a\} = \max\{X - a; 0\} - \max\{X - (a + l); 0\} \quad (1.18)$$

Die Schadenexzedentenrückversicherung wirkt pro Risiko und eignet sich besonders zum Schutz vor Großschäden oder Prognose- und Änderungsrisiko bei langabwickelnden Zweigen der Kompositversicherung. Sie ist die wichtigste nicht-proportionale Rückversicherungsform und in den meisten Kompositzweigen, z. B. in der Haftpflichtversicherung, anzutreffen.

Im Unterschied zur Schadenexzedentenrückversicherung wird die **Jahresüberschadenexzedentenrückversicherung** auf den Gesamtschaden  $S^{\text{koll}}$  eines Jahres angewendet. Sie wird auch Stop-Loss-Rückversicherung (kurz SL) genannt. Die Vertragsparteien vereinbaren erneut eine Priorität  $a > 0$ , auch Stop-Loss-Punkt genannt, und optional ein Limit  $l$ . Der Rückversicherer übernimmt den die Priorität übersteigenden Teil des Gesamtschadens bis zum Limit:

$$\underline{S^{\text{koll}}} = \min\{\max\{S^{\text{koll}} - a; 0\}; l\}$$

Für den Selbstbehalt gilt dann:

$$\underline{S^{\text{koll}}} = \min\{S^{\text{koll}}; a\}$$

Bei der SL-Rückversicherung werden Priorität und Limit in der Praxis als Prozentsatz der Gesamtprämie vereinbart, also nicht auf absolute Größenordnungen der Schäden bezogen. Ein Anwendungsfall stellt die Absicherung der Jahreselementarschadenlast dar, insbesondere wenn die Ereignisabgrenzung von Kumulschäden problematisch ist.

Zum Schutz vor Kumulschäden eignet sich auch die **Kumulschadenexzedentenrückversicherung** (kurz CAT-XL). Sie weist große Analogien zur XL- und SL-Rückversicherung auf und bezieht sich auf die Schadenlast pro Kumulereignis anstelle der pro Risiko bzw. Jahr.

#### 1.5.4 Prämienkalkulation bei Selbsthalten

Während sich die in Abschnitt 1.2 dargestellte Prämienkalkulation auf die originären Schadenhöhen bezieht, wird nachfolgend explizit zwischen Schäden und **Entschädigungen** (Versicherungsleistungen) unterschieden. Formal ergeben sich die vertraglich vereinbarten Entschädigungen bei Eintritt eines (Einzel-)Schadens  $X$  als transformierte Größen

$$Z = g(X).$$

Dabei ist die Transformation  $g$  eine monoton wachsende Funktion mit  $g(x) \leq x$ . Die (zufälligen) expliziten **Selbstbehalte** des Versicherungsnehmers entsprechen somit der die Risikoteilung ausdrückenden Differenz

$$X - Z = X - g(X).$$

Offenbar hat sich die Prämienkalkulation bei Vereinbarung von Selbsthalten auf die Entschädigungen  $Z = g(X)$  zu beziehen. Diese (Netto-)Entschädigungen können je nach Versicherungsschutz sehr vielfältig gestaltet sein. In der Regel liegen Kombinationen der drei folgenden Prototypen proportionaler bzw. nicht-proportionaler Risikoteilung (vgl. Abschnitte 1.5.2 und 1.5.3) vor:

- |                                             |                                               |
|---------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| (1) <b>Proportionale Selbstbeteiligung:</b> | $Z = g_1(X) := p \cdot X, \quad p \in (0, 1)$ |
| (2) <b>Abzugsfranchise</b> (Exzedent):      | $Z = g_2(X) := (X - a)^+, \quad a > 0$        |
| (3) <b>Haftungsbegrenzung</b> (Limit):      | $Z = g_3(X) := \min(X, L), \quad L > 0$       |

Offenbar sind die Varianten (1) bis (3) Spezialfälle der folgenden verallgemeinerten Entschädigung

$$Z := p \cdot \min((X - a)^+, L) = \begin{cases} 0, & X \leq a, \\ p \cdot (X - a), & a < X \leq a + L, p \in (0, 1), a, L > 0, \\ p \cdot L, & a + L < X, \end{cases} \quad (1.19)$$

In den meisten Ansätzen der Kalkulation basiert die Prämie auf dem **Erwartungswert**

$$E(Z) = E[p \cdot \min((X - a)^+, L)] = p \cdot \int_a^{a+L} (1 - F(x)) dx,$$

wobei hier  $F$  die Verteilungsfunktion der Einzelschadenhöhe  $X$  ist.

In selteneren Fällen wird die Prämienkalkulation auch die **höheren Momente** oder die gesamte Verteilung bzw. Verteilungsfunktion der Entschädigungen  $Z$  berücksichtigen. Die Verteilungsfunktion von  $Z = p \cdot \min((X - a)^+, L)$  ist

$$F_Z(z) := P(p \cdot \min((X - a)^+, L) \leq z) = \begin{cases} 0, & z < 0, \\ F\left(a + \frac{z}{p}\right), & 0 \leq z \leq p \cdot L, \\ 1, & p \cdot L < z. \end{cases}$$

Für die höheren Momente ergibt sich daraus (nach partieller Integration)

$$E(Z^n) = n \cdot \int_0^{p \cdot L} z^{n-1} \cdot \left(1 - F\left(a + \frac{z}{p}\right)\right) dz = p^n \cdot n \cdot \int_a^{a+L} (x - a)^{n-1} \cdot ((1 - F(x))) dx.$$

Selbstverständlich sind durch Entschädigungen vom Typ (1.19) nicht alle einschlägigen Varianten expliziter Selbstbehalte bzw. Versicherungsleistungen abgedeckt. So fehlt hier z. B. die **Integralfranchise** (vgl. Abschnitt 1.5.3). Auch komplexere Ansätze der proportionalen Risikoteilung zwischen Erst- und Rückversicherer, wie etwa bei der **Summenexzedenten-Rückversicherung** (vgl. Abschnitt 1.5.2) werden nicht erfasst.

Neben den dargestellten expliziten Selbstbehalten gibt es am Versicherungsmarkt weitere Varianten von Selbstbehalten, die als **implizite Selbstbehalte** bezeichnet werden können.

### Lernergebnisse (B3)

Die Studierenden können die wichtigsten Formen und Zielsetzungen von Risikoteilung erklären. Insbesondere kennen Sie die dargelegten grundlegenden Begriffe und Formen der Rückversicherung. Sie sind in der Lage, Risikoanteile (Selbstbehalt und Zession) für verschiedene Formen von Risikoteilung zu berechnen und auf Beispiele aus der Praxis anzuwenden. Außerdem können sie angemessene Prämien für Entschädigungen (Schäden abzüglich Selbstbehalte) kalkulieren.

## 2 Grundwissen Schadenversicherungsmathematik

### 2.1 Schadenkennzahlen

#### Kerninhalte

- Datentypen
- Exposuremaße
- Schadenkennzahlen für Bestände

Die Tarifierung in der Schadenversicherung ist – insbesondere in Abgrenzung zur Lebensversicherung – auf sehr große Datenmengen gestützt. Dabei sind zwei Arten von Daten zu unterscheiden:

- **Schadendaten:** Die Schadendaten beschreiben die vorliegenden Schadenereignisse und betreffen Angaben zu den folgenden Merkmalen:
  - **Zeitpunkt** des Schadenereignisses (Datum, Versicherungsperiode etc.);
  - **Art** und **Ursache** des Schadenereignisses (z. B. Feuer, überschwemmung, Sturm etc.);
  - **Sachlicher Bezug:** versichertes Objekt (z. B. Haus, Kfz etc.);
  - **Ort** des Schadenereignisses (z. B. In-, Ausland);
  - **Entschädigung:** Die Höhe der Versicherungsleistung richtet sich nach den vertraglichen Regelungen der versicherungstechnischen Einheit (Vertrag).

Diese Schadendaten bilden für aktuelle und repräsentative historische Perioden in ihrer ggf. aufbereiteten Gesamtheit die Schadenstatistik. Sie bildet die Grundlage der Tarifierung.

- **Bestandsdaten:** Neben den Schadendaten sind die Daten der zugehörigen versicherten Bestände von Bedeutung. Diese Bestandsdaten charakterisieren – unabhängig von Schadenereignissen – die Gegebenheiten der versicherungstechnischen Einheiten, etwa durch Angaben über:
  - die **Versicherungssumme** bzw. **Deckungssumme** (Höchstgrenze der Entschädigung);
  - die **Ausprägungen** der **Tarifmerkmale** (Vertragsdaten), z. B. persönliche Daten des Versicherungsnehmers (Alter, Wohnort etc.) oder Daten über das versicherte Objekt und seine Nutzung.

Die Kenntnis der vollständigen Bestandsdaten ist für die Tarifierung unerlässlich. Andernfalls könnte man z. B. die Schadenanzahlen eines Bestandes nicht sinnvoll zur Hochrechnung der **erwarteten Schadenanzahl** (Schadenhäufigkeit) pro Risiko (und z. B. pro Jahr) heranziehen.

Spezielle Maßzahlen, die in der Schadenversicherung besondere Bedeutung haben, sind die **Exposuremaße**. Als **Exposure** bezeichnet man dabei das Risiko oder konkreter das Gefährdungspotenzial einer versicherungstechnischen Einheit (Vertrag) oder eines (versicherten) Bestandes. Entsprechend bewerten Exposuremaße das versicherungstechnische Risiko bzw. den Schadenbedarf einer versicherungstechnischen Einheit oder eines Bestandes. Qualitätskriterien für Exposuremaße sind die Proportionalität zum Risiko, die Praktikabilität und die Zeitstabilität des Maßes.

Bekannte Beispiele für Exposuremaße für Bestände sind die folgenden **Volumenmaße:**

- **Jahreseinheiten** = Anteile eines Jahres, für die Versicherungsschutz besteht,

- **Anzahl der Verträge,**
- **Anzahl der Risiken,**
- **Kumulierte Versicherungssumme,**
- **Summe der Beiträge.**

Nachfolgend werden die wichtigsten der in der Praxis verwendeten Schadenkennzahlen zur Beschreibung von (Teil-)Beständen einer festen Periode vorgestellt. In diese Kennzahlen gehen die folgenden Variablen ein:

- $n =$  **Anzahl der Verträge** (Risiken)
- $\alpha_i =$  **Jahreseinheit** des  $i$ -ten Vertrages,  $i = 1, \dots, n$
- $VS_i =$  **Versicherungssumme** des  $i$ -ten Vertrages,  $i = 1, \dots, n$
- $b_i =$  **Jahresbeitrag** des  $i$ -ten Vertrages,  $i = 1, \dots, n$
- $N =$  zufällige **Anzahl der Schäden**
- $X_j =$  zufällige Höhe des  $j$ -ten **Einzelschadens**,  $j = 1, \dots, N$

Aus diesen Größen lassen sich die folgenden, den Bestand charakterisierenden Schadenkennzahlen ableiten:

Die **Anzahl der Jahreseinheiten**, die bei Betrachtung eines Zeitraums von genau einem Jahr der **durchschnittlichen Anzahl der Verträge** entspricht,

$$n_o := \sum_{i=1}^n \alpha_i$$

berücksichtigt, dass die Verträge ggf. nicht über die volle Versicherungsperiode (Jahr) im Bestand sind. Sind sämtliche Verträge das volle Versicherungsjahr im Bestand versichert, gilt  $\alpha_i = 1$  für  $i = 1, \dots, n$  und somit  $n_o := n$ .

Die **Schadenhäufigkeit, Schadenfrequenz** oder **durchschnittliche Schadenanzahl pro Vertrag**

$$H := \frac{\text{Anzahl der Schäden}}{\text{Anzahl der Jahreseinheiten}} = \frac{N}{n_o}$$

ist nicht mit dem Anteil der Verträge, die (mindestens) einen Schaden verursachen, zu verwechseln. Während letztere höchstens 100 % beträgt, kann die durchschnittliche Schadenanzahl pro Vertrag und Jahr durchaus größer als 1 sein, wie etwa in der Krankenversicherung.

Für  $N > 0$  ist der **Schadendurchschnitt** oder die **durchschnittliche Schadenhöhe**

$$D := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Anzahl der Schäden}} = \frac{\sum_{j=1}^N X_j}{N} = \frac{S}{N}$$

definiert.  $D$  basiert auf den Größen des kollektiven Modells (vgl. Abschnitt 1.3.3), die Anzahl  $n$  der Verträge geht nicht ein.

Der **Schadenbedarf**

$$SB := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Anzahl der Jahreseinheiten}} = \frac{S}{n_o} = \frac{N}{n_o} \cdot \frac{S}{N} \\ = H \cdot D = \text{Schadenhäufigkeit} \cdot \text{Schadendurchschnitt}$$

quantifiziert den Geldbedarf, der im Mittel pro Jahreseinheit<sup>15</sup> eingenommen werden muss, um die kumulierten Schadenaufwendungen exakt zu decken. Die Anzahl der Schäden ( $N$ ) geht nicht in den Schadenbedarf ein, sie kürzt sich heraus.

<sup>15</sup>D.h. anschaulich pro Vertrag, der über den gesamten Zeitraum eines Jahres im Bestand ist.

## Die **Summe der verdienten Beiträge**

$$b := \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot b_i$$

berücksichtigt (in vereinfachter Darstellung), dass die Jahresbeiträge bei Neuabschluss oder Beendigung der Verträge im laufenden Jahr nur anteilig in die kumulierten Prämien eingehen. Die **verdienten Beiträge** ergeben sich aus den **gebuchten Beiträgen** eines Geschäftsjahres, also den tatsächlich fällig gewordenen Beiträgen, zuzüglich den Beitragsüberträgen aus dem Vorjahr und abzüglich der Beitragsüberträge für das Folgejahr.

## Die **Schadenquote**

$$SQ := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Summe der verdienten Beiträge}} = \frac{S}{b}$$

sollte möglichst unter 100 % liegen, ihre durchschnittlichen Werte schwanken allerdings innerhalb der verschiedenen Zweige der Schadenversicherung nicht unerheblich. Die geringsten Schadenquoten weisen in der Regel die Unfall-, Hausrat- und Haftpflichtversicherung mit ca. 50 % bis 70 % auf, während im Bereich der Kraftfahrtversicherung, insbesondere der Kraftfahrthaftpflichtversicherung, Schadenquoten über 90 % die Regel sind.

## Die **Schaden-Kosten-Quote** oder **Combined Ratio** (kurz CR)

$$CR := \frac{\text{Gesamtschaden} + \text{Kumulierte Ver- und Betriebskosten}}{\text{Summe der verdienten Beiträge}} = \frac{S + K}{b}$$

vermittelt einen weiterführenden Blick auf den Gewinn des Bestandes: Während die Schadenquote das rein versicherungstechnische Verhältnis von Schäden und Prämien erfasst, gehen in die Combined Ratio auch Kosten ein – nicht aber Kapitalerträge und Steuern. Combined Ratios sind natürlich größer als die Schadenquoten und liegen in der gesamten Schadenversicherung in der Regel zwischen 90 % und 100 %. Im Bereich der Kraftfahrtversicherung finden sich häufig Schaden-Kosten-Quoten um die 100%, also am Rande der Auskömmlichkeit.

## Die **durchschnittliche kumulierte Versicherungssumme**

$$v := \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot v_i$$

berücksichtigt wiederum die Jahreseinheiten. Wären alle Verträge über das volle Geschäftsjahr versichert, so wäre  $v$  die Summe sämtlicher Versicherungssummen des Bestands, auch als **versicherte Summe des Bestandes** bezeichnet. Die Bezeichnung „durchschnittlich“ kennzeichnet, dass eine gewichtete Summe vorliegt, die die Zu- und Abgänge des laufenden Jahres erfasst.

## Der **Schadensatz**

$$SS := \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Durchschnittliche kumulierte Versicherungssumme}} = \frac{S}{v}$$

kann nur in Versicherungszweigen bestimmt werden, in denen es eine vertraglich fixierte Versicherungssumme als maximale Entschädigung gibt, also etwa in der Hausrat-, Wohngebäude- und Unfallversicherung. Der Schadensatz quantifiziert den durchschnittlichen Schadenbedarf pro Geldeinheit der Versicherungssumme. Er wird in der Regel in Promille angegeben. Für den  $i$ -ten Vertrag ergibt sich daraus ein **individueller Schadenbedarf** von

$$SB_i := \text{Schadensatz} \cdot i\text{-te Versicherungssumme} = SS \cdot v_i = S \cdot \frac{v_i}{v}$$

## Die durchschnittliche Versicherungssumme

$$v_o = \frac{\text{Durchschnittliche kumulierte Versicherungssumme}}{\text{Anzahl der Jahreseinheiten}} = \frac{v}{n_o}$$

ist klar von der durchschnittlichen kumulierten Versicherungssumme  $v$  abzugrenzen. Während  $v_o$  die mittleren Gegebenheiten pro Vertrag angibt (etwa in Form einer durchschnittlichen Versicherungssumme von 100.000 EUR in der Hausratversicherung), ist  $v$  eine Bestandskennzahl, die nicht selten in Vielfachen von Milliarden quantifiziert wird.

## Der Schadegrad

$$SG := \frac{\text{Schadendurchschnitt}}{\text{Durchschnittliche Versicherungssumme}} = \frac{D}{v_o}$$

ähnelt dem Schadensatz und wird auch nicht immer sauber von ihm abgegrenzt. Die folgende Faktorisierung des Schadensatzes macht den Unterschied deutlich:

$$\text{Schadensatz } SS = \frac{S}{v} = \frac{N}{n_o} \cdot \frac{S/N}{v/n_o} = \frac{N}{n_o} \cdot \frac{D}{v_o} = H \cdot SG = \text{Schadenhäufigkeit} \cdot \text{Schadegrad.}$$

Während also in den Schadegrad im Wesentlichen keine Überlegungen zur Größe des Bestandes und den schadenfreien Verträgen eingehen, berücksichtigt der Schadensatz dies in Form der Schadenhäufigkeit.

In der hier verwendeten Notation (Großbuchstaben) sind die Schadenkennzahlen i. e. S. als Zufallsvariablen aufzufassen und somit Gegenstand der Wahrscheinlichkeitstheorie. In der Praxis und im Kontext vorliegender Daten (Realisierungen der Zufallsvariablen) gelten die Schadenkennzahlen als Stichprobenkennzahlen und sind der deskriptiven Statistik zuzuordnen.

Mit Ausnahme des Schadendurchschnitts sind alle genannten Schadenkennzahlen deterministische Vielfache der zufälligen Schadenanzahl  $N$  oder des zufälligen Gesamtschadens  $S$ .

Die folgende Tabelle zeigt einige typische Werte ausgewählter Schadenkennzahlen für bekannte Versicherungszweige.<sup>16</sup>

Zweig	Schadenfrequenz	Schadenbedarf	Schadendurchschnitt	Schadensatz
Kfz-Haftpflicht	59 ‰	210 EUR	3.575 EUR	—
Haftpflicht	56 ‰	26 EUR	460 EUR	—
Unfall (Invalidität)	9 ‰	—	5.740 EUR	0,80 ‰
Hausrat	36 ‰	—	1.220 EUR	0,70 ‰
Wohngebäude Feuer	9 ‰	—	5.400 EUR	0,10 ‰

### Lernergebnisse (B2)

Die Studierenden können die wichtigsten Schadenkennzahlen zur Charakterisierung von Beständen berechnen.

<sup>16</sup>Vgl. Buse et al. (2015), S. 23.

## 2.2 Grundlagen der Tarifierung

### Kerninhalte

- Risikoklassen
- Unterscheidung von Risiko- und Tarifmerkmalen
- Kreuzklassifikation
- Verteilungsfreie Ausgleichsverfahren
- Marginalsummen, Marginalsummenverfahren

### 2.2.1 Risiko- und Tarifmerkmale

Eine wesentliche Komponente der Tarifierung besteht in der Bildung von **Risikoklassen**. Grundlage dieser Klassenbildung und der anschließenden Kalkulationen sind umfangreiche statistische Daten. Diese **Kalkulationsstatistiken** enthalten vor allem Daten der beiden folgenden, deutlich voneinander abzugrenzenden Merkmale:

- Als ein **Risikomerkm**al gilt ein Merkmal dann, wenn es in einem statistisch signifikanten Zusammenhang zu dem Schadenverhalten steht.
- Ein Merkmal, das im Rahmen der Tarifierung eingesetzt wird, wird als **Tarifmerkmal** bezeichnet.

Im Rahmen der Tarifierung werden mitunter neben den statistisch einschlägigen Risikomerkmalen aus geschäftspolitischen Gründen weitere Merkmale aufgenommen, z. B. das Alter etwaiger Kinder oder die Anzahl weiterer Verträge desselben Versicherungsnehmers in anderen Sparten bzw. Zweigen. Ebenso kommt es vor, dass Risikomerkmale nicht als Tarifmerkmal verwendet werden, weil es von Seiten der Aufsicht untersagt ist – wie etwa seit Einführung der Unisex-Tarifierung hinsichtlich des Merkmals Geschlecht (vgl. Abschnitt 1.1).

Im Sprachgebrauch sollte man zwischen den Merkmalen und ihren Ausprägungen unterscheiden. So ist beispielsweise *Alter* ein Merkmal und *40 Jahre* eine Ausprägung.

Nach vollständiger Auswahl der Tarifmerkmale geht die Tarifierung von der folgenden Maxime aus:

Gleiche Ausprägungen der Tarifmerkmale ⇒ Gleiches Risiko

Tatsächlich stimmt diese Arbeitshypothese kaum mit den realen Gegebenheiten überein. Denn auch wenn bei zwei Risiken die Ausprägungen sämtlicher Tarifmerkmale identisch sind, kann und wird es noch weitere Risikomerkmale geben, die nicht in die Tarifierung aufgenommen wurden, und deren Ausprägungen nicht gleich sind, so dass tatsächlich verschiedene Risiken (und damit zwei unterschiedliche erwartete Schäden innerhalb eines Jahres) vorliegen. Zweckmäßig und näherungsweise richtig bleibt die genannte Maxime aber.

### 2.2.2 Tarifierungsmodelle

Im Rahmen der Tarifierung wird den einzelnen Risikoklassen oder Tarifzellen auf Basis der umfassenden Daten der Schadenkosten eine angemessene Prämie zugeordnet. Für einen Bestand, der in mehrere Risikoklassen aufgeteilt ist, kommen für die Bestimmung der Nettorisikoprämien im Wesentlichen zwei Arten von Tarifierungsmodellen (kurz: Tarifmodellen)



in Betracht, nämlich multiplikative bzw. und additive Modelle. Im Folgenden werden die anschließenden Bezeichnungen benötigt:

- $r$  := Anzahl der Tarifmerkmale
- $M_k$  :=  $k$ -tes Tarifmerkmal,  $k = 1, \dots, r$
- $n_k$  := Anzahl der verschiedenen Ausprägungen des  $k$ -ten Tarifmerkmals,  $k = 1, \dots, r$
- $a_{j,k}$  :=  $j$ -te Ausprägung des  $k$ -ten Tarifmerkmals,  $j = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, r$

Bei stetigen Merkmalen geht man i.d.R. auf klassifizierte Daten über und ersetzt die beobachteten Ausprägungen durch geeignete Repräsentanten der Klassen.

Jedem Risiko wird im Rahmen der Tarifierung zunächst der Vektor der Ausprägungen

$$(a_{i_1,1}, a_{i_2,2}, \dots, a_{i_r,r})$$

der ausgewählten Tarifmerkmale  $M_1, \dots, M_r$  zugeordnet. Dieser Vektor legt dann genau eine der

$$t := \prod_{k=1}^r n_k = \text{Anzahl der Tarifzellen}$$

verschiedenen Tarifzellen eindeutig fest. Es ist also durch ein  $r$ -Tupel  $(i_1, i_2, \dots, i_r)$  eine Tarifzelle eindeutig festgelegt – ohne dabei auf die konkreten Ausprägungen eines Risikos eingehen zu müssen. Für jedes  $r$ -Tupel dieser Art und damit für jede Tarifzelle ist

$$b_{i_1, i_2, \dots, i_r} = \text{Nettorisikoprämie für die Tarifzelle } (i_1, i_2, \dots, i_r)$$

zu bestimmen.

Die nachfolgenden Tarifmodelle verwenden einerseits den

$$sb := (\text{Gesamt-})\text{Schadenbedarf des Kollektivs}$$

und andererseits für jedes Merkmal  $M_k$ ,  $k = 1, \dots, r$ , und jede Ausprägung  $a_{j,k}$ ,  $j = 1, \dots, n_k$ , dieses  $k$ -ten Merkmals einen der insgesamt

$$n := \sum_{k=1}^r n_k = \text{Anzahl der Marginalparameter.}$$

Diese **Marginalparameter** sind in der Regel entweder **Marginalfaktoren** oder **-summanden**. Sie repräsentieren die verschiedenen Ausprägungen der Merkmale  $M_1, \dots, M_r$ , quantifizieren den mittleren Einfluss der Ausprägungen auf die Schadenaufwendungen und sind im Rahmen der verschiedenen Tarifierungsverfahren geeignet festzulegen:

$$u_{k,j} = \text{Marginalfaktor bzw. -summand der } j\text{-ten Ausprägung des } k\text{-ten Merkmals,} \\ j = 1, \dots, n_k; k = 1, \dots, r.$$

**Multiplikative Modelle** sind durch den Ansatz

$$b_{i_1, i_2, \dots, i_r} = sb \cdot \prod_{k=1}^r u_{k, i_k}, \quad (2.20)$$

**additive Modelle** durch

$$b_{i_1, i_2, \dots, i_r} = sb + \sum_{k=1}^r u_{k, i_k} \quad (2.21)$$

gegeben. Selbstverständlich unterscheiden sich die Marginalfaktoren in (2.20) von den Marginalsummanden in (2.21) – trotz der identischen Bezeichnung. Diese Marginalparameter sind durch geeignete Verfahren, etwa Ausgleichsverfahren, zu bestimmen bzw. zu schätzen. Im Abschnitt 2.2.3 werden diesbezüglich ausgewählte Verfahren, die die Abstände

zwischen Prämien und Schadenbedarfen nach bestimmten Kriterien optimal ausgleichen, dargestellt. Dabei wird sich zeigen, dass die Marginalparameter nicht eindeutig bestimmt sind. Vielmehr können die Skalierungen bei  $r - 1$  der  $r$  Merkmale beliebig gewählt werden.

In der Praxis der Tarifierung führt die anhaltende Suche nach geeigneten Tarifmerkmalen und die tendenziell zunehmende Differenzierung der Ausprägungen oft zu sehr vielen verschiedenen Tarifzellen. In der Kraftfahrthaftpflichtversicherung ergeben sich so mehrere Millionen Tarifzellen. Viele der Tarifzellen sind naturgemäß schwach besetzt oder sogar leer und die Schadendaten reichen für eine stabile Tarifierung innerhalb der einzelnen Zellen nicht aus. Diese oft immense Vielfalt der Tarifzellen stellt aber nicht wirklich ein Problem dar. Zwecks Stabilisierung der Tarifierung bezieht man nämlich sinnvollerweise die „benachbarten“ Zellen in die Tarifierung mit ein. Diese „Vergrößerung“ der Stichprobe ist also sowohl aus der Not schwach besetzter Zellen geboren, dient aber auch der Robustifizierung und Glättung des Vorgehens.

### 2.2.3 Tarifierungsverfahren

In diesem Abschnitt werden ausschließlich Tarifierungsansätze betrachtet, die in der Praxis der Schadenversicherung Anwendung finden. Es handelt sich durchgängig um multiplikative Modelle. Diese haben sich in der Praxis besonders bewährt, auch weil die (normierten) Marginalfaktoren als prozentuale Zu- oder Abschläge – bezogen auf den Schadenbedarfsdurchschnitt  $sb$  – zu interpretieren sind und weil so negative Prämien vermieden werden. Die hier vorgestellten Tarifierungsverfahren erfordern keine Modellierung der zugrunde liegenden Zufallsvariablen und ihrer Verteilungen. Es handelt sich deshalb in Abgrenzung zu den stochastischen Ausgleichsverfahren um **verteilungsfreie Ausgleichsverfahren**. Diese basieren zumeist auf heuristischen Ansätzen, ergeben sich aber z.T. auch im Rahmen der Parameterschätzung in stochastischen Modellen.

Für die im Folgenden darzustellenden **Marginalfaktorverfahren** bei **zweifacher Kreuzklassifikation** ( $r = 2$ ) werden die folgenden (vereinfachten) Bezeichnungen verwendet:

$$A := M_1 \quad \text{und} \quad B := M_2$$

sind die beiden Tarifmerkmale mit

$$p := n_1 \quad \text{bzw.} \quad q := n_2$$

(nicht spezifizierten) Merkmalsausprägungen von  $A$  bzw.  $B$ . Offenbar gilt dann

$$t = p \cdot q \quad \text{und} \quad n = p + q.$$

Zwecks Vereinfachung der Notation sei weiter

$$x_i := u_{1,i}, \quad i = 1, \dots, p;$$

$$y_j := u_{2,j}, \quad j = 1, \dots, q.$$

Außerdem sei für  $i = 1, \dots, p$  und  $j = 1, \dots, q$

$$s_{i,j} := \textbf{Gesamtschaden} \text{ in Tarifzelle } (i, j)$$

und

$$v_{i,j} := \textbf{Volumenmaß} \text{ für die Tarifzelle } (i, j)$$

ein ausgewähltes Volumenmaß (z. B. Anzahl der Jahreseinheiten) für die Tarifzelle  $(i, j)$ . Dann ist

$$sb_{i,j} := \frac{s_{i,j}}{v_{i,j}} = \textbf{Schadenbedarf} \text{ in Tarifzelle } (i, j).$$

Hieraus ergeben sich die **kumulierten Volumenmaßzahlen**:

$$v_{i\bullet} := \sum_{j=1}^q v_{i,j} \quad \text{für } i = 1, \dots, p;$$

$$v_{\bullet j} := \sum_{i=1}^p v_{i,j} \quad \text{für } j = 1, \dots, q;$$

$$v_{\bullet\bullet} := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q v_{i,j} = \sum_{i=1}^p v_{i\bullet} = \sum_{j=1}^q v_{\bullet j}.$$

Offenbar sind die Werte  $v_{i\bullet}$  bzw.  $v_{\bullet j}$  die kumulierten Volumenmaße aller Risiken, deren Merkmal  $A$  die  $i$ -te Ausprägung hat, bzw. deren Merkmal  $B$  die  $j$ -te Ausprägung hat.  $v_{\bullet\bullet}$  ist das kumulierte Volumenmaß aller Risiken. Schreibt man die Maßzahlen  $v_{i,j}$  als  $(p \times q)$ -Matrix, so stellen die  $v_{i\bullet}$  die Zeilensummen und die  $v_{\bullet j}$  die Spaltensummen dar, während  $v_{\bullet\bullet}$  die Summe aller Komponenten ist.

Analog definiert man die kumulierten Gesamtschäden:

$$s_{i\bullet} := \sum_{j=1}^q s_{i,j} \quad \text{für } i = 1, \dots, p;$$

$$s_{\bullet j} := \sum_{i=1}^p s_{i,j} \quad \text{für } j = 1, \dots, q;$$

$$s_{\bullet\bullet} := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q s_{i,j} = \sum_{i=1}^p s_{i\bullet} = \sum_{j=1}^q s_{\bullet j}.$$

Damit gilt

$$s_{i\bullet} = \sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot sb_{i,j} \quad \text{für } i = 1, \dots, p;$$

$$s_{\bullet j} = \sum_{i=1}^p v_{i,j} \cdot sb_{i,j} \quad \text{für } j = 1, \dots, q;$$

$$s_{\bullet\bullet} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot sb_{i,j}.$$

Hieraus ergeben sich die **Marginaldurchschnitte**

$$sb_{i0} := \frac{s_{i\bullet}}{v_{i\bullet}} \quad \text{für } i = 1, \dots, p;$$

$$sb_{0j} := \frac{s_{\bullet j}}{v_{\bullet j}} \quad \text{für } j = 1, \dots, q;$$

und für den **Schadenbedarf** die Gleichungen

$$sb = \frac{\text{Gesamtschaden}}{\text{Kumulierte Volumenmaße}} = \frac{s_{\bullet\bullet}}{v_{\bullet\bullet}} = \frac{\sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q s_{i,j}}{v_{\bullet\bullet}} = \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \frac{v_{i,j}}{v_{\bullet\bullet}} \cdot sb_{i,j}.$$

Mit diesen Bezeichnungen werden nun drei spezielle Ausgleichsverfahren vorgestellt.

## (1) Tarifierungsverfahren mit Marginaldurchschnitten

Der heuristische Ansatz dieses Verfahren besteht darin, die Marginalfaktoren als die **normierten Marginaldurchschnitte** der Risiken mit den jeweiligen Merkmalsausprägungen zu definieren:

$$x_i^{\text{MD}} := \frac{sb_{i0}}{sb} \quad \text{für } i = 1, \dots, p;$$

$$y_j^{\text{MD}} := \frac{sb_{0j}}{sb} \quad \text{für } j = 1, \dots, q.$$

Dieser Ansatz führt somit für Risiken der Tarifzelle  $(i, j)$  auf die **Nettorisikoprämien**

$$b_{i,j}^{\text{MD}} := sb \cdot x_i^{\text{MD}} \cdot y_j^{\text{MD}} = \frac{sb_{i0} \cdot sb_{0j}}{sb} = sb_{i0} \cdot y_j^{\text{MD}} = x_i^{\text{MD}} \cdot sb_{0j} \quad \text{für } i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q.$$

Die Tarifierung mit Marginaldurchschnitten liefert wegen des sehr einfachen Ansatzes im Allgemeinen eher wenig zufriedenstellende Ergebnisse. Hier werden keine die Bestandsstruktur näher berücksichtigenden Zielfunktionen optimiert oder Gleichungssysteme zum Ausgleich von Schadendaten und Prämien gelöst. In der Praxis waren Weiterentwicklungen erforderlich.

## (2) Tarifierungsverfahren von Bailey und Simon

Der Ansatz von **Bailey und Simon** orientiert sich an der Abstandsfunktion des  $\chi^2$ -Tests und versucht die Marginalfaktoren  $x_i$  und  $y_j$  derart zu wählen, dass die Summe

$$L(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q) := \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q \frac{(s_{i,j} - v_{i,j} \cdot sb \cdot x_i \cdot y_j)^2}{v_{i,j} \cdot sb \cdot x_i \cdot y_j}$$

$$= \frac{1}{sb} \cdot \sum_{i=1}^p \sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot \frac{(sb_{i,j} - sb \cdot x_i \cdot y_j)^2}{x_i \cdot y_j}$$

der gewichteten quadratischen Abstände zwischen den beobachteten Gesamtschäden  $s_{i,j}$  und den kumulierten Nettorisikoprämien  $v_{i,j} \cdot b_{i,j} = v_{i,j} \cdot sb \cdot x_i \cdot y_j$  über alle Zellen minimiert wird. Die Lösungen ergeben sich – nach Nullsetzen der partiellen Ableitungen – durch die folgenden  $p + q$  nichtlinearen Bestimmungsgleichungen

$$x_i = \sqrt{\frac{\sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot \frac{sb_{i,j}^2}{y_j}}{\sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot y_j}} \quad \text{für } i = 1, \dots, p;$$

$$y_j = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^p v_{i,j} \cdot \frac{sb_{i,j}^2}{x_i}}{\sum_{i=1}^p v_{i,j} \cdot x_i}} \quad \text{für } j = 1, \dots, q.$$

Diese nichtlinearen Fixpunktgleichungen sind im Allgemeinen nicht explizit lösbar. Die übliche Fixpunktiteration konvergiert aber in der Regel für einen (nahezu beliebigen) Startvektor

$$(y_1^{(0)}, \dots, y_q^{(0)})$$

mit positiven Komponenten  $y_j^{(0)} > 0$  sehr rasch. Mit den Grenzwerten  $x_i^*$  und  $y_j^*$  dieser Iteration ergeben sich die **Marginalfaktoren**

$$x_i^{\text{BS}} := \frac{x_i^*}{\sqrt{sb}} \quad \text{für } i = 1, \dots, p;$$

$$y_j^{\text{BS}} := \frac{y_j^*}{\sqrt{sb}} \quad \text{für } j = 1, \dots, q.$$

und somit die Nettorisikoprämien

$$b_{i,j}^{BS} := sb \cdot x_i^{BS} \cdot y_j^{BS} = x_i^* \cdot y_j^* \quad \text{für } i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q.$$

Die Marginalfaktoren sind in diesem Verfahren nicht eindeutig bestimmt, denn mit Marginalfaktoren  $x_i, y_j$  lösen trivialerweise auch  $\lambda \cdot x_i, y_j/\lambda$  mit  $\lambda > 0$  die Bestimmungsgleichungen. So wirken sich andere Startwerte zwar auf die Marginalfaktoren aus, nicht aber auf die Nettorisikoprämien.

Das Verfahren von Bailey und Simon reagiert wegen der Berücksichtigung quadratischer Abstände empfindlich auf Ausreißer in den einzelnen Tarifzellen und überschätzt systematisch den beobachteten Gesamtschaden. Dennoch wurde es von 1962 bis zur Deregulierung 1994 zur Tarifierung in der deutschen Kraftfahrtversicherung eingesetzt.

### (3) Marginalsummenverfahren

Das **Marginalsummenverfahren** wird vom GDV seit 1995 zum Ausgleich von Schaden aufwänden und Nettoprämien eingesetzt. Der Ansatz ist einfach und naheliegend: Für jede Ausprägung eines der beiden Merkmale sollen die kumulierten Nettorisikoprämien mit den kumulierten Gesamtschäden übereinstimmen. Die Grundlage der Bestimmung der Marginalfaktoren sind somit die folgenden **Marginalsummengleichungen**:

$$\sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot b_{i,j} = \sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot sb \cdot x_i \cdot y_j = sb \cdot x_i \cdot \sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot y_j \stackrel{!}{=} \sum_{j=1}^q s_{i,j} = s_{i\bullet} = \sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot sb_{i,j}$$

für  $i = 1, \dots, p;$

$$\sum_{i=1}^p v_{i,j} \cdot b_{i,j} = \sum_{i=1}^p v_{i,j} \cdot sb \cdot x_i \cdot y_j = sb \cdot y_j \cdot \sum_{i=1}^p v_{i,j} \cdot x_i \stackrel{!}{=} \sum_{i=1}^p s_{i,j} = s_{\bullet j} = \sum_{i=1}^p v_{i,j} \cdot sb_{i,j}$$

für  $j = 1, \dots, q.$

Die Marginalsummengleichungen stellen ein nichtlineares Gleichungssystem mit  $p + q$  Gleichungen und  $p + q$  Unbekannten  $(x_1, \dots, x_p, y_1, \dots, y_q)$  dar. Lösungen existieren, wenn alle  $p \cdot q$  Zellen besetzt sind. Die Marginalsummengleichungen lassen sich in das folgende System von Fixpunktgleichungen überführen:

$$x_i \stackrel{!}{=} \frac{s_{i\bullet}}{sb \cdot \sum_{j=1}^q v_{i,j} \cdot y_j} \quad \text{für } i = 1, \dots, p;$$

$$y_j \stackrel{!}{=} \frac{s_{\bullet j}}{sb \cdot \sum_{i=1}^p v_{i,j} \cdot x_i} \quad \text{für } j = 1, \dots, q.$$

Ausgehend von einem Startvektor

$$(y_1^{(0)}, \dots, y_q^{(0)}) \quad \text{mit } y_j^{(0)} > 0, j = 1, \dots, q,$$

konvergiert die herkömmliche Fixpunktiteration in der Regel schnell. Im Falle der Konvergenz der Iteration ergeben sich die Grenzwerte als **Marginalfaktoren**

$$x_i^{MS} \quad \text{für } i = 1, \dots, p;$$

$$y_j^{MS} \quad \text{für } j = 1, \dots, q.$$

Analog zu den Gegebenheiten beim Verfahren von Bailey und Simon sind die Lösungen  $(x_1^{MS}, \dots, x_p^{MS}, y_1^{MS}, \dots, y_q^{MS})$  der Marginalsummengleichungen, also die Marginalfaktoren, abhängig von dem Startvektor und somit nicht eindeutig bestimmt, aber die (in die Nettorisikoprämien eingehenden) Produkte  $x_i^{MS} \cdot y_j^{MS}$  sind unabhängig von dem Startvektor.

Die **Nettorisikoprämien** für die Tarifzelle  $(i, j)$  ergeben sich als

$$b_{i,j}^{\text{MS}} := sb \cdot x_i^{\text{MS}} \cdot y_j^{\text{MS}} \quad \text{für } i = 1, \dots, p; j = 1, \dots, q.$$

Grundsätzlich ist es für das Vorgehen der Tarifierungsverfahren unerheblich, wie viele Merkmale vorliegen, also wie groß  $r$  ist. Die vorgestellten Verfahren gingen zwecks Vereinfachung jeweils von zwei Merkmalen, also dem Fall der (zweifachen) **Kreuzklassifikation** und  $r = 2$  aus. Insbesondere für numerische Verfahren ist diese Annahme aber hilfreich, da für diesen Fall die Existenz von Lösungen weitgehend gesichert und in der Literatur beschrieben ist.

### Lernergebnisse (B2)

Die Studierenden können die Begriffe und die Unterschiede zwischen Risiko- und Tarifmerkmalen beschreiben. Sie sind zudem in der Lage, multiplikative und additive Tarifmodelle sowie den Ansatz der Kreuzklassifikation zu erklären. Sie können außerdem die Anwendung der wichtigsten Tarifierungsverfahren der verteilungsfreien Ausgleichung beschreiben.

## 2.3 Auswahl der Tarifmerkmale

### Kerninhalte

- Korrelationsanalyse
- Multikollinearität
- Gemeinsame Verteilung, Randverteilung, Copula

Die Auswahl der Tarifmerkmale erfolgt in einem mehrstufigen und zum Teil iterativen Prozess. Die einzelnen Schritte werden nachfolgend erläutert.

### (1) Ermittlung und Analyse von Risikomerkmalen

Die Grundlage der Tarifierung ist zunächst die **statistische Analyse** der Risiken. Gesucht sind solche Merkmale, die statistisch signifikant mit den Schadenaufwendungen korrelieren. Dieses Vorgehen erfordert Daten zweierlei Arten:

- **Schadenarten** mit Angaben über die Anzahlen und die Höhen der einzelnen Schäden pro Risiko und Periode;
- **Bestandsdaten** mit Angaben über die Ausprägungen diverser potenziell relevanter Merkmale der der Erhebung zugrunde liegenden Risiken.<sup>17</sup>

Diese Analyse wird auf Instrumente der **multivariaten Statistik** zurückgreifen. Im Kontext der Regression stellen die Schadenaufwendungen den Regressanden dar, der durch die Risikomerkmale, die Regressoren, möglichst gut zu erklären ist. Im Wesentlichen kommt es darauf an, solche (Risiko-)Merkmale ausfindig zu machen, die stark mit den Schadenaufwendungen korrelieren. Hierfür wird bei numerischen Daten in der Regel mit dem (Pearson-schen) **Korrelationskoeffizienten** operiert, während bei ordinal skalierten Daten **Spearman's Rangkorrelationskoeffizient** eingesetzt werden kann. Auch grafische Verfahren kommen hier mitunter zum Einsatz. Dies klingt zunächst unproblematisch. Wegen der folgenden Aspekte ist das Vorgehen bei den genannten Ansätzen wenig standardisiert:

- Die Auswahl der *potenziellen* Risikomerkmale wird permanent zu überprüfen sein. Immer wieder werden sich durch neue Erkenntnisse der Risikoanalyse neue Merkmale ergeben, die potenziell geeignet sind, als Tarifmerkmal zu fungieren. Insofern sind die Bestandsdaten dauerhaften Änderungen ausgesetzt.

<sup>17</sup>Vgl. Abschnitt 2.1.

- Merkmale, die eine sehr geringe Korrelation zu den Schadenaufwendungen aufweisen und deshalb scheinbar keinen Erklärungsgehalt aufweisen, sind nicht gleich zu verwerfen. Es kann nämlich sein, dass in den späteren Schritten bei Ansätzen der multivariaten Statistik diese Regressoren wieder substantiell an Bedeutung gewinnen. So gilt es, die ggf. komplizierten Wirkungszusammenhänge der gegebenen Risikomerkmale möglichst vollständig zu analysieren.
- Die **Datenqualität** der zu untersuchenden potenziellen Risikomerkmale kann sehr unterschiedlich sein. Insbesondere die Vollständigkeit und die objektive Messbarkeit der Daten können kritische Kriterien sein.
- Besondere Aufmerksamkeit erfordern **Großschäden**. Diese treten zwar nur selten auf, haben aber ganz erheblichen Anteil am Gesamtschaden. Insofern können sie keinesfalls als Ausreißer aufgefasst werden, sondern sind trotz der geringen zugehörigen Datenmenge ganz besonders zu berücksichtigen. Um den zufälligen Einfluss von Großschäden auf z.B. Verfahren der Tarifikalkulation zu begrenzen, werden Methoden der **Kupierung** und **Umverteilung** genutzt. Bei der Kupierung werden Schäden an bestimmten sog. Kupierungsgrenzen „gestutzt“ bzw. „abgeschnitten“, d.h. pro Schaden stellt die Kupierungsgrenze die maximale Höhe dar, mit denen Schadenaufwendungen in den weiteren Analysen berücksichtigt werden. Unter Umverteilung werden Methoden verstanden, den „abgeschnittenen“ Schadenaufwand geeignet bei der Prämienkalkulation zu berücksichtigen, z.B. über eine additive oder multiplikative Umlage auf alle Schäden eines (Kalkulations-)Kollektivs oder eines bestimmten Teilkollektivs.
- Schließlich ist darauf hinzuweisen, dass die Korrelationsanalyse die Klärung des **kausalen Einflusses** der vermeintlichen Risikomerkmale auf die Schadenaufwendungen bekanntlich nicht ersetzen kann. Insofern ist hier und vor allem später bei der Auswahl der Tarifmerkmale auf etwaige **Scheinkorrelationen** zu achten.

## (2) Auswahlkriterien einzelner Tarifmerkmale

Aus den in (1) identifizierten Risikomerkmale sind unter Berücksichtigung verschiedener Kriterien solche auszuwählen, die als **Tarifmerkmale** der anschließenden Zuordnung von (Tarif-)Prämien zugrunde gelegt werden. Diese Auswahl der Tarifmerkmale bewegt sich dabei zwischen zwei Extremen:

- Der völlige Verzicht auf Tarifmerkmale führt dazu, dass alle Risiken – trotz tatsächlich gegebener Heterogenität – gleich behandelt werden und somit der Bestand der versicherten Einheiten als Solidargemeinschaft gesehen wird.
- Zieht man andererseits Tarifmerkmale und deren Ausprägungen in nahezu unbegrenztem Maße zur Tarifierung heran, so kommt man immer dichter an die individuellen Risikostrukturen heran und im Grenzfall wird für jedes einzelne Risiko eine (unterschiedliche) verursachungsgerechte Prämie festgelegt.

Die Notwendigkeit zur Prämien differenzierung durch die Auswahl von Tarifmerkmalen ergibt sich dabei mitunter schon allein durch das Verhalten der Konkurrenz am Markt und den damit verbundenen potentiellen Selektionseffekten. In Märkten mit hoher Prämien differenzierung besteht nämlich bei Unternehmen mit geringer bis keiner Differenzierung der Prämien die Gefahr der Antiselektion, also des Übergewichts „schlechter“ unterfinanzierter Risiken.

Tendenziell hat die Liberalisierung der Versicherungsmärkte seit 1994 dazu geführt, dass die Anzahl der Tarifmerkmale eher gestiegen ist – trotz der Effekte des Diskriminierungsverbots, insbesondere dem Gebot der Unisex tarifierung seit 2012. Begünstigt wurde diese Entwicklung durch die technologischen Fortschritte, die eine erhebliche Ausweitung der Anzahl der Tarifmerkmale administrativ erst möglich machte.

Nachfolgend werden die wichtigsten Kriterien für die Auswahl von Tarifmerkmalen dargestellt, die bei den anzuwendenden Verfahren nicht immer alle erfüllt sein werden:

- **Erklärungsgehalt, Signifikanz (Bestimmtheitsmaß)**

Selbstverständlich sollte eine hohe statistische Signifikanz des Einflusses der auszuwählenden Tarifmerkmale auf die Höhe der Schadenaufwendungen gegeben sein. Zusätzlich zum Korrelationskoeffizienten wird in der Regressionsanalyse hierfür die Kennzahl des **Bestimmtheitsmaßes** verwendet.

- **Wechselwirkungen der Tarifmerkmale**

Die ausgewählten Tarifmerkmale sollten untereinander möglichst stochastisch unabhängig sein. Andernfalls könnte es z. B. passieren, dass zwei Merkmale die zufälligen Schadenaufwendungen beide relativ gut erklären können, aber auf eine sehr ähnliche Weise, so dass es nicht sinnvoll ist, beide Merkmale zu verwenden. So weisen z. B. die PS-Stärke und der Fahrzeugtyp hohe Wechselwirkungen auf. Im Kontext der (multiplen) Regressionsanalyse spricht man von **Multikollinearität**, wenn die verwendeten Tarifmerkmale untereinander korreliert sind. Multikollinearität kann zu Verzerrungen bei der Schätzung der Zielgrößen (hier: Prämien) führen. So könnten gleichartige Einflüsse fälschlich mehrfach in die Prämien eingehen, vgl. Mack (2002), Kap. 2.3.1.

Bei nicht unabhängigen Tarifmerkmalen kann es je nach Tarifierungsverfahren auch angemessen bzw. notwendig sein, die dann vorhandenen Wechselwirkungen der Tarifmerkmale im Tarif abzubilden.

- **Zulässigkeit**

Die Auswahl der Tarifmerkmale für die Kalkulation muss aufsichtsrechtlich zulässig sein. So darf die Auswahl insbesondere nicht gegen das Diskriminierungsverbot verstoßen, so dass z. B. die Risikomerkmale Geschlecht und Nationalität als Tarifmerkmal nicht in Frage kommen.

- **Messbarkeit, objektive Überprüfbarkeit**

Für eine praktikable Tarifkalkulation ist es erforderlich, dass die Ausprägungen der Tarifmerkmale möglichst eindeutig messbar sind, so dass eine objektive Überprüfbarkeit vorliegt. Die Körpergröße, das Alter, der Wohnort und der Hubraum eines PKW sind diesbezüglich geeignete Merkmale; der Gesundheitszustand, das Reaktionsvermögen und die Neigung zum Versicherungsbetrug sind hingegen weniger geeignet bis ungeeignet. Hier spricht man von „harten“ bzw. „weichen“ Merkmalen.

- **Anzahl der Tarifmerkmale, Verwaltbarkeit**

Die Anzahl der ausgewählten Tarifmerkmale sollte der Maxime „*So viele wie nötig, so wenig wie möglich*“ folgen. Es ist also mitnichten das Ziel, möglichst viele Tarifmerkmale festzulegen. Vielmehr gilt es, mit möglichst wenigen Tarifmerkmalen möglichst viel über die Höhe der Versicherungsleistungen erklären zu können.

- **Stabilität, Robustheit**

Die Ausprägungen der Tarifmerkmale sollten in der Zeit möglichst stabil sein und möglichst keinen unvorhersehbaren Änderungen unterliegen. Z. B. das Merkmal jährliche Kilometerleistung erfüllt diesen Anspruch u. U. nicht, wird aber dennoch in der Kraftfahrtversicherung herangezogen.

- **Bezug zu den versicherten Risiken, Akzeptanz, Glaubwürdigkeit**

Es liegt nahe, dass die ausgewählten Tarifmerkmale einen möglichst eindeutigen und klaren Bezug zu den versicherten Risiken haben sollen. Andernfalls wäre die Akzeptanz und Glaubwürdigkeit der Tarifierung seitens der Kunden stark gefährdet. Manche Studien weisen z. B. das Sternzeichen als signifikantes Risikomerkmale aus – wohl ohne dass die Versicherer ernsthaft an dessen Auswahl denken.

- **Imageaspekte, Geschäftspolitische Bedeutung**

Die ausgewählten Tarifmerkmale haben den mit der Verwendung ggf. verbundenen Imageaspekt zu berücksichtigen. So könnte die Verwendung eines hoch signifikanten, aber potenziell das Image schädigenden Risikomerkmals ebenso verworfen werden, wie ein eher belangloses, aber das Image fördernde oder geschäftspolitisch dienliches Merkmal – wie etwa umweltfreundlicher Antrieb bei PKW – herangezogen wird.



### (3) Auswahlmethoden der Gesamtheit der Tarifmerkmale

Wie bereits in (2) zu dem Kriterium der Unabhängigkeit angesprochen wurde, reduziert sich die Auswahl der Tarifmerkmale nicht auf die isolierten Fragen, ob *einzelne* Risikomerkmale als Tarifmerkmale herangezogen werden sollen. Vielmehr sind auch die Abhängigkeiten der Merkmale untereinander zu berücksichtigen. Insofern liegt der Auswahl der Tarifmerkmale ein Mehrzielproblem zugrunde:

- Einerseits sollen die Tarifmerkmale (Regressoren) – aufgefasst als Zufallsvektor – das Schadenaufkommen (Regressand) möglichst gut erklären, etwa gemessen an dem **multiplen Bestimmtheitsmaß**.
- Andererseits sollen die Tarifmerkmale untereinander möglichst stochastisch **unabhängig** bzw. sollten ihre Wechselwirkungen möglichst vollständig analysiert sein.

Offensichtlich können diese Ziele konkurrieren, so dass Abwägungen beider Kriterien vorzunehmen sind. Die Gegebenheiten werden nachfolgend kurz formal dargestellt.

Für Tarifmerkmale (Zufallsvariablen)  $(X_1, X_2, \dots, X_r)$  wird die gemeinsame Verteilung als

$$p(X_1, X_2, \dots, X_r)$$

bezeichnet. Für statistische Verfahren ist in der Regel ideal, wenn die Zufallsvariablen  $(X_1, X_2, \dots, X_r)$  stochastisch unabhängig sind. Dann ergibt sich die gemeinsame Verteilung als Produktmaß der  $r$  Randverteilungen der einzelnen Zufallsvariablen:

$$p(X_1, X_2, \dots, X_r) = p^{X_1} \otimes p^{X_2} \otimes \dots \otimes p^{X_r}$$

Dieser ideale Fall liegt in der Regel nicht vor. Stattdessen werden meist mindestens zwei Merkmale nicht stochastisch unabhängig sein, so dass die zugehörigen bedingten Verteilungen zu betrachten sind. Etwa für den in Abschnitt 2.2.3 dominierenden Fall  $r = 2$  ergäbe sich die Faktorisierung

$$p(X_1, X_2) = p^{X_1} \otimes p^{X_2|X_1},$$

bei  $r = 3$  Merkmalen hingegen die Darstellung

$$p(X_1, X_2, X_3) = p^{X_1} \otimes p^{X_2|X_1} \otimes p^{X_3|(X_1, X_2)}.$$

Ganz offensichtlich steigt der Grad der Komplexität mit wachsendem  $r$  erheblich. Modernere Ansätze erfassen die in der gemeinsamen Verteilung enthaltenen Abhängigkeiten der Merkmale durch den Einsatz von **Copulas**.

Da in die Auswahl der Tarifmerkmale wie dargestellt eine Fülle unterschiedlicher Kriterien und Zielsetzungen eingehen, ist ihre konkrete Auswahl keine leichte Aufgabe, insbesondere wegen der z. T. konkurrierenden Ziele. Für das methodische Vorgehen stehen verschiedene mehr oder weniger auf die Tarifierung zugeschnittene Ansätze zur Verfügung:

- Die Auswahl von Merkmalen mit einem signifikanten Einfluss auf eine Zielgröße ist ein klassisches Problem der multivariaten Statistik, das insbesondere mit Hilfe der **multiplen Regressionsanalyse** gelöst werden kann.
- Bei dem sogenannten **Verfahren der schrittweisen Auswahl** werden die Besonderheiten der Tarifierung berücksichtigt. Die Basis dieses Verfahrens ist ein statistischer Test, der die Signifikanz eines (weiteren) Merkmals auf den Erwartungswert der Schadenaufwendungen (Zielgröße) unter der Annahme, dass zuvor bereits  $k$  Merkmale ausgewählt wurden, bemisst. Da es verschiedene solche Signifikanzmaße gibt, existieren auch unterschiedliche Tests und somit verschiedene Varianten des Verfahrens. Das eigentliche Verfahren verläuft iterativ in mehreren Schritten:
  - *Auswahl*: Sind bereits  $k$  Merkmale ausgewählt, so wird zunächst das  $(k + 1)$ -te Merkmal bestimmt, das die höchste (bedingte) Signifikanz für die gegebenen  $k$  Merkmale aufweist.

- *Prüfung*: Sind nun alle  $k + 1$  Merkmale, gegeben die anderen, signifikant, so liegt eine neue Auswahl signifikanter Merkmale vor und es folgt ein weiterer Auswahl-schritt. Andernfalls werden sukzessive die Merkmale eliminiert, die (bedingt) nicht signifikant sind. Wenn dabei eine bereits vorhandene Auswahl generiert wird, ist das Verfahren beendet.

### Lernergebnisse (B2)

Die Studierenden können mit Hilfe der Korrelationsanalyse Risikomerkmale ermitteln.  
Die Studierenden kennen die wichtigsten Auswahlkriterien für Tarifmerkmale.  
Die Studierenden kennen die wichtigsten Methoden zur Auswahl der Tarifmerkmale.

## 2.4 Einsatz verallgemeinerter linearer Modelle in der Tarifierung

### Kerninhalte

- Multiples Lineares (Regressions-)Modell
- Verallgemeinertes lineares Modell
- Link-Funktion

Herkömmliche Modelle der **multiplen linearen Regression** verwenden zur Tarifierung Ansätze, die die Zielgröße (Regressand)

$$Y = \text{Schadenaufwand}$$

durch eine *lineare* Funktion der Einflussgrößen (Regressoren)

$$X := (X_1, X_2, \dots, X_r) = \text{Tarifmerkmale}$$

zu erklären versuchen. Das zugehörige multiple lineare Regressionsmodell lautet

$$Y = a_0 + \sum_{i=1}^r a_i \cdot X_i + \varepsilon.$$

Dabei ist  $\varepsilon$  eine normalverteilte Zufallsvariable mit Erwartungswert 0, die den Modellfehler repräsentiert und stochastisch unabhängig von  $X$  ist. Für gegebene Ausprägungen (Realisierungen)

$$x := (x_1, x_2, \dots, x_r) = \text{Realisierungen von } X$$

ist somit

$$\mu(x) := E[Y | X = x] = a_0 + \sum_{i=1}^r a_i \cdot x_i. \quad (2.22)$$

Die **verallgemeinerten linearen Modelle** erweitern diesen Ansatz durch Verwendung einer streng monoton wachsenden Transformation  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ . Für diese sogenannte **Link-Funktion** soll nämlich nicht mehr der (bedingte) Erwartungswert  $\mu(x)$  aus (2.22) selbst eine lineare Funktion in  $x$  sein, sondern der transformierte Erwartungswert

$$g(\mu(x)) = g(E[Y | X = x]) = a_0 + \sum_{i=1}^r a_i \cdot x_i. \quad (2.23)$$

Mit der **inversen Link-Funktion**  $g^{-1} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  geht (2.23) über in die äquivalente Beziehung

$$\mu(x) = g^{-1} \left( a_0 + \sum_{i=1}^r a_i \cdot x_i \right).$$

Das zugehörige verallgemeinerte lineare Modell (**GLM**) lautet

$$Y = g^{-1} \left( a_0 + \sum_{i=1}^r a_i \cdot X_i \right) + \tilde{\varepsilon}.$$

Dabei muss die den Modellfehler beschreibende (zentrierte) Zufallsvariable  $\tilde{\epsilon}$  hier nicht mehr normalverteilt sein und auch nicht mehr unabhängig von  $X$  sein.

Im Kontext der Tarifierung wird häufig die Link-Funktion

$$g(t) = \ln(t), \quad t > 0,$$

verwendet, die auf die sogenannten **log-lineare Modelle**

$$\mu(x) = \exp\left(a_0 + \sum_{i=1}^r a_i \cdot x_i\right)$$

führen. Mit einem solchen GLM könnten also im Rahmen der Tarifierung die logarithmierten erwarteten Schadenaufwände  $\ln(\mu(x))$  z. B. in der Kraftfahrtversicherung als Linearkombination der Realisierungen ausgewählter (numerischer) Tarifmerkmale wie PS-Stärke ( $X_1$ ), (voraussichtliche) jährliche Fahrleistung in km ( $X_2$ ) etc. beschrieben werden.

Speziell für genau zwei Merkmale ( $r = 2$ ) und den Ansatz Poisson-verteilter Schadenaufwände überführt der hier beschriebene log-link-Ansatz das ursprüngliche Poisson-Modell in das Marginalsummenverfahren, d.h. genauer, dass die ML-Schätzer für die Poisson-Parameter der Schadenverteilungen durch die Lösungen Marginalsummengleichungen gegeben sind, vgl. auch Abschnitt 2.8 (1).

Weitere Ausführungen zum Einsatz verallgemeinerter lineare Modelle im Rahmen der Tarifierung finden sich bei Buse et al.

### **Lernergebnisse (B3)**

Die Studierenden können einfache verallgemeinerte lineare Modelle für die Zwecke der Tarifierung einsetzen.

## **2.5 Basismodelle der Schadenreservierung**

### **Kerninhalte**

- Spätschäden
- Abwicklungsdreiecke
- Abwicklungsmuster

### **2.5.1 Grundlagen**

Die Notwendigkeit, sich mit mathematischen Modellen und Methoden mit der Schadenreservierung zu beschäftigen, ergibt sich auch daraus, dass sich in manchen Zweigen der Schadenversicherung der Prozess über

- die Entstehung eines Schadens,
- die Entdeckung,
- die Meldung,
- die administrative Erfassung,
- die Bewertung und (hier vor allem)
- bis hin zu der vollständigen und abschließenden Regulierung (Abwicklung) eines Schadens

über mehrere Jahre hinziehen kann. Am Ende eines Geschäftsjahres sind somit in der Regel noch nicht alle Schäden, die in dem Geschäftsjahr eingetreten sind, gemeldet oder vollständig abgewickelt. Als **Spätschaden** bezeichnet man daher einen Schaden, der bereits eingetreten ist, aber von dem der Versicherer noch keine Kenntnis erlangt hat (echter oder unbekannter Spätschaden) oder dessen Höhe er noch nicht kennt und daher noch keine ausreichende Rückstellung gebildet hat. Somit werden folgende zwei Arten unterschieden:

- **IBNR-Schäden**<sup>18</sup> (*Incurring But Not Reported*) sind Schäden, die bereits entstanden, aber noch nicht gemeldet worden sind.
- **IBNER-Schäden** (*Incurring But Not Enough Reserved*) sind Schäden, die bereits gemeldet, aber noch nicht ausreichend reserviert sind.

Die Notwendigkeit der Schadenreservierung stellt sich grundsätzlich in allen Versicherungszweigen, vor allem natürlich in den Zweigen mit langer Schadenabwicklung, d. h. in dem sogenannten *long tail business*, etwa der Haftpflichtversicherung.

Die Schadenreservierung bestimmt auf Basis von Vergangenheitsdaten mit statistischen Verfahren Schätzer für die noch ausstehenden gesamten Versicherungsleistungen für **Bestände** (also nicht für die einzelnen Schadenfälle). Diese Schätzer (Prädiktoren) werden in diesem Kontext auch als **Reserven** bezeichnet, sind aber von dem im Rahmen der Bilanzierung gängigen Begriff der Rückstellungen abzugrenzen.

Die **Abwicklungsdauer**  $n$  eines Schadens bzw. eines Bestandes ist die Anzahl der Jahre vom Eintritt bis zur vollständigen Abwicklung des Schadens bzw. (fast) aller Schäden des Bestandes. Die statistischen Verfahren basieren im Wesentlichen auf den folgenden Daten eines Bestandes:

- **Anzahl** der gemeldeten Schäden
- **Summe** der geleisteten (Schaden-)Zahlungen (*paid losses*)
- **Summe** der **Schadenaufwände** (*incurred losses*), also Summe aus Schadenzahlungen und Einzelschadenreserven.

Die Daten werden in der Regel nach **Anfalljahren** (Jahr des Schadeneintritts) und **Abwicklungsjahren** strukturiert und in sogenannten Abwicklungsdreiecken dargestellt. Diese tabellarischen Dreiecke enthalten entweder

- die Zuwächse oder
- die Schadenstände (= kumulierte Zuwächse)

der Schadenanzahlen, Schadenzahlungen oder Schadenaufwände für Schäden aus den betrachteten Anfall- und Abwicklungsjahren. Bei Schadenanzahlen und Schadenzahlungen sind in der Regel die Zuwächse positiv und (damit) die Schadenstände monoton wachsend. Bei Schadenaufwänden können dagegen wegen Neubewertungen der Spätschäden auch negative Zuwächse und fallende Schadenstände auftreten. Ein Modell zur Schadenreservierung beschreibt die Schadenstände und Zuwächse als **Zufallsvariable** und spezifiziert die **gemeinsame Verteilung** aller Schadenstände und Zuwächse.

Das folgende **Abwicklungsquadrat** für Schadenstände  $S_{i,k}$  aus Anfalljahr  $i$  und Abwicklungsjahr  $k$  ( $i, k = 0, \dots, n$ ) enthält für  $i+k \leq n$  die **beobachtbaren** (im Modell noch nicht als Realisierungen vorliegenden) **Schadenstände** (in blau). Diese bilden als *Abwicklungsdreieck* die Basis für die Reservierungsverfahren zur Schätzung der **nicht beobachtbaren Schadenstände**  $S_{i,k}$  mit  $i+k \geq n+1$  (in schwarz). Die gelb unterlegten Schadenstände  $S_{i,k}$  mit  $i+k = n$  sind die **aktuellen** (beobachtbaren) Schadenstände. Die Schadenstände  $S_{i,n}$  der letzten Spalte (oliv unterlegt) sind die **Endschadenstände** (englisch: ultimates), deren Schätzung von besonderem Interesse ist.

<sup>18</sup>Genauer auch als echte IBNR-Schäden bzw. IBNyR-Schäden (*Incurring But Not yet Reported*) bezeichnet.

Anfalljahr	Abwicklungsjahr								
	0	1	...	k	...	n-i	...	n-1	n
0	$S_{0,0}$	$S_{0,1}$	...	$S_{0,k}$	...	$S_{0,n-i}$	...	$S_{0,n-1}$	$S_{0,n}$
1	$S_{1,0}$	$S_{1,1}$	...	$S_{1,k}$	...	$S_{1,n-i}$	...	$S_{1,n-1}$	$S_{1,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
i	$S_{i,0}$	$S_{i,1}$	...	$S_{i,k}$	...	$S_{i,n-i}$	...	$S_{i,n-1}$	$S_{i,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n-k	$S_{n-k,0}$	$S_{n-k,1}$	...	$S_{n-k,k}$	...	$S_{n-k,n-i}$	...	$S_{n-k,n-1}$	$S_{n-k,n}$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n-1	$S_{n-1,0}$	$S_{n-1,1}$	...	$S_{n-1,k}$	...	$S_{n-1,n-i}$	...	$S_{n-1,n-1}$	$S_{n-1,n}$
n	$S_{n,0}$	$S_{n,1}$	...	$S_{n,k}$	...	$S_{n,n-i}$	...	$S_{n,n-1}$	$S_{n,n}$

Analog lassen sich Abwicklungsquadrate für (beobachtbare und nicht beobachtbare) Zuwächse  $Z_{i,k}$  darstellen. Allerdings kommt hier den Werten in der Diagonale und in der rechten Spalte keine besondere Bedeutung zu.

Offensichtlich können die Schadenstände durch die Summation

$$S_{i,k} = \sum_{j=0}^k Z_{i,j} = S_{i,k-1} + Z_{i,k}, \quad i, k = 0, \dots, n,$$

aus den Zuwächsen berechnet werden. Entsprechend ergeben sich die Zuwächse durch die Differenzenbildung

$$Z_{i,k} = \begin{cases} S_{i,0} & \text{für } k = 0, \\ S_{i,k} - S_{i,k-1} & \text{für } k = 1, \dots, n, \end{cases} \quad i = 0, \dots, n.$$

## 2.5.2 Abwicklungsmuster

Die Basis der Modellbildung für die in Folge darzustellenden Methoden stellen Annahmen über Abwicklungsmuster dar. Diese Muster unterstellen für ausgewählte zentrale Kennzahlen der Schadenabwicklung bestimmte Systematiken und erklären die Abweichungen von diesen systematischen Größen (Erwartungswerten) als zufällige und unsystematische Schwankungen. Nachfolgend werden die wichtigsten dieser Abwicklungsmuster dargestellt.

### (1) Abwicklungsmuster für Anteile

Als **Abwicklungsanteil** oder kurz **Anteil** wird für jedes Anfalljahr  $i$  der erwartete Zuwachs im  $k$ -ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zu dem erwarteten Endschadenstand definiert, also die Größe

$$\text{Anteil des } k\text{-ten Abwicklungsjahrs für das } i\text{-te Anfalljahr} = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}, \quad i, k = 0, \dots, n.$$

Die Annahme eines Modells entspricht der Modellvorstellung, dass diese Anteile unabhängig von dem Anfalljahr  $i$  seien. Dann gibt es also Parameter  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n$  mit

$$\vartheta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}, \quad i, k = 0, \dots, n.$$

Offenbar gilt

$$\sum_{k=0}^n g_k = 1.$$

Bei Schadenanzahlen oder Schadenzahlungen wird in der Regel

$$g_k > 0, \quad k = 0, \dots, n,$$

gelten.

## (2) Abwicklungsmuster für Quoten

Als **Abwicklungsquote** oder kurz **Quote** wird für jedes Anfalljahr  $i$  der erwartete Schadenstand im  $k$ -ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zu dem erwarteten Endschadenstand definiert, also die Größe

$$\text{Quote des } k\text{-ten Abwicklungsjahrs für das } i\text{-te Anfalljahr} = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}, \quad i, k = 0, \dots, n.$$

Das angenommene Abwicklungsmuster setzt an, dass diese Quoten unabhängig von dem Anfalljahr  $i$  seien. Dann gibt es Parameter  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_n$  mit

$$\gamma_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,n}]}, \quad i, k = 0, \dots, n.$$

Es gilt  $\gamma_n = 1$ . Bei Schadenanzahlen oder Schadenzahlungen werden diese Quoten in der Regel streng monoton anwachsen, d. h. es gilt

$$\gamma_0 < \gamma_1 < \dots < \gamma_n = 1.$$

## (3) Abwicklungsmuster für Faktoren

Als **Abwicklungsfaktor** oder kurz **Faktor** wird für jedes Anfalljahr  $i$  der erwartete Schadenstand im  $k$ -ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zu dem erwarteten Schadenstand im  $(k-1)$ -ten Abwicklungsjahr definiert, also die Größe

$$\text{Faktor des } k\text{-ten Abwicklungsjahrs für das } i\text{-te Anfalljahr} = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}, \\ k = 1, \dots, n; i = 0, \dots, n.$$

Das Abwicklungsmuster nimmt an, dass diese Faktoren unabhängig von dem Anfalljahr  $i$  seien. Dann gibt es Parameter  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$  mit

$$\varphi_k = \frac{E[S_{i,k}]}{E[S_{i,k-1}]}, \quad k = 1, \dots, n; i = 0, \dots, n.$$

Bei Schadenanzahlen oder Schadenzahlungen wird für diese Faktoren in der Regel

$$\varphi_k > 1, \quad k = 1, \dots, n,$$

gelten.

## (4) Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse

Manche Ansätze verwenden in der Schadenreservierung neben den Schadenanzahlen und -ständen noch weitere Kennzahlen einbezogen, die mit den (Spät-)Schäden direkt nichts zu tun haben, aber als geeignete Maßzahlen der unterschiedlichen Anfalljahre fungieren.

Diese Bezugsgrößen für die Anfalljahre werden allgemein als **Volumenmaße**  $\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_n$  bezeichnet. Häufig verwendet man in Anwendungen die **Prämieneinnahmen** der Anfalljahre als diese Volumenmaße. Dann bilden für jedes Anfalljahr  $i$  die erwarteten Schadenzuwächse im  $k$ -ten Abwicklungsjahr im Verhältnis zu den (deterministischen) Volumenmaßen, also die Größen

$$\frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}, \quad i, k = 0, \dots, n,$$

die erwarteten **Schadenquotenzuwächse**.

Ein Abwicklungsmuster für diese erwarteten Schadenquotenzuwächse unterstellt, dass es Parameter  $\zeta_0, \zeta_1, \dots, \zeta_n$  gibt mit

$$\zeta_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}, \quad i, k = 0, \dots, n.$$

Sowohl die Anteile  $E[Z_{i,k}]/E[S_{i,n}]$  als auch die erwarteten Schadenquotenzuwächse  $E[Z_{i,k}]/\pi_i$  operieren im Zähler mit den erwarteten Schadenzuwächsen  $E[Z_{i,k}]$ . Die Anteile setzen diese ins Verhältnis zu den erwarteten Endschadenständen  $E[S_{i,n}]$ , die erwarteten Schadenquotenzuwächsen hingegen zu den Volumenmaßen  $\pi_i$ .

Der relative Unterschied der beiden Ansätze wird somit durch die **erwarteten Endscha-**  
**denquoten**

$$\frac{E[S_{i,n}]}{\pi_i}, \quad i = 0, \dots, n,$$

erfasst.

Die Anteile, Quoten, Faktoren und auch die Schadenquotenzuwächse lassen sich ineinander umrechnen.

### Lernergebnisse (B2)

Die Studierenden kennen den Begriff der Spätschäden.

Die Studierenden kennen die in Abwicklungsdreiecken und Abwicklungsquadraten erfassten Zufallsvariablen bzw. Daten.

Die Studierenden kennen die wichtigsten Abwicklungsmuster für einschlägige Kennzahlen der Entwicklung von Spätschäden.

## 2.6 Basisverfahren der Schadenreservierung

### Kerninhalte

- Chain-Ladder-Verfahren
- Loss-Development-Verfahren
- Additives Verfahren
- Cape-Cod-Verfahren
- Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

In Abschnitt 2.5 wurden die Basismodelle der Schadenreservierung vorgestellt. Diese stochastischen Modelle sind von **Verfahren** oder **Methoden** der Schadenreservierung abzugrenzen. Unter einem Verfahren wird hier ein Algorithmus verstanden, der vorgibt, wie aus den verfügbaren Daten Schätzwerte (Prädiktoren) für die Reserven, die nichtbeobachtbaren Zuwächse oder die nichtbeobachtbaren Schadenstände sowie Schätzer für deren Erwartungswerte berechnet werden.

Die Verfahren der Schadenreservierung verwenden z. T. sehr unterschiedliche Informationen:

- Daten, die sich aus den Zuwächsen oder Schadenständen des Abwicklungsdreiecks ergeben;
- unternehmenseigene Abwicklungsdaten aus anderen, aber vergleichbaren Beständen;
- Marktstatistiken für vergleichbare Bestände;
- Volumenmaße, etwa Prämiensumme oder Anzahl der Risiken, für den betrachteten Bestand.

Nachfolgend werden die wichtigsten Verfahren der Schadenreservierung dargestellt:

### (1) Chain-Ladder-Verfahren

Das Chain-Ladder-Verfahren ist sicher das bekannteste Verfahren der Schadenreservierung. Es beruht auf der Annahme, dass es ein Abwicklungsmuster für **Faktoren** gibt. Als Schätzer dieser Faktoren werden die **Chain-Ladder-Faktoren**

$$\hat{\varphi}_k^{\text{CL}} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} S_{j,k-1}} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}} \cdot \frac{S_{j,k}}{S_{j,k-1}}, \quad k = 1, \dots, n,$$

verwendet. Diese Schätzer setzen für den Faktor des  $k$ -ten Abwicklungsjahrs die Summe sämtlicher (beobachtbaren) Schadenstände im  $k$ -ten Abwicklungsjahr zur Summe der zugehörigen (beobachtbaren) Schadenstände im  $(k-1)$ -ten Abwicklungsjahr ins Verhältnis. (Der ebenfalls beobachtbare Schadenstand  $S_{n-k+1,k-1}$  geht nicht ein, da die Bezugsgröße  $S_{n-k+1,k}$  nicht beobachtbar ist.) Alternativ können die Chain-Ladder-Faktoren  $\hat{\varphi}_k^{\text{CL}}$  als gewichtetes arithmetisches Mittel der beobachtbaren Faktoren

$$\frac{S_{j,k}}{S_{j,k-1}}, \quad k = 1, \dots, n; j = 0, \dots, n-k,$$

mit den Gewichten

$$\frac{S_{j,k-1}}{\sum_{h=0}^{n-k} S_{h,k-1}}, \quad k = 1, \dots, n; j = 0, \dots, n-k,$$

aufgefasst werden.

Bei dem Chain-Ladder-Verfahren werden alle beobachtbaren Schadenstände verwendet. Weitere Daten gehen nicht ein. Hier werden die aktuellen Schadenstände  $S_{i,n-i}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , aus der Diagonale des Abwicklungsdreiecks mit Hilfe der Chain-Ladder-Faktoren sukzessive auf das Niveau der späteren Abwicklungsjahre  $k = n-i+1, \dots, n$  hochgerechnet. Die Ergebnisse

$$\hat{S}_{i,k}^{\text{CL}} = S_{i,n-i} \cdot \prod_{j=n-i+1}^k \hat{\varphi}_j^{\text{CL}} = \hat{\varphi}_k^{\text{CL}} \cdot \hat{S}_{i,k-1}^{\text{CL}} \quad \text{mit } \hat{S}_{i,n-i}^{\text{CL}} := S_{i,n-i}, \quad i = 0, \dots, n; k = n-i, \dots, n,$$

werden als **Chain-Ladder-Prädiktoren** (für die erwarteten Schadenstände) bezeichnet und können rekursiv berechnet werden.

Ähnliche Verfahren sind das **Grossing-Up-Verfahren** und das **Marginalsummenverfahren**. Da die zugehörigen Modellannahmen zu äquivalenten Abwicklungsmustern führen, sind die Prädiktoren der erwarteten Schadenstände bei den drei genannten Verfahren identisch.



## (2) Loss-Development-Verfahren

Das Loss-Development-Verfahren unterstellt ein Abwicklungsmuster für **Quoten** und dass für diese Quoten  $\gamma_0, \gamma_1, \dots, \gamma_{n-1}, \gamma_n$  **A-priori-Schätzer**

$$\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_{n-1}, \hat{\gamma}_n$$

mit  $\hat{\gamma}_n = 1$  vorliegen.

Beim Loss-Development-Verfahren werden die aktuellen Schadenstände  $S_{i,n-i}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , per Division durch den Schätzer  $\hat{\gamma}_{n-i}$  auf das Niveau des letzten Abwicklungsjahrs  $n$  hochgerechnet und mit dem Faktor  $\hat{\gamma}_k$  auf das Niveau des  $k$ -ten Abwicklungsjahrs zurück skaliert. Die zugehörigen Schätzer

$$\hat{S}_{i,k}^{\text{LD}} := \hat{\gamma}_k \cdot \frac{S_{i,n-i}}{\hat{\gamma}_{n-i}} = \frac{\hat{\gamma}_k}{\hat{\gamma}_{k-1}} \cdot \hat{S}_{i,k-1}^{\text{LD}} \quad \text{mit } \hat{S}_{i,n-i}^{\text{LD}} := S_{i,n-i}, \quad i = 0, \dots, n; k = n-i, \dots, n,$$

werden als **Loss-Development-Prädiktoren** bezeichnet.

Bei dem Loss-Development-Verfahren gehen lediglich die aktuellen Schadenstände und die A-priori-Schätzer der Quoten in das Verfahren ein.

## (3) Bornhuetter-Ferguson-Verfahren

Bei dem 1972 entwickelten Bornhuetter-Ferguson-Verfahren geht man gegenüber dem Loss-Development-Verfahren noch einen Schritt weiter, indem – zusätzlich zu der Annahme eines Abwicklungsmusters für Quoten und vorliegenden A-priori-Schätzern  $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_{n-1}, \hat{\gamma}_n$  – auch **A-priori-Schätzer**

$$\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n$$

für die **erwarteten Endschadenstände**

$$\alpha_i := E[S_{i,n}], \quad i = 0, \dots, n,$$

vorliegen.

Beim Bornhuetter-Ferguson-Verfahren werden die aktuellen Schadenstände  $S_{i,n-i}$ ,  $i = 0, \dots, n$ , mit Hilfe der A-priori-Schätzer linear fortgeschrieben. Die Schätzer

$$\hat{S}_{i,k}^{\text{BF}} := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \hat{\alpha}_i, \quad i = 0, \dots, n; k = n-i, \dots, n,$$

werden als **Bornhuetter-Ferguson-Prädiktoren** bezeichnet. Durch die Differenzenbildung

$$\hat{Z}_{i,k}^{\text{BF}} := \hat{S}_{i,k}^{\text{BF}} - \hat{S}_{i,k-1}^{\text{BF}} = (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{k-1}) \cdot \hat{\alpha}_i = \hat{\gamma}_k \cdot \hat{\alpha}_i, \quad i = 0, \dots, n; k = n-i, \dots, n,$$

werden die Bornhuetter-Ferguson-Prädiktoren für die **Zuwächse** errechnet. Diese sind vollständig unabhängig von den aktuellen Schadenständen, hängen also nur von den A-priori-Schätzern ab.

Bei dem **iterierten Bornhuetter-Ferguson-Verfahren** werden nach der ersten Anwendung des Verfahrens die Prädiktoren  $\hat{S}_{i,n}^{\text{BF}}$  der Endschadenstände als verbesserte A-priori-Schätzer der erwarteten Endschadenstände  $\alpha_i$  betrachtet und in einem zweiten Verfahrensschritt an Stelle von  $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n$  verwendet. Die A-priori-Schätzer  $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_{n-1}, \hat{\gamma}_n$  der Abwicklungsquoten bleiben bei dem Verfahren unverändert, der Einfluss der A-priori-Schätzer  $\hat{\alpha}_0, \hat{\alpha}_1, \dots, \hat{\alpha}_{n-1}, \hat{\alpha}_n$  der erwarteten Endschadenstände wird hingegen schrittweise reduziert. Dieses Vorgehen wird im Allgemeinen so lange wiederholt, bis sich Grenzwerte einstellen und diese Grenzwerte sind die Prädiktoren des Loss-Development-Verfahrens.

#### (4) Additives Verfahren

Für das additive Verfahren findet man die alternativen Bezeichnungen **Incremental-Loss-Ratio-Verfahren** oder **Verfahren der anfalljahr unabhängigen Schadenquotenzuwächse**. Das Verfahren basiert erstens auf der Annahme, dass es **Volumenmaße**

$$\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n$$

für die Anfalljahre  $i = 0, \dots, n$  gibt – man denke hier vornehmlich an Prämieinnahmen. Zweitens unterstellt das Verfahren ein **Abwicklungsmuster** für die **erwarteten (Schadenquoten-)Zuwächse**

$$\frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}, \quad i = 0, \dots, n; k = n - i, \dots, n,$$

so dass es Parameter  $\hat{\zeta}_0, \hat{\zeta}_1, \dots, \hat{\zeta}_{n-1}, \hat{\zeta}_n$  gibt, für die

$$\hat{\zeta}_k = \frac{E[Z_{i,k}]}{\pi_i}, \quad i = 0, \dots, n; k = 0, \dots, n,$$

gilt. Als Schätzer für diese relativen Zuwächse werden die **additiven Schadenquotenzuwächse**

$$\hat{\zeta}_k^{\text{AD}} := \frac{\sum_{j=0}^{n-k} Z_{j,k}}{\sum_{j=0}^{n-k} \pi_j} = \sum_{j=0}^{n-k} \frac{\pi_j}{\sum_{h=0}^{n-k} \pi_h} \cdot \frac{Z_{j,k}}{\pi_j}, \quad k = 0, \dots, n,$$

verwendet, die offenbar in ihrer Struktur den Chain-Ladder-Faktoren ähneln. Die Schätzer  $\hat{\zeta}_k^{\text{AD}}$  setzen für den Zuwachs des  $k$ -ten Abwicklungsjahrs die Summe der sämtlichen (beobachtbaren) Zuwächse im  $k$ -ten Abwicklungsjahr ins Verhältnis zur Summe der zugehörigen Volumenmaße. Alternativ können die Schätzer  $\hat{\zeta}_k^{\text{AD}}$  als gewichtetes arithmetisches Mittel der beobachtbaren Quotenzuwächse

$$\frac{Z_{j,k}}{\pi_j}, \quad k = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n - k,$$

mit den Gewichten

$$\frac{\pi_k}{\sum_{h=0}^{n-k} \pi_h}, \quad k = 0, \dots, n; j = 0, \dots, n - k,$$

dargestellt werden. Mit diesen Schätzern erhält man die **additiven Prädiktoren** für die Zuwächse

$$\hat{Z}_{i,k}^{\text{AD}} := \pi_i \cdot \hat{\zeta}_k^{\text{AD}}, \quad i = 0, \dots, n; k = n - i + 1, \dots, n,$$

bzw. für die Schadenstände

$$\hat{S}_{i,k}^{\text{AD}} := S_{i,n-i} + \sum_{j=n-i+1}^k \hat{Z}_{i,j}^{\text{AD}} = \pi_i \cdot \sum_{j=n-i+1}^k \hat{\zeta}_j^{\text{AD}}, \quad i = 0, \dots, n; k = n - i + 1, \dots, n.$$

#### (5) Cape-Cod-Verfahren

Das Cape-Cod-Verfahren beruht wie das additive Verfahren auf der Annahme, dass es **Volumenmaße**

$$\pi_0, \pi_1, \dots, \pi_{n-1}, \pi_n$$

für die Anfalljahre  $i = 0, \dots, n$  gibt. Außerdem unterstellt es ein **Abwicklungsmuster** für die **Quoten** und das Vorliegen von **A-priori-Schätzern**

$$\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_{n-1}, \hat{\gamma}_n$$

für die Quoten. Schließlich zeichnet sich dieses Verfahren dadurch aus, dass die erwarteten Endschadenquoten

$$\frac{E[S_{i,n}]}{\pi_i}, \quad i = 0, \dots, n,$$

als unabhängig vom Anfalljahr  $i$  angenommen werden, so dass einen Parameter  $\kappa$  mit

$$\frac{E[S_{i,n}]}{\pi_i} = \kappa, \quad i = 0, \dots, n,$$

gibt. Diese **erwartete Endschadenquote**  $\kappa$  wird zunächst durch

$$\kappa^{CC} := \frac{\sum_{j=0}^n S_{j,n-j}}{\sum_{j=0}^n \hat{\gamma}_{n-j} \cdot \pi_j} = \sum_{j=0}^n \frac{\hat{\gamma}_{n-j} \cdot \pi_j}{\sum_{h=0}^n \hat{\gamma}_{n-h} \cdot \pi_h} \cdot \frac{S_{j,n-j}}{\hat{\gamma}_{n-j} \cdot \pi_j}$$

geschätzt. Offenbar kann  $\kappa^{CC}$  als gewichtetes arithmetisches Mittel der „zwischenzeitlichen“ Schadenquoten der Abwicklungsjahre  $j = 0, \dots, n$  aufgefasst werden, wenn die Prämien  $\pi_j$  entsprechend den A-priori-Schätzern  $\hat{\gamma}_0, \hat{\gamma}_1, \dots, \hat{\gamma}_{n-1}, \hat{\gamma}_n$  für die Quoten kalkulatorisch auf die Abwicklungsjahre verteilt werden und wenn als Gewichte diese „Prämienstände“ verwendet werden.

Die Schadenstände werden bei diesem Verfahren durch die **Cape-Cod-Prädiktoren**

$$\hat{S}_{i,k}^{CC} := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \pi_i \cdot \hat{\kappa}^{CC}, \quad i = 0, \dots, n; k = n - i, \dots, n,$$

geschätzt. Offensichtlich ähnelt das Cape-Cod-Verfahren dem Loss-Development-Verfahren. Es kann allerdings als eine Robustifizierung des Loss-Development-Verfahrens angesehen werden, da es wegen der Zunahme der Volumenmaße und der Annahme einer anfalljahrunabhängigen Endschadenquote die Beeinflussbarkeit durch Ausreißer reduziert.

Die fünf dargestellten Basisverfahren sind alle als Spezialfälle des Bornhuetter-Ferguson-Verfahrens aufzufassen. Konkret sind sämtliche Schätzer für die Schadenstände nach dem **Bornhuetter-Ferguson-Prinzip** durch den folgenden Ansatz zu beschreiben:

$$\hat{S}_{i,k} := S_{i,n-i} + (\hat{\gamma}_k - \hat{\gamma}_{n-i}) \cdot \hat{\alpha}_i, \quad i = 0, \dots, n; k = n - i, \dots, n.$$

Die Unterschiede der Verfahren ergeben sich somit durch die Verwendung bzw. Schätzung der Parameter  $\hat{\gamma}_k$  und  $\hat{\alpha}_i$ . Die folgende Tabelle gibt einen verfahrensspezifischen Überblick zu diesen Parametern.

Verfahren	Quoten $\hat{\gamma}_k$	Endschadenstände $\hat{\alpha}_i$
Bornhuetter-Ferguson (BF)	beliebig, a priori	beliebig, a priori
Loss-Development (LD)	beliebig, a priori	$\hat{\alpha}_i$ (aktuelle $S_{i,n-i}, \hat{\gamma}$ )
Chain-Ladder (CL)	$\hat{\gamma}_k^{CL}(S_{i,j})$	$\hat{\alpha}_i$ (aktuelle $S_{i,n-i}, \hat{\gamma}^{CL}$ )
Cape-Cod (CC)	beliebig, a priori	$\hat{\alpha}_i$ (aktuelle $S_{i,n-i}, \pi, \hat{\gamma}$ )
Additiv (AD)	$\hat{\gamma}_k^{AD}(Z_{i,j}, \pi)$	$\hat{\alpha}_i$ (aktuelle $S_{i,n-i}, \pi, \hat{\gamma}^{AD}$ )

Die Vorteile und Nachteile der Verfahren ergeben sich aus den Charakteristika der ggf. verwendeten A-priori-Schätzer und dem Umfang der in die Verfahren eingehenden Abwicklungsdaten. Die folgende Tabelle fasst sie zusammen.

Verfahren	Vorteile	Nachteile
BF	Flexibilität, externe Quoten und Endschadenstände möglich	Willkür bei Ansatz der A-priori-Schätzer für Quoten und Endschadenstände
LD	Verwendung von Abwicklungsdaten, externe Quoten möglich	Willkür bei Ansatz der A-priori-Schätzer für Quoten, verwendet nur aktuelle Schadenstände, empfindlich ggü. Ausreißern
CL	ausschließliche Verwendung von Abwicklungsdaten	empfindlich ggü. Ausreißern
CC	robustifizierend unter Verwendung von Volumenmaßen, externe Quoten möglich	Willkür bei Ansatz der A-priori-Schätzer für Quoten, verwendet nur aktuelle Schadenstände, Gefahr durch unangemessene Volumenmaße
AD	robustifizierend unter ausschließlicher Verwendung von Volumenmaßen	Gefahr durch unangemessene Volumenmaße

### Lernergebnisse (C3)

Die Studierenden können die Basisverfahren für die Ermittlung von Schätzern für die Erwartungswerte von Schadenständen und Zuwächsen anwenden.

Die Studierenden kennen die wichtigsten Charakteristika, Vor- und Nachteile der Basisverfahren.

## 2.7 Erweiterungen der Basisverfahren der Schadenreservierung

### Kerninhalte

- Ausreißereffekte
- Inflation, Separationsverfahren
- Nachlauf

Die in Abschnitt 2.6 dargestellten Basisverfahren weisen für bestimmte Gegebenheiten methodische **Probleme** auf. Diese werden nachfolgend beschrieben und Ansätze zur Erweiterung der Basisverfahren zwecks Lösung dieser Probleme aufgezeigt.

### (1) Ausreißereffekte

Vor der Anwendung eines Verfahrens der Schadenreservierung sind die in das Verfahren eingehenden Daten, insbesondere die Abwicklungsdaten, geeignet aufzubereiten. Eine besondere Problematik stellen hier die durch **Großschäden** bedingten **Ausreißer** dar. Selbstverständlich ist die Anfälligkeit gegenüber Ausreißern bei den Verfahren insbesondere dann

groß, wenn neben den Abwicklungsdaten keine weiteren Daten, etwa A-priori-Schätzer für Parameter der unterstellten Abwicklungsmuster, in das Verfahren eingehen. Auch eine **multiplikative Fortschreibung** der aktuellen Schadenstände bedingt eine besonders starke Gefahr überhöhter Prognosen für die Schadenendstände.

Insofern ist das Chain-Ladder-Verfahren gegenüber Ausreißereffekten besonders gefährdet. Dieser Nachteil ist bei dem Loss-Development-Verfahren und dem additiven Verfahren wegen des Vorhandenseins externer Daten, nämlich der A-priori-Schätzer für die Quoten bzw. der Volumenmaße, geringer ausgeprägt. Das Cape-Cod-Verfahren erweist sich hier als am wenigsten gefährdet, da es durch Hinzunahme der beiden genannten externen Daten und die zusätzliche Schätzung einer anfalljahrunabhängigen Endschadenquote als eine Robustifizierung des Loss-Development-Verfahrens gilt.

Darüber hinaus werden in der Praxis bei großschadenlastigen Sparten häufig getrennte Schadendreiecke für Basis- und Großschäden verwendet.

## (2) Inflation

Sämtliche Basisverfahren operieren mit den Abwicklungsdaten aus unterschiedlichen Anfall- und Abwicklungsjahren. Diese Daten enthalten nicht selten **Kalenderjahreffekte** in Form von **Inflation** und/oder weiterer externer oder geschäftspolitischer Einflüsse. Das im Folgenden beschriebene **Separationsverfahren** bietet eine Möglichkeit, diese Kalendereffekte zu berücksichtigen und die Abwicklungsdaten geeignet aufzubereiten, etwa eine Art **Inflationsbereinigung** vorzunehmen.

Das Separationsverfahren verwendet **Volumenmaße**

$$v_0, v_1, \dots, v_{n-1}, v_n$$

für die Anfalljahre  $i = 0, \dots, n$ . Es beruht auf der Annahme, dass es **Parameter**

$$\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n \quad \text{mit} \quad \sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$$

für die Abwicklungsjahre  $k = 0, \dots, n$  und

$$\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$$

für die Kalenderjahre  $l = i + k = 0, \dots, 2n$  gibt, mit denen für die erwarteten Zuwächse

$$E[Z_{i,k}] = v_i \cdot \lambda_{i+k} \cdot \vartheta_k, \quad i, k = 0, \dots, n.$$

gilt. Die **Schätzung** der unbekannt Parameter  $\vartheta_0, \vartheta_1, \dots, \vartheta_n, \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n$  kann durch die Herleitung der folgenden Marginalsummengleichungen erfolgen. Summiert man die *beobachtbaren* Zuwächse für alle Anfalljahre (Zeilen) bzw. Kalenderjahre (Diagonalen), ersetzt ihre Erwartungswerte durch die Zufallsvariablen und normiert die Zuwächse per Division durch die Volumenmaße, so ergeben sich die folgenden **Marginalsummengleichungen**:

$$\sum_{i=0}^{n-k} \frac{Z_{i,k}}{v_i} = \sum_{i=0}^{n-k} \lambda_{i+k} \cdot \vartheta_k, \quad k = 0, \dots, n,$$

$$\sum_{j=0}^i \frac{Z_{j,i-j}}{v_j} = \sum_{j=0}^i \lambda_i \cdot \vartheta_{i-j} = \lambda_i \cdot \sum_{j=0}^i \vartheta_j, \quad i = 0, \dots, n.$$

Diese Gleichungen sind zusammen mit der Forderung

$$\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$$

im Allgemeinen eindeutig (iterativ) zu lösen und ergeben die Schätzer

$$\hat{\vartheta}_0, \hat{\vartheta}_1, \dots, \hat{\vartheta}_n, \hat{\lambda}_0, \hat{\lambda}_1, \dots, \hat{\lambda}_n.$$

Für die Prädiktoren der künftigen Schadenstände sind noch die (Inflations-)Parameter  $\lambda_{n+1}, \dots, \lambda_{2n}$  der künftigen Kalenderjahre zu schätzen. Hierfür können übliche Ansätze der Extrapolation verwendet werden, wie sie auch ähnlich für das Thema des Nachlaufs (siehe (3)) herangezogen werden. Seien  $\hat{\lambda}_{n+1}, \dots, \hat{\lambda}_{2n}$  die zugehörigen Schätzer, dann ergeben sich die **Prädiktoren** für die nicht beobachtbaren **Zuwächse** durch

$$\hat{Z}_{i,k} = v_i \cdot \hat{\lambda}_{i+k} \cdot \hat{\vartheta}_k, \quad i = 1, \dots, n; k = 0, \dots, n - i + 1.$$

### (3) Nachlauf

Grundsätzlich gehen die vorgestellten Basisverfahren davon aus, dass sämtliche Schäden innerhalb der Abwicklungsdauer von  $n + 1$  Jahren vollständig abgewickelt. In besonderen Fällen werden sich aber auch nach dem  $n$ -ten Abwicklungsjahr noch (geringfügige) Änderungen der Schadenstände ergeben, die als **Nachlauf** bezeichnet werden. In der Kraftfahrhaftpflichtversicherung und der allgemeinen Haftpflichtversicherung wird  $n$  meist 10 bis 15 Jahre betragen. Hier kann der Nachlauf in Extremfällen bis zu 70 Jahre andauern.

Zur Modellierung des Nachlaufs könnte man die in Abschnitt 2.5.2 vorgestellten (endlichen) Abwicklungsmuster durch unendliche Abwicklungsmuster ersetzen. Etwa für die **Faktoren**  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_{n-1}, \varphi_n$  könnte man eine Folge streng monoton wachsender Faktoren ( $> 1$ ) der Art

$$\varphi_k := 1 + a \cdot e^{-b \cdot k}, \quad a, b > 0, k \in \mathbb{N},$$

oder

$$\varphi_k := 1 + \frac{a}{(b + k)^c}, \quad a, b, c > 0, k \in \mathbb{N},$$

ansetzen. Die Parameter  $a, b, c$  könnten z. B. durch Kleinste-Quadrate-Ansätze auf Basis der beobachtbaren Faktoren

$$\varphi_{i,k} := \frac{S_{i,k}}{S_{i,k-1}}, \quad i = 0, \dots, n; k = 0, \dots, n - i + 1,$$

oder der (bereits berechneten) Schätzer  $\hat{\varphi}_k^{\text{CL}}$  berechnet werden. Mit den resultierenden Schätzern  $\hat{\varphi}_k$  lassen sich somit auch Prädiktoren der Schadenstände über das Abwicklungsjahr  $n$  hinaus berechnen.

#### Lernergebnisse (B2)

Die Studierenden können die wichtigsten Probleme beim Umgang mit den Basisverfahren erklären.

Die Studierenden kennen Ansätze zur methodischen Lösung der aufgezeigten Probleme.

## 2.8 Verfahren zur Beurteilung der Prognosen aus Basismodellen

#### Kerninhalte

- Zuverlässigkeit von Prognosen
- Multivariate stochastische Modelle
- Simulation

Die vorgestellten Basisverfahren generieren Schätzwerte für nicht beobachtbare Zufallsvariablen bzw. deren Erwartungswerte. Die Qualität dieser Prognosen kann im Allgemeinen

mit den bekannten Eigenschaften, insbesondere der **Erwartungstreue**, oder durch Kennzahlen, etwa dem **erwarteten quadratischen Prognosefehler**, charakterisiert werden. Die Überprüfung der Erwartungstreue und die Berechnung der Prognosefehler erfordert allerdings eine **stochastische Modellierung** der Zufallsvariablen.

Nachfolgend werden die wichtigsten konkreten und speziell im Kontext der Schadenreservierung einschlägigen Ansätze zur Prüfung der Prognosequalität kurz vorgestellt.

**(1) Multivariate stochastische Modelle der Schadenreservierung** Elementare Ansätze der stochastischen Modellierung in der Schadenreservierung konzentrieren sich auf einzelne Zufallsvariablen und häufig lediglich auf deren Erwartungswerte. Um aus den Modellen qualifizierte Aussagen über die Prognosefehler ableiten zu können, sind umfassendere **multivariate Modelle** erforderlich, die insbesondere die Variabilitäten der einzelnen Zufallsvariablen und deren Wechselwirkungen berücksichtigen. Vollständig werden diese Komponenten in den **gemeinsamen Verteilungen** sämtlicher (beobachtbarer und nicht beobachtbarer) **Zuwächse** oder **Schadenstände** erfasst. Vollständig spezifizierte Modelle müssen selbstverständlich sowohl den Verteilungstyp als auch sämtliche Parameter der gemeinsamen Verteilung festlegen.

In der Schadenreservierung haben sich für die genannten Zwecke die folgenden multivariaten Modelle etabliert, die hier nur kurz skizziert werden sollen:

- **Additives Modell**

Das additive Modell unterstellt ein Abwicklungsmuster für Schadenquotenzuwächse (s. additives Verfahren) und trifft parametrische Annahmen zu den Varianz- und Kovarianzstrukturen der durch Volumenmaße normierten Zuwächse. Das Modell ist im Kontext der linearen Modelle ein sogenanntes **erweitertes lineares Modell**. Die Erweiterung betrifft die Zerlegung in beobachtbare und nicht beobachtbare Zufallsvektoren (und nicht etwa den Übergang auf verallgemeinerte lineare Modelle). Die additiven Schadenquotenzuwächse  $\hat{z}_k^{AD}$  (s. 2.6 (4)) ergeben sich in dem additiven Modell als **Gauß-Markov-Prädiktoren** der Schadenquotenzuwächse, d.h. sie minimieren den erwarteten quadratischen Prognosefehler unter allen (zulässigen) Schätzern.

- **Multivariates Chain-Ladder-Modell**

Das im Wesentlichen von Mack entwickelte multivariate Chain-Ladder-Modell basiert auf der Annahme, dass zwar die Schadenstände verschiedener Anfalljahre stochastisch **unabhängig** sind, dass aber für die ersten beiden (bedingten) Momente der Schadenstände, gegeben zurückliegende Abwicklungsdaten, die folgende **abhängige Struktur** vorliegt:

$$\begin{aligned} E[S_{i,k} | \mathcal{F}_{i,k-1}] &= S_{i,k-1} \cdot \varphi_k, & i = 0, \dots, n; k = n - i + 1, \dots, n, \\ \text{Var}[S_{i,k} | \mathcal{F}_{i,k-1}] &= S_{i,k-1} \cdot \sigma_k^2, & i = 0, \dots, n; k = n - i + 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Dabei ist  $\mathcal{F}_{i,k-1}$  die  $\sigma$ -Algebra, die die Abwicklungsdaten  $S_{i,j}$  für alle Anfalljahre  $i = 0, \dots, n$  und deren Abwicklungsjahre  $j = 1, \dots, k - 1$  enthält. Die Parameter  $\varphi_1, \dots, \varphi_n$  (Faktoren) und  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$  (Varianzen) sind geeignet zu schätzen. Die Chain-Ladder-Faktoren  $\hat{\varphi}_k^{CL}$  (s. 2.6 (1)) lassen sich als Gauß-Markov-Schätzer in diesem Modell interpretieren. Die resultierenden Chain-Ladder-Prädiktoren des ersten nicht beobachtbaren Kalenderjahres ( $i + k = n + 1$ ) stimmen mit den herkömmlichen Chain-Ladder-Prädiktoren im Standardmodell überein und gelten insofern als optimal, als sie die Gauß-Markov-Eigenschaft aufweisen.

- **Poisson-Modell von Hachemeister**

Das aus dem Jahr 1975 stammende Poisson-Modell unterstellt für die Zuwächse  $Z_{i,k}$ , dass diese stochastisch unabhängig seien und konkret

$$Z_{i,k} \sim \mathbf{P}(\alpha_i \cdot \vartheta_k), \quad i, k = 0, \dots, n,$$

gelte, wobei die Parameter  $\alpha_0, \dots, \alpha_n, \vartheta_0, \dots, \vartheta_n$  positiv mit  $\sum_{k=0}^n \vartheta_k = 1$  sind. Wegen

$$E[Z_{i,k}] = \alpha_i \cdot \vartheta_k, \quad i, k = 0, \dots, n,$$

ergibt sich im Poisson-Modell ein **multiplikatives Modell** für die Zuwächse. Die freien Parameter sind geeignet zu schätzen. Wegen des konkreten stochastischen Modells können hier die **Maximum-Likelihood-Schätzer** (iterativ) berechnet werden. Sie ergeben sich auch als die Lösungen der Marginalsummengleichungen

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n-i} Z_{i,k} &= \sum_{k=0}^{n-i} \hat{\alpha}_i \cdot \hat{\vartheta}_k = \hat{\alpha}_i \cdot \sum_{k=0}^{n-i} \hat{\vartheta}_k, & i = 0, \dots, n, \\ \sum_{i=0}^{n-k} Z_{i,k} &= \sum_{i=0}^{n-k} \hat{\alpha}_i \cdot \hat{\vartheta}_k = \hat{\vartheta}_k \cdot \sum_{i=0}^{n-k} \hat{\alpha}_i, & k = 0, \dots, n, \\ \text{mit } \sum_{k=0}^n \vartheta_k &= 1. \end{aligned}$$

Das zugehörige Marginalsummenverfahren basiert auf einem Modellansatz, der sich als GLM interpretieren lässt. vgl. Abschnitt 2.3.2 (3).

Die Vorteile stochastischer Modelle zur Schadenreservierung liegen u. a. darin, dass sie fundierte Begründungen für heuristisch motivierte Methoden generieren und Bedingungen angeben können, unter denen diese Methoden sich als vernünftig oder in einem gewissen Sinn optimal erweisen.

## (2) Simulation

Auch die Simulationstechnik stellt ein Vorgehen dar, mit dessen Hilfe die Qualität der Prognosen beurteilt werden kann. Allerdings ist die Grundlage der Simulation ein vollständig spezifiziertes Modell der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilungen, etwa der Zuwächse. Falls Anpassungen an einschlägige parametrische Wahrscheinlichkeitsverteilungen nicht gelingen, kommt mitunter die Methode des nichtparametrischen Bootstrappings zum Einsatz. Hierbei wird als Modellverteilung die durch die Beobachtungen gegebene empirische Häufigkeitsverteilung angesetzt. In den angepassten stochastischen Modellen können beliebig viele simulierte Realisierungen der Zuwächse generiert werden. Aus diesen können (für sehr viele Simulationen sehr gute) Schätzer für Erwartungswerte, Varianzen etc. abgeleitet werden.

### Lernergebnisse (B2)

Die Studierenden können die wichtigsten Ansätze zur Beurteilung der Prognosen aus Basismodelle.



## 3 Basismodell der Personenversicherungsmathematik

### 3.1 Zustandsmodell

#### Kerninhalte

- Modellierung durch Zustandsmodell
- Voraussetzungen und Annahmen
- Ausscheidetafeln

Die Mathematik der Personenversicherung basiert auf einem Zustandsmodell. Für die Kalkulation verschiedener Größen eines Versicherungsvertrags wird angenommen, dass sich die betrachtete Person zum betrachteten Zeitpunkt in der Hauptgesamtheit befindet. In Folge von verschiedenen Ereignissen kann die Person aus der Hauptgesamtheit ausscheiden und in eine entsprechende Nebengesamtheit wechseln. Das Ereignis, das als erstes eintritt und damit zum Ausscheiden führt, ist demnach die Ursache des Ausscheidens. Dieser Sachverhalt ist schematisch in Abbildung 2 für  $h$  Ursachen bzw. Nebengesamtheiten skizziert.

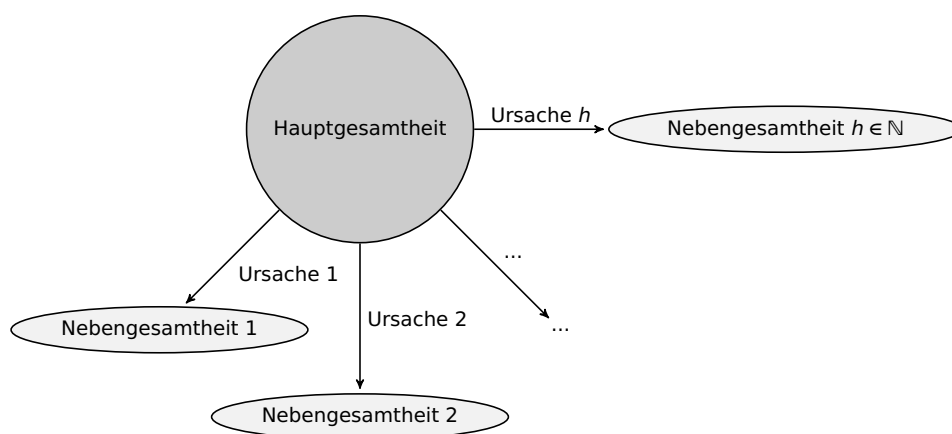


Abbildung 2: Zustandsmodell in der Personenversicherungsmathematik

Das Zustandsmodell ist mit den folgenden Voraussetzungen verbunden:

- Zwillingsfreiheit: Die betrachtete Person kann nur durch eine einzige Ursache ausscheiden.
- Zyklensfreiheit: Die betrachtete Person kann nach dem Ausscheiden nicht mehr in die Hauptgesamtheit zurückkehren.<sup>19</sup>

Der Verbleib der betrachteten Person in der Hauptgesamtheit oder das Ausscheiden aus der Hauptgesamtheit führt zu Zahlungsströmen (z. B. Prämien oder Versicherungsleistungen). Der Verbleib, das Ausscheiden bzw. der Übergang zwischen den Zuständen wird mit Zufallsvariablen modelliert, da er zum Betrachtungszeitpunkt ungewiss ist. Die entsprechenden Verbleibe-, Ausscheide- bzw. Übergangswahrscheinlichkeiten zwischen den Zuständen beschreiben den Sachverhalt und sind schließlich für die Kalkulation relevant.

Im Folgenden bezeichne:

<sup>19</sup>Die Voraussetzung der „Zyklensfreiheit“ vereinfacht deutlich die mathematische Formulierung der Sachverhalte. Sie ist jedoch nicht zwingend erforderlich. In der Realität ist es auch durchaus möglich, dass eine Person in die Hauptgesamtheit zurückkehrt. Als Beispiel sei hier die Reaktivierung (Wiedereingliederung) von Invaliden (Berufsunfähigkeit) zu Aktiven (Berufstätigen) genannt.

$X_i$ : Alter bei Eintritt des Ereignisses  $i$

$X := \min_{1 \leq i \leq h} \{X_i\}$  : Ausscheidealter aus der Hauptgesamtheit

$U := \min\{i \in \{1, \dots, h\} : X_i = X\}$  : Ausscheideursache aus der Hauptgesamtheit

Die Zufallsvariablen  $X_i$  und  $X$  sind stetige, reellwertige Zufallsvariablen. Die Zufallsvariable  $U$  ist diskret verteilt und gibt die Ursache des Ausscheidens an.

Mit Hilfe von  $X$  und  $U$  kann die einjährige Ausscheidewahrscheinlichkeit einer  $x$ -jährigen Person der Hauptgesamtheit innerhalb des Intervalls  $(x, x + 1]$  aus der Ursache  $i$  auszuscheiden, wie folgt beschrieben werden:

$${}_1q_x^{(i)} := P(X \leq x + 1, U = i | X > x).$$

Es handelt sich hierbei um eine bedingte Wahrscheinlichkeit. Es wird stets unterstellt, dass  $P(X > x) > 0$ .

Die Wahrscheinlichkeit, dass die  $x$ -jährige Person aus irgendeinem Grund innerhalb eines Jahres aus der Hauptgesamtheit ausscheidet, ist

$${}_1q_x := P(X \leq x + 1 | X > x).$$

Verallgemeinernd können auch die Wahrscheinlichkeiten  ${}_s q_x^{(i)}$  bzw.  ${}_s q_x$  mit  $s \in \mathbb{R}_+$  definiert werden.  $s$  gibt den betrachteten Zeitraum an, in dem die Person ausscheiden kann. Für  $s = 1$  wird der Index  $s$  auch häufig nicht notiert, d. h. man schreibt dann:

$$q_x^{(i)} := {}_1q_x^{(i)} \quad \text{und} \quad q_x := {}_1q_x.$$

Es kann (aufgrund der Zwillingsfreiheit) gezeigt werden, dass

$$q_x = \sum_{i=1}^h q_x^{(i)}.$$

Die Wahrscheinlichkeit einer  $x$ -jährigen Person, noch (mindestens)  $k$  Jahre in der Hauptgesamtheit zu verbleiben, ergibt sich dann wie folgt:

$${}_k p_x = \prod_{j=0}^{k-1} p_{x+j} \quad \text{mit} \quad p_x := 1 - \sum_{i=1}^h q_x^{(i)}.$$

Mit Hilfe dieser Größen können sogenannte Ausscheidetafeln erstellt werden. Dazu werden die folgenden Größen für ein  $l_0 > 0$  definiert:

$$\begin{aligned} l_x &:= l_0 \cdot {}_x p_0 = l_0 \cdot P(X > x) = l_0 \cdot P(X_1 > x, \dots, X_h > x) \\ {}_s d_x &:= {}_s q_x \cdot l_x \\ {}_s d_x^{(i)} &:= {}_s q_x^{(i)} \cdot l_x \end{aligned}$$

Die Ausscheidetafel umfasst tabellarisch aufgeführt Werte für  $l_x$ ,  ${}_1 d_x$  und  ${}_1 d_x^{(i)}$  für ganzzahlige Alter  $x$ .

#### Einfache Ausscheideordnung, Ursache Tod ( $h = 1$ ):

Die Wahrscheinlichkeit einer  $x$ -jährigen Person der Hauptgesamtheit, innerhalb des Intervalls  $]x, x + 1]$  aus der ersten und einzigen Ursache „Tod“ auszuscheiden, lässt sich wie folgt darstellen:

$$q_x = q_x^{(1)} = P(X_1 \leq x + 1 | X_1 > x)$$

Ferner beträgt die Wahrscheinlichkeit einer  $x$ -jährigen Person der Hauptgesamtheit, das Alter  $x + 1$  in der Hauptgesamtheit zu erreichen:

$$p_x = 1 - q_x = P(X_1 > x + 1 | X_1 > x)$$

Die Funktion  $S(x) := P(X > x)$ ,  $x \in \mathbb{R}_+$  wird als „Survival Funktion“ bezeichnet. Sie gibt die Wahrscheinlichkeit an, dass eine Person das Alter  $x$  in der Hauptgesamtheit erlebt, unter der Voraussetzung, dass die Person im Alter 0 bereits der Hauptgesamtheit angehörte.

Definiert man nun einen Zustandsraum  $S = \{0, 1\}$  mit der Bedeutung 1=„lebend“ und 0=„tot“ und einen stochastischen Prozess  $Z = (Z_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  gemäß

$$\begin{aligned} Z_t &= 0, \text{ falls } X \leq x + t \\ &= 1, \text{ falls } X > x + t, \end{aligned}$$

so ist der Prozess  $Z$  eine Markov-Kette.

Zusammengesetzte Ausscheideordnung, Ursachen Invalidität und Tod ( $h = 2$ ):

Beispiel aus der Pensionsversicherungsmathematik

$X_1$ : Alter bei Eintritt der Invalidität

$X_2$ : Alter bei Eintritt des Todes

Mit diesen Zufallsvariablen lassen sich die einjährige Invalidisierungswahrscheinlichkeit  $i_x$  und die einjährige Aktivensterblichkeit  $q_x^{aa}$  für eine  $x$ -jährigen Aktiven wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} i_x &:= q_x^{(1)} = P(X \leq x + 1, U = 1 | X > x) = P(X_1 \leq \min\{x + 1, X_2\} | X_1 > x, X_2 > x) \\ q_x^{aa} &:= q_x^{(2)} = P(X \leq x + 1, U = 2 | X > x) = P(X_2 < \min\{x + 1, X_1\} | X_1 > x, X_2 > x) \end{aligned}$$

Die Wahrscheinlichkeit einer  $x$ -jährigen Person, noch (mindestens) 1 Jahr in der Hauptgesamtheit (also dem Aktivenbestand) zu verbleiben, ist dann  $p_x^a := 1 - i_x - q_x^{aa}$ .

Wir definieren nun einen Zustandsraum  $S = \{0, 1, 2\}$  mit der Bedeutung 2=„aktiv“, 1=„invalid“ und 0=„tot“, und einen stochastischen Prozess  $Y = (Z_t)_{t \in \mathbb{N}_0}$  gemäß

$$\begin{aligned} Z_t &= 0, \text{ falls } X_2 \leq x + t \\ &= 1, \text{ falls } X_1 \leq x + t, X_2 > x + t \\ &= 2, \text{ falls } X_1 > x + t, X_2 > x + t \end{aligned}$$

Man kann nun zeigen, dass für  $P\{Z_{t+1} = s | Z_t = 2\}$  und  $P\{Z_{t+1} = s | Z_t = 0\}$ ,  $s \in \{0, 1, 2\}$ , die Markov-Eigenschaft gilt. Somit ist  $Y$  ein Markov-Prozess, wenn auch für  $P\{Z_{t+1} = s | Z_t = 1\}$ ,  $s \in \{0, 1, 2\}$ , die Markov-Eigenschaft gilt.

Schlussfolgerung: Wenn also die Sterblichkeit eines Invaliden davon abhängt, wie lange der Eintritt der Invalidität zurückliegt, so ist  $Y$  keine Markov-Kette.

Anmerkung: Für viele Gestaltungsformen der betrieblichen Altersversorgung ist dieser einfache Zustandsraum nicht ausreichend. In der Praxis werden Zustandsräume mit deutlich mehr Zuständen benötigt.

Zusammengesetzte Ausscheideordnung, Ursachen Tod und Storno ( $h = 2$ ):

Beispiel aus der Krankenversicherungsmathematik

$X_1$ : Alter bei Eintritt des Todes

$X_2$ : Alter bei Eintritt des Stornos

Mit diesen Zufallsvariablen lassen sich die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit  $q_x$  und die einjährige Stornowahrscheinlichkeit  $w_x$  wie folgt definieren:

$$\begin{aligned} q_x &:= q_x^{(1)} = P(X \leq x + 1, U = 1 | X > x) = P(X_1 \leq \min\{x + 1, X_2\} | X_1 > x, X_2 > x) \\ w_x &:= q_x^{(2)} = P(X \leq x + 1, U = 2 | X > x) = P(X_2 < \min\{x + 1, X_1\} | X_1 > x, X_2 > x) \end{aligned}$$

Zusätzlich lässt sich die Stornowahrscheinlichkeit noch unterteilen in „Storno, aber Verbleib in der PKV“ und „Storno mit Rückkehr in die GKV“.

### **Lernergebnisse (B2)**

Die Studierenden können das allgemeine Zustandsmodell der Personenversicherungsmathematik und die darin enthaltenen Annahmen erklären.

## 3.2 Rechnungsgrundlagen

### Kerninhalte

- Ausscheideordnungen
- Risikomerkmale
- Kosten- und Sicherheitszuschläge
- Zins

Das Zustandsmodell aus Abschnitt 3.1 wird durch die dort vorgestellten Wahrscheinlichkeiten charakterisiert. Diese Wahrscheinlichkeiten (zusammengefasst in den Ausscheidetafeln) bilden eine wesentliche Rechnungsgrundlage der Personenversicherungsmathematik. Je nach Versicherungsvertrag können unterschiedlich viele Ausscheideursachen relevant sein.

Die Ausscheidewahrscheinlichkeiten von Personen können durch verschiedene Einflussfaktoren/Risikomerkmale von durchschnittlichen Ausscheidewahrscheinlichkeiten abweichen. Zum Beispiel ist das Sterben (Ausscheiden durch Tod) abhängig vom Gesundheitszustand der betrachteten Personen. In der Personenversicherung werden verschiedene Einflussfaktoren in der Kalkulation berücksichtigt (z. B. Beruf und Raucherstatus). In der Kalkulation von Prämien dürfen Aktuarien jedoch nicht nach beliebigen Merkmalen unterscheiden (z. B. ist eine Unterscheidung nach dem Geschlecht unzulässig, daher erfolgt eine Unisex-Kalkulation).<sup>20</sup> Viele Risikomerkmale (Familienstand, Versicherungsdauer) werden gar nicht oder nur teilweise berücksichtigt.

In der Kalkulation werden auch Annahmen zu Kosten getroffen. Hier wird zwischen Abschlusskosten, In-/Exkassokosten und Verwaltungskosten unterschieden. Außerdem können Kosten hinsichtlich ihrer Bemessung klassifiziert werden. Aktuarien unterscheiden zwischen proportionalen Kosten und absoluten Kosten (Stückkosten). Für proportionale Kosten wird eine Bezugsgröße festgelegt, die zur Abschätzung bzw. Quantifizierung der Höhe der Kosten dient (z. B. Bruttobeitrag oder Versicherungssumme). Die Kosten ergeben sich dann aus der Multiplikation des Kostensatzes mit der Bezugsgröße (z. B. 1 % des Bruttobeitrags). Darüber hinaus ist der Fälligkeitszeitpunkt der Kosten zu spezifizieren (z. B. monatlich oder jährlich). Unternehmen verwenden in der Kalkulation Sicherheitszuschläge, um die Leistungen für die Versicherten mit ausreichender Sicherheit finanzieren zu können. Alle Annahmen zu Kosten und Zuschlägen sind Teil der Rechnungsgrundlagen.

Für die Kalkulation in der Personenversicherung sind oftmals Zahlungsströme relevant, die erst nach Ablauf von mehreren Jahren anfallen. Um Zahlungsströme zu unterschiedlichen Zeitpunkten zum Zeitpunkt der Betrachtung zu bewerten, bedient sich die Versicherungsmathematik daher dem Konzept von Barwerten aus der Finanzmathematik. Für die Bestimmung der Barwerte wird ein Zins verwendet. Der Zins ist daher eine weitere Rechnungsgrundlage der Personenversicherungsmathematik.

Es wird unterschieden zwischen Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung und Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung. Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung sind diejenigen Werte, die einer erwarteten Entwicklung der betrachteten Größe entsprechen. Rechnungsgrundlagen 1. Ordnung unterscheiden sich dadurch, dass sie von den Rechnungsgrundlagen 2. Ordnung abweichen und aus Unternehmenssicht mehr Sicherheit bieten, um alle vertraglichen Leistungen zukünftig zu erfüllen. Zum Beispiel gibt es mehr Todesfälle auf Basis der Sterbewahrscheinlichkeiten 1. Ordnung, die bei der Kalkulation einer Risikolebensversicherung eingehen, als erwartete Todesfälle (Sterbewahrscheinlichkeiten 2. Ordnung).

### Lernergebnisse (B2)

Die Studierenden können die wesentlichen Rechnungsgrundlagen der Personenversicherungsmathematik wie Risikomerkmale, Ausscheideordnungen, Kosten- und Sicherheitszuschläge und Zins benennen und erläutern.

<sup>20</sup>Unisex-Kalkulation: Das gilt aktuell nicht für die Kalkulation von Prämien und Leistungen in der betrieblichen Altersversorgung.

### 3.3 Prämien- und Leistungsbarwerte

#### Kerninhalte

- Erfüllungsbetrag
- Allgemeine Darstellung von Prämienbarwerten und Leistungsbarwerten
- Rückstellungen und Zusammenhang zum individuellen Äquivalenzprinzip
- Versicherungsmathematische Bilanzgleichung
- Sparprämien und Risikoprämien

#### 3.3.1 Erfüllungsbetrag

Im Folgenden wird der Barwert resultierend aus einer ungewissen Verpflichtung mit Hilfe der Zufallsvariable „Erfüllungsbetrag“ modelliert.

Zunächst betrachten wir die folgenden Größen:

$T := (t_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  Folge von Zeitpunkten  $t_n \in \mathbb{R}_+$  mit  $t_n < t_{n+1}$  für alle  $n \in \mathbb{N}_0$   
 $S := (S_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  Folge von Zahlungen  $S_n \in \mathbb{R}$  korrespondierend zu den Zeitpunkten  $t_n$

Das Tupel  $(T, S)$  beschreibt die Realisierung eines deterministischen Zahlungsstroms (z. B. Leistungen oder Prämien) resultierend aus einem Versicherungsvertrag.

Eine ungewisse Verpflichtung ist durch die Menge aller möglichen Zahlungsströme

$$(T^{(m)}, S^{(m)}), \quad m = 0, 1, 2, \dots,$$

beschrieben, die zur Erfüllung der Verpflichtung führen. Die Verpflichtung ist ungewiss, da die Zeitpunkte der Zahlungen von den zufälligen Übergängen im Zustandsmodell aus Abschnitt 3.1 abhängen. Daher besteht die Menge aller möglichen Zahlungsströme aus mehreren Zahlungsströmen  $m = 0, 1, 2, \dots$ .

Der Erfüllungsbetrag  $B$  einer ungewissen Verpflichtung wird wie folgt definiert (über die Menge der Realisierungen)

$$B = \sum_{m \geq 0} b_m \cdot \mathbb{1}_{\{B=b_m\}}.$$

Der Erfüllungsbetrag ist eine Zufallsvariable. Ihre Realisierungen  $b_m$  lauten

$$b_m := \sum_{n \in \mathbb{N}_0} v^{t_n^{(m)}} \cdot S_n^{(m)}, \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

mit Diskontierungsfaktor

$$v := \frac{1}{1+i}$$

zum Rechnungszins  $i$ . Der Erfüllungsbetrag gibt den finanzmathematischen Barwert der ungewissen Verpflichtung an. Hier wird ein konstanter einjähriger Zins  $i$  für die Kalkulation unterstellt (Standard bei der Kalkulation von klassischen Verträgen in der Personenversicherung). Das vorgestellte Modell lässt sich jedoch problemlos verallgemeinern für zeitabhängige Zinssätze. Zeitabhängige Zinssätze zur Bewertung von Verpflichtungen kommen heutzutage auch zum Einsatz (z. B. bei der Erstellung einer ökonomischen Bilanz).

Die Wahrscheinlichkeit für  $b_m$  bezeichnen wir mit

$$P_B(b_m) := P(B = b_m), \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Der erwartete Barwert einer ungewissen Verpflichtung wird als Leistungsbarwert bezeichnet. Er ist gerade der Erwartungswert des Erfüllungsbetrags dieser Verpflichtung. Folglich gilt:

$$E(B) = \sum_{m \geq 0} b_m \cdot P_B(b_m).$$

Das zweite Moment sowie die Varianz des Erfüllungsbetrags sind

$$E(B^2) = \sum_{m \geq 0} b_m^2 \cdot P_B(b_m)$$

und

$$\text{Var}(B) = E(B^2) - (E(B))^2.$$

### Beispiel: Lebenslange Todesfallversicherung

Es bestehe die Verpflichtung zur Zahlung eines Betrags der Höhe 1 nach  $m + 1$  Jahren ( $m \in \mathbb{N}_0$ ) an einen zum Betrachtungszeitpunkt  $x$ -jährigen bei Tod nach  $m$  vollendeten Jahren.

Diese Verpflichtung ist ungewiss und wird beschrieben durch die Menge der möglichen Zahlungsströme  $(T^{(m)}, S^{(m)}) = (\mathbb{N}_0, S^{(m)})$ ,  $m = 0, 1, \dots$ , mit:

$$S_n^{(m)} = \begin{cases} 1 & \text{für } n = m + 1, \text{ d. h. Tod nach } m \text{ vollendeten Jahren} \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Die Realisierungen des Erfüllungsbetrages sind gegeben durch:

$$b_m = \sum_{n \geq 0} v^n \cdot S_n^{(m)} = v^{m+1}, \quad m = 0, 1, \dots$$

Definiert man nun eine Zufallsvariable  $N$ , welche die Anzahl der vollendeten Jahre bis zum Tod darstellt, so lässt sich der Erfüllungsbetrag  $B$  darstellen durch

$$B = v^{N+1}.$$

Für die Verteilung des Erfüllungsbetrages gilt

$$P_B(b_m) = P(B = v^{m+1}) = P(N = m) = {}_m p_x \cdot q_{x+m}.$$

Der Erwartungswert und die Varianz von  $B$  können wie folgt bestimmt werden:

$$E(B) = \sum_{m \geq 0} b_m \cdot P_B(b_m) = \sum_{m \geq 0} v^{m+1} \cdot P(N = m) = \sum_{m \geq 0} v^{m+1} \cdot {}_m p_x \cdot q_{x+m}$$

$$\begin{aligned} \text{Var}(B) &= E(B^2) - (E(B))^2 = \sum_{m \geq 0} b_m^2 \cdot P_B(b_m) - \left( \sum_{m \geq 0} b_m \cdot P_B(b_m) \right)^2 \\ &= \sum_{m \geq 0} (v^2)^{m+1} \cdot {}_m p_x \cdot q_{x+m} - \left( \sum_{m \geq 0} v^{m+1} \cdot {}_m p_x \cdot q_{x+m} \right)^2 \end{aligned}$$

Die Größe

$$\sum_{m \geq 0} v^{m+1} \cdot {}_m p_x \cdot q_{x+m}$$

wird in der Versicherungsmathematik mit  $A_x$  bzw.  $A_x(v)$  abgekürzt. Daher ist

$$\begin{aligned} E(B) &= A_x(v) \\ \text{Var}(B) &= A_x(v^2) - (A_x(v))^2. \end{aligned}$$

### 3.3.2 Allgemeine Darstellung von Leistungsbarwerten

Wir betrachten nun wieder eine zum Vertragsbeginn  $x$ -jährige Person der Hauptgesamtheit bezüglich der  $h$  Ereignisse auftreten können. Der erwartete Barwert einer ungewissen Verpflichtung gegenüber dieser Person zu Vertragsbeginn lässt sich ganz allgemein in folgender Form darstellen:

$${}_0B_x^L := \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x \cdot {}_k \widehat{L}_x$$

${}_k \widehat{L}_x$  stellt dabei den Erwartungswert der gesamten Leistung dar, die durch Erreichen des Altersintervalls  $]x + k, x + k + 1]$  ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Jahresbeginn.

${}_k \widehat{L}_x$  kann ganz allgemein dargestellt werden durch:

$${}_k \widehat{L}_x := {}_k L_x^{(0)} + \sum_{i=1}^h {}_k L_x^{(i)} \cdot q_{x+k}^{(i)}, \quad k = 0, 1, \dots$$

Bezeichnungen:

- ${}_k L_x^{(0)}$ : Erwartungswert der Leistungen, die durch Erreichen des Alters  $x+k$  in der Hauptgesamtheit verursacht werden, diskontiert auf den Jahresbeginn ( $k = 0, 1, \dots$ )
- ${}_k L_x^{(i)}$ : Erwartungswert der Leistungen, die durch Ausscheiden aus der Ursache  $i$  im Jahr  $]x+k, x+k+1]$  verursacht werden, soweit sie nicht durch  ${}_k L_x^{(0)}$  erfasst sind, diskontiert auf den Jahresbeginn ( $k = 0, 1, \dots$ )

Bemerkung: In dieser Betrachtung sind die Kosten in den Leistungen enthalten, so dass von einer Brutto-Betrachtung gesprochen wird. Kosten haben ökonomisch einen grundsätzlich anderen Charakter als Versicherungsleitungen. Die folgenden Darstellungen können auch ohne Kosten bei Leistungen und Prämien (in diesem Fall: Netto-Betrachtung) durchgeführt werden.

Beispiele:

1. Der Leistungsbarwert des Anspruchs eines  $x$ -jährigen Rentners ( $x \geq z$ ,  $z$ : Pensionierungsalter) auf eine Jahresrente in Höhe von 1, die lebenslang jährlich vorschüssig ausgezahlt wird, beträgt für  $x \geq z$ :

$$\sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x^r \cdot {}_k \widehat{L}_x^r$$

Die Tatsache, dass es sich bei der Hauptgesamtheit in diesem Fall um einen Rentnerbestand handelt, wird durch einen Index  $r$  kenntlich gemacht. Dabei ist

$${}_k \widehat{L}_x^r = 1 \quad \text{für } x + k \geq z.$$

In diesem Fall gibt es eine Ausscheideursache ( $h = 1$ ) und die Leistungen werden gezahlt, bis die Person die Hauptgesamtheit verlässt.

Anmerkung: Dieser Leistungsbarwert wird in der Lebensversicherungsmathematik mit  $\ddot{a}_x^r$  bezeichnet und in der Pensionsversicherungsmathematik mit  $a_x^r$ . Im Folgenden verwenden wir einheitlich die Darstellung der Lebensversicherungsmathematik  $\ddot{a}_x^r$ . Die beiden Punkte auf dem  $\ddot{a}$  deuten an, dass es sich um vorschüssige Zahlungen handelt. Bei einer nachschüssigen Zahlung werden die beiden Punkte ausgelassen.

2. Der Leistungsbarwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters  $x$  auf eine lebenslang laufende, jährlich vorschüssig zahlbare Altersrente vom Jahresbetrag 1 ab Erreichen des Pensionierungsalters ( $z$ : Pensionierungsalter) als Aktiver für  $x \leq z$ :

$$\sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x^a \cdot {}_k \widehat{L}_x^{aA} = v^{z-x} \cdot {}_{z-x} p_x^a \cdot \ddot{a}_z^r$$

denn

$${}_k\widehat{L}_x^{aA} = \begin{cases} 0 & \text{für } x+k < z \\ \ddot{a}_z^r & \text{für } x+k = z. \end{cases}$$

Dieser Leistungsbarwert wird mit  $\ddot{a}_x^{aA}$  bezeichnet.

### 3.3.3 Allgemeine Darstellung von Prämienbarwerten

Analog zum Leistungsbarwert kann auch der erwartete Barwert zukünftiger Prämieinnahmen (Prämienbarwert) zum Alter  $x$  (Alter zu Vertragsbeginn) allgemein dargestellt werden:

$${}_0B_x^P := \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x \cdot {}_k \widehat{P}_x.$$

Dabei bezeichnet  ${}_k \widehat{P}_x$  den Erwartungswert der Prämieinnahmen des Jahres  $[k, k+1]$ , die durch Erreichen des Alters  $x+k$  in der Hauptgesamtheit anfallen, diskontiert auf den Jahresbeginn ( $k=0, 1, \dots$ ). Im Folgenden gehen wir zur Vereinfachung davon aus, dass es sich um jährlich, vorschüssig zahlbare Prämien  ${}_k \widehat{P}_x$  handelt.

Das individuelle Äquivalenzprinzip besagt, dass zum Beginn des Versicherungsvertrags der erwartete Barwert der zukünftigen Leistungen und der erwartete Barwert der zukünftigen Prämien pro Berechtigtem übereinstimmen, also:

$${}_0B_x^L = {}_0B_x^P.$$

### 3.3.4 Rückstellungen

Sofern ein Vertrag nach  $m$  Jahren noch existiert, muss das Unternehmen für diesen Vertrag eine Rückstellung (Reserve) bilden. Die Rückstellung kann entweder über eine prospektive Definition oder eine retrospektive Definition bestimmt werden. In beiden Fällen wird das individuelle Äquivalenzprinzip zum Vertragsbeginn verallgemeinert auf einen Zeitpunkt während der Vertragslaufzeit.

Die prospektive Definition der Rückstellung fordert denjenigen Betrag als Rückstellung, der zum jeweiligen Betrachtungszeitpunkt (also auch zum Stichtag 0, d. h. zum Vertragsbeginn) vorhanden sein muss, wenn der Vertrag – im Erwartungswert – erfüllbar sein soll. Das ist der Betrag, der bei „rechnungsmäßigem Ablauf“ des Vertrags genau ausreicht, um unter Berücksichtigung der zukünftigen Prämien die zukünftigen Leistungen zu erbringen (rechnungsmäßiges Soll).

Die Rückstellung (prospektive Reserve) lässt sich berechnen durch:

$${}_mV_x^{pro} := {}_mB_x^L - {}_mB_x^P, \quad m = 0, 1, \dots,$$

wobei

$${}_mB_x^L := \sum_{k \geq m} v^{k-m} \cdot {}_{k-m} p_{x+m} \cdot {}_{k-m} \widehat{L}_{x+m}$$

und

$${}_mB_x^P := \sum_{k \geq m} v^{k-m} \cdot {}_{k-m} p_{x+m} \cdot {}_{k-m} \widehat{P}_{x+m}.$$

${}_0V_x^{pro}$  stellt den Betrag dar, der zum Beginn des Vertrags vorhanden sein muss, um die zukünftigen Leistungen unter Berücksichtigung der zukünftigen Prämien rechnerisch leisten zu können.

Die Definition der Rückstellung ermöglicht es auch, den „Ausgleich in der Zeit“ zu erklären. Die Finanzierung zukünftiger Leistungen erfolgt mit zwei Komponenten, einerseits mit der



zum betrachteten Zeitpunkt vorhandenen Rückstellung und andererseits mit den zukünftigen Prämien. Ein in Abhängigkeit vom Alter steigender erwarteter Leistungsverlauf führt dazu, dass eine konstante Prämie in den ersten Jahren unterhalb und in den letzten Jahren oberhalb der erwarteten Leistungen liegt. Die Rückstellung bildet eine Art Konto, die diesen Ausgleichseffekt (Verteilung von Einsparungen zum Vertragsbeginn zu Entnahmen zum Vertragsende) ermöglicht.

Die retrospektive Reserve ist der Betrag, der unter Berücksichtigung des eingesetzten Anfangskapitals  ${}_0V_x^{retro}$  rechnerisch zum betrachteten Stichtag bei gegebenen Leistungs- und Prämienfestsetzungen vorhanden ist. Es ist also der Betrag, der rechnerisch nach Abrechnung aller Einnahmen und Ausgaben noch vorhanden ist (rechnerisches Ist).

Die retrospektive Rückstellung ist daher definiert durch:

$${}_mV_x^{retro} := \frac{1}{v^m \cdot {}_mp_x} \left( {}_0V_x + \sum_{k=0}^{m-1} v^k \cdot {}_kp_x \cdot ({}_k\hat{P}_x - {}_k\hat{L}_x) \right), \quad m = 0, 1, \dots$$

Wir setzen hierbei voraus, dass  ${}_mp_x \neq 0$  und  ${}_0V_x$  das zu Beginn vorhandene Kapital bezeichnet.

Unter der Annahme der gleichen Rechnungsgrundlagen für Prämien und Rückstellungen und unter der Annahme, dass

$${}_0V_x^{pro} = {}_0V_x^{retro}$$

führen beide Varianten zum gleichen Ergebnis für die Rückstellung.

Es kommt vor, dass für die Kalkulation der Rückstellungen, d. h. für die Bestimmung der Größen  ${}_mB_x^L$  und  ${}_mB_x^P$ , andere Rechnungsgrundlagen verwendet werden, als bei der Prämienkalkulation.

Zusammenhang:

Wenn für die Kalkulation von Prämien und Rückstellungen die gleichen Rechnungsgrundlagen verwendet werden, dann folgt aus dem individuellen Äquivalenzprinzip zu Vertragsbeginn:

$${}_0V_x^{pro} = {}_0B_x^L - {}_0B_x^P = 0.$$

Wenn die Rechnungsgrundlagen voneinander abweichen, kann die Situation eintreten, dass

$${}_0V_x^{pro} < 0.$$

In dieser Situation entsteht für das Unternehmen zu Vertragsbeginn ein Vorfinanzierungsaufwand.

### 3.3.5 Versicherungsmathematische Bilanzgleichung

Für die (prospektive und retrospektive) Reserve gilt die versicherungsmathematische Bilanzgleichung:

$${}_mV_x + {}_m\hat{P}_x = {}_m\hat{L}_x + v \cdot p_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x, \quad m = 0, 1, \dots$$

Die Summe aus Reserve nach  $m$  Jahren und den erwarteten Prämieeinnahmen des Jahres  $[m, m + 1]$  entspricht gerade den durch Erreichen des Alters  $x + m$  erwartungsgemäß ausgelösten Leistungen (ggf. inkl. Kosten) sowie dem auf den Jahresbeginn diskontierten erwarteten Finanzaufwand für die Reserve der Überlebenden des Jahres.

Durch Umformungen erhalten wir die Thieleschen Differenzgleichungen:

$${}_{m+1}V_x - {}_mV_x = i \cdot {}_mV_x + ({}_m\hat{P}_x - {}_m\hat{L}_x) \cdot (1 + i) + q_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x, \quad m = 0, 1, \dots$$

Mit Hilfe dieser Gleichungen lässt sich die Rückstellung auch rekursiv definieren.

Die versicherungsmathematische Bilanzgleichung erlaubt zudem, die Prämie  ${}_m\hat{P}_x$  in eine Sparprämie  ${}_mP_x^S$  und eine Risikoprämie  ${}_mP_x^R$  aufzuteilen. Die Spar- und Risikoprämie seien hierbei wie folgt definiert:

$$\begin{aligned} {}_mP_x^S &:= v \cdot {}_{m+1}V_x - {}_mV_x \\ {}_mP_x^R &:= {}_m\hat{L}_x - v \cdot q_{x+m} \cdot {}_{m+1}V_x \end{aligned}$$

Mit Hilfe dieser Definitionen gilt  ${}_m\hat{P}_x = {}_mP_x^S + {}_mP_x^R$ .

Die Risikoprämie lässt sich wie folgt auf die einzelnen Ausscheideursachen aufteilen:

$${}_mP_x^R = \sum_{i=0}^h {}_mP_x^{R(i)}$$

Dabei ist

$${}_mP_x^{R(0)} := {}_mL_x^{(0)}$$

die Risikoprämie für das Verbleiben im Bestand sowie

$${}_mP_x^{R(i)} := q_{x+m}^{(i)} \cdot ({}_mL_x^{(i)} - v \cdot {}_{m+1}V_x)$$

die Risikoprämie der  $i$ -ten Ausscheideursache ( $i \geq 1$ ).

#### **Lernergebnisse (C4)**

Die Studierenden können Prämien- und Leistungsbarwerte und die Prämien analysieren. Sie können den Zusammenhang zwischen Prämien und Rückstellungen (Äquivalenzprinzip) erläutern. Sie können sowohl die prospektive als auch die retrospektive Darstellung der Reserve erklären. Die Studierenden können die versicherungsmathematische Bilanzgleichung erläutern und die Prämien in Sparprämie und Risikoprämie zerlegen.

### **3.4 Vertragskündigung, Rückkaufs- und Übertragungswerte**

#### **Kerninhalte**

- Vertragskündigung
- Rückkaufs- und Übertragungswerte
- Satz von Cantelli

Aufgrund von üblicherweise sehr langen Laufzeiten von Verträgen der Personenversicherung erhalten Versicherungsnehmer bei Kapitalbildung üblicherweise die Möglichkeit, die Vertragsverhältnisse vor Ablauf der Verträge zu verändern oder zu kündigen (sogenannter Rückkauf). Da die Rückstellung in gewisser Weise einen Sparvorgang bewertet, orientiert sich eine Rückzahlung an die Personen (Rückkaufswert) bzw. eine Übertragung der Rückstellung an ein anderes Unternehmen (Übertragungswert) in der Regel an der Höhe der gebildeten Rückstellung.

Die rechtlichen Regelungen zu Vertragskündigungen sind sehr spezifisch für die einzelnen Zweige der Versicherungswirtschaft.

Grundsätzlich stellt sich bei langlaufenden Verträgen der Personenversicherung jedoch die Frage, unter welchen Voraussetzungen bei der Kalkulation von Prämien und Rückstellungen auch Stornowahrscheinlichkeiten (Kündigungswahrscheinlichkeiten) in den Rechnungsgrundlagen (Ausscheideordnungen) zu berücksichtigen sind.<sup>21</sup> Der folgende Satz von Cantelli gibt an, wann auf die Rechnungsgrundlage Storno verzichtet werden kann.

#### Satz von Cantelli

<sup>21</sup>Annahme: Die Stornowahrscheinlichkeiten beeinflussen die übrigen Wahrscheinlichkeiten nicht.

Wenn der Rückkaufswert/Übertragungswert gleich der vorhandenen Rückstellung ist, dann ist es in der Kalkulation nicht erforderlich, Stornowahrscheinlichkeiten zu berücksichtigen. Die versicherungstechnischen Werte sind unabhängig von etwaigen Stornowahrscheinlichkeiten.

Der Satz von Cantelli lässt sich damit begründen, dass Beiträge und Reserven in der Kalkulation unabhängig von Stornowahrscheinlichkeiten sind (siehe versicherungsmathematische Bilanzgleichung für die Fälle „mit Stornowahrscheinlichkeiten“ und „ohne Stornowahrscheinlichkeiten“).

**Lernergebnisse (B2)**

Die Studierenden kennen die grundsätzlichen Prinzipien bei der Kalkulation von Rückkaufs- und Übertragungswerten. Sie kennen den Satz von Cantelli.

## 4 Grundwissen Lebensversicherungsmathematik

### 4.1 Rechnungsgrundlagen

#### **Kerninhalte:**

- Rechnungsgrundlagen der Lebensversicherungsmathematik
- Risiken in den Rechnungsgrundlagen
- Kosten- und Sicherheitszuschläge

In der Lebensversicherung lassen sich unterschiedliche Ereignisse versichern. Die wichtigsten Ereignisse sind:

- Todesfall
- Erlebensfall
- Invalidität

Wenn der Todesfall oder die Invalidität versichert sind, dann ist eine Risikoprüfung erforderlich. Diese besteht aus einer medizinischen Risikoprüfung und aus einer finanziellen Risikoprüfung. Die finanzielle Risikoprüfung soll Interessenskonflikten vorbeugen, d. h. z. B. sollte es aus diesem Grund nicht möglich sein, eine höhere Invaliditätsrente als das Nettoeinkommen der versicherten Person zu versichern.

Bei Tarifen, die das Erlebensfallrisiko abdecken, wird keine Risikoprüfung durchgeführt. Vereinzelt und vor allem im Ausland gibt es hingegen Tarife, die bei vorgegebenem Beitrag und nachgewiesenen Vorerkrankungen (z. B. Bluthochdruck) eine höhere Rente garantieren als wenn die Vorerkrankung nicht vorliegen würde (preferred lives).

Bei der Kalkulation der Beiträge und Leistungen ist zu beachten, dass die Beiträge und die Leistungen über einen sehr langen Zeitraum vom Lebensversicherungsunternehmen garantiert werden. Ein Eingriff in diese Garantien ist in schwierigen Unternehmenssituationen nur mit Genehmigung der Aufsichtsbehörde unter strengen Voraussetzungen möglich, wenn alle anderen Maßnahmen nicht zum Ziel führen.

Es gibt (im Gegensatz zur Schaden- und Unfallversicherung) kein Kündigungsrecht des Lebensversicherungsunternehmens gegenüber seinen Kunden. Außerdem gibt es kein Recht, die garantierten Beiträge (im Gegensatz zur substitutiven Krankenversicherung) an veränderte Annahmen anzupassen. Diese Einschränkungen implizieren, dass die Rechnungsgrundlagen Rechnungszins, die biometrischen Rechnungsgrundlagen und die Kostenzuschläge zum Zeitpunkt der Kalkulation der Beiträge und Leistungen vorsichtig gewählt werden müssen (implizite Sicherheitszuschläge, Vorsichtsprinzip).

#### **Konsequenzen:**

- Der Rechnungszins (sofern es sich nicht um eine fondsgebundene Versicherung handelt) wird niedriger als die erwartete Verzinsung der Kapitalanlagen angesetzt.
- Die Sterblichkeit für Versicherungen, die das Todesfallrisiko abdecken, wird höher als erwartet angesetzt.
- Die Sterblichkeit für Versicherungen, die das Erlebensfallrisiko abdecken, wird niedriger als erwartet angesetzt.
- Die Invalidisierungswahrscheinlichkeiten für Versicherungen, die das Invaliditätsrisiko abdecken, werden höher als erwartet angesetzt.
- Die Verwaltungskosten werden höher als erwartet angesetzt.
- Die tatsächlichen Abschlusskosten können die eingerechneten Abschlusskosten übersteigen. Verluste bei den Abschlusskosten müssen durch andere Kostengewinne kompensiert werden.

#### 4.1.1 Rechnungszins

In der Praxis müssen die Lebensversicherungsunternehmen bei der Festlegung des Rechnungszinses den Höchstrechnungszins der Deckungsrückstellungsverordnung beachten, der zum Zeitpunkt des Vertragsabschlusses gültig ist. Mit diesem Rechnungszins sind während der gesamten Vertragslaufzeit alle Zahlungsströme bei der *Kalkulation der Deckungsrückstellung* zu bewerten. Bei der Wahl des Rechnungszinses für die *Prämienkalkulation* gibt es grundsätzlich keine explizite rechtliche Regelung. Hier müssen Unternehmen jedoch § 138 (1) VAG beachten; demzufolge müssen Prämien ausreichen, um die Deckungsrückstellung zu finanzieren. Der Rechnungszins der Prämienkalkulation orientiert sich daher meistens am Höchstrechnungszins der Deckungsrückstellungsverordnung.

#### 4.1.2 Biometrische Rechnungsgrundlagen (Sterbetafeln, Invalidisierungstafeln)

Einige Lebensversicherungsunternehmen verwenden biometrische Rechnungsgrundlagen, die von der DAV stammen (z. B. die Sterbetafel DAV 2004 R für Rentenversicherungen). Das ist vor allem dann der Fall, wenn der eigene Bestand des Lebensversicherungsunternehmens zu klein ist, um eine unternehmenseigene Sterbetafel bzw. Invalidisierungstafel basierend auf eigenen Beobachtungen im Bestand herzuleiten. Es gibt allerdings auch Lebensversicherungsunternehmen, die z. B. für das Todesfallrisiko unternehmenseigene Sterbetafeln basierend auf eigenen Beobachtungen von Todesfällen im Bestand verwenden. Das Vorsichtsprinzip wird durch Änderungs-, Irrtums- und Schwankungszuschläge in diesen Tafeln berücksichtigt. Bei Unisex-Tarifen (vgl. Abschnitt 1.1) entsteht durch das angenommene Mischungsverhältnis von Männern und Frauen implizit eine zusätzliche Rechnungsgrundlage, die in die Erstellung der biometrischen Wahrscheinlichkeiten eingeht. Auch diese Rechnungsgrundlage muss vorsichtig gewählt werden.

#### 4.1.3 Kostenzuschläge

Bei einem Lebensversicherungsunternehmen entstehen Kosten. Diese lassen sich unterscheiden nach den Bereichen, in denen sie anfallen:

- Abschlusskosten (z. B. Abschlussprovision, Marketingkosten, Kosten der Risikoprüfung, Kosten für die Ausstellung des Versicherungsscheins)
- Verwaltungskosten
- Regulierungskosten für die Regulierung von Versicherungsfällen
- Kapitalanlagekosten

Diese Kosten müssen in der Tarifikalkulation abgebildet werden, z. B. über das typische Kostenmodell, das in Deutschland verwendet wird (z. B. rechnungsmäßige Abschlusskosten in Promille der Beitragssumme, rechnungsmäßige Verwaltungskosten in Prozent des Beitrages oder in Promille der Versicherungssumme, Stückkosten). Die Bezugsgrößen für die rechnungsmäßigen Verwaltungskosten sind abhängig vom Tarif und unterscheiden sich für beitragspflichtige und beitragsfreie Versicherungen sowie bei Versicherungen gegen Einmalbeitrag. Verbreitet sind auch Kostensätze in Prozent des Fondsvermögens (d. h. des gebildeten Kapitals) bei fondsgebundenen Lebens- und Rentenversicherungen.

#### 4.1.4 Storno- und Kapitalwahlwahrscheinlichkeiten

Auf den Ansatz von Storno- und Kapitalwahlwahrscheinlichkeiten in der Beitragskalkulation (und in der Berechnung der Bilanzdeckungsrückstellung) kann verzichtet werden, wenn

im Rückkaufsfall ein Betrag in Höhe der Deckungsrückstellung, berechnet nach den Rechnungsgrundlagen der Beitragskalkulation, an den Versicherungsnehmer als Rückkaufswert gezahlt wird (Satz von Cantelli). Sollte es einen (vertraglich vereinbarten) Rückkaufswert in einer anderen Höhe geben, so sind Storno- und Kapitalwahlwahrscheinlichkeiten in der Beitragskalkulation bei den Leistungs- und Prämienbarwerten anzusetzen. Die Barwerte enthalten dann nicht nur die Diskontierung mit dem Rechnungszins und die Überlebenswahrscheinlichkeiten, sondern auch eine Wahrscheinlichkeit, dass der Vertrag im Bestand verbleibt.

Anders als in der Schaden- und Unfallversicherung ist in der Sparte Lebensversicherung ein Rückkaufswert an den Versicherungsnehmer bei Rückkauf bzw. bei Kündigung des Vertrages zu zahlen. Dieser Rückkaufswert orientiert sich am Zeitwert der zugeordneten Fondsanteile bei einer fondsgebundenen Versicherung bzw. an der Deckungsrückstellung, berechnet mit den Rechnungsgrundlagen der Beitragskalkulation bei den klassischen Versicherungen.

#### **4.1.5 Rechnungsgrundlagen der Reservierung**

Die Rechnungsgrundlagen, die für die Berechnung der Reservierung (Bilanzdeckungsrückstellung) in der Bilanz eines Lebensversicherungsunternehmens verwendet werden, können sich von den Rechnungsgrundlagen der Beitragskalkulation unterscheiden. Gründe dafür sind beispielsweise die Verwendung von vorsichtigeren Sterbetafeln (im Vergleich zu den Sterbetafeln der Beitragskalkulation) aufgrund steigender Lebenserwartungen bei den Rentenversicherungen, die Bildung einer Zinszusatzreserve bei klassisch kalkulierten Versicherungen oder höchstrichterliche Rechtsprechung (z. B. BGH-Urteil zu den Mindestrückkaufswerten). Sollte sich aus diesem Grund der Rückkaufswert von der zu stellenden Bilanzdeckungsrückstellung unterscheiden, so sind auch bei der Berechnung der Bilanzdeckungsrückstellung Storno- und Kapitalwahlwahrscheinlichkeiten anzusetzen.

##### **Lernergebnisse (B2)**

Die Studierenden kennen die Rechnungsgrundlagen der Lebensversicherungsmathematik und ihre Risiken. Sie können zwischen den Rechnungsgrundlagen der Beitragskalkulation und der Reservierung unterscheiden. Die Studierenden kennen die wichtigsten Kosten- und Sicherheitszuschläge. Die Studierenden kennen das Vorsichtsprinzip.

## **4.2 Standardformeln der klassischen Lebensversicherungsmathematik**

##### **Kerninhalte:**

- Standardformeln für die wichtigsten Produkte
- Herleitung der wichtigsten Produkte aus dem Basismodell

Im folgenden Abschnitt betrachten wir wichtige klassische Produkte der Lebensversicherung und leiten die Standardformeln aus dem Basismodell her.

Zu den wichtigen Produkten zählen:

- Risikolebensversicherung
- Todesfallversicherung
- Reine Erlebensfallversicherung
- Gemischte Versicherung
- (Aufgeschobene) Rentenversicherungen

Bei der Risikolebensversicherung und der Todesfallversicherung erfolgt die Leistung im Todesfall. Die reine Erlebensfallversicherung und die (aufgeschobene) Rentenversicherung leistet, wenn ein bestimmter Zeitpunkt erlebt wird (bzw. bei der Rentenversicherung mehrere Zeitpunkte erlebt werden). Die gemischte Versicherung leistet sowohl im Todesfall (innerhalb einer bestimmte Vertragsdauer) am Ende des Jahres als auch im Erlebensfall am Ende der Vertragsdauer. Rentenleistungen erfolgen in der Regel vorschüssig (zum Jahresanfang); andere Leistungen erfolgen nachschüssig (zum Jahresende).

#### 4.2.1 Risikolebensversicherung

Die ungewisse Verpflichtung resultierend aus der Risikolebensversicherung ist gegeben durch die folgenden Zahlungsströme:

$$T^{(m)} = (0, \dots, m-1, m, m+1, \dots, n)$$

und

$$S^{(m)} = (0, \dots, 0, S, 0, \dots, 0) \quad \text{für } 0 \leq m \leq n,$$

wobei  $S$  die Versicherungssumme bezeichnet und  $m$  das Jahr, in dem der Versicherungsnehmer stirbt.  $x$  ist das Alter der versicherten Person zu Vertragsbeginn (Eintrittsalter). Wenn  $m > n$  ist, dann ist  $S = (0, 0, \dots, 0)$ . Es wird angenommen, dass die Todesfallleistung bei Eintritt des Todes am Ende des Versicherungsjahres ausgezahlt wird.

Nun kann der Erwartungswert des Erfüllungsbetrags  $B$  bestimmt werden. Es ist:

$${}_0B_x^L = S \cdot \sum_{m=0}^{n-1} v^{m+1} \cdot {}_m p_x \cdot q_{x+m} = S \cdot {}_{|n}A_x$$

Wenn die Beitragszahlungsdauer der Versicherungsdauer entspricht, gilt für den Erwartungswert des Prämienzahlungsstroms:

$$P \cdot \sum_{m=0}^{n-1} v^m \cdot {}_m p_x = P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Das Äquivalenzprinzip liefert die Gleichung:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = S \cdot {}_{|n}A_x.$$

Werden Kosten berücksichtigt, so ergibt sich z. B. folgende Gleichung:

$$S \cdot {}_{|n}A_x + \alpha \cdot n \cdot P + \beta \cdot P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \cdot S \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Bei dieser Gleichung wird angenommen, dass Abschlusskosten in Abhängigkeit zur Bruttobeitragssumme und Verwaltungskosten in Abhängigkeit zur Bruttoprämie bzw. in Abhängigkeit zur Versicherungssumme in den Tarif eingerechnet werden.

#### 4.2.2 Todesfallversicherung

Die ungewisse Verpflichtung resultierend aus der Todesfallversicherung ist gegeben durch folgende Zahlungsströme:

$$T^{(m)} = (0, \dots, m-1, m, m+1, \dots, \omega-x)$$

und

$$S^{(m)} = (0, \dots, 0, S, 0, \dots, 0) \quad \text{für } 0 \leq m \leq \omega-x,$$

wobei  $S$  die Versicherungssumme bezeichnet und  $m$  das Jahr, in dem der Versicherungsnehmer stirbt.  $\omega$  bezeichnet das rechnungsmäßige Höchstalter. Es wird angenommen, dass die

Todesfallleistung bei Eintritt des Todes am Ende des Versicherungsjahres ausgezahlt wird. Nun kann der Erwartungswert des Erfüllungsbetrags  $B$  bestimmt werden. Es ist:

$${}_0B_x^L = S \cdot \sum_{m=0}^{\omega-x-1} v^{m+1} \cdot {}_m p_x \cdot q_{x+m} = S \cdot A_x.$$

Für den Erwartungswert des Prämienzahlungsstroms gilt:

$$P \cdot \sum_{m=0}^{\omega-x-1} v^m \cdot {}_m p_x = P \cdot \ddot{a}_x.$$

Das Äquivalenzprinzip liefert die Gleichung:

$$P \cdot \ddot{a}_x = S \cdot A_x.$$

Werden Kosten mit ihren typischen Bezugsgrößen berücksichtigt, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$S \cdot A_x + \alpha \cdot n \cdot P + \beta \cdot P \cdot \ddot{a}_x + \gamma \cdot S \cdot \ddot{a}_x = P \cdot \ddot{a}_x$$

#### 4.2.3 Reine Erlebensfallversicherung

Die reine Erlebensfallversicherung leistet, wenn die versicherte Person nach Vertragsbeginn  $n$  Jahre überlebt. Für den Erwartungswert des Erfüllungsbetrags  $B$  gilt daher:

$${}_0B_x^L = S \cdot {}_n p_x \cdot v^n.$$

Wenn die Beitragszahlungsdauer der Versicherungsdauer entspricht, dann gilt aufgrund des Äquivalenzprinzips und bei Nettobetrachtung:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} = S \cdot {}_n p_x \cdot v^n.$$

Werden Kosten mit ihren typischen Bezugsgrößen berücksichtigt, so ergibt sich folgende Gleichung:

$$S \cdot {}_n p_x \cdot v^n + \alpha \cdot P \cdot n + \beta \cdot P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} + \gamma \cdot S \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} = P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}$$

#### 4.2.4 Gemischte Versicherung

Die Gemischte Versicherung mit Versicherungssumme  $S$  ist eine Kombination aus reiner Erlebensfallversicherung und Risikolebensversicherung. Daher gilt für den Erwartungswert des Erfüllungsbetrags:

$${}_0B_x^L = S \cdot \sum_{m=0}^{n-1} v^{m+1} \cdot {}_m p_x \cdot q_{x+m} + S \cdot v^n \cdot {}_n p_x = S \cdot A_{x:\overline{n}}.$$

Analog zu obigen Überlegungen gilt:

$$S \cdot A_{x:\overline{n}} + \alpha \cdot P \cdot n + \beta \cdot P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} + \gamma \cdot S \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}} = P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}}$$

#### 4.2.5 Leibrente

Der Erfüllungsbetrag einer Leibrente (ohne Todesfallleistung) mit Rentenhöhe  $R$  hat folgenden Erwartungswert:

$${}_0B_x^L = R \cdot \sum_{m=0}^{\omega-x-1} v^m \cdot {}_m p_x$$

Ein zu Beginn zu zahlender Einmalbeitrag  $P^E$  ergibt sich aus dem Äquivalenzprinzip:

$$P^E = (\alpha + \beta) \cdot P^E + (1 + \gamma) \cdot R \cdot \sum_{m=0}^{\omega-x-1} v^m \cdot {}_m p_x$$



#### 4.2.6 Aufgeschobene Leibrente

Der Erfüllungsbetrag einer aufgeschobenen Leibrente (ohne Todesfallleistung) mit Rentenhöhe  $R$  hat folgenden Erwartungswert:

$${}_0B_x^L = R \cdot \sum_{m=x+n}^{\omega-(x+n)-1} v^m \cdot {}_m p_x$$

Es wird angenommen, dass die Rente vorschüssig (d. h. am Jahresanfang) gezahlt wird. Wenn die Beitragszahlungsdauer der Aufschubzeit entspricht, dann gilt aufgrund des Äquivalenzprinzips:

$$P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} = R \cdot \sum_{m=x+n}^{\omega-x-n} v^m \cdot {}_m p_x$$

Analog zu obigen Überlegungen gilt:

$$R \cdot \sum_{m=x+n}^{\omega-(x+n)-1} v^m \cdot {}_m p_x + P \cdot \alpha \cdot n + P \cdot \beta \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|} + \gamma \cdot R \cdot n \ddot{a}_x = P \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

Es wurde angenommen, dass neben den beitragssummenproportionalen Abschlusskosten und den beitragsproportionalen Verwaltungskosten in der Aufschubzeit rentenproportionale Verwaltungskosten im Rentenbezug erhoben werden.

#### 4.2.7 Temporäre Leibrente

Der Erfüllungsbetrag einer temporären Leibrente (ohne Todesfallleistung) mit Rente  $R$  hat folgenden Erwartungswert:

$${}_0B_x^L = R \cdot \sum_{m=0}^{n-1} v^m \cdot {}_m p_x = R \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}$$

wobei  $n \leq \omega - x$  die maximale Anzahl der Rentenzahlungen ist, d. h. die Rente wird gezahlt solange die Person lebt, höchstens jedoch für  $n$  Jahre. Der zu Beginn zu zahlende Einmalbeitrag  $P^E$  berechnet sich wie folgt:

$$P^E = (\alpha + \beta) \cdot P^E + (1 + \gamma) \cdot R \cdot \sum_{m=0}^n v^m \cdot {}_m p_x$$

#### Lernergebnisse (C3)

Die Studierenden können die Formeln für die Leistungsbarwerte der Standardprodukte herleiten und berechnen.

### 4.3 Rekursive Ansätze zur Berechnung von Prämien

#### Kerninhalte:

- Rekursive Ansätze zur Berechnung von Prämien

Prämien können auch rekursiv (d. h. ohne die Verwendung von Kommutationswerten) berechnet werden, wie an folgenden Beispielen gezeigt werden soll. Die Überlegungen ergeben sich aus der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung.

### 4.3.1 Einmalbeitrag für eine sofort beginnende Leibrente

In diesem Fall kann der Einmalbeitrag für eine sofort beginnende Leibrente rekursiv berechnet werden (die Rente  $R$ , die Sterbetafel, der Kostensatz und der Rechnungszins sind vorgegeben):

$$\begin{aligned}\omega-xV_x &= 0, \\ m-1V_x &= (1 + \gamma_2) \cdot R + {}_1p_{x+m-1} \cdot v \cdot {}_mV_x + q_x \cdot 0, \quad m = \omega - x, \dots, 1\end{aligned}$$

Somit ist

$$\frac{{}_0V_x}{1 - \alpha - \beta}$$

der zu Vertragsbeginn erforderliche Einmalbeitrag, um eine Leibrente ohne Todesfall-Leistung zu finanzieren. Hier entsprechen die Rechnungsgrundlagen in der Kalkulation den Rechnungsgrundlagen der Prämienkalkulation. Es wird angenommen, dass bei Vertragsabschluss Abschlusskosten in Höhe von  $\alpha$  bezogen auf den Einmalbeitrag und einmalige Verwaltungskosten in Höhe von  $\beta$ , bezogen auf den Einmalbeitrag erhoben werden. Die Berechnung kann jedoch auch ohne Rekursion erfolgen.

### 4.3.2 Laufende Prämie für eine Risikolebensversicherung

Vereinbart sei eine Vertragsdauer von  $n$  Jahren.

$$\begin{aligned}{}_nV_x &= 0, \\ m-1V_x &= q_{x+m-1} \cdot S \cdot v + {}_1p_{x+m-1} \cdot v \cdot {}_mV_x - P \cdot (1 - \beta), \quad m = n, \dots, 1\end{aligned}$$

Da die Prämie  $P$  unbekannt ist und die Versicherungssumme  $S$  vorgegeben ist, muss mit einem numerischen Verfahren iteriert werden, bis die Bedingung  ${}_0V_x = -\alpha \cdot P \cdot n$  erfüllt ist.

Es wird dabei angenommen, dass zu Beginn Abschlusskosten in Höhe von  $\alpha$  bezogen auf die Bruttobeitragssumme erhoben werden.

### 4.3.3 Laufende Prämie für eine Kapitallebensversicherung

Vereinbart sei eine Vertragsdauer von  $n$  Jahren.

$$\begin{aligned}{}_nV_x &= S, \\ m-1V_x &= q_{x+m-1} \cdot S \cdot v + {}_1p_{x+m-1} \cdot v \cdot {}_mV_x - P \cdot (1 - \beta), \quad m = n, \dots, 1\end{aligned}$$

Da die Prämie  $P$  unbekannt ist und die Versicherungssumme  $S$  vorgegeben ist, muss mit einem numerischen Verfahren iteriert werden, bis die Bedingung  ${}_0V_x = -\alpha \cdot P \cdot n$  erfüllt ist.

#### Lernergebnisse (B2)

Die Studierenden kennen rekursive Ansätze zur Berechnung von Prämien.

## 4.4 Überschussbeteiligung der Versicherungsnehmer

#### Kerninhalte:

- Gründe für das Entstehen von Überschüssen (Überschussquellen)
- Vorgehen bei der Überschussbeteiligung der Versicherungsnehmer
- Beteiligung der Versicherungsnehmer an den Bewertungsreserven

#### 4.4.1 Entstehung von Überschüssen

Da bei der Kalkulation der Beiträge und der Leistungen alle Rechnungsgrundlagen vorsichtig gewählt sind, entstehen in der Regel Überschüsse. Es kann jedoch auch der Fall eintreten, dass sich der Zins, die Sterblichkeit oder die Kosten ungünstiger entwickeln als bei der Kalkulation der Beiträge angenommen.

Bei der Analyse des Rohüberschusses ist nach der jeweiligen Quelle des Rohüberschusses (Zinsergebnis, Risikoergebnis, Übriges Ergebnis) zu unterscheiden. Das Kostenergebnis ist Bestandteil des übrigen Ergebnisses.

Der Rohüberschuss im  $m$ -ten Jahr kann anhand der *Kontributionsgleichung* dargestellt werden:

$$\begin{aligned}\text{Rohüberschuss} &= \left( {}_mV_x + P_{x+m} - L_{x+m} - \tilde{K}_{x+m} \right) \cdot (\tilde{i} - i) \\ &\quad + (L_{x+m} - {}_{m+1}V_x) \cdot (\tilde{q}_{x+m} - q_{x+m}) \\ &\quad + (K_{x+m} - \tilde{K}_{x+m}) \cdot (1 + i)\end{aligned}$$

$\tilde{i}$  bezeichnet hier den tatsächlich erzielten Zins und  $i$  den Rechnungszins.  $P_{x+m}$ ,  $L_{x+m}$  und  $\tilde{K}_{x+m}$  bezeichnen Prämie, Leistungen und Kosten, die zu Jahresbeginn angefallen sind. Die Kosten  $\tilde{K}_{x+m}$  können von den einkalkulierten  $K_{x+m}$  abweichen. Dasselbe gilt für die Sterbewahrscheinlichkeiten, so dass  $\tilde{q}_{x+m}$  die beobachtete Sterblichkeitserfahrung bezeichnet und  $q_{x+m}$  die kalkulatorische Sterblichkeit.  $L_{x+m}$  gibt die Höhe der Leistung im Todesfall an, die am Jahresende von Jahr  $m$  geleistet wird.

Die Kontributionsgleichung kann aus der versicherungsmathematischen Bilanzgleichung hergeleitet werden. Die Summe aller Überschüsse ergibt den Rohüberschuss. Der Begriff Rohüberschuss kann auf das gesamte Lebensversicherungsunternehmen bezogen werden, allerdings auch auf einzelne Tarife oder Tarifgenerationen.

Der Rohüberschuss kann folgendermaßen verwendet werden:

- Bildung von Eigenkapital
- Zahlung einer Dividende an die Eigentümer
- Zuführung zur Rückstellung für Beitragsrückerstattung (kurz RfB)
- Beteiligung der Versicherungsnehmer am Rohüberschuss durch die Direktgutschrift

Der Gesetzgeber hat Regelungen (z. B. in Deutschland die Mindestzuführungsverordnung) erlassen, die sicherstellen, dass die Versicherungsnehmer angemessen am Rohüberschuss beteiligt werden.

#### 4.4.2 Überschussdeklaration, Bezugsgrößen der Überschussbeteiligung, Überschussverwendungsformen

Der Vorstand beschließt auf Vorschlag des Verantwortlichen Aktuars die Überschussdeklaration für das Folgejahr. Die Überschussanteile können entweder der RfB entnommen werden und den Verträgen gutgeschrieben werden oder ohne den Umweg über die RfB als Direktgutschrift gewährt werden.

Grundsätzlich müssen laufende Überschussanteile (diese werden jährlich fällig) von Schlussüberschussanteilen (diese werden bei Ablauf des Vertrages, bei Tod oder Kündigung bzw. bei Wechsel in den Rentenbezug fällig) unterschieden werden.

Übliche Bezugsgrößen für die Überschussbeteiligung sind:

- Tarifbeitrag (z. B. für laufende Überschussanteile bei Risikolebensversicherungen, Berufsunfähigkeitsversicherungen)
- Deckungskapital nach Rechnungsgrundlagen der Beitragskalkulation (z. B. für laufende Überschussanteile bei kapitalbildenden Lebensversicherungen)
- Versicherungssumme für kapitalbildende Lebensversicherungen

Diese Aufzählung ist nicht abschließend. Die Bemessungsgrößen sind abhängig von der Versicherungsart, aber auch abhängig vom konkreten Lebensversicherungsunternehmen. Die Überschussanteile können nachdem sie anhand der deklarierten Überschussätze und Bezugsgrößen berechnet wurden, folgendermaßen verwendet werden:

- Sofortverrechnung mit dem Beitrag
- Verzinsliche Ansammlung
- Bonusbildung zur Erhöhung der Versicherungsleistung
- Auszahlung
- Anlage der Überschüsse in einem Investmentfonds

Die Aufzählung ist nicht abschließend und ist außerdem abhängig vom Lebensversicherungsunternehmen und von der Art der Versicherung.

#### **4.4.3 Funktion der Überschussbeteiligung im traditionellen Geschäftsmodell**

Im traditionellen Geschäftsmodell der Lebensversicherung entstehen Überschüsse u.a. durch vorsichtig gewählte Rechnungsgrundlagen. Überschüsse werden zu einem Großteil den Versicherungsnehmern zugeteilt. Der Gesetzgeber stellt dies mit verschiedenen Gesetzen sicher.

#### **4.4.4 Beteiligung der Versicherungsnehmer an den Bewertungsreserven**

Das Versicherungsvertragsgesetz (VVG) aus dem Jahr 2008 sieht vor, dass die Versicherungsnehmer an den Bewertungsreserven bei Abgang des Vertrages aus dem Lebensversicherungsbestand bzw. bei Wechsel von der Aufschubzeit in den Rentenbezug zu beteiligen sind. Grund für die Einführung der Beteiligung an den Bewertungsreserven war ein Urteil des Bundesverfassungsgerichts aus dem Jahr 2005. Die Beteiligung an den Bewertungsreserven ist seitdem Bestandteil der Überschussbeteiligung der VN.

Da das handelsrechtliche Ergebnis nach HGB für die Dotierung der RfB relevant ist und bei der Bilanzierung der Kapitalanlagen nach HGB in der Regel der Buchwert relevant ist, entstehen Abweichungen zu den Zeitwerten der Kapitalanlagen.

Konkret entstehen stille Reserven in einer Kapitalanlage (z. B. eines Wertpapiers), wenn der Zeitwert dieser Kapitalanlage über dem Buchwert der Kapitalanlage liegt. Im anderen Fall entstehen stille Lasten. Die Versicherungsnehmer sind an den saldierten Bewertungsreserven der Kapitalanlagen eines Lebensversicherungsunternehmens (ggf. maximiert mit 0) bei Abgang ihres Vertrages nach einem verursachungsorientierten Verfahren zu beteiligen.

Bei der Beteiligung an den Bewertungsreserven wird unterschieden zwischen anspruchsberechtigten Versicherungen und nicht anspruchsberechtigten Versicherungen. Versicherungen, die ein Deckungskapital haben, das lediglich zur Glättung des Risikoverlaufes bei konstanten Prämien dient (z. B. Risikolebensversicherungen) sind nicht anspruchsberechtigt.

Kapitalbildende klassische Lebens- und Rentenversicherungen sind hingegen anspruchsberechtigt, weil das Deckungskapital wesentlich zur Finanzierung einer garantierten Ablaufleistung dient. Fondsgebundene Versicherungen sind nicht anspruchsberechtigt, weil sämtliche Chancen und Risiken der Kapitalanlage beim VN liegen und die VN an sämtlichen Wertentwicklungen der ihnen zugeordneten Kapitalanlagen partizipieren.

Die Formel für den einzelvertraglichen Anspruch einer anspruchsberechtigten Versicherung lautet:

$$BWR(\text{Vertrag}) = \frac{\text{SumKap}(\text{Vertrag})}{\sum_{\text{Vertrag}(i) \in \text{Bestand}} \text{SumKap}(\text{Vertrag}(i))} \cdot AAV \cdot 0,5 \cdot \max(BWR(LVU), 0)$$

SumKap(Vertrag) sind die aufsummierten Deckungskapitalien nach Rechnungsgrundlagen der Beitragskalkulation ab Vertragsbeginn. Dieser Schlüssel dient der Zuordnung der Bewertungsreserven des gesamten Lebensversicherungsunternehmens auf die einzelnen Versicherungsverträge. AAV ist der Anteil der anspruchsberechtigten Versicherungen am Gesamtunternehmen.

Da die Niedrigzinsphase an den Kapitalmärkten dazu führte, dass sehr hohe Bewertungsreserven (insbesondere in festverzinslichen Kapitalanlagen) entstanden sind, und vermieden werden sollte, dass hohe Mittel an die Versicherungsnehmer ausgezahlt werden, obwohl diese Mittel zur Sicherstellung der Garantieleistungen in späteren Jahren benötigt werden, wurde die Beteiligung an den Bewertungsreserven neu geregelt.

Mit dem Lebensversicherungsreformgesetz (LVRG) wurde im Jahr 2011 die Beteiligung an den Bewertungsreserven reformiert.

Es wird seitdem unterschieden zwischen Bewertungsreserven auf festverzinsliche Kapitalanlagen und Zinsabsicherungsgeschäften und Bewertungsreserven aus anderen Kapitalanlagen (z. B. Aktien, Immobilien etc.). Die Bewertungsreserven auf festverzinsliche Kapitalanlagen und Zinsabsicherungsgeschäfte werden nur insoweit in die Beteiligung der Versicherungsnehmer an den Bewertungsreserven einbezogen, wie sie einen Sicherungsbedarf (unterbewertete Deckungsrückstellung) des Gesamtunternehmens übersteigen.

Viele Lebensversicherungsunternehmen haben eine Sockelbeteiligung im Rahmen der Überschussdeklaration für im Deklarationszeitraum abgehende Verträge deklariert, die unabhängig von der Höhe der einem Versicherungsvertrag zugeordneten Bewertungsreserven gewährt wird. Sind die tatsächlich zugeordneten Bewertungsreserven höher als die deklarierte Sockelbeteiligung, so wird der übersteigende Betrag zusätzlich zur Sockelbeteiligung gewährt.

### **Lernergebnisse (B2)**

Die Studierenden kennen die Gründe für das Entstehen eines Rohüberschusses. Die Studierenden kennen die Kontributionsgleichung. Die Studierenden kennen die Möglichkeiten zur Verwendung des Rohüberschusses. Die Studierenden kennen das prinzipielle Vorgehen bei der Überschussbeteiligung. Die Studierenden kennen übliche Bezugsgrößen und die wichtigsten Überschussverwendungsformen. Die Studierenden kennen die Funktion der Überschussbeteiligung im traditionellen Geschäftsmodell.

# 5 Grundwissen Pensionsversicherungsmathematik

## 5.1 Arbeitsrechtliches und betriebswirtschaftliches Umfeld

### Kerninhalte

- Arbeitsrechtliches Umfeld
- Betriebswirtschaftliches Umfeld

Durch Pensionszusagen verpflichten sich Arbeitgeber, ihren Arbeitnehmern bei Eintritt eines Versorgungsfalles Leistungen der betrieblichen Altersversorgung zu gewähren. Als Versorgungsfälle kommen das Erreichen einer Altersgrenze (oder eines Altersbereichs, beispielsweise zwischen 60 und 70), der Eintritt von Invalidität (Berufsunfähigkeit, Erwerbsminderung, Dienstunfähigkeit), der Tod des Arbeitnehmers oder eine sonstige Ursache (z. B. Entlassung aus dem Arbeitsverhältnis im rentennahen Alter) in Betracht.

Leistungen der betrieblichen Altersversorgung sind Leistungen des Arbeitgebers, die - nach dem jeweils geltenden Recht - auf den unterschiedlichsten Grundlagen basieren können. So können die Regelungen dem Grunde nach dem jeweils maßgeblichen Arbeits- oder Steuer- und seltener dem Zivilrecht unterliegen. Die Leistungszusagen können freiwillig oder verpflichtend erfolgen, der kollektiven Mitbestimmung unterworfen oder mitbestimmungsfrei sein, mit oder ohne vom Arbeitgeber getrenntem und insolvenzgesichertem Deckungsvermögen finanziert und mit oder ohne Garantien ausgestaltet sein. Jedenfalls unterscheiden sich Zusagen der betrieblichen Altersversorgung von Versicherungsverträgen u. a. dadurch, dass der Begünstigte kein individuelles (zivilrechtliches) Vertragsverhältnis mit der zahlungsverpflichtenden Einrichtung haben muss und die zusagende Einrichtung nicht öffentlich-rechtlich reguliert sowie die Leistungen nicht durch vom Arbeitgeber ausgelagerte Deckungsmittel finanziert sein müssen.

In Deutschland bestimmt das Arbeitsrecht weitgehend die Grundlagen der betrieblichen Altersversorgung, was in anderen Ländern nicht so gelten muss. Beispielsweise wird das Betriebsrentenrecht in den USA und im Vereinigten Königreich überwiegend durch das Steuerrecht bestimmt.

Nachfolgend wird nicht zuletzt aus Praktikabilitätsgründen auf die Situation in Deutschland eingegangen. So bestimmt hierzulande der Arbeitgeber den Dotierungsrahmen (d. h. die Kosten), den Durchführungsweg (d. h. das Finanzierungsvehikel, siehe dazu später mehr) und den begünstigten Personenkreis. Der Arbeitnehmer kann allerdings verlangen, dass ihm bei entsprechendem Entgeltverzicht in bestimmtem Umfang wertgleiche Leistungen der betrieblichen Altersversorgung gewährt werden (Entgeltumwandlung).

Die Pensionszusagen können Bestandteil des Arbeitsvertrages sein oder auf Grund kollektivrechtlicher Regelungen (z. B. Betriebsvereinbarung, Tarifvertrag) bestehen. Die inhaltliche Gestaltung ist den Betriebsparteien weitgehend überlassen, wobei allgemeine arbeitsrechtliche Grundregeln (z. B. Gleichbehandlung) und spezielle Rechtsprechung zur betrieblichen Altersversorgung (z. B. Besitzstandsschutz bei Änderung von Pensionszusagen) zu beachten sind. Entsprechend ihrer Zielsetzung umfassen die Rechtsgrundlagen für eine Pensionszusage verschiedene inhaltliche Aspekte (wie den Geltungsbereich, die vorgesehenen Leistungsarten, Leistungsvoraussetzungen, anrechenbare Dienstzeiten, maßgebende Bezüge und sonstige Bemessungsgrundlagen, Leistungsformeln, Vorschriften zur Berechnung von Beiträgen und zur Umrechnung von diesen Beiträgen in Leistungen, usw.). Innerhalb der Pensionszusagen unterscheidet man reine Leistungszusagen (defined benefit plans), beitragsorientierte Leistungszusagen, Beitragszusagen mit Mindestleistung (alles Untertypen von Leistungszusagen) und reine Beitragszusagen (defined contribution plans).

Das Betriebsrentengesetz (BetrAVG) regelt einige Rahmenbedingungen und Mindestnormen, insbesondere zur Unverfallbarkeit (d. h. der Aufrechterhaltung von Anwartschaften

trotz vorzeitigem Ausscheiden aus dem Unternehmen), zur Insolvenzversicherung und zur Anpassung laufender Renten. Fünf Durchführungswege stehen für die betriebliche Altersversorgung zur Verfügung, die unmittelbare Pensionszusage (hier muss der Arbeitgeber zur Finanzierung der Leistungen keine gegen seine Insolvenz gesicherten Deckungsmittel aus dem Unternehmen bereitstellen), die Direktversicherung, die Pensionskasse, der Pensionsfonds und die Unterstützungskasse.

Die einzelnen Durchführungswege unterscheiden sich hinsichtlich der gesellschaftsrechtlichen Ausgestaltung und der steuerlichen, handelsrechtlichen und aufsichtsrechtlichen Behandlung. Diese Unterschiede strahlen auf die betriebswirtschaftlichen Fragestellungen und die aktuariellen Lösungsansätze aus.

Für unmittelbare Pensionsverpflichtungen bei Kapitalgesellschaften ist in den jeweiligen Jahresabschlüssen der Gesellschaft eine Rückstellung für ungewisse Verbindlichkeiten zu erfassen. Die Erfordernisse hinsichtlich der versicherungsmathematischen Ansätze für die Ermittlung dieser Rückstellungen hängen wesentlich vom jeweiligen Abschluss ab. Während im handelsrechtlichen Jahresabschluss die Regelungen des HGB (insbesondere § 253 HGB) und die dazu erlassenen Verlautbarungen des IDW<sup>22</sup> (insbesondere IDW RS HFA 30) zu beachten sind, sind für die Pensionsrückstellung in der Steuerbilanz die Regelungen des EStG (insbesondere § 6a EStG) sowie die Richtlinien der Finanzverwaltung (insbesondere die EStR<sup>23</sup>) maßgeblich. Im Gegensatz zu den Bewertungsannahmen für handelsrechtliche Zwecke, die dem Grundsatz der besten Schätzung folgen sollen, tendieren die für steuerliche Bewertungen vorgeschriebenen Bewertungsannahmen aus fiskalpolitischen Gründen dazu, eher restriktiv zu sein (und führen damit häufig zu einer Unterbewertung der ungewissen Verpflichtung).

Für Bewertung von Rückstellungen nach internationalen Rechnungslegungsstandards (IFRS, US-GAAP) sind wiederum die speziellen Bewertungsvorschriften des jeweiligen Standards zu beachten. Aber auch zu weiteren Anlässen kann eine Bewertung von unmittelbaren Pensionsverpflichtungen erfolgen, z. B. im Rahmen der Unternehmensbewertung, bei der angemessenen Berücksichtigung von Pensionszusagen in der Kostenrechnung, bei der Ermittlung der Bemessungsgrundlage für die – nach deutschem Arbeitsrecht gesetzlich verpflichtende – Insolvenzversicherung, sowie im Rahmen von mehrjährigen Planungsrechnungen.

Bei mittelbaren Pensionsverpflichtungen (also bei Durchführungsweegen, bei denen dem Grunde nach Deckungsmittel vom Arbeitgeber ausgelagert werden, d. h. bei Direktversicherung, Pensionskasse, Pensionsfonds und Unterstützungskasse) kann ebenfalls ein Bilanzausweis oder eine Angabe im Bilanzanhang der zusagegebenden Gesellschaft notwendig werden (z. B. im Falle einer Unterdeckung).

Bei der aktuariellen Begleitung von Versorgungseinrichtungen der betrieblichen Altersversorgung, die von der BaFin reguliert bzw. beaufsichtigt werden, ergeben sich wiederum der jeweiligen Aufgabe entsprechend spezielle versicherungsmathematische Fragestellungen. Dazu gehören z. B. die Kalkulation von Beiträgen und Leistungen, die Kontrolle der Rechnungsgrundlagen, die Ermittlung der Deckungsrückstellung oder das Aufstellen einer versicherungstechnischen Bilanz. Als oberstes Ziel gilt hier die Sicherstellung der dauernden Erfüllbarkeit der Verpflichtungen der Einrichtung und folglich müssen die verwendeten Annahmen eher vorsichtig gewählt werden.

Ein weiteres Aufgabengebiet von Aktuaren ist die Beurteilung, welcher Durchführungsweg für den Arbeitgeber unter bestimmten Voraussetzungen betriebswirtschaftlich am günstigsten ist. Mit Hilfe einer Prognoserechnung kann – unter Festlegung der relevanten Rahmenbedingungen über den gesamten Prognosezeitraum – untersucht werden, inwieweit eine unmittelbare oder eine mittelbare Durchführung der betrieblichen Altersversorgung Vorteile mit sich bringt. Bei dieser Aufgabenstellung kommt einer möglichst realistischen Einschätzung der langfristig zu erwartenden bewertungsrelevanten Annahmen besondere Bedeutung zu.

---

<sup>22</sup>Institut der Wirtschaftsprüfer

<sup>23</sup>Einkommensteuer-Richtlinien

Ferner sind durch den Aktuar z.T. einzelfallbezogene Ermittlungen des Werts einer Pensionsverpflichtung vorzunehmen (z. B. im Rahmen der Übertragung und Abfindung von Pensionszusagen sowie im Rahmen des Versorgungsausgleichs).

### **Lernergebnisse (B2)**

Die Studierenden verstehen und können erläutern, welchen Einfluss das Arbeitsrecht sowie betriebswirtschaftliche Überlegungen auf versicherungsmathematische Fragestellungen im Bereich der Pensionsversicherungsmathematik haben.

## **5.2 Bevölkerungsmodell und Rechnungsgrundlagen**

### **Kerninhalte**

- Bevölkerungsmodell
- Rechnungsgrundlagen
- verbundene Risiken

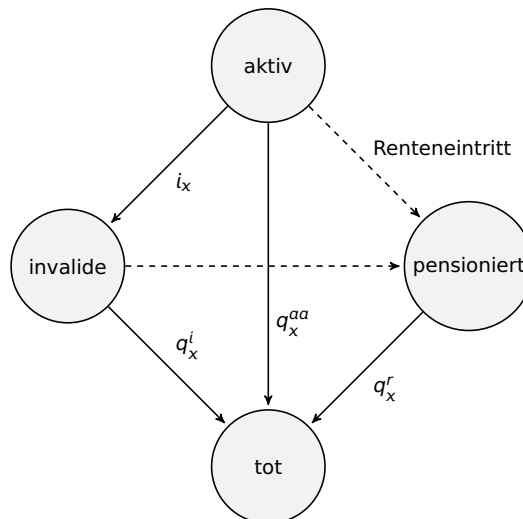
### **5.2.1 Bevölkerungsmodell**

Um einen Personenbestand einer versicherungsmathematischen Bewertung unterziehen zu können, müssen bekanntlich Rechnungsgrundlagen herangezogen werden, die die Entwicklung des Bestandes hinsichtlich unterschiedlicher Ausscheideursachen, wie beispielsweise Tod, Invalidität, Fluktuation, Pensionierung usw., dem Bewertungszweck entsprechend angemessen abbilden. Je nach verwendetem Bewertungsmodell können u.U. auch Neu- und Wiedereintritte einbezogen werden.

Um solche Rechnungsgrundlagen zu entwickeln, werden – je nach Verwendungszweck sowie theoretischen und praktischen Überlegungen – typischerweise unterschiedliche Personengesamtheiten untersucht. So können beispielsweise aus meist mehrjährigen Untersuchungen die Beobachtungen zu einer oder mehreren Ausscheideursachen bei einem (oder mehreren) Versicherungs- oder sonstigen Unternehmen herangezogen werden. Auch kommen Statistiken der Bevölkerungsentwicklung sowie Statistiken aus der gesetzlichen Rentenversicherung in Betracht. Die Rohergebnisse für Ausscheidewahrscheinlichkeiten werden dann nach unterschiedlichen Verfahren modifiziert bzw. geglättet (z. B. um außerordentliche Ereignisse im Untersuchungszeitraum oder Unzulänglichkeiten der Untersuchung auszugleichen). Im letzten Schritt werden – unter Berücksichtigung des Verwendungszwecks – Anpassungen vorgenommen, um künftig zu erwartenden Entwicklungen Rechnung zu tragen sowie um Sicherheits-, Profitabilitäts- und/oder sonstige Margen zu berücksichtigen.

Die überwiegend bei der Bewertung von unmittelbaren Pensionsverpflichtungen in Deutschland verwendeten biometrischen Rechnungsgrundlagen sind die 'Richttafeln 2005 G', bei denen es sich um Generationensterbetafeln handelt und die keine Sicherheits- oder sonstige Margen enthalten. Im Folgenden soll das den Richttafeln zugrunde liegende Bevölkerungsmodell mit der Hauptgesamtheit der Aktiven und den beiden vorzeitigen Ausscheideursachen Invalidität und Aktiventod als konkretes Beispiel dargestellt werden (vgl. Abschnitt 3).





Im Rahmen dieses Bevölkerungsmodells wird vor Erreichen eines fest definierten Pensionierungsalters zwischen den 'Aktiven' (a), den 'Invaliden' (i) und der Gesamtheit der lebenden Personen, dem sogenannten 'Gesamtbestand' (g) unterschieden. Die lebenden Personen ab Erreichen des festen Pensionierungsalters z bilden die Gesamtheit der 'Altersrentner' (r). Ferner ist die Gesamtheit der Witwen/Witwer zu berücksichtigen (w).

Ohne Berücksichtigung einer Hinterbliebenenversorgung kann dieses Bevölkerungsmodell durch einen Markov-Prozess mit den Zuständen 'aktiv', 'invalide', 'tot ohne Anspruch' und 'pensioniert' beschrieben werden. Dabei geht man im Richttafel-Modell davon aus, dass der Übergang vom Zustand 'invalide' in den Zustand 'aktiv' ausgeschlossen ist. Allerdings lassen sich in diesem Markov-Prozess nur sehr einfache Zusagen der betrieblichen Altersversorgung abbilden. I.d.R. wird daher ein Zustandsmodell mit weiteren Zuständen benötigt. Dies gilt insbesondere bei der Berücksichtigung einer Hinterbliebenenversorgung, da im Modell der Heubeck-Richttafeln 2005 G nicht von einer festen Altersdifferenz zwischen der verstorbenen Person und der Witwe / dem Witwer ausgegangen werden kann und somit je ein Zustand für jeden möglichen Geburtsjahrgang der Witwe / des Witwers benötigt wird. Aber auch bei Ausgestaltungen, in denen die Höhe der Invalidenleistungen vom Zeitpunkt des Eintritts der Invalidität abhängt, werden weitere Zustände benötigt. Gleiches gilt für die Berücksichtigung von Fluktuation. Bei komplexeren Gestaltungsformen der betrieblichen Altersversorgung kann der notwendige Zustandsraum daher eine beachtliche Komplexität erreichen.

Im Modell der Richttafeln geht man ferner von folgenden Voraussetzungen aus (dem sogenannten Axiomensystem der Pensionsversicherungsmathematik).

1. Die Austrittszeitpunkte aus der Gesamtheit bzw. aus den Gesamtheiten (bei einem Aktivenbestand: aus dem Aktiven-, Invaliden- und Gesamtbestand) sind innerhalb des Jahres gleichverteilt
2. Die Verzinsung innerhalb des Jahres erfolgt banküblich, d. h. linear, die Zinsgutschrift erfolgt also erst zum Ende des Jahres (Gemischte Verzinsung)
3. Die Zahlungen der Renten erfolgen determiniert zum Beginn bzw. Ende der Zahlungsabschnitte, zu deren Beginn bzw. Ende ein Anspruch besteht (Determinierte Fälligkeit der Rentenzahlungen)

Im Folgenden werden die einjährigen Ausscheide- und Übergangswahrscheinlichkeiten des Richttafel-Modells dargestellt. Der Einfachheit wegen wird der Geburtsjahrgang üblicherweise bei der Notation nicht berücksichtigt. Ferner wird das Geschlecht durch Verwendung von  $x$  für das Alter eines Mannes bzw. von  $y$  für das Alter einer Frau gekennzeichnet.

- $q_x^b$  die Wahrscheinlichkeit einer männlichen Person des Bestands  $b$  mit Alter  $x$  und Geburtsjahrgang  $G$ , innerhalb eines Jahres zu sterben,  $b \in \{r, i, g, w\}$

- $q_x^{aa}$  die Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -jährigen Aktiven mit Geburtsjahrgang  $G$ , im Altersintervall  $(x, x + 1]$  wegen Todes aus der Aktivengesamtheit auszuschneiden
- $i_x$  die Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -jährigen Aktiven mit Geburtsjahrgang  $G$ , im Altersintervall  $(x, x + 1]$  wegen Invalidität aus der Aktivengesamtheit auszuschneiden
- $p_x^b = 1 - q_x^b$  die Wahrscheinlichkeit einer Person des Bestands  $b$  mit Alter  $x$  und Geburtsjahrgang  $G$ , das Alter  $x+1$  zu erleben,  $b \in \{r, i, g, w\}$
- $p_x^a = 1 - q_x^{aa} - i_x$  die Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -jährigen Aktiven mit Geburtsjahrgang  $G$  auch im Alter  $x + 1$  noch zur Aktivengesamtheit zu gehören
- $p_x^{ai} = i_x \cdot \frac{1}{2} p_{x+\frac{1}{2}}^i$  mit  $\frac{1}{2} p_{x+\frac{1}{2}}^i = \frac{1 - q_x^i}{1 - \frac{1}{2} q_x^i}$  die Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -jährigen Aktiven mit Geburtsjahrgang  $G$ , im Altersintervall  $(x, x + 1]$  innerhalb eines Jahres invalide zu werden und das Ende des Jahres als Invalider zu erleben
- $h_x$  die Wahrscheinlichkeit eines  $x$ -jährigen, bei Tod im Altersintervall  $(x, x + 1]$  verheiratet zu sein
- $y(x)$  Alter der Witwe am Beginn des Todesjahres des Mannes bei Tod des Mannes im Altersintervall  $(x, x + 1]$
- $x(y)$  Alter des Witwer am Beginn des Todesjahres der Frau bei Tod der Frau im Altersintervall  $(y, y + 1]$
- $p_x^{bw} = q_x^b \cdot h_x \cdot \frac{1}{2} p_{y(x)+\frac{1}{2}}^w$  mit  $\frac{1}{2} p_{y(x)+\frac{1}{2}}^w = \frac{1 - q_{y(x)}^w}{1 - \frac{1}{2} q_{y(x)}^w}$  die Wahrscheinlichkeit einer Person des Bestands  $b$  mit Alter  $x$  und Geburtsjahrgang  $G$ , innerhalb eines Jahres unter Hinterlassung einer Witwe mit Geburtsjahrgang  $g'$  zu sterben, die das Ende des Jahres mit Alter  $y(x) + 1$  erreicht,  $b \in \{r, i, g\}$
- $p_x^{aaw} = q_x^{aa} \cdot h_x \cdot \frac{1}{2} p_{y(x)+\frac{1}{2}}^w$  die Wahrscheinlichkeit eines männlichen Aktiven des Alters  $x$  mit Geburtsjahrgang  $G$ , innerhalb eines Jahres als Aktiver unter Hinterlassung einer Witwe mit Geburtsjahrgang  $g'$  zu sterben, die das Ende des Jahres mit Alter  $y(x) + 1$  erreicht
- $p_x^{aiw} = i_x \cdot \frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i \cdot h_x \cdot \frac{1}{2} p_{y(x)+\frac{1}{2}}^w$  mit  $\frac{1}{2} q_{x+\frac{1}{2}}^i = \frac{\frac{1}{2} q_x^i}{1 - \frac{1}{2} q_x^i}$  die Wahrscheinlichkeit eines männlichen Aktiven des Alters  $x$  mit Geburtsjahrgang  $G$ , innerhalb eines Jahres invalide zu werden und noch im gleichen Jahr unter Hinterlassung einer Witwe mit Geburtsjahrgang  $g'$  zu sterben, die das Ende des Jahres mit Alter  $y(x) + 1$  erreicht
- $p_x^{aw} = p_x^{aaw} + p_x^{aiw}$  die Wahrscheinlichkeit eines männlichen Aktiven des Alters  $x$  mit Geburtsjahrgang  $G$ , innerhalb eines Jahres unter Hinterlassung einer Witwe mit Geburtsjahrgang  $g'$  zu sterben, die das Ende des Jahres mit Alter  $y(x) + 1$  erreicht

Anmerkung: Für die Darstellung der unterjährigen Wahrscheinlichkeiten wird also zusätzlich angenommen, dass der Übergang innerhalb des Jahres rechnermäßig, also zur Mitte des Jahres stattfindet.

### 5.2.2 Rechnungsgrundlagen und damit verbundene Risiken

Zu den Rechnungsgrundlagen in der Pensionsversicherungsmathematik gehören

- Ausscheideordnung
- Rechnungszins
- Trendannahmen (z. B. Gehaltstrend, Rententrend)

- Zuschläge
- Kosten

Wie bereits erwähnt, hängen in der Pensionsversicherungsmathematik die Festlegung der Rechnungsgrundlagen und die damit verbundenen Risiken stark vom jeweiligen Durchführungsweg sowie vom Anlass der Bewertung ab. Dies wird im Folgenden an einigen Anwendungsfällen erläutert.

Für die Berechnung der Rückstellung für eine unmittelbare Pensionsverpflichtung in der Steuerbilanz sind ein Rechnungszins von 6 % und das steuerliche Teilwertverfahren (vgl. 5.4.2, Prinzip der Prämiegleichverteilung) als Bewertungsverfahren verpflichtend vorgeschrieben. Als Ausscheideordnung finden in der Regel die Heubeck-Richttafeln 2005 G Anwendung, da diese derzeit ohne besonderen Nachweis für die steuerliche Bewertung zugelassen sind. Eine explizite Berücksichtigung der Fluktuation ist nicht zulässig, vielmehr soll die Fluktuation durch Ansatz eines Mindestalters für die Teilwertberechnung pauschal berücksichtigt werden. Künftige Erhöhungen (also Gehalts- und Rententrends) sind nur einzu beziehen, wenn sie dem Grunde und der Höhe nach feststehen. Der Ansatz von Zuschlägen und Kosten in der Rückstellungsberechnung ist nicht zulässig. Die steuerliche Bewertung führt – gerade in einem Niedrigzinsumfeld – i. d. R. zu einer deutlichen Unterbewertung der Pensionsverpflichtung in der Steuerbilanz und in Folge dessen zu einer Besteuerung von fiktiven Gewinnen, weil die Kosten der Altersversorgung nach dem HGB höher angesetzt werden, als es in der Steuerbilanz zulässig ist.

In der Handelsbilanz werden die Rechnungsgrundlagen, mit Ausnahme des Rechnungszinses, grundsätzlich nach dem Grundsatz der bestmöglichen Schätzung (best estimate) festgelegt. Sicherheits- oder Kostenzuschläge sollen demnach auch bei der Berechnung der handelsrechtlichen Pensionsrückstellungen nicht angesetzt werden. Als Rechnungszins ist ein der Duration (zahlungs- und zinsgewichtete, durchschnittliche Laufzeit aller künftigen Leistungszahlungen) der Verpflichtung entsprechender durchschnittlicher Marktzinssatz der vergangenen 10 Jahre anzusetzen. Pauschal kann dabei auch eine Duration von 15 Jahren unterstellt werden. Als Bewertungsverfahren sind die PUC-Methode (vgl. 5.4.2, Prinzip der verursachungsgerechten Aufwandsermittlung), das modifizierte Teilwertverfahren oder andere dem Erwerb der Anrechte folgende Verfahren geeignet. Als Ausscheideordnung finden ebenfalls überwiegend die Richttafeln 2005 G Anwendung, z.T. in modifizierter Form. Trendannahmen und Fluktuation sind explizit zu berücksichtigen. Risiken bei der handelsrechtlichen Bewertung resultieren insbesondere aus Fehlern bei der Festlegung der Rechnungsgrundlagen (z. B. aufgrund einer gegenüber den Richttafeln erhöhten Lebenserwartung des konkreten Kollektivs oder aufgrund eines dem Verfahren der Rechnungszinsermittlung zuzuordnenden Verlaufs), aus Fehleinschätzungen bezüglich des Umfangs der zugesagten Leistungen oder aus zufallsbedingten Schwankungen (insbesondere bei kleineren Kollektiven).

Viele Pensionskassen sind betriebliche Sozialeinrichtungen, deren Träger ein einzelnes Unternehmen oder eine Unternehmensgruppe ist. Es handelt sich dabei i. d. R. um regulierte Pensionskassen gem. § 233 VAG, bei denen für die Berechnung der Deckungsrückstellung und die Kalkulation der Beiträge andere Rechnungsgrundlagen zum Ansatz kommen als bei Lebensversicherungsunternehmen. Dennoch sind auch bei diesen Einrichtungen die Rechnungsgrundlagen ausreichend sicher zu wählen. Im Gegensatz zu Direktzusagen kommen daher bei der Festlegung der Rechnungsgrundlagen Sicherheitszuschläge (z. B. bei der Ausscheideordnung) oder -abschläge (z. B. beim Rechnungszins) zur Anwendung. Auch Kostenzuschläge werden in der Kalkulation berücksichtigt, allerdings operieren diese Einrichtungen i. d. R. ohne ein Vertriebsnetz, so dass i. d. R. keine Abschlusskosten berücksichtigt werden.

### **Lernergebnisse (B3)**

Aufbauend auf Kapitel 4.1 und 4.3 können die Studierenden das Bevölkerungsmodell, die Rechnungsgrundlagen sowie die damit verbundenen Risiken (mit Anwendungen) erläutern.

## 5.3 Leistungsbarwerte

### Kerninhalte

- Besonderheiten der Barwerte der Pensionsversicherungsmathematik
- Zuordnung von Leistungen auf Alter

Wir betrachten nun im Modell der Richttafeln 2005 G eine  $x$ -jährige Person der Gesamtheit  $b \in \{a, i, r, g, w\}$ . In 3.3.2 wurde dargestellt, dass sich der Erwartungswert des Erfüllungsbetrages bzw. der Barwert einer ungewissen Verpflichtung gegenüber dieser Person ganz allgemein in der Form

$${}_0B_x^L = \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x \cdot {}_k \hat{L}_x$$

darstellen lässt.  ${}_k \hat{L}_x$  stellt wie beschrieben den Erwartungswert der gesamten Leistung dar, die durch Erreichen des Altersintervalls  $(x+k, x+k+1]$  ausgelöst werden kann, diskontiert auf den Bewertungsstichtag.

Mit Hilfe dieser Darstellung können sämtliche Anwartschaftsbarwerte und Barwerte einer laufenden Leistung beschrieben werden. Im Folgenden sollen anhand einiger ausgewählter Fälle die Besonderheiten der Barwerte der Pensionsversicherungsmathematik analysiert werden.

### 5.3.1 Barwert einer laufenden Rente

Der Barwert des Anspruchs eines Rentners des Alters  $x$  vom Jahresbetrag 1, lebenslang vorschüssig zahlbar in  $t$  Raten  $p$ . a. lässt sich wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} {}^{(t)}\ddot{a}_x^r &:= \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x^r \cdot {}_k \hat{L}_x^r, & x \geq z \\ {}_k \hat{L}_x^r &:= \frac{1}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} v \left( \frac{\lambda}{t} \right) \cdot {}_{\frac{\lambda}{t}} p_{x+k}^r, & x+k \geq z \end{aligned}$$

Analog:  ${}^{(t)}\ddot{a}_x^g, {}^{(t)}\ddot{a}_x^i, {}^{(t)}\ddot{a}_y^w$

Dabei gilt wegen des in 5.2.1 vorgestellten Axiomensystems (Axiom 2 - gemischte Verzinsung) für die Abzinsung von einem Zeitpunkt  $t = \tau$  auf  $t = 0$ :

$$v(\tau) = \frac{v^{\lfloor \tau \rfloor}}{1 + (\tau - \lfloor \tau \rfloor) \cdot i}$$

Dabei bezeichnet  $\lfloor \tau \rfloor$  die Gauß-Klammer von  $\tau$ , also den ganzzahligen Anteil von  $\tau$ .

Unter der Voraussetzung der Axiome 1 - 3 existiert nun ein von  $x$  unabhängiges  $k^{(t)}$ , so dass gilt  ${}^{(t)}\ddot{a}_x^r = \ddot{a}_x^r - k^{(t)}$  und man erhält für  $k^{(t)}$  (Unterjährigkeitskorrektur):

$$k^{(t)} = \frac{1+i}{t} \cdot \sum_{\lambda=0}^{t-1} \frac{\lambda}{t + \lambda \cdot i}$$

Ferner kann man zeigen, dass  ${}_k \hat{L}_x^r = 1 - k^{(t)} \cdot (1 - v \cdot p_{x+k}^r)$  gilt.

### 5.3.2 Anwartschaftsbarwerte und Invarianzsatz

Beispielhaft lässt sich der Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters  $x$  auf eine lebenslang laufende Invalidenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in  $t$  Raten p. a., wie folgt darstellen:

$$\begin{aligned} {}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai} &= \sum_{k=0}^{\omega-x} v^k \cdot {}_k p_x^a \cdot {}^{(t)}\hat{L}_x^{ai}, \quad x \leq z \\ {}^{(t)}\hat{L}_x^{ai} &= \begin{cases} i_{x+m} \cdot \frac{1}{2} p_{x+m+\frac{1}{2}}^i \cdot \left( k^{(t)} + {}^{(t)}\ddot{a}_{x+m+1}^i \right) & \text{für } x+k < z \\ 0 & \text{für } x+k = z \end{cases} \end{aligned}$$

Wie bereits die Darstellung dieses Barwertes erkennen lässt, hat die Größe  $k^{(t)}$  im Modell des Axiomensystems der Pensionsversicherungsmathematik eine ganz unmittelbare Bedeutung: Wird bei  $1/t$ -vorschüssiger Zahlungsweise durch Eintritt eines zufälligen Ereignisses mit Gleichverteilung des Ereigniszeitpunktes innerhalb eines Jahres, z. B. durch Eintritt der Invalidität, eine laufende Rente der Höhe  $1/t$  pro Zahlungsabschnitt ausgelöst, die bis zum Ende des Jahres läuft, dann stellt  $k^{(t)}$  den Erwartungswert der innerhalb dieses Jahres gezahlten und auf das Ende des Jahres aufgezinnten Rentenraten dar.

Ferner gilt auf Basis des in 5.2.1 dargestellten Axiomensystems der sogenannte Invarianzsatz. Dieser besagt, dass Anwartschaftsbarwerte von Renten mit gleichbleibender Rentenhöhe nicht von der Zahlungsweise abhängen, wenn sowohl der Zeitpunkt des die Rente auslösenden Ereignisses als auch der Zeitpunkt des die Rente beendenden Ereignisses innerhalb eines Jahres gleichverteilt sind.

Der Invarianzsatz gilt folglich insbesondere für  ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai}$ , d. h. es gilt  ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{ai} = \ddot{a}_x^{ai}$ . Der Invarianzsatz gilt jedoch auch für den Barwert der Anwartschaft eines Rentners des Alters  $x$  auf eine lebenslang laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in  $t$  Raten p. a.:

$$\begin{aligned} {}^{(t)}\ddot{a}_x^{rw} &= \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x^r \cdot {}^{(t)}\hat{L}_x^{rw} = \ddot{a}_x^{rw}, \quad x \geq z \\ {}^{(t)}\hat{L}_x^{rw} &= q_{x+k}^r \cdot h_{x+k} \cdot \frac{1}{2} p_{y(x+k)+\frac{1}{2}}^w \cdot \left( k^{(t)} + {}^{(t)}\ddot{a}_{y(x+k)+1}^w \right) \end{aligned}$$

Analoges gilt für  ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{gw}$  und für  ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{iw}$ .

Folgende weitere Barwerte sind von Interesse:

- ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{aiA}$ : Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters  $x$  auf eine lebenslang laufende Invaliden- und Altersrente vom Jahresbetrag 1, vorschüssig zahlbar in  $t$  Raten p. a.
- ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{aaw}$ : Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters  $x$  auf eine lebenslang laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod als Aktiver oder nach Erreichen der Altersgrenze als Aktiver, vorschüssig zahlbar in  $t$  Raten p. a.
- ${}^{(t)}\ddot{a}_x^{aiw}$ : Barwert der Anwartschaft eines Aktiven des Alters  $x$  auf eine lebenslang laufende Ehegattenrente vom Jahresbetrag 1 bei Tod nach Eintritt der Invalidität, vorschüssig zahlbar in  $t$  Raten p. a.

### 5.3.3 Zuordnung von Leistungen auf Alter

Da die Höhe der Leistungen bei Eintritt eines Versorgungsfalles üblicherweise nicht ausschließlich altersabhängig definiert ist und Bewertungen in aller Regel nicht exakt zum Geburtstag des Berechtigten erstellt werden, stellen sich hieraus bei der Bewertung von Pensionszusagen zwei Fragestellungen:

- Welches (ganzzahlige) Alter  $x$  wird einem konkreten Bewertungsstichtag zugeordnet?
- Welche Leistung wird dem ganzzahligen Alter  $x$  zum jeweiligen Bewertungsstichtag zugeordnet?

Als ganzzahliges Alter wird bei der Bewertung von Pensionsverpflichtungen i. d. R. das sogenannte 'versicherungstechnische Alter' zum Bewertungsstichtag angesetzt. Das versicherungstechnische Alter entspricht hierbei dem Lebensalter, wenn am Bewertungsstichtag der letzte Geburtstag weniger als sechs Monate zurückliegt und dem um ein Jahr erhöhten Lebensalter, wenn der letzte Geburtstag sechs Monate oder länger als sechs Monate zurückliegt.

Im Rahmen der Zuordnung von Leistungen auf versicherungstechnische Alter werden unterschiedliche Ansätze verfolgt. Im Folgenden werden zwei ausgewählte Methoden vorgestellt:

- Rückrechnungsmethode: Dem Pensionierungsalter  $z$  wird die exakt auf diesen Zeitpunkt ermittelte Leistung zugeordnet. Dem versicherungstechnischen Alter  $x < z$  wird die Leistung zugeordnet, die der um  $z - x$  geringeren Dienstzeit entspricht.
- Stichtagsmethode: Dem Pensionierungsalter  $z$  wird ebenfalls die exakt auf diesen Zeitpunkt ermittelte Leistung zugeordnet. Einem versicherungstechnischen Alter  $x < z$  wird die Leistung zum nächsten Geburtstag zugeordnet.

Ist die Zuordnung der Leistungen auf ganzzahlige Alter erfolgt, so kann die Pensionszusage nun durch – entsprechend der Komplexität der Pensionszusage aufgegliederte – Rentenvektoren beschrieben werden, z. B. wie folgt:

- $R_k^{aiA}$ : Höhe der jährlichen Rentenleistung bei Eintritt von Invalidität ( $x + k < z$ ) und Erreichen der Altersgrenze ( $x + k = z$ ).
- $R_k^{aaw}$ : Höhe der jährlichen Rentenleistung bei Eintritt von Aktiventod ( $x + k < z$ ) und Höhe der Anwartschaft auf Ehegattenrente nach Rentnertod ( $x + k = z$ ).
- $R_k^{aiw}$ : Höhe der jährlichen Rentenleistung bei Eintritt von Invalidentod. Diese hängt in der gewählten Aufgliederung nur vom Alter ( $x + k < z$ ) bei Eintritt der Invalidität ab.

Mit Hilfe dieser Rentenvektoren können die Anwartschaftsbarwerte  ${}^{(t)}\hat{L}_x^m$  unter Berücksichtigung der Leistungshöhen wie folgt dargestellt werden:

$${}^{(t)}\hat{L}_x^m = R_k^{aiA} \cdot {}^{(t)}\hat{L}_x^{aiA} + R_k^{aaw} \cdot {}^{(t)}\hat{L}_x^{aaw} + R_k^{aiw} \cdot {}^{(t)}\hat{L}_x^{aiw}$$

#### Lernergebnisse (B4)

Die Studierenden sind in der Lage, Besonderheiten der Barwerte sowie die Zuordnung von Leistungen auf die Alter zu analysieren.

### 5.4 Prämien und Reserven

#### Kerninhalte

- Besonderheiten der Prämien- und Reservevermittlung
- wesentliche Bewertungsverfahren

### 5.4.1 Besonderheiten der Prämien- und Reserveermittlung

In der betrieblichen Altersversorgung kann zwischen individuellen und kollektiven Finanzierungsverfahren unterschieden werden.

Bei den individuellen Finanzierungsverfahren wird für jeden Berechtigten ein individueller Prämienvektor  ${}_k\hat{P}_x$  festgelegt. Hierbei kommen unter anderem laufende Prämien, echte Einmalprämien und sogenannte laufende Einmalprämien zur Anwendung. Bei der Bewertung von Pensionszusagen in den Durchführungswegen Direktzusage und Unterstützungskasse handelt es sich hierbei i. d. R. um 'fiktive' Prämien, die nur für die Zwecke der Ermittlung der Rückstellungshöhe benötigt werden (vgl. Abschnitt 5.4.2).

Im häufigen Fall einer jährlich vorschüssig zahlbaren konstanten Prämie  $P_x$  mit Prämienzahlung von Vertragsabschluss bis zum Eintritt eines Versorgungsfalles lässt sich der Prämienbarwert wie folgt beschreiben:

$${}_0B_x^P = P_x \sum_{k=0}^{n-1} v^k \cdot {}_k p_x^a =: P_x \cdot \ddot{a}_{x:\overline{n}|}^a$$

wobei  $n$  die Dauer bis zum Pensionierungsalter bezeichnet.

Die prospektive Reserve berechnet sich dann zu

$${}_mV_x^{Pro} = {}_mB_x^L - {}_mB_x^P = {}_mB_x^L - P_x \cdot \ddot{a}_x^a$$

Aus dem individuellen Äquivalenzprinzip folgt dann  $P_x = \frac{{}_0B_x^L}{\ddot{a}_x^a}$ .

Bei einigen 'klassischen' Pensionskassen finden auch kollektive Finanzierungsverfahren Anwendung, bei denen die Finanzierung nicht auf den einzelnen Vertrag, sondern auf ein Kollektiv oder die gesamte Versichertengemeinschaft abgestellt wird. In der Praxis sind unter anderem folgende Verfahren anzutreffen:

- Durchschnittsprämie: Die Summe der individuellen Prämien wird nach einem gewissen Schlüssel (z. B. gleichmäßig) auf die einzelnen Versicherten verteilt.
- Technische Durchschnittsprämie: Die Jahresprämie wird ermittelt, indem der Barwert aller nicht durch Vermögen gedeckter Leistungen gleichmäßig über die restliche Aktivzeit des Kollektivs verteilt wird.
- Bilanzausgleichsverfahren: Das Trägerunternehmen verpflichtet sich, ein etwaiges Vermögensdefizit in der am Ende des Jahres aufgestellten versicherungstechnischen Bilanz durch zusätzliche, künftig zu entrichtende Zuwendungen auszugleichen.

### 5.4.2 Wesentliche Bewertungsverfahren

Gerade für die Bewertung von unmittelbaren Pensionsverpflichtungen gegenüber Aktiven steht eine Reihe von Bewertungsverfahren zur Verfügung. Welches Bewertungsverfahren konkret Anwendung findet, hängt maßgeblich vom Anlass der Bewertung ab.

Es sind recht verschiedene Bewertungsverfahren denkbar, die von dem reinen Umlageverfahren (keine Vorfinanzierung) bis hin zum Einmalprämienverfahren (Vollfinanzierung bei Eintritt) reichen. Im Folgenden werden zwei übliche verwendete Bewertungsverfahren vorgestellt:

Für die steuerliche Bewertung der Pensionsrückstellung ist das sogenannte Teilwertverfahren zwingend vorgeschrieben (§ 6a EStG). Der Teilwert entspricht dabei der prospektiven

Deckungsrückstellung unter Berücksichtigung einer vom Eintritt in das Unternehmen bis zum Eintritt eines Versorgungsfalls jährlich vorschüssig zahlbaren konstanten Prämie  $P_x$ . Hier gilt für die Finanzierung das Prinzip der Gleichverteilung der Prämien über den Zeitraum, über den die Prämienzahlungen erwartet werden. Der Teilwert einer Verpflichtung lässt sich somit wie folgt darstellen:

$${}_mV_x = {}_mB_x^L - P_x \cdot \ddot{a}_{x+m}^a$$

$$\text{mit } P_x = \frac{{}_0B_x^L}{\ddot{a}_x^a}$$

wobei  $x$  das Eintrittsalter und  $m$  die seitdem abgelaufene Dauer sei.

Im Rahmen der internationalen Bilanzierungsstandards IFRS und US-GAAP sowie bei der deutschen handelsrechtlichen Bewertung einer Pensionsverpflichtung findet überwiegend die **Projected-Unit-Credit-Methode** (kurz PUC-Methode) Anwendung, wobei sie nur nach den internationalen Bilanzierungsstandards verpflichtend heranzuziehen ist. Bei diesem Verfahren gilt für die Finanzierung das Prinzip der verursachungsgerechten Zuordnung von Leistungen zu Dienstzeiten. Der Barwert einer Verpflichtung für klassische Leistungszusagen lässt sich wie folgt beschreiben:

$${}_mV_x = \sum_{k=0}^{n-m} v^k \cdot {}_k p_{x+m}^a \cdot \frac{m}{m+k} \cdot {}_{m+k}^{(t)} \hat{L}_x \quad m = 0, 1, \dots, n$$

Anmerkung: Passend zur Definition der  ${}_{m+k}^{(t)} \hat{L}_x$  wurde in dieser Darstellung  $\frac{m}{m+k}$  mit ganzzahligen Werte  $m$  und  $m+k$  bestimmt. In der Praxis wird  $m+k$  i. d. R. passend zum Verfahren der Anspruchszuordnung auf den Bewertungsstichtag ermittelt (z. B.  $\frac{m}{m+k+\frac{1}{2}}$  für  $m+k < n$ ).

Teilweise werden für die handelsrechtliche Bewertung der Pensionsrückstellung auch modifizierte Teilwertverfahren angesetzt, wie z. B. der modifizierte Teilwert nach Engbroks:

$${}_mV_x = {}_mB_x^L - p_x^{mod} \cdot \ddot{a}_{x+m}^a$$

$$\text{mit } p_{xm}^{mod} = \frac{v^m \cdot {}_m B_x^L}{\ddot{a}_{\overline{m}|} + v^m \cdot \ddot{a}_{x+m}^a}$$

wobei  $\ddot{a}_{\overline{m}|}$  den Barwert einer jährlich vorschüssig zahlbaren Zeitrente der Höhe 1 und Dauer  $m$  bezeichne.

### Lernergebnisse (C3)

Die Studierenden können die Besonderheiten der Prämien- und Reserveermittlung sowie die wesentlichen Bewertungsverfahren anwenden.



## 6 Grundwissen Krankenversicherungsmathematik

In der Kalkulation von Krankenversicherungsverträgen in Deutschland wird unterschieden zwischen Verträgen mit einem Versicherungsschutz, der den im gesetzlichen Sozialversicherungssystem vorgesehenen Kranken- oder Pflegeversicherungsschutz ganz oder teilweise ersetzen kann (sogenannte substitutive Krankenversicherung) und Verträgen mit einem Versicherungsschutz, der diese substitutive Eigenschaft nicht erfüllt. Die rechtlichen Anforderungen an die Kalkulation von substitutiver Krankenversicherung sind sehr umfangreich. Bei der Kalkulation von nicht substitutiver Krankenversicherung besitzt der Aktuar vergleichsweise mehr Freiheiten; er kann jedoch hier auch stets auf eine Kalkulation wie bei substitutiven Verträgen zurückgreifen.<sup>24</sup> In diesem Kapitel wird die Mathematik der substitutiven Krankenversicherung vorgestellt.

Substitutive Krankenversicherung darf nur nach Art der Lebensversicherung kalkuliert werden (§ 146 (1) VAG). Die Kalkulation nach Art der Lebensversicherung bedeutet unter anderem, dass der Vertrag unbefristet<sup>25</sup> ist (§ 195 (1) VVG) und daher eine Modellierung auf Basis eines Zustandsmodells zur Anwendung kommt. Es wird auf versicherungsmathematischer Grundlage mit konstanten Beiträgen (wenn sich die Rechnungsgrundlagen nicht ändern, siehe unten) und unter Bildung von Rückstellungen (sogenannte Alterungsrückstellungen) kalkuliert. Das Basismodell der Personenversicherungsmathematik ist daher von fundamentaler Bedeutung.

Die Kalkulation von Krankenversicherungsverträgen im Ausland unterscheidet sich in der Regel von diesem Ansatz. Üblicherweise erfolgt im Ausland eine Kalkulation nach Art der Schadenversicherung. Eine Kalkulation von Krankenversicherung nach Art der Schadenversicherung wird hier nicht vorgestellt.

### 6.1 Rechnungsgrundlagen

#### Kerninhalte

- Rechnungsgrundlagen in der Krankenversicherung
- Methodik der Festlegung

Die Rechnungsgrundlagen der substitutiven Krankenversicherung sind in der Krankenversicherungsaufsichtsverordnung (KVAV) festgelegt. Zu den Rechnungsgrundlagen gehören gemäß § 2 (1) KVAV:

- Rechnungszins
- Ausscheideordnung
- Kopfschäden
- Sicherheitszuschlag
- sonstige Zuschläge
- Übertrittswahrscheinlichkeiten zur Berechnung des Übertragungswerts

Darüber hinaus lässt § 2 (2) KVAV weitere Rechnungsgrundlagen zu, sofern sie „zur Festlegung der Kopfschäden oder Ausscheidewahrscheinlichkeiten erforderlich sind“ (z. B. Pflegehäufigkeiten).

Die Rechnungsgrundlagen in der Krankenversicherung werden für jeden Tarif in den technischen Rechnungsgrundlagen zusammengestellt. Im Unterschied zur Lebensversicherung

<sup>24</sup>In diesem Fall sind die gleichen rechtlichen Regelungen wie bei der substitutiven Krankenversicherung zu beachten (§ 147 VAG).

<sup>25</sup>Eine Ausnahme hiervon bilden Krankentagegeldversicherungen.

ist gesetzlich festgelegt, dass die Rechnungsgrundlagen für die Kalkulation von Prämien und Rückstellungen gleich sein müssen (§ 3 KVAV).

Nun wird jede Rechnungsgrundlage im Detail vorgestellt und die jeweilige Methodik zur Festlegung erläutert. Alle Rechnungsgrundlagen müssen dabei gemäß § 2 (3) KVAV „ausreichende Sicherheiten“ enthalten.

### 6.1.1 Rechnungszins

Der Rechnungszins  $i$  ist in der Krankenversicherung durch 3,5% nach oben begrenzt (§ 4 KVAV). Bei einer Vielzahl an Tarifen liegt der Rechnungszins aktuell unterhalb von 3,5%. Maßgeblich für die Festlegung des Rechnungszinses ist der Aktuarielle Unternehmenszins AUZ sowie eine Abschätzung zukünftiger AUZ-Werte. Der AUZ soll eine Rendite widerspiegeln, die mit hoher Wahrscheinlichkeit im Folgejahr vom unternehmensindividuellen Kapitalanlagebestand nicht unterschritten wird.

### 6.1.2 Ausscheideordnung

Das Zustandsmodell in der Krankenversicherung ist in Abbildung 3 dargestellt. Es handelt sich um eine zusammengesetzte Ausscheideordnung mit den beiden Ausscheideursachen Tod und Storno.

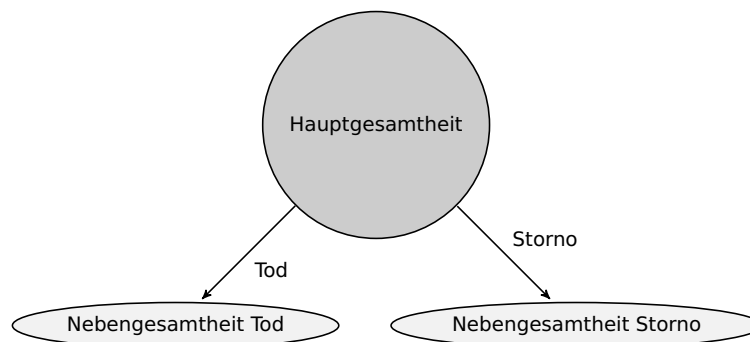


Abbildung 3: Zustandsmodell in der Krankenversicherungsmathematik

Die einjährige Sterbewahrscheinlichkeit eines  $x$ -Jährigen wird mit  $q_x$  bezeichnet. Die einjährige Stornowahrscheinlichkeit mit  $w_x$ .

Jährlich erarbeitet eine Arbeitsgruppe der DAV eine Sterbetafel für die private Krankenversicherung. Die Methodik zur Festlegung umfasst dabei die folgenden Schritte.

- (a) Schätzung der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten
- (b) Ausgleich der rohen Sterbewahrscheinlichkeiten
- (c) Bestimmung des Trends
- (d) Berücksichtigung eines Sicherheitsabschlags in den Sterbewahrscheinlichkeiten
- (e) Projektion
- (f) Vergleich mit Vorjahreswerten und ggf. Anpassung

Branchenweite Stornotafeln werden regelmäßig von der BaFin veröffentlicht. Auf das Storno wirken verschiedene Einflussfaktoren (z. B. Tarifumfang, Beruf, Geschlecht, Versicherungsdauer, Beitragsanpassungen, usw.). In der Praxis wird lediglich nach dem Alter unterschieden. Zu beachten ist bei der Bestimmung der Stornowahrscheinlichkeiten, dass Versicherte, bei denen der Vertragsabschluss erst wenige Jahre zurückliegt, in der Regel bei der Schätzung nicht berücksichtigt werden („Elimination von Beginnjahren“). Wenn eine Ermittlung auf der Basis vererbter Rückstellungen erfolgt (gemäß DAV-Richtlinie zum Storno), dann ist eine Elimination von Beginnjahren nicht mehr erforderlich.

### 6.1.3 Kopfschäden

Bei der Kalkulation von Leistungsbarwerten in der substitutiven Krankenversicherung sind sogenannte Kopfschäden von zentraler Bedeutung. Die Kopfschäden geben den erwarteten Wert der Krankheitskosten innerhalb eines Jahres in Abhängigkeit vom Alter an. Sie werden dargestellt durch:

$$(K_x)_{x=0, \dots, \omega}$$

Der Kopfschaden zu einem vorgegebenen Alter  $x_0$  (z. B. Alter 40) wird als Grundkopfschaden bezeichnet, d. h.  $G := K_{x_0}$ . Die Methode von Rusam zerlegt die Kopfschäden in das Produkt:

$$K_x = k_x \cdot G,$$

wobei der Vektor  $(k_x)_{x=0, \dots, \omega}$  der mit dem Grundkopfschaden normierten Kopfschäden

$$k_x = \frac{K_x}{G}$$

als Profil bezeichnet wird. Die Idee hinter der Zerlegung ist es, dass sich Profile im Zeitverlauf häufig als konstant erweisen und bei einer Neu- bzw. Nachkalkulation lediglich ein neuer Grundkopfschaden zu schätzen ist. Zudem lassen sich Profile häufig auch für mehrere Tarife verwenden. Die Zerlegung in Grundkopfschaden und Profil ist Standard bei der Darstellung der Kopfschäden für Erwachsene.

Kopfschäden werden für jede Beobachtungseinheit eines Tarifs ermittelt. Bei Kindern und Jugendlichen (Alter maximal 20 Jahre) wird oft kein altersabhängiger Kopfschaden, sondern ein Kopfschaden für alle Kinder bzw. ein Kopfschaden für alle Jugendlichen verwendet oder eine Einteilung in Altersbänder vorgenommen.

Bei der Schätzung der Kopfschäden müssen Wartezeit- und Selektionseffekte eliminiert werden. Wartezeit- und Selektionseffekte bedeuten, dass die Kopfschäden in den ersten Vertragsjahren (Wartezeit für gewisse Leistungen in den Tarifen bzw. Gesundheits- und Risikoprüfung zu Vertragsbeginn) deutlich unterhalb der Kopfschäden einer entsprechenden gleichaltrigen Vergleichsgruppe mit einer längeren Versicherungsdauer liegen.

Die Gesundheits-/Risikoprüfung zu Vertragsbeginn kann ergeben, dass die erwarteten Krankheitskosten einer Person deutlich oberhalb der Kopfschäden liegen. In diesem Fall wird ein (prozentualer) Risikozuschlag für diese Person erhoben.

Die Profile ergeben sich aus der Beobachtung großer Bestände über mehrere Jahre. Außerdem kommen hier Ausgleichsverfahren zum Einsatz. Auch die BaFin stellt Profile für unterschiedliche Leistungsbereiche zur Verfügung.

In der Praxis kommt bei der Profilermittlung das Verfahren von Bahr zur Anwendung. Dazu werden Werte von  $S$  verschiedenen, gleichartigen Tarifen betrachtet. Jeder Tarif  $s$  ( $1 \leq s \leq S$ ) besitzt  $L_x^{(s)}$  Personen im Alter  $x$ . Insgesamt sind also

$$L_x = \sum_s L_x^{(s)}$$

beobachtete Personen im Alter  $x$  vorhanden. Im Tarif  $s$  werden Kopfschäden  $K_x^{(s)}$  beobachtet. Nun werden Faktoren  $\lambda_1, \dots, \lambda_S$  bestimmt (ohne Normierungsvorschrift sind diese Faktoren nicht notwendigerweise eindeutig bestimmt), so dass gilt:

$$\sum_x L_x \cdot \lambda_1 \cdot K_x^{(1)} = \dots = \sum_x L_x \cdot \lambda_S \cdot K_x^{(S)}.$$

Die gleichgerichteten Kopfschäden für jeden Tarif sind dann gerade

$$\lambda_s \cdot K_x^{(s)}.$$

Die Kopfschäden werden gebildet als gewichtetes Mittel der gleichgerichteten Kopfschäden:

$$K_x := \sum_s \frac{L_x^{(s)}}{L_x} \cdot \lambda_s \cdot K_x^{(s)}.$$

Hier kommen Ausgleichsverfahren zur Anwendung, um Schwankungen in den beobachteten Daten zu glätten.

Besonderheiten ergeben sich bei der Krankentagegeldversicherung und der Krankenhaus-tagegeldversicherung. Bei der Krankentagegeldversicherung wird ein versichertes Tagegeld  $T$  für jeden Krankheitstag nach Ablauf einer Karenzzeit vereinbart. Die Kopfschäden ergeben sich dann zu

$$K_x = T \cdot T_x^{(\text{Karenzzeit})}$$

Dabei bezeichnet  $T_x^{(\text{Karenzzeit})}$  gerade die erwartete Leistungsdauer pro Jahr (in Abhängigkeit von der Karenzzeit). Die Pfl egetagegeldversicherung wird analog kalkuliert (ohne Karenzzeiten). Bei der Krankenhaustagegeldversicherung entfällt die Unterscheidung nach Karenzzeiten.

#### 6.1.4 Zuschläge

##### Sicherheitszuschlag:

Der Sicherheitszuschlag bildet eine weitere Rechnungsgrundlage in der substitutiven Krankenversicherung. In § 7 KVAV ist gefordert, dass der Sicherheitszuschlag mindestens fünf Prozent der Bruttoprämie beträgt. Der Sicherheitszuschlag darf nicht bereits in anderen Rechnungsgrundlagen enthalten sein. In der Praxis sind Werte bis 15 Prozent zu beobachten.

##### Sonstige Zuschläge:

Die KVAV regelt auch den Umfang an weiteren Zuschlägen. In § 8 (1) KVAV stehen:

- unmittelbare und mittelbare Abschlusskosten
- Schadenregulierungskosten und sonstige Verwaltungskosten
- Zuschlag für erfolgsunabhängige Beitragsrückerstattung
- Zuschlag zur Umlage der Begrenzung der Beitragshöhe im Basistarif
- für den Basistarif zusätzlich den Zuschlag zur Umlage der Mehraufwendungen durch Vorerkrankungen
- Zuschlag für Standardtarif

### Festlegung der Zuschläge:

Für Erwachsene dürfen in Kostentarifen (Ausnahme: Ausbildungstarife) lediglich altersunabhängige Kostenzuschläge eingerechnet werden (§ 8 KVAV).<sup>26</sup> Daher werden die laufenden Zuschläge  $\alpha_u$ ,  $\alpha_m$ ,  $\beta$ , und  $\rho$  in einen absoluten jährlichen Zuschlag  $\gamma$  umgerechnet (sogenannter Stückkostenzuschlag). Die Umrechnung erfolgt z. B. unter Berücksichtigung der mittleren Anzahl an  $x$ -Jährigen in der Beobachtungseinheit  $L_x$  und dem durchschnittlichen Beitrag eines  $x$ -Jährigen bei einer beitragsproportionalen Kalkulation  $\bar{B}_x$ . Es ist:

$$\gamma = \frac{(\alpha_u + \alpha_m + \beta + \rho) \cdot \sum_x \bar{B}_x \cdot L_x}{\sum_x L_x}$$

Bei einer erheblichen Abweichung der Altersverteilung zwischen Beobachtungseinheit und Gesamtbestand wird auf einen Modellbestand zurückgegriffen. Eine möglicherweise resultierende Kostenunterdeckung wird durch andere für den Neuzugang offene Tarife finanziert.

#### **Lernergebnisse (B2)**

Die Studierenden können die Rechnungsgrundlagen in der Krankenversicherung (PKV) erläutern und die Methodik der Festlegung erklären. Sie können die Vorgehensweise bei den Sterbewahrscheinlichkeiten und den Kopfschäden darstellen sowie die Kalkulation eines Stückkostenzuschlags durchführen.

## **6.2 Überprüfung von Rechnungsgrundlagen**

#### **Kerninhalte**

- Beitragsanpassungsklausel
- Folgen für die Festlegung der Rechnungsgrundlagen

In der substitutiven Krankenversicherung ist das ordentliche Kündigungsrecht der Unternehmen ausgeschlossen (vgl. § 146 (1) VAG; in der Krankentagegeldversicherung spätestens ab dem vierten Versicherungsjahr). Die Unternehmen sind somit an die versicherten Personen gebunden, bis sie aus dem Bestand ausscheiden. Die Unternehmen erstatten die vertraglich vereinbarten Leistungen. Die Kalkulation von Prämien und Rückstellungen berücksichtigt die Leistungen dabei mit altersabhängigen Kopfschäden (siehe oben; in der Regel steigen die Kopfschäden mit zunehmendem Alter). Da die Prognose der Entwicklung der altersabhängigen Kopfschäden im Zeitverlauf mit sehr großer Unsicherheit verbunden ist, wird bei der Festlegung auf eine zeitliche Prognose verzichtet. Deshalb werden für die Kalkulation von Prämien und Rückstellungen die aktuellen altersabhängigen Kopfschäden als rechnungsmäßige Kopfschäden verwendet. In der Vergangenheit sind die Kopfschäden inflationsbedingt und durch weitere Gründe (z. B. Änderungen im Kundenverhalten) gestiegen. Damit die Krankenversicherungsunternehmen auch im Zeitverlauf die Krankheitskosten finanzieren können (ein vorzeitiges Vertragsende ist aus Unternehmenssicht wie oben dargestellt nicht möglich), dürfen sie im Zeitverlauf die rechnungsmäßigen Kopfschäden (und die weiteren Rechnungsgrundlagen) anpassen. Dadurch kann es zu Veränderungen im Beitrag kommen. Hier wird von einem Beitragsanpassungsrecht bzw. einer Beitragsanpassungsklausel gesprochen (vgl. § 203 VVG, § 8b (1) MB/KK 2009, § 155 (1) VAG).

Das Versicherungsunternehmen hat für jeden Tarif zumindest jährlich die erforderlichen mit den kalkulierten Versicherungsleistungen sowie die erforderlichen mit den kalkulierten Sterbewahrscheinlichkeiten zu vergleichen. Eine Beitragsanpassung können lediglich erforderliche Anpassungen an den Rechnungsgrundlagen Kopfschäden oder Sterbewahrscheinlichkeiten herbeiführen (im aktuariellen Sprachgebrauch: auslösen); Änderungen bei Stornowahrscheinlichkeiten, Zinsen oder Kosten lösen keine Beitragsanpassung aus. Wenn

<sup>26</sup>Ausnahme: Zillmerung und Zuschlag für Basistarif und Standardtarif. Außerdem ist es auch zulässig, einen beitragsproportionalen Zuschlag zu erheben, der sich nur auf die aktuelle Tarifprämie zum ursprünglichen Eintrittsalter bezieht.

bei mindestens einer dieser beiden Rechnungsgrundlagen in einer Beobachtungseinheit eines Tarifs eine nicht vorübergehende Abweichung festgestellt wird, dann müssen alle Rechnungsgrundlagen dieser Beobachtungseinheit überprüft werden. Eine Aktualisierung und eine damit verbundene Beitragsanpassung erfordert die Zustimmung eines unabhängigen Treuhänders.

Im Folgenden wird zunächst der Auslösende Faktor für die Kopfschäden vorgestellt und – sofern er anspringt – die Vorgehensweise bei der Festlegung der aktualisierten Kopfschäden. Danach wird der Auslösende Faktor für die Sterblichkeiten erklärt. Die Kalkulation von Bestandsbeiträgen erfolgt im nächsten Abschnitt.

### 6.2.1 Auslösender Faktor für Kopfschäden

Der Auslösende Faktor für Kopfschäden vergleicht die erforderlichen Leistungen mit den kalkulierten Leistungen. Er ist daher definiert durch den Quotienten:

$$AF^{\text{Schaden}} := \frac{S^{\text{erf}}}{S^{\text{kalk}}}.$$

Eine Überprüfung der Rechnungsgrundlagen ist erforderlich, wenn:

$$|AF^{\text{Schaden}} - 1| > 10\%.$$

In diesem Fall sagt man in der PKV: „Der Auslösende Faktor springt an.“ Tarifindividuell kann auch ein kleinerer Wert als 10 % festgelegt sein.

Bei der Bestimmung der kalkulierten Leistungen  $S^{\text{kalk}}$  wird der mittlere Bestand des aktuellen Jahres  $L_x$  für jedes Alter  $x$  bestimmt. Dann wird der mittlere Bestand in jedem Alter mit dem rechnungsmäßigen Profil  $k_x^{\text{rech}}$  und dem rechnungsmäßigen Grundkopfschaden  $G^{\text{rech}}$  multipliziert und über alle Alter aufsummiert:

$$S^{\text{kalk}} = \sum_x L_x \cdot k_x^{\text{rech}} \cdot G^{\text{rech}}.$$

Für die Bestimmung der erforderlichen Leistungen  $S^{\text{erf}}$  wird der Bedarfsgrundkopfschaden der vergangenen drei Jahre durch eine lineare Regression auf das folgende Jahr zum Wert  $G^{\text{ext}}$  extrapoliert.

Der tatsächliche Grundkopfschaden eines Vorjahres (Bedarfsgrundkopfschaden) ist definiert als Lösung der folgenden Gleichung:

$$\sum_x L_x \cdot k_x^{\text{rech}} \cdot G = S,$$

wobei  $S$  den abgegrenzten tatsächlichen Schaden (abzüglich Nettorisikozuschläge) bezeichnet. Das bedeutet, der rechnungsmäßige Schaden entspricht gerade dem tatsächlichen Schaden.

Die Bestimmung der erforderlichen Leistungen erfolgt dann analog zur Bestimmung der kalkulierten Leistungen:

$$S^{\text{erf}} = \sum_x L_x \cdot k_x^{\text{rech}} \cdot G^{\text{ext}}.$$

Die Definitionen von  $S^{\text{kalk}}$  und  $S^{\text{erf}}$  zeigen, dass der Auslösende Faktor auch durch den Vergleich der beiden Grundkopfschäden  $G^{\text{rech}}$  bzw.  $G^{\text{ext}}$  berechnet werden kann.

Die Extrapolation durch eine lineare Regression (Methode der kleinsten Quadrate) der vergangenen drei Werte  $G_1$ ,  $G_2$  und  $G_3$  auf das Folgejahr (d. h.  $G_5$ ) kann dargestellt werden durch:<sup>27</sup>

$$G^{\text{ext}} := G_5 = \frac{3}{2} \cdot (G_3 - G_1) + \frac{1}{3} \cdot (G_1 + G_2 + G_3)$$

Wenn die Bestandsgröße nicht ausreichend groß ist, dann muss auf sogenannte Stütztarife der Erstkalkulation oder BaFin-Werte zurückgegriffen werden.

<sup>27</sup>vgl. auch Anlage 2 KVAV

## 6.2.2 Auslösender Faktor für Sterbewahrscheinlichkeiten

Der Auslösende Faktor für Sterbewahrscheinlichkeiten vergleicht nicht unmittelbar die Sterbewahrscheinlichkeiten.<sup>28</sup> Vielmehr werden Leistungsbarwerte für die Überprüfung herangezogen. Für den Auslösenden Faktor gilt:<sup>29</sup>

$$AF^{\text{Sterblichkeit}} := \max \left\{ \frac{1}{25} \cdot \sum_{x=21}^{45} \frac{A_x^{\text{erf}}}{A_x^{\text{kalk}}}, \frac{1}{25} \cdot \sum_{x=46}^{70} \frac{A_x^{\text{erf}}}{A_x^{\text{kalk}}}, \frac{1}{25} \cdot \sum_{x=71}^{95} \frac{A_x^{\text{erf}}}{A_x^{\text{kalk}}} \right\}$$

Eine Überprüfung der Rechnungsgrundlagen ist erforderlich, wenn:

$$\left| AF^{\text{Sterblichkeit}} - 1 \right| > 5 \%$$

Eine abweichende Grenze von 5 % (analog zur tarifspezifischen Grenze für den Auslösenden Faktor für Kopfschäden) ist nicht möglich.

Die beiden Leistungsbarwerte ergeben sich unter Verwendung des tariflichen Rechnungszinses und der rechnungsmäßigen Kopfschäden der betrachteten Beobachtungseinheit. Für die kalkulatorischen Werte werden die Sterbewahrscheinlichkeiten aus der Kalkulation verwendet. Der erforderliche Wert verwendet die Sterbewahrscheinlichkeiten, die zuletzt von der BaFin veröffentlicht wurden. Stornowahrscheinlichkeiten werden bei der Kalkulation der Leistungsbarwerte nicht berücksichtigt. Es ist also:

$$A_x^{\text{kalk}} := \sum_{k \geq 0} v^k \cdot K_{x+k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (1 - q_{x+j})$$

und

$$A_x^{\text{erf}} := \sum_{k \geq 0} v^k \cdot K_{x+k} \cdot \prod_{j=0}^{k-1} (1 - q_{x+j}^{\text{BaFin}})$$

Wenn der Auslösende Faktor andeutet, dass die Sterbewahrscheinlichkeiten zu aktualisieren sind, dann kommen in der Regel die Sterbewahrscheinlichkeiten der aktuellsten branchenweiten Sterbetafel zum Einsatz.

### Lernergebnisse (B3)

Die Studierenden können die Beitragsanpassungsklausel in der PKV und die daraus resultierenden Folgen für die Festlegung der Rechnungsgrundlagen erläutern (mit Anwendungen). Sie können die Formeln für die Bestimmung der Auslösenden Faktoren benennen und erläutern sowie die Kalkulation der einzelnen Komponenten der Auslösenden Faktoren erklären. Sie sind in der Lage die Auslösenden Faktoren unter Beachtung der rechtlichen Rahmenbedingungen zu kalkulieren.

## 6.3 Prämienkalkulation

### Kerninhalte

- Prämien für das Neugeschäft
- Prämien für den Bestand

Die Kalkulation von Prämien und Rückstellungen folgt im Grundsatz dem Basismodell der Personenversicherungsmathematik.

<sup>28</sup>Rechtliche Regelungen sind in § 155 (4) VAG und § 16 (1) KVAV zu finden.

<sup>29</sup>Bei der Krankentagegeldversicherung wird nur bis zum Alter 65 summiert.

Die Leistungen werden vertraglich vereinbart. Dabei tritt der Versicherungsfall ein, wenn eine medizinisch notwendige Heilbehandlung einer versicherten Person wegen Krankheit oder Unfallfolgen anfällt (§ 1 MB/KK). Schäden werden in der Kalkulation und in der Bilanz dem Heilbehandlungsdatum zugeordnet (und nicht dem Zeitpunkt des Eintritts der Krankheit oder der Einreichung der Rechnung). Die Kalkulation der Leistungen berücksichtigt die erwarteten Heilbehandlungskosten der versicherten Person, aber nicht die Krankheitshäufigkeit oder die Krankheitskostenhöhe.

Zu Vertragsbeginn wird eine konstante Prämie festgelegt, die in der Regel monatlich bezahlt wird (sogenannte Neukalkulation). In der Krankenversicherung sind die Rechnungsgrundlagen auf den aktuellen Beobachtungszeitpunkt kalibriert. Dabei enthalten sie jedoch keine langfristigen Trendannahmen. Der Verzicht des Versicherers auf Trendannahmen in den Rechnungsgrundlagen und auf das ordentliche Kündigungsrecht bedingen die oben geschilderte Beitragsanpassung. Das versicherungstechnische Änderungsrisiko liegt somit größtenteils bei den Versicherten. Die Beitragsanpassung bedeutet, dass die Prämie auch für den Bestand im Zeitverlauf kalkuliert werden muss (sogenannte Nachkalkulation).

### 6.3.1 Neugeschäft

Für eine  $x$ -jährige Person ergibt sich zu Vertragsbeginn folgende Situation. Der Leistungsbarwert ist gegeben durch:

$${}_0B_x^L = \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x \cdot K_{x+k}.$$

In der Krankenversicherung wird dieser Leistungsbarwert mit  $A_x := {}_0B_x^L$  abgekürzt. Er ist vergleichbar mit einer sofortbeginnenden Rente, wobei die Rentenhöhe gerade den erwarteten Heilbehandlungskosten (rechnungsmäßigen Kopfschäden) entspricht.

Der Prämienbarwert ergibt sich zu:

$${}_0B_x^P = \sum_{k \geq 0} v^k \cdot {}_k p_x \cdot P_x.$$

Man schreibt auch:  ${}_0B_x^P = P_x \cdot \ddot{a}_x$ .

Mit dem individuellen Äquivalenzprinzip folgt für die Nettoprämie einer  $x$ -jährigen Person im Neugeschäft:

$$P_x = \frac{A_x}{\ddot{a}_x}.$$

Unter Berücksichtigung von einmaligen Abschlusskosten ( $\alpha$ , in Prozent des Jahresbruttobeitrags, Zillmersatz), einem Satz für einen bruttobeitragsproportionalen laufenden Zuschlag  $\Delta$  und einen absoluten jährlichen Zuschlag für Stückkosten  $\gamma$  kann mit Hilfe des Äquivalenzprinzips die Formel für den Bruttobeitrag bestimmt werden:

$$B_x = \frac{A_x + \gamma \cdot \ddot{a}_x}{(1 - \Delta) \cdot \ddot{a}_x - \alpha}.$$

Üblicherweise wird der Bruttomonatsbeitrag angegeben. Er berechnet sich als:

$$b_x = \frac{P_x + \gamma}{12 \cdot (1 - \Delta) - \frac{12 \cdot \alpha}{\ddot{a}_x}}.$$

Im Falle eines Wechsels des Versicherers ist die Übertragung eines Teils der Deckungsrückstellung (Alterungsrückstellung) für die Verträge vorgesehen, die ab 2009 abgeschlossen worden sind. Dieser Betrag wird als Übertragungswert bezeichnet. Der Übertragungswert kann in der Kalkulation des Barwerts  $A_x$  abgebildet werden, indem die Zahlung des Übertragungswerts als zusätzliche Leistung im Stornofall berücksichtigt wird. In der Praxis haben



sich zwei Modelle durchgesetzt, die die Kopfschäden bzw. die Stornowahrscheinlichkeiten modifizieren (externes Modell und internes Modell).

Bei Kindern und Jugendlichen ist es zulässig, planmäßig steigende Beiträge zu erheben, solange das 21. Lebensjahr nicht vollendet ist (vgl. §10 KVAV). Hier wird also der Risikobeitrag zzgl. Kosten erhoben. In diesem Fall wird keine Alterungsrückstellung gebildet. Alternativ kann auch ein vom Einzelalter und Geschlecht unabhängiger Kopfschaden für a) Kinder (bis zur Vollendung des 16. Lebensjahres) und b) Jugendliche (bis zur Vollendung des 21. Lebensjahres) erhoben werden. Eine weitere Ausnahme bilden Ausbildungstarife. Dabei ist es zulässig, Eintrittsaltersgruppen von bis zu fünf Eintrittsaltern zusammenzufassen und planmäßig steigende Beiträge bis zur Vollendung des 39. Lebensjahres zu erheben.

Das Unternehmen hat den sogenannten Gesetzlichen Zuschlag in Höhe von 10% zu erheben, der bis zum Alter 60 zu entrichten ist und zur Beitragsermäßigung im Alter dient.

Eine wichtige rechtliche Regelung ist in §146 (2) VAG zu finden. Neugeschäftsprämien dürfen nicht niedriger sein als die Prämien, die sich im Bestand für gleichaltrige Versicherte ohne Berücksichtigung ihrer Alterungsrückstellung ergeben würden.

### 6.3.2 Bestand

Für die Verträge im Bestand kann es aus verschiedenen Gründen erforderlich sein, den Beitrag neu zu kalkulieren. Mögliche Gründe sind:

- Tarifwechsel
- Beitragsanpassung (vgl. Abschnitt 6.2)
- Beitragssenkung (im Rahmen von Beitragsanpassungen, aber auch bei der Überschussbeteiligung von älteren Versicherten)

Ein Tarifwechsel kann unterschiedlich motiviert sein. Zum Beispiel kann sich der Status der versicherten Person ändern (z. B. ein Angestellter wird verbeamtet). Darüber hinaus kann auch eine Bedarfsänderung ursächlich sein (z. B. wenn eine Person einen umfangreicheren Versicherungsschutz wünscht).

In der Kalkulation wird die folgende Gleichung betrachtet (Äquivalenzgleichung):

$$V_{x+m}^a(B^a) + B^n \cdot \ddot{a}_{x+m}^n = A_{x+m}^n + \Delta^n \cdot B^n \cdot \ddot{a}_{x+m}^n + \gamma^n \cdot \ddot{a}_{x+m}^n + \alpha' \cdot (B^n - B^a)$$

Dabei ist:

- $x + m$  ist das erreichte Alter für eine Person mit Vertragsabschluss im Alter  $x$  und einer Versicherungsdauer von  $m$  Jahren
- Werte, die mit den Rechnungsgrundlagen vor Änderung kalkuliert sind, haben einen Index  $a$
- Werte, die mit den geänderten Rechnungsgrundlagen kalkuliert sind, haben einen Index  $n$
- der alte Beitrag ist  $B^a$  und der neue Beitrag ist  $B^n$
- abweichend zur obigen Notation der Rückstellung bezeichnet hier  $V_{x+m}(B^a)$  die Rückstellung zum Alter  $x + m$  mit den Rechnungsgrundlagen vor Änderung

Daher ist:

$$B^n = \frac{A_{x+m}^n - V_{x+m}^a(B^a) + \gamma^n \cdot \ddot{a}_{x+m}^n - \alpha' \cdot B^a}{(1 - \Delta^n) \cdot \ddot{a}_{x+m}^n - \alpha'}$$

Der individuelle Beitrag  $B^n$  kann durch drei Arten dargestellt werden. In allen drei Varianten ergibt sich eine vereinfachte Darstellung des neuen Beitrags sowie in der Kalkulation der Alterungsrückstellung.

- KVAV-Verfahren: bisheriger Beitrag sowie alter und neuer Neugeschäftsbeitrag<sup>30</sup>
- Abschlagsverfahren: Neugeschäftsbeitrag zum erreichten Alter  $x + m$  abzüglich Nachlass für vorhandene Alterungsrückstellung
- Zuschlagsverfahren (in der Praxis nicht im Einsatz): Neugeschäftsbeitrag zum Eintrittsalter  $x$  zuzüglich Zuschlag für fehlende Alterungsrückstellung

Bei einer Beitragsanpassung ist in der Regel  $\alpha' = 0$  (ab Alter 45 gemäß § 11 KVAV sogar verpflichtend).

Bei einer Beitragsanpassung erfolgt die Erhöhung des Beitrags nicht, wenn die Versicherungsleistungen oder die Sterbewahrscheinlichkeiten zum Zeitpunkt der Erst- und Neukalkulation unzureichend waren und ein „ordentlicher und gewissenhafter Aktuar“ dies hätte erkennen müssen (§ 155 (3),(4) VAG).

### Lernergebnisse (C3)

Die Studierenden können die Formeln für die Prämien im Neugeschäft und im Bestand herleiten und mit den Formeln unter Beachtung der rechtlichen Rahmenbedingungen eine konkrete Prämienkalkulation durchführen.

## 6.4 Problem steigender Beiträge

### Kerninhalte

- Problem steigender Beiträge im Alter
- Möglichkeiten zur Lösung

Für eine Person mit Alter  $x$ , die ihren Krankenversicherungsvertrag im Alter  $x_e$  abgeschlossen hat, betrachten wir eine erste Tarifänderung im Alter  $x > x_e$ . Wenn die Kopfschäden um den Faktor  $1 + \lambda$  mit  $\lambda > 0$  gestiegen sind, dann ergibt sich für die Nettoprämie mit den neuen Kopfschäden:

$$P^n = (1 + \lambda) \cdot P_{x_e} + \lambda \cdot (P_x - P_{x_e})$$

Die neue Prämie  $P^n$  erhöht sich also analog zu den Kopfschäden um den Faktor  $1 + \lambda$ . Zusätzlich ist ein Betrag in Höhe von  $\lambda \cdot (P_x - P_{x_e})$  aufzubringen, der bei monoton wachsenden Kopfschäden positiv ist. Er ist erforderlich, da bis zum Tod ein im Vergleich zum Eintrittsalter kürzerer Zeitraum zur Verfügung steht, um die gestiegenen Kopfschäden zu finanzieren. Dieser Zuschlag ist insbesondere für ältere Versicherte problematisch. Daher wird dieser formale Zusammenhang manchmal auch als „versicherungsmathematisches Altenproblem der Krankenversicherung“ bezeichnet.

Der Gesetzgeber hat verschiedene Maßnahmen ergriffen, die dem Beitragsanstieg bei älteren Versicherten entgegenwirken sollen.

- weitgehendes Verbot beitragsproportionaler Kostenzuschläge (vgl. § 8 (4) KVAV)
- Verwendung von Zinsüberschüssen zur Milderung von Beitragsanpassungen älterer Personen (vgl. § 150 VAG)
- Gesetzlicher Beitragszuschlag in Höhe von 10 % zur Prämienermäßigung ab Alter 65 (vgl. § 149 VAG; siehe oben)
- Wechselmöglichkeiten in den Standardtarif oder Basistarif (vgl. § 204 VVG)

### Lernergebnisse (B2)

Die Studierenden können das Problem steigender Beiträge im Alter erklären und können entsprechende Lösungsmöglichkeiten angeben sowie erläutern.

<sup>30</sup>vgl. Anlage 1 B, KVAV

# Index

- Äquivalenz
  - gleichung, 93
- Äquivalenzprinzip, 5, 6, 8
- Übergangswahrscheinlichkeit, 16
- Überlebenswahrscheinlichkeit, 16
- Überprüfbarkeit (Tarifmerkmal), 36
- Überschuss
  - Deklaration, 71
- Übertragungswert, 62
- Übriges Ergebnis, 71
  
- Abschlagsverfahren, 94
- Abschlusskosten, 6
- Abwicklungs
  - anteil, 41
  - dauer, 2, 40
  - dreieck, 40
  - faktor, 42
  - jahr, 40
  - muster, 41
  - quadrat, 40
  - quote, 42
- Abzugsfranchise, 21, 22
- additiv
  - es Modell, 29, 51
  - es Verfahren, 46–48
  - Prämienprinzip, 9
- aktive Rückversicherung, 19
- Aktuarielle Unternehmenszins, 86
- Altenproblem, 94
- Anfalljahr, 40
- Ansparprozess, 7
- Anzahl
  - aller Finanzaufwände, 14
  - der Jahreseinheiten, 25
- Ausgleich
  - in der Zeit, 7
- Ausgleichsverfahren
  - verteilungsfrei, 30
- Auslösender Faktor
  - Kopfschäden, 90
  - Sterbewahrscheinlichkeiten, 91
- Ausprägung (Tarifmerkmal), 24
- Ausreißer(effekte), 48
- Ausscheideordnung, 6
  - einfache, 54
  - zusammengesetzte, 55
- Axiomensystem Pensionsversicherungsma-  
thematik, 77
  
- Bailey und Simon
  - Tarifierungsverfahren, 32
- Basistarif, 94
- Beitrag, 6
- Beitragsanpassung, 89
  
- Bestand
  - sdaten, 24, 34
  - homogener, 12
- Bewertungsreserven, 72
- Binomial-Verteilung, 15
- Bonus-Malus-System, 17
- Bornhuetter-Ferguson-Verfahren, 45, 47, 48
- Bruttoprämie, 6
- Bruttorisikoprämie, 6
  
- Cantelli
  - Satz von, 62
  - Ungleichung von, 9
- Cape-Cod-Verfahren, 46–48
- CAT-XL-Rückversicherung, 22
- Chain-Ladder
  - Faktoren, 44
  - Verfahren, 44, 47, 48
- Combined Ratio, 26
- Copula, 37
- CR, 26
  
- Datenqualität, 35
- Deckungssumme, 2, 24
- Definition von Versicherung, 1
- direktes Geschäft, 18, 20
- Diskontierung, 4
- Durchführungsweg, 75
- durchschnittliche
  - kumulierte Versicherungssumme, 26
  - Schadenhöhe, 25
  - Versicherungssumme, 27
  
- echter Spätschaden, 40
- Einzelschadenreserve, 40
- Einzelschadenreserven, 7
- Endschadenstände, 40
- Entschädigung, 22, 24
- Entsparprozess, 7
- Erfüllungsbetrag, 57
- Erklärungsgehalt, 36
- Erlang-Verteilung, 14
- Erstrisiko, 18
- Erwartungswert
  - prinzip, 9
  - individuelles Modell, 13
  - kollektives Modell, 14
- erwartungswertübersteigend
  - Prämienprinzip, 10
- erweitertes lineares Modell, 51
- Exponential
  - prinzip, 9
  - verteilung, 14
- Exposure, 24
- Exzedent, 22

fakultative Rückversicherung, 19  
 Finanzaufwand, 11, 14, 15  
     kumulierter, 12  
 Formeln von Wald, 14  
 Franchise  
     -grenze, 21  
     Abzugs-, 21, 22  
     Integral-, 21  
     Zeit-, 21  
 Fundamentalformel für den Gesamtaufwand, 15  
  
 Gamma-Verteilung, 14  
 gebündelte Risiken, 12  
 gebuchter Beitrag, 26  
 Gefahr, 10, 11  
     -engemeinschaft, 12  
     versicherte, 1  
 Gemischte Versicherung, 68  
 Gesamtaufwand  
     Fundamentalformel, 15  
     individuelles Modell, 13  
     kollektives Modell, 14  
     Verteilung, 13, 15  
 Gesamtschaden, 17, 30  
     individuelles Modell, 13  
     kollektives Modell, 14  
 Gesetz der großen Zahlen, 8, 11  
 Gesetzlicher Zuschlag, 94  
 GLM, 38  
 Große Zahlen  
     Gesetz der, 8, 11  
 Großschäden, 18, 22, 35, 48  
 Grossing-Up-Verfahren, 44  
 Grundkopfschaden, 87  
  
 Höchstrechnungszins, 65  
 Haftungsbegrenzung, 22  
 Hauptgesamtheit, 53  
 heterogenes Kollektiv, 12  
 Homogenität, 12, 35  
  
 IBNER-Schäden, 40  
 IBNR-Schäden, 40  
 implizite Prämienprinzipien, 9  
 impliziter Selbstbehalt, 23  
 impliziter Sicherheitszuschlag, 6  
 Incremental-Loss-Ratio-Verfahren, 46  
 incurred losses, 40  
 individuelles Modell, 12  
     Erwartungswert, 13  
     für ein homogenes Kollektiv, 13  
     Gesamtaufwand, 13  
     kumulierter Finanzaufwand, 13  
     Varianz, 13  
     Variationskoeffizient, 13  
     Verteilung des Gesamtaufwands, 13  
 Inflation, 49  
 Integralfranchise, 21  
  
 Invariansatz, 81  
 inverse Link-Funktion, 38  
  
 Jahresüberschadenexzedentenrückversicherung, 22  
 Jahreseinheiten, 24  
  
 Kalkulation nach Art der Lebensversicherung, 7  
 Kalkulationsstatistiken, 28  
 Kapazität (Rückversicherung), 20  
 Kapitalkosten, 5, 18  
 kausaler Einfluss, 35  
 Kollektiv, 10, 11  
     homogenes, 12  
     Risikoausgleich im, 10–12  
 Kollektive Finanzierungsverfahren, 83  
 kollektives Modell, 14  
     Erwartungswert, 14  
     Gesamtaufwand, 14  
     Varianz, 14  
     Variationskoeffizient, 14  
     Verteilung des Gesamtaufwands, 15  
 Kompositversicherung, 3  
 Kopfschaden, 87  
 Korrelationskoeffizient, 34  
 Kosten, 6  
 Kreuzklassifikation, 34  
     zweifache, 30  
 Kumulereignis, 16  
 kumulierter Finanzaufwand, 12  
     individuelles Modell, 13  
 Kumulschäden, 22  
 Kumulschadenexzedentenrückversicherung, 22  
 Kupierung, 35  
  
 Layer, 22  
 Leben-Rückversicherung, 19  
 Leibrente, 68  
     aufgeschoben, 69  
     temporär, 69  
 Leistungs  
     -dauer, 2  
     -fall, 11  
 Limit (Rückversicherung), 21, 22  
 Link-Funktion, 38  
 log-lineares Modell, 39  
 Loss-Development-Verfahren, 45, 47, 48  
  
 Marginaldurchschnitt, 31  
 Marginalfaktor, 29  
 Marginalfaktorverfahren, 30  
 Marginalparameter, 29  
 Marginalsummand, 29  
 Marginalsummengleichungen, 33, 49  
 Marginalsummenverfahren, 33, 39, 44  
 Markov  
     -Eigenschaft, 16

- Prozess, 16
- Maximum (Rückversicherung), 20
- Modell
  - additives, 29, 51
  - erweitertes lineares, 51
  - individuelles, 12
  - kollektives, 14
  - log-lineares, 39
  - multiplikativ, 29
  - multivariat stochastisches, 51
  - multivariates Chain-Ladder, 51
  - verallgemeinertes lineares, 38
- Multikollinearität, 36
- multiple lineare Regression, 38
- multiple Regressionsanalyse, 37
- multivariate stochastische Modelle, 51
- multivariates Chain-Ladder-Modell, 51
  
- Nachkalkulation, 92
- Nachlauf (Schaden), 50
- Naturereignisse, 18
- Nebengesamtheit, 53
- Negative Binomialverteilung, 15
- Nettoprämie, 6
- Nettorisikoprämie, 5, 8, 29, 34
- Nettorisikoprinzip, 8
- Neukalkulation, 92
- nicht-proportionale Risikoteilung, 18, 21
  
- obligatorische Rückversicherung, 19
- Originalbasis, 19
  
- paid losses, 40
- Panjer-Klasse, 15
- passive Rückversicherung, 19
- Pensionsverpflichtung
  - mittelbare, 75
  - unmittelbare, 75
- Pensionszusage, 74
- Personenversicherung, 2
- Plafond, 22
- Poisson
  - Modell von Hachemeister, 51
  - Prozess, 17
  - verteilung, 15
  - verteilung zusammengesetzte, 15
- Prämie, 4, 7
  - Brutto-, 6
  - konstante, 7
  - Netto-, 6
  - Nettorisiko-, 5, 29, 34
  - rekursive Kalkulation, 69
  - Risiko-, 6, 7
  - verursachungsgerechte, 35
- Prämiendifferenzierung, 35
- Prämieneinnahmen, 43
- Prämienkalkulation, 4, 22
- Prämienprinzip, 8
  - Eigenschaften, 9
  - implizites, 9
- Prämienprozess, 4
- Prämienzahlweise, 2
- preferred lives, 64
- Priorität, 18, 21, 22
- Profil, 87
- Projected-Unit-Credit-Methode, 84
- proportionale Risikoteilung, 18, 19
- proportionale Selbstbeteiligung, 20, 22
  
- Quotenrückversicherung, 20
- Quotenselbstbehalt, 20
  
- Rückkaufswert, 62
- Rückstellung, 7
- Rückversicherer, 18
- Rückversicherung, 18
  - aktive, 19
  - CAT-XL-, 22
  - fakultative, 19
  - Jahresüberschadenexzedenten-, 22
  - Kumulschadenexzedenten-, 22
  - Maximum, 20
  - obligatorische, 19
  - passive, 19
  - Quoten-, 20
  - Schadenexzedenten-, 21
  - SL-, 22
  - Summenexzedenten-, 20
  - XL-, 21
- Rangkorrelationskoeffizient, 34
- Rechnungsgrundlagen, 6
- Rechnungszins, 6
- Regressand, 34, 37, 38
- Regressoren, 34, 35, 37, 38
- Reine Erlebensfallversicherung, 68
- Reserve, 7, 40
  - Allgemein, 60
  - prospektive, 60
  - retrospektive, 61
- Reservedepot, 19
- Retrozession, 19
- Richttafeln 2005 G, 79
- Risiken, 1, 10–12, 14, 34
  - gebündelte, 12
  - i.i.d., 12
  - Segmentierung, 12
  - Zusammenfassung, 11
- Risiko, 4, 11
  - Erst-, 18
  - Zweit-, 18
- Risikoausgleich
  - im Kollektiv, 10–12
  - in der Zeit, 7
- Risikobasis, 19
- Risikoergebnis, 71
- risikofreier Marktzins, 5
- Risikoklasse, 28
- Risikolebensversicherung, 67

Risikomaß, 7, 8  
 Risikomerkmal, 7, 28, 34  
 Risikoprämie, 6, 7  
     Definition, 62  
     Zerlegung, 62  
 Risikoprüfung, 64  
 Risikoteilung  
     Arten von, 18  
     nicht-proportionale, 18, 21  
     proportionale, 18, 19  
     Ziele, 18  
 Robustheit (Tarifmerkmal), 36  
 Schaden  
     -Kosten-Quote, 26  
     -anzahl, 14, 24  
     -arten, 34  
     -aufwand, 40  
     -bedarf, 25, 29, 30  
     -daten, 24  
     -durchschnitt, 25  
     -exzedentenrückversicherung, 21  
     -freiheitsklasse, 17  
     -frequenz, 25  
     -grad, 27  
     -häufigkeit, 24, 25  
     -höhe, 14, 22  
     -höhe durchschnittliche, 25  
     -quote, 26  
     -quotenzuwächse, 43  
     -reserve, 7  
     -reservierung, 39  
     -reservierungsverfahren, 43  
     -satz, 26  
     -stände, 40, 51  
     -versicherung, 3  
     -zahlung, 40  
 Scheinkorrelation, 35  
 Schicksalsteilung, 19  
 Schwankung  
     -rückstellung, 7  
     -zuschlag, 8  
 Segmentierung von Risiken, 12  
 Selbstbehalt, 2, 18  
     expliziter, 22  
     impliziter, 23  
     Quoten-, 20  
 Selbstbeteiligung  
     proportionale, 22  
 SF-Klassenmodell, 17  
 Sicherheitszuschlag, 5, 6, 8–10  
     impliziter, 6  
 Signifikanz, 36  
 Simulation, 52  
 SL-Rückversicherung, 22  
 Solidargemeinschaft, 35  
 Solvenzkapital, 5  
 Spätschaden, 40  
 Sparprämie, 62  
 Sparprozess, 7  
 Stückkosten, 6  
 Standardabweichungsprinzip, 9  
 Standardtarif, 94  
 Stationarität, 17  
 Sterbetafel, 65  
 stochastische Unabhängigkeit, 12, 14, 37  
 Stop-Loss  
     -Punkt, 22  
     -Rückversicherung, 22  
 subadditiv  
     Prämienprinzip, 10  
 Summenexzedentenrückversicherung, 20  
 Summenversicherung, 3  
 Tarifierungsverfahren  
     mit Marginaldurchschnitten, 32  
     von Bailey und Simon, 32  
 Tarifmerkmal, 7, 24, 28, 34–38  
     Zulässigkeit, 36  
 Tarifmodell, 28  
 Tarifzelle, 28  
 Teilwert  
     modifizierter, 84  
     steuerlicher, 83  
 Thielsche Differenzgleichung, 61  
 Todesfallversicherung, 67  
 ultimate, 40  
 Umverteilung, 35  
 Unabhängigkeit  
     stochastische, 12, 14, 37  
 unbekannter Spätschaden, 40  
 Ungewissheit, 1, 3  
 Ungleichung von Cantelli, 9  
 Unisex-Tarife, 2  
 Unterversicherung, 20  
 Varianz  
     -prinzip, 9  
     individuelles Modell, 13  
     kollektives Modell, 14  
 Variationskoeffizient  
     individuelles Modell, 13  
     kollektives Modell, 14  
 verallgemeinerte lineare Modelle, 38  
 verdienter Beitrag, 26  
 Verfahren der anfalljahr unabhängigen Schadenquotenzuwächse, 46  
 Verfahren der Schadenreservierung, 43  
 Verfahren der schrittweisen Auswahl, 37  
 Verfahren von Bahr, 87  
 Verlustwahrscheinlichkeit, 9  
 versicherte Gefahr, 1  
 Versicherung  
     Definition, 1  
 Versicherungs  
     -dauer, 2, 4, 7  
     -fall, 1

- leistung, 1, 22
- leistungsprozess, 4
- nehmer, 1, 18
- summe, 1, 24
- vertrag, 1
- Versicherungsmathematische Bilanzgleichung, 61
- versicherungstechnische Rückstellung, 7
- versicherungstechnisches Alter, 82
- versicherungstechnisches Risiko, 18
- Verteilung
  - Binomial-, 15
  - Erlang-, 14
  - Exponential-, 14
  - Gamma-, 14
  - Negative Binomial-, 15
  - Panjer-, 15
  - Poisson-, 15
  - zusammengesetzte Poisson-, 15
- Verteilung des Gesamtaufwands
  - individuelles Modell, 13
  - kollektives Modell, 15
- verteilungsfreie Ausgleichsverfahren, 30
- Vertrags
  - daten, 2
  - dauer, 4, 7
- verursachungsgerechte Prämie, 35
- Verwaltungskosten, 6
- Volumenmaß, 24, 30
- Vorsichtsprinzip, 64
- Wald
  - Formeln von, 14
- Wartezeit, 21
- Wartezeit- und Selektionseffekte, 87
- XL-Rückversicherung, 21
- Zahlung, 2, 40
- Zahlungsströme, 4, 11, 16
- Zahlweise, 2
- Zeichnungskapazität, 18
- Zeit
  - Ausgleich in der, 7
  - Risikoausgleich in der, 7
- Zeitfranchise, 21
- Zinsergebnis, 71
- Zufallssumme, 14
- Zulässigkeit (Tarifmerkmal), 36
- zusammengesetzte Poisson-Verteilung, 15
- Zuschlagsverfahren, 94
- Zustandsmodell, 16
  - Personenversicherung, 53
- zweifache Kreuzklassifikation, 30
- Zweitrisiko, 18
- Zwillingsfreiheit, 53
- Zyklenfreiheit, 53