DAV
Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

Leitfaden für das Grundwissen

Finanzmathematik und Risikobewertung

Köln, 01. Januar 2020

Einleitung

Dieser Leitfaden konkretisiert die Lernziele für das „Grundwissen Finanzmathematik und Risikobewertung“ für die Ausbildung gemäß Prüfungsordnung 4. Er skizziert Inhalte und verzichtet zugunsten der besseren Lesbarkeit teilweise auf mathematische Details bzw. die Vollständigkeit. Die exakten Formulierungen können in der Literatur nachgeschlagen werden.

Erläuternde und vertiefende Beispiele sowie Fallstudien sind explizit Gegenstand der Schulungsmaterialien zum Kurs.

Der vorliegende Leitfaden enthält zur Abrundung und als Anregung für die Dozenten sowie für das weiterführende Selbststudium Lehrstoff, der über die Inhalte der prüfungsrelevanten Lernergebnisse hinausgeht. Diese Passagen sind als „Exkurs“ explizit gekennzeichnet und nicht Gegenstand der Prüfung.

Bei der Erstellung dieses Leitfadens haben mitgewirkt:

Prof. Dr. Thomas Knispel

Dr. Ingo Kraus

Prof. Dr. Stefan Weber

Vorkenntnisse

Der Kurs zum „Grundwissen Finanzmathematik und Risikobewertung“ setzt Grundkenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik, etwa im Umfang des Fachs „Grundwissen Angewandte Stochastik“ voraus.

Danksagung

Die Autoren danken Prof. Dr. Peter Albrecht für die sorgfältige Durchsicht des Leitfadens und für wertvolle Hinweise sowie Anregungen, die wesentlich zur Optimierung der Lehrinhalte für das „Grundwissen Finanzmathematik und Risikobewertung“ beigetragen haben.

Inhaltsverzeichnis

1 Zahlungsströme, Versicherungs-, Finanzmarktprodukte und Märkte[1]

Im Zentrum dieses Kapitels steht erstens die formale, mathematische Beschreibung von Finanztiteln und Versicherungsverträgen durch den mit diesen Produkten assoziierten **Zahlungsstrom** (Cash-Flow). Zahlungsstrommodelle sind in der Praxis ein essentieller Bestandteil der Modellierung mit vielfältigen Anwendungen. Zweitens sollen Zahlungsströme sowie **dynamische und stochastische Wertentwicklungen** von Finanz- und Versicherungskontrakten in den übergeordneten Kontext **stochastischer Prozesse** eingebettet werden. Auf dieser Basis wird in den nachfolgenden Kapiteln die Bewertung, Absicherung und Risikomessung von Finanz- und Versicherungskontrakten systematisch erläutert.

1.1 Zahlungsstrommodelle und Wertentwicklungen

Kerninhalte

- Begriffsbildung „Zahlungsstrom" und „Wertentwicklung" sowie Interpretation von Zahlungsströmen und Wertentwicklungen als stochastische Prozesse
- Konzeption einer Informationsfiltration und eines an eine Filtration adaptierten stochastischen Prozesses

Im Folgenden sei $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{R}^{\geq 0}$ eine **Zeitmenge**, d. h. eine geordnete Menge von nicht-negativen Zeitpunkten, zu denen Zahlungen erfolgen können oder Wertentwicklungen von Finanz- und Versicherungskontrakten vorliegen. Beispiele sind:

- *Endliche Zeitmenge:* $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T\}$ bzw. $\mathbb{T} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n\}$,
- *Abzählbar unendliche Zeitmenge:* $\mathbb{T} = \{0, 1, \ldots, T, \ldots\}$ bzw. $\mathbb{T} = \{t_0, t_1, \ldots, t_n, \ldots\}$,
- *Stetige Zeitmenge:* $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq T\}$ oder $\mathbb{T} = \{t \in \mathbb{R} : t \geq 0\}$.

Zahlungsstrom. Aus Finanztiteln und Versicherungsverträgen resultieren zu bestimmten Zeitpunkten vertraglich vereinbarte Zahlungen (bzw. Zahlungsversprechen) zwischen den Vertragspartnern. Mathematisch können diese als Zahlungsstrom zusammengefasst werden.

Definition 1.1 (Zahlungsstrom)**.** *Ein **Zahlungsstrom** $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{T}}$ ist eine Folge von (reellwertigen) Zahlungen, wobei es sich um Ein- oder Auszahlungen bzw. einen Saldo aus Ein- und Auszahlungen handeln kann. Die Notation Z_t bedeutet dabei, dass eine Zahlung der Höhe Z_t zum Zeitpunkt t erfolgt. Ein positives Vorzeichen entspricht einer Einzahlung, ein negatives Vorzeichen korrespondiert mit einer Auszahlung.*

Für die weiterführende Betrachtung von Zahlungsströmen ist ein wesentliches Unterscheidungskriterium, ob die Zahlungen Z_t **deterministisch** oder **stochastisch** sind. So ergeben sich beispielsweise bei der Bewertung von Zahlungsströmen unter Sicherheit oder bei Planungsrechnungen erhebliche Vereinfachungen. Bei einer deterministischen Zahlung Z_t ist aus heutiger Sicht bzw. am Beginn der Zeitperiode die exakte Höhe der Auszahlung vollständig bekannt. Im Gegensatz dazu ist bei einer stochastischen Zahlung Z_t aus heutiger Sicht bzw. zu Beginn der betrachteten Zeitperiode nicht bekannt, in welcher Höhe die Zahlung erfolgen wird. Typischerweise liegen jedoch Informationen - basierend z. B. auf statistischen Analysen oder Experteneinschätzungen - darüber vor, welche Realisierungen von Zahlungshöhen sich ergeben können und mit welchen Eintrittswahrscheinlichkeiten diese

[1] Die Ausführungen dieses Kapitels orientieren sich in Teilen an Albrecht, P.: *Grundprinzipien der Finanz- und Versicherungsmathematik*. Schäffer-Poeschel-Verlag, 3. Auflage, 2007.

auftreten. In diesem Fall kann die stochastische Zahlung Z_t mathematisch als Zufallsvariable über einem geeigneten messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ mit Werten in $(\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R}))$ aufgefasst werden, deren Verteilung durch die Eintrittswahrscheinlichkeiten charakterisiert ist. Hierbei bezeichnet $\mathcal{B}(\mathbb{R})$ die Borel'sche Sigma-Algebra bezüglich $\mathbb{R}$. Der Zahlungsstrom Z entspricht dann einem **stochastischen Prozess**.

Definition 1.2 (Stochastischer Prozess)**.** *Es sei $(E, \mathcal{E})$ ein messbarer Raum. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit Zustandsraum $(E, \mathcal{E})$ ist eine zeitindexierte Familie E-wertiger Zufallsvariablen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$.*

Für eine endliche oder abzählbar unendliche Zeitmenge $\mathbb{T}$ heißt der stochastische Prozess **zeitdiskret**. Ist $\mathbb{T}$ stetig, so spricht man von einem **zeitstetigen** stochastischen Prozess. Die Realisierungen des stochastischen Prozesses sind seine **Pfade** $t \mapsto X_t(\omega)$ für $\omega \in \Omega$. Im Folgenden werden Zahlungsströme übergeordnet stets als stochastische Prozesse dargestellt. Der Fall deterministischer Zahlungsströme ist dann ein Spezialfall mit „konstanten" Zufallsvariablen.

In Anwendungen wird häufig die Verteilung des Zahlungsstroms durch die Vorgabe eines Wahrscheinlichkeitsmaßes auf $(\Omega, \mathcal{F})$ spezifiziert. Hierbei handelt es sich in der Regel um ein Wahrscheinlichkeitsmaß P, das die tatsächliche Häufigkeit des Eintretens von Ereignissen beschreiben soll. Es kann sich dabei aber auch um ein risikoneutrales Bewertungsmaß handeln. Daneben gibt es sogenannte **modellfreie Ansätze** zur Bewertung und Absicherung von Zahlungsströmen, die keine Spezifikation eines Wahrscheinlichkeitsmaßes erfordern. Im Folgenden wird ein Maß fixiert, obwohl dies teilweise nicht zwingend notwendig ist.

Bemerkung 1.3. *In der Praxis haben Zahlungsströme überwiegend einen stochastischen Charakter, da die Höhe oder gar der Zeitpunkt zukünftiger Zahlungen in vielen Fällen nicht bekannt ist. Eine Ausnahme davon stellen etwa ausfallfreie Festzinstitel dar. Zur Modell- und Analysevereinfachung wird häufig jedoch auf rein deterministische Zahlungsströme abgestellt. Betrachtet man z. B. den erwarteten Zahlungsstrom $(\mathrm{E}[Z_t])_{t\in\mathbb{T}}$, so erhält man quasi-deterministische Modelle. Darüber hinaus bieten sich im Rahmen einer Planungsrechnung anstelle eines stochastischen Modellansatzes Berechnungen mit unterschiedlichen deterministischen Szenarien (z. B. 1 %, 2 %, 5 %, ... jährliche Wertentwicklung bei einem Fondsinvestment) - gegebenenfalls unter Spezifikation und Inkorporierung der zugehörigen Eintrittswahrscheinlichkeiten - an.*

Als Basisfall werden häufig Zahlungsstrommodelle mit einer diskreten Zeitmenge (z. B. $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots, T\}$ oder $\mathbb{T} = \{0, 1, \dots\}$) betrachtet, bei der die Zahlungszeitpunkte äquidistant sind. Das Zeitfenster zwischen $t - 1$ und t, $t = 1, \dots, T + 1$, bildet die t-te Periode. Beispiele für Perioden sind Monate und Jahre. Das Zahlungsstrommodell $Z = (Z_t)_{t\in\mathbb{T}}$ erlaubt nun zwei Interpretationen:

- **Vorschüssige Zahlungen:** Die Zahlungen $Z_0, Z_1, \dots, Z_T$ erfolgen jeweils zu Beginn der Perioden $1, \dots, T + 1$. In diesem Fall entspricht die t-te Periode dem links abgeschlossenen und rechts offenen Intervall $[t - 1, t)$.

- **Nachschüssige Zahlungen:** Die Zahlungen $Z_1, \dots, Z_T$ sind Zahlungen jeweils am Ende der Periode $1, \dots, T$ und Z_0 ist eine Zahlung zu Beginn der ersten Periode (wobei der Fall $Z_0 = 0$ hierunter fällt). Die t-te Periode ist somit das links offene und rechts abgeschlossene Intervall $(t - 1, t]$.

In Anwendungen, z. B. bei Rentenzahlungen, ist zwischen diesen Interpretationen zu differenzieren.

Dynamische und stochastische Wertentwicklungen. Investoren können ein Startinvestment V_0 zu $t = 0$ investieren. Im einfachsten Fall erfolgt die Anlage in ein Sparbuch mit konstantem Periodenzins $r > 0$, sodass sich das Vermögen (bei zusammengesetzter Verzinsung) deterministisch gemäß

$$V_t = V_0(1+r)^t, \quad t = 1, 2, \ldots, T,$$

entwickelt. Der Periodenzins kann für jede Periode $(t-1, t]$ aber auch durch den aktuellen Marktzins $r_{t-1}(t)$ für eine Anlage in dieser Periode gegeben sein, der jedoch erst in $t-1$ bekannt und damit für $t \geq 1$ a priori zufällig ist. In diesem Fall ist die Wertentwicklung des Anfangsinvestments

$$V_t = V_0 \prod_{k=1}^{t} (1 + r_{k-1}(k)), \quad t = 1, 2, \ldots, T,$$

ein stochastischer Prozess.

Die Situation verallgemeinert sich durch Betrachtung eines Finanzmarktes mit $d+1$ primären Finanzprodukten. Die zufälligen Preise zum Zeitpunkt t seien mit $S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d$ bezeichnet. Das 0-te Produkt hat strikt positive Preise (z. B. Sparbuch oder Geldmarktfonds) und wird als Referenzprodukt zur Diskontierung (Numéraire) gewählt. Die Preise der primären Finanzprodukte werden als stochastische Prozesse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ modelliert. Im gegebenen Finanzmarktmodell können die primären Finanzprodukte zu den diskreten Handelszeitpunkten gehandelt werden. Die Anzahl von Finanzprodukt i, die in der Periode $(t-1, t]$ im Portfolio gehalten wird, wird mit ϑ_t^i bezeichnet. Nimmt man nun an, dass mit dem Anfangsinvestment V_0 das Portfolio ohne Kapitalzufuhr oder Kapitalentnahme umgeschichtet wird, so ist der stochastische Wertprozess gegeben durch

$$V_t = V_0 + \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=0}^{d} \vartheta_k^i (S_k^i - S_{k-1}^i), \quad t = 0, 1, \ldots, T, \tag{1.1}$$

wobei für das Anfangsinvestment gilt:

$$V_0 = \sum_{i=0}^{d} \vartheta_1^i S_0^i.$$

Dies bedeutet, dass sich die Wertentwicklung ausschließlich aus den kumulierten Periodengewinnen bzw. -verlusten ergibt. Eine Handelsstrategie mit Wertprozess (1.1) heißt **selbstfinanzierend** (siehe Definition 2.18).

Umgekehrt kann man auch eine Auszahlung C_T zum terminalen Zeitpunkt T (oder allgemeiner einen zukünftigen Zahlungsstrom) betrachten und diese im Zeitverlauf bewerten. Der Wertprozess $(V_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ ist wiederum ein stochastischer Prozess, da der Wert in t von der Entwicklung im Marktmodell bis t abhängt (siehe Kapitel 2).

Informationsfiltration und adaptierte stochastische Prozesse. Die Bewertung von Finanzprodukten zu verschiedenen Zeitpunkten hängt von der zur Verfügung stehenden **Information** ab. Symbolisch bezeichnet man die zum Zeitpunkt t zur Verfügung stehende Information oft mit $\mathcal{F}_t$, $t \in \mathbb{T}$; mathematisch handelt es sich hierbei um eine **Sigma-Algebra**. Inhaltlich ist $\mathcal{F}_t$ die Menge der Ereignisse (Teilmengen von Ω), für die zum Zeitpunkt t bekannt ist, ob sie eingetreten sind oder nicht. Typischerweise ergibt sich die Information zum Zeitpunkt t aus beobachteten Realisierungen von Zahlungen Z_u, $u \leq t$, oder der beobachteten Entwicklung von Preisen $S_u^0, S_u^1, \ldots, S_u^d$, $u \leq t$, bestimmter Produkte bis t. In diesem Fall ist die Information zum Zeitpunkt t formal gegeben durch

$$\mathcal{F}_t := \sigma(Z_u : u \leq t) \quad \text{bzw.} \quad \mathcal{F}_t := \sigma(S_u^i, i = 0, 1, \ldots, d : u \leq t),$$

d. h. durch die von den Zufallsvariablen Z_u, $u \leq t$, bzw. S_u^i, $i = 0, 1, \ldots, d$, $u \leq t$, erzeugte Sigma-Algebra („natürliche“ Sigma-Algebra). Da die Information im Zeitverlauf - durch Beobachtung der Realisierung von Zahlungen oder der Entwicklung von Preisen bestimmter Produkte - zunimmt, ist die Folge $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t \in \mathbb{T}}$ der Sigma-Algebren aufsteigend:

$$\mathcal{F}_s \subset \mathcal{F}_t \subset \mathcal{F} \quad \text{für alle } s \leq t,\ s, t \in \mathbb{T}.$$

Definition 1.4 (Filtration)**.** *Eine aufsteigende Familie von Sigma-Algebren $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt **Filtration** oder auch Informationsfiltration. Das Tupel $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}})$ wird **filtrierter Raum** genannt, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, P)$ heißt **filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum** für ein gegebenes Wahrscheinlichkeitsmaß P.*

Von besonderer Bedeutung ist - gegeben eine Informationsfiltration - die Adaptiertheit eines stochastischen Prozesses.

Definition 1.5 (Adaptierter stochastischer Prozess)**.** *Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}, P)$ ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum. Ein stochastischer Prozess $X = (X_t)_{t\in\mathbb{T}}$ heißt **adaptiert** an die Filtration $(\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{T}}$, falls jede Zufallsvariable X_t $\mathcal{F}_t$-messbar ist.*

Anschaulich bedeutet die Adaptiertheit, dass für jeden Zeitpunkt t – gegeben die in der Sigma-Algebra $\mathcal{F}_t$ kodierte Information – die gesamte Historie des stochastischen Prozesses bekannt ist.

Lernergebnisse (B2)
Die Studierenden können Zahlungsströme und Wertentwicklungen als stochastische Prozesse interpretieren. Sie kennen das Konzept einer Filtration sowie eines adaptierten stochastischen Prozesses und verstehen die Bedeutung dieser mathematischen Konzepte im Anwendungskontext der Finanzmathematik.

1.2 Charakterisierung von Finanztiteln

Kerninhalte

- Begriffsbildung: Nominalwerte und Realwerte
- Bedeutung und Funktionsweise von Aktien-, Immobilien- und Zinsmärkten
- Beschreibung von Aktienkursen und -dividenden sowie Immobilienpreisen als Beispiele von Realwerten mittels stochastischer Prozesse
- Beschreibung von Zinstiteln als Beispiele von Nominalwerten mittels stochastischer Prozesse
- Begriffsbildung: Kassa- und Termingeschäfte
- Beispiele für Termingeschäfte/derivative Finanzinstrumente: Forward-Kontrakte, Call- und Put-Optionen

Im Folgenden werden - eingebettet in den obigen allgemeinen Rahmen - zentrale Klassen von Finanztiteln anhand des assoziierten Zahlungsstroms charakterisiert. Es ist jedoch der Vollständigkeit halber darauf hinzuweisen, dass in der Praxis weitere nicht-monetäre Eigenschaften, wie z. B. wertpapierrechtliche Fragen (Unterscheidung von Namens- und Inhaberaktien oder Inhaber-, Orderschuld- und Namensschuldverschreibungen) oder Fragen der Bilanzierung, wesentliche Aspekte bei der Beschreibung von Finanztiteln sind.

Zur Charakterisierung von Anlageklassen bzw. Anlagekategorien werden im Folgenden die Begriffe **„Realwert“** und **„Nominalwert“** verwendet. Diese Begriffe werden in der Literatur in unterschiedlicher Weise verwendet. Im Weiteren ist der Terminus Realwert im Sinne von Sachwert oder Substanzwert zu verstehen. Darunter werden Anlageformen, wie z. B. Aktien, Immobilien oder Edelmetalle, verstanden, die auf einem physischen Wert bzw. physischen Werten beruhen. Bei Aktien sind dies die zugrunde liegenden Unternehmen (Aktiengesellschaften), die Produkte und Produktionsmittel besitzen, die zur Erwirtschaftung von Gewinnen eingesetzt werden. Realwerte in diesem Sinne haben einen Wert „an sich“. Nominalwerte sind hingegen Tauschmittel, d. h. typischerweise Geld oder Zinstitel, die nicht immanent (Geld nach Aufgabe der Goldbindung) einen physischen Wert beinhalten, sondern nur ein Versprechen, gegen solche eingetauscht werden zu können. Realwerte sind im Gegensatz zu Nominalwerten besser gegen Inflation (Kaufkraftverluste) geschützt. Eine alternative Verwendung dieser Begriffe besteht in der Tat darin, dass Realwerte in Kaufkrafttermen gemessen werden und Nominalwerte in Geldtermen (nominellen Termen). Die Termini „Realzins“ und „Nominalzins“ bieten hierfür ein Beispiel.

1.2.1 Aktien

Aktien sind Wertpapiere, die Teilhaberrechte an einer Aktiengesellschaft verbriefen, und stellen insofern Realwerte dar. Man unterscheidet dabei zwischen Nennwertaktien und Stückaktien. Bei Nennwertaktien wird das Grundkapital der Aktiengesellschaft in eine bestimmte Anzahl auf einen festen Nennwert lautende Aktien aufgeteilt, und der Käufer einer Aktie (Aktionär) erwirbt somit einen bestimmten Anteil an der Aktiengesellschaft. Im Gegensatz dazu lauten Stückaktien auf keinen Nennbetrag und sind am Grundkapital einer Gesellschaft in gleichem Umfang beteiligt. Als „Miteigentümer“ hat der Aktionär Anteil an einer positiven Unternehmensentwicklung durch Ausschüttung von Gewinnanteilen (Dividenden) und Kurssteigerungen der Aktie. Er ist jedoch umgekehrt auch von negativen Entwicklungen (Gewinnausfall, Liquidation) betroffen. Im Falle einer Insolvenz ist die Haftung eines Aktionärs auf seinen Anteil an der Gesellschaft beschränkt.

Das Anteilsrecht ist je nach Aktienart unterschiedlich ausgestaltet:

- Teilnahme an und Stimmrecht in der Hauptversammlung,
- Dividendenanspruch,
- Recht auf Bezug junger Aktien bei Kapitalerhöhungen,
- Auskunfts- und Anfechtungsrechte,
- Anteil am Liquidationserlös bei Auflösung der Gesellschaft.

Stammaktien verbriefen die vollen Rechte eines Aktionärs. Dagegen unterliegen **Vorzugsaktien** bestimmten Sonderreglungen z. B. bezüglich des Stimmrechts und/oder des Dividendenanspruchs.

Aktien wichtiger Unternehmen werden an nationalen und internationalen Börsen gehandelt. Bei Aktiengesellschaften, bei denen ein Teil oder das gesamte Aktienkapital gehandelt wird, gibt es für eine Aktie einen Kurswert. Dieser bildet sich durch Angebot und Nachfrage am Finanzmarkt und weicht für Nennwertaktien in der Regel deutlich vom Nennwert ab. Die Kursentwicklung ist dabei grundsätzlich an die Unternehmensentwicklung gekoppelt. Sie wird jedoch - insbesondere kurzfristig - auch durch eine Vielzahl weiterer Faktoren beeinflusst.

Ein Investor kann (gehandelte) Aktien zum jeweiligen Kurswert erwerben und wieder veräußern. Ein Aktienengagement beginnt mit dem Erwerb der Aktie zu einem Zeitpunkt t_0 zu einem (bekannten) Preis $S_0 = s_0$ (Kaufpreis). Es folgen - in der Regel - Dividendenzahlungen der Höhe D_t zu den Zeitpunkten t_i ($i = 1, \ldots, n$, $t_0 < t_1 < \ldots, t_n < T$) und gegebenenfalls der Verkauf der Aktie zu einem Zeitpunkt T zum Preis S_T (Verkaufskurs). Dividendenzahlungen erfolgen typischerweise jährlich. Ihre Höhe ist insbesondere abhängig von der wirtschaftlichen Situation des Unternehmens oder den Reinvestitionsplänen (Thesaurierung) des Unternehmensgewinns. Dividendenzahlungen werden vom Vorstand der Gesellschaft vorgeschlagen und von der Hauptversammlung beschlossen. Ein Aktieninvestment besitzt grundsätzlich eine unlimitierte Laufzeit. Zudem ist der Verkaufszeitpunkt in der Regel a priori nicht bekannt, da der Verkauf (betrachtet zum Zeitpunkt des Erwerbs) zufällig - z. B. bei Kapitalbedarf des Investors oder bei Gewinnmitnahmen bei günstiger Kursentwicklung - erfolgt. Insofern kann der Verkaufszeitpunkt selbst als Zufallsvariable mit Werten in $(t_0, \infty]$ angesehen werden. In diesem Fall ist auch die Anzahl n der bis zu diesem Zeitpunkt erfolgten Dividendenzahlungen zufällig.

Formal entspricht dies aus Sicht des Aktionärs dem Zahlungsstrom $Z = (Z_t)_{t \in \{t_0, t_1, \ldots, t_n, T\}}$ mit

- $Z_{t_0} = -s_0$,
- $Z_{t_i} = D_{t_i}$, $i = 1, \dots, n$,
- $Z_T = S_T$.

Hierbei ist zu beachten, dass aus Sicht von t_0 sowohl die Höhe der Dividendenzahlungen als auch der Verkaufspreis unbekannt sind. Der Zahlungsstrom ist somit grundsätzlich stochastisch.

Neben dem direkten Erwerb von Aktien einzelner Unternehmen können Investoren in **Aktienfonds** investieren. Ein Aktienfonds ist ein Investmentfonds, bei dem die Einlagen ausschließlich oder zum überwiegenden Teil in Aktien angelegt werden. Die Konstruktion diversifizierter Portfolien (u. a. globale Streuung, verschiedene Branchen, verschiedene Unternehmen etc.) durch einen Fondsmanager kann dabei das Risiko von hohen Verlusten reduzieren.

Ein **Aktienindex** (Kursindex) ist eine Kennzahl für die Entwicklung von ausgewählten Aktienkursen eines hypothetischen Portfolios, das die Entwicklung auf diesem Teilmarkt des weltweiten Finanzgeschehens beschreiben soll. Den Ausgangspunkt für die Berechnung eines Aktienindex bildet ein bestimmter Zeitpunkt, dem ein normierter Wert zugeordnet wird. Die Änderungen der Kennzahl Aktienindex im Zeitablauf spiegelt die hierzu relative Wertentwicklung der im hypothetischen Portfolio enthaltenen Aktien wider. Aktienindizes eignen sich im Allgemeinen als ein einfaches Maß für die Performance einzelner Volkswirtschaften bzw. bestimmter Wirtschaftsbereiche. Sie sind zudem Grundlage für kostengünstige, passiv gemanagte Aktienfonds, die z. B. an der Börse als **Exchange-Traded Funds (ETFs)** gehandelt werden.

Bei einem **thesaurierenden Aktienfonds** oder einem **thesaurierenden Aktienindex** (Performance-Index) werden die potentiellen Dividenden vollständig reinvestiert. In diesem Fall ist der Zahlungsstrom beschränkt auf die Zeitpunkte t_0 und T mit $Z_{t_0} = -s_0$, $Z_T = S_T$, wobei sich die thesaurierten Gewinne im Aktienkurs widerspiegeln sollten.

1.2.2 Immobilien

Neben Aktien zählen auch Immobilien zu den Sachwerten. Immobilienanlagen sind für private und institutionelle Anleger wie Investmentfonds und Versicherungen traditionell bedeutende Anlageinstrumente. Als Bestandteil der Asset-Allokation sind Immobilienanlagen populär, insbesondere da für Immobilien eine hohe reale Wertbeständigkeit sowie eine geringe Korrelation der Wertentwicklung zu anderen Anlageklassen - und damit Diversifikationspotential in der Asset-Allokation - unterstellt wird.

Der durch den Erwerb einer Immobilie ausgelöste Zahlungsstrom lässt sich vollständig analog zum Aktienfall charakterisieren. Dem Kaufpreis der Aktien entsprechen die (Gesamt-) Kosten für den Erwerb der Immobilie, den Dividenden die Mieteinnahmen und dem Verkaufspreis der Aktie der Veräußerungserlös der Immobilie. Hierbei ist zu beachten, dass hohe Transaktionskosten (u. a. Grunderwerbsteuer, Notariatsgebühren, Maklercourtage) eine langfristige Perspektive bei Immobilienanlagen bedingen.

Neben einer **Direktanlage** in Immobilien (Wohnimmobilien, Gewerbeimmobilien) können ebenso **indirekte Immobilienanlagen** getätigt werden. Analog zum Aktienfall besteht die Möglichkeit, in **Immobilienfonds** (offene Immobilienfonds, geschlossene Immobilienfonds) sowie in Indizes, die auf Immobilien beruhen, zu investieren. Daneben kann man in **Immobilienaktiengesellschaften** investieren. Dies sind Aktiengesellschaften, deren Hauptgeschäftstätigkeit im Immobiliensektor, insbesondere im Erwerb sowie der Veräußerung von Immobilien, liegt. **REITS** (Real Estate Investment Trusts) sind US-amerikanische Immobilienaktiengesellschaften, die zusätzlichen Anforderungen genügen.

Hinsichtlich der Wertentwicklung von Immobilien ist zu unterscheiden zwischen Preisen, die auf realen Transaktionen beruhen sowie Preisen, die auf geschätzten Marktwerten (beispielsweise in Form von Bewertungsgutachten) beruhen.

1.2.3 Zinstitel

Zu den Standardinvestments von Versicherungen zählen insbesondere **Zinstitel**. Diese verbriefen eine schuldrechtliche Verpflichtung und beinhalten entsprechende Forderungsrechte (Tilgung der Schuld und terminlich fixierte Zinszahlungen) des Gläubigers. Verwandte Begrifflichkeiten sind Schuldverschreibungen, Darlehen, Rententitel, Bonds sowie Anleihen. Zinstitel haben grundsätzlich eine feste Laufzeit. Für den versprochenen Zahlungsstrom gilt allgemein:

- Der Erwerb des Zinstitels erfolgt zum Zeitpunkt t_0 zum Preis (Kaufkurs) $P(t_0)$.
- Das Nominal bzw. der Nominalbetrag N gibt die Höhe der Schuld an.
- Die Rückzahlungen werden zu den vertraglich festgelegten Zeitpunkten t_i ($i = 1, \ldots, n$, $t_0 < t_1 < \ldots < t_n = T$) geleistet. Dabei werden Zins- und Tilgungszahlungen unterschieden. Eine Tilgungszahlung reduziert die ausstehende Schuld (Restnominal).
- Am Ende der Laufzeit (**Maturität** oder **Fälligkeit**) wird die Schuld vollständig getilgt, d. h. das Restnominal gezahlt.

Hinsichtlich der Modalitäten der Zinszahlung ist zwischen **festverzinslichen Wertpapieren** (Festzinstitel), **variabel verzinslichen Wertpapieren** (Floating Rate Notes) sowie **zinsfreien Anleihen** zu differenzieren. Grundsätzlich besteht stets ein Ausfallrisiko bei Zinstiteln, das in der Modellierung berücksichtigt werden kann bzw. muss, jedoch nicht immer berücksichtigt wird.

Festzinstitel: Standardbond. Bei Festzinstiteln besitzen die Zinszahlungen während der gesamten Laufzeit eine konstante, vorab festgelegte Höhe. Hauptvertreter ist hierbei der **Standardbond** (Straight Bond) mit Nominalwert N und Laufzeit T. Dieser Vertrag ist beschrieben durch

- zukünftige Zahlungszeitpunkte $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ mit äquidistanten Abständen $\delta := t_i - t_{i-1}$,
- deterministische vorher festgelegte Kuponzahlungen $c_{t_1}, \ldots, c_{t_n}$ der Höhe $c_{t_k} = N \cdot \delta \cdot r$, wobei r den Nominalzins der Anleihe in annualisierter Form bezeichnet.

Der Halter der Anleihe erhält zum Zeitpunkt t_i die Auszahlung c_{t_i} und zusätzlich den Nennwert N zur Maturität. Der mit dem Standardbond assoziierte Zahlungsstrom ist dementsprechend aus Sicht des Halters gegeben durch:

$$Z_{t_0} = -P(t_0), Z_{t_k} = N \cdot \delta \cdot r \text{ für } k = 1, \ldots, n-1, Z_T = N \cdot \delta \cdot r + N.$$

Unter den Annahmen, dass der Bond nicht ausfällt (d. h. der Vernachlässigung des Kreditrisikos) und dass der Bond bis zur Maturität gehalten wird, ergibt sich ein deterministischer Zahlungsstrom. Für die Zinszahlungen besteht jedoch ein Wiederanlagerisiko, da zukünftige Zinsen nicht bekannt sind. Insofern ergeben sich aus der Wiederanlage stochastische Zahlungen.

Nullkuponanleihe. Bei **Nullkuponanleihen** (Zerobond) sowie **Diskontpapieren** sind im Gegensatz zum Standardbond keine laufenden Zinszahlungen während der Vertragslaufzeit vereinbart, es erfolgt nur eine endfällige Tilgung zur Maturität T. Zinsfreie Anleihen werden mit einem Abschlag (Diskont) vom Nominalwert N gehandelt (Kompensation wegfallender Zinszahlungen). Im kurzfristigen Laufzeitenbereich spricht man von Diskontpapieren; im langfristigen Laufzeitenbereich von Nullkuponanleihen bzw. Zerobonds.

Der Zahlungsstrom der Nullkuponanleihe ist aus Sicht des Halters gegeben durch

$$Z_{t_0} = -P(t_0), Z_{t_k} = 0 \text{ für } k = 1, \ldots, n-1, Z_T = N.$$

Variabel verzinsliche Anleihe. Eine variabel verzinsliche Anleihe ist ein Produkt, das analog zum Standardbond durch einen Nennwert N, eine Maturität T sowie zukünftige äquidistante Zahlungszeitpunkte $t_1 < t_2 < \ldots < t_{n-1} < t_n = T$ mit $\delta := t_i - t_{i-1}$ beschrieben ist. Die deterministischen Kuponzahlungen des Standardbonds werden jedoch ersetzt durch zufällige Kuponzahlungen

$$c_{t_k} = N \cdot \delta \cdot r_{t_{k-1}}(t_k),$$

wobei $r_{t_{k-1}}(t_k)$ den aktuellen Marktzins (Spot-Rate) für eine Anlage von t_{k-1} bis t_k in annualisierter Form bezeichnet. Dieser Zins ist erst im Zeitpunkt t_{k-1} bekannt und somit bei Vertragsabschluss für $k \geq 2$ als stochastische Größe aufzufassen. Der aus Sicht des Halters resultierende Zahlungsstrom ist gegeben durch:

$$Z_{t_0} = -P(t_0), Z_{t_k} = N \cdot \delta \cdot r_{t_{k-1}}(t_k) \text{ für } k = 1, \ldots, n-1, Z_T = N \cdot \delta \cdot r_{t_{n-1}}(t_n) + N.$$

Diese Zinstitel und weitere Zinstitel sowie deren Bewertung werden in Abschnitt 3.2 detailliert behandelt.

1.2.4 Kassa- vs. Termingeschäfte, derivative Finanzinstrumente

Bei Finanzkontrakten ist grundsätzlich zwischen **Kassageschäften** und **Termingeschäften** zu unterscheiden. Kassageschäfte sind dadurch charakterisiert, dass der Vertragsabschluss und die Geschäftserfüllung (modulo technischer Frist) zeitlich zusammenfallen, und intendieren grundsätzlich eine effektive Erfüllung, d. h. der zugrunde liegende Basistitel wird tatsächlich von der einen auf die andere Vertragspartei übertragen. Beispiele für Basistitel, die an Kassamärkten (auch Spot Markets genannt) gehandelt werden, umfassen Aktien, Zinstitel, Fondsanteile und Devisen.

Termingeschäfte beziehen sich auf Basistitel, die auf Kassamärkten gehandelt werden. Man bezeichnet daher an Terminmärkten gehandelte Kontrakte auch als **derivative Finanztitel**. Termingeschäfte sind dadurch gekennzeichnet, dass zwischen Vertragsabschluss (inklusive Festlegung der Modalitäten der Erfüllung) und Vertragserfüllung eine vertraglich vereinbarte Frist liegt. Auch Termingeschäfte können eine effektive Erfüllung vorsehen, typisch ist jedoch ein **Cash Settlement**. Hierbei wird durch Zahlung des Differenzbetrags zwischen Kassapreis und vereinbartem Referenzwert für die Abrechnung zum Erfüllungszeitpunkt ein Ausgleich zwischen den resultierenden Finanzpositionen der Vertragsparteien vorgenommen. Termingeschäfte unterteilen sich in **unbedingte Termingeschäfte** (Forward-Kontrakte, Swaps) und **bedingte Termingeschäfte** (Optionen). Im Folgenden werden die wesentlichen Merkmale von Forward-Kontrakten und Optionen zusammengestellt. Die Diskussion von (Zins-)Swaps erfolgt nachgelagert in Kapitel 3.

Forward-Kontrakt. Ein **Forward-Kontrakt** (kurz: **Forward**) schreibt für den Käufer (**Long Position**) bzw. den Verkäufer (**Short Position**) die feste Verpflichtung (unbedingtes Termingeschäft) fest, zu einem bestimmten zukünftigen Zeitpunkt (Liefertermin) unter Zugrundelegung eines vorab vereinbarten Referenzwerts (**Forward-Preis**) für die Abrechnung zum Liefertermin einen spezifischen (realen oder synthetischen) Finanztitel (Basistitel, Underlying) zu kaufen oder zu verkaufen bzw. den entsprechenden Differenzbetrag zu begleichen (Cash Settlement). Ferner wird bei Vertragsabschluss eine Sicherheitsleistung (Margin) gestellt. Typischerweise findet eine Anpassung der Sicherheitsleistung statt, wenn sich der Positionswerts verändert.

Zur Beschreibung des Zahlungsflusses eines Forward-Kontrakts wird von einem Kauf bzw. Verkauf des Forwards zum Zeitpunkt s mit Erfüllungszeitpunkt $T > s$ ausgegangen. Sicherheitsleistungen werden zur Vereinfachung vernachlässigt. Ein Zahlungsfluss findet nur zum Zeitpunkt T statt („Null-Investition“ unter Vernachlässigung der Sicherheitsleistung). Bezeichnen nun F_s den in s vertraglich festgelegten Referenzwert und S_T den Wert des Basistitels des Forwards zum Zeitpunkt T, so ergeben sich die Gewinn-/Verlustpositionen

- $S_T - F_s$ aus Perspektive des Käufers,
- $F_s - S_T$ aus Perspektive des Verkäufers.

Bei Abwicklung über ein Cash Settlement wird zwischen den beiden Vertragsparteien eine Ausgleichszahlung in dieser Höhe vorgenommen. Die Ausgleichszahlung hängt von der Kursentwicklung ab. Der Käufer profitiert von steigenden, der Verkäufer von fallenden Kursen des Basistitels.

Optionen. Eine Option ist grundsätzlich ein Vertrag, der dem Käufer (Inhaber der Option) gegen Zahlung des Optionspreises das Recht - nicht aber die Verpflichtung - gewährt, eine bestimmte Menge (Kontraktvolumen) eines spezifizierten Finanztitels (Basistitel, Underlying Security) zu einem vorab festgelegten Referenzpreis für die Abrechnung zum Liefertermin (Ausübungspreis, Basispreis, Exercise Price, Strike) nur am Ende (**Europäische Option**) oder während (**Amerikanische Option**) einer bestimmten Frist (Laufzeit, Maturität) zu kaufen (**Kaufoption, Call**) bzw. zu verkaufen (**Verkaufsoption, Put**) jeweils vom bzw. an den Kontraktpartner. Bei Optionen besitzt nur der Optionskäufer das Ausübungsrecht, der Verkäufer (Stillhalter) muss auf die Lieferung bzw. Abnahme vorbereitet sein. Hieraus resultiert ein asymmetrisches Auszahlungsprofil. Aufgrund der Optionalität spricht man von einem bedingten Termingeschäft.

Im Grundwissen werden nur Europäische Optionen betrachtet; die Bewertung Amerikanischer Optionen ist eng mit der Theorie des Optimalen Stoppens verbunden. Eine **Europäische Call-Option** auf einen Basistitel mit Preisprozess $(S_t)_{t\in\mathbb{T}}$ mit **Maturität** $T \in \mathbb{T}$ und **Strike** K ist ein Finanzvertrag, der dem Optionshalter das Recht einräumt, zum Zeitpunkt T (per Konvention) eine Einheit der Basistitels zum Ausübungspreis K zu erwerben. Dieses Recht wird von einem rationalen Akteur nur dann wahrgenommen, falls der Preis des Basistitels S_T größer als K ist; anderenfalls ist der Preis am Markt günstiger als der Strike und damit ein direkter Erwerb am Markt vorteilhaft. Als Gewinn-/Verlustposition der Call-Option im Zeitpunkt T ergibt sich

$$\max\{S_T - K, 0\} = (S_T - K)^+.$$

Bei Abwicklung via Cash Settlement erhält der Käufer der Option eine Ausgleichszahlung in dieser Höhe. Eine **Europäische Put-Option** auf den Basistitel mit **Maturität** T und **Strike** K verbrieft das Recht, zur Maturität eine Aktie zum Preis K verkaufen zu können. Dies entspricht der zufälligen Gewinn-/Verlustposition

$$\max\{K - S_T, 0\} = (K - S_T)^+.$$

Exkurs: Optionen und Garantien. Bei fondsgebundenen Lebens- und Rentenversicherungen sind die Versicherungsleistungen an die Wertentwicklung eines Fonds bzw. mehrerer Fonds gekoppelt. Da die Wertentwicklung der Fonds zufälligen Schwankungen unterliegt, werden häufig zusätzliche Garantien eingebaut. Hieraus resultieren endfällige Garantiepositionen der Form

$$\mathrm{VL}_T = \max\{V_T, G_T\},$$

wobei V_T den Wert eines Fonds/Index in T und G_T die Mindestgarantie in T bezeichnen. Alternative Darstellungen sind

$$\begin{aligned} \mathrm{VL}_T &= V_T + (G_T - V_T)^+ && (1.2) \\ &= G_T + (V_T - G_T)^+. && (1.3) \end{aligned}$$

Hierbei ist (1.2) eine Zerlegung in den Gesamtwert der Anteile V_T und eine Put-Option auf den Basisprozess $(V_t)_{t\geq 0}$ mit Laufzeit T und Ausübungspreis G_T, (1.3) liefert eine Zerlegung in die Höhe der garantierten Leistung und eine Call-Option auf den Basisprozess $(V_t)_{t\geq 0}$ mit Laufzeit T und Ausübungspreis G_T. Dies erlaubt, Resultate aus der Optionspreistheorie auf die Bewertung von Garantien zu übertragen.

Lernergebnisse (B3)
Die Studierenden kennen die Bedeutung und Funktionsweise von Aktien, Immobilien- und Zinsmärkten und können Real- und Nominalwerte gegeneinander abgrenzen. Sie kennen die formale Darstellung von Aktien- und Immobilieninvestments sowie von einfachen Zinstiteln mithilfe stochastischer Prozesse. Sie sind in der Lage, diese Darstellung auf weitere Finanztitel mutatis mutandis zu übertragen.
Die Studierenden können Kassa- und Termingeschäfte gegeneinander abgrenzen. Sie kennen Forward-Kontrakte sowie Call- und Put-Optionen als Beispiele für Termingeschäfte und können die entsprechenden Auszahlungen formal angeben.

1.3 Charakterisierung von Versicherungsverträgen

Kerninhalte

- Darstellung klassischer Versicherungsprodukte und Zahlungsströme der Schaden- und Personenversicherung mittels stochastischer Prozesse

Bisher wurden Zahlungsströme von Aktien, Immobilieninvestments und Zinstiteln betrachtet. Diese gehören zur Klasse der Finanztitel. Nun sollen dem Muster folgend typische **Versicherungsverträge** der Schaden- und Personenversicherung charakterisiert werden.

1.3.1 Schadenversicherung

Betrachtet wird zunächst ein Einperiodenmodell mit Zahlungszeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$, eingeschränkt auf das engere versicherungstechnische Risiko. Im Rahmen eines einzelnen Versicherungsvertrags zahlt der Versicherungsnehmer zu $t = 0$ eine Risikoprämie π an das Versicherungsunternehmen für die Übernahme des versicherten Risikos. Er erhält dafür zu $t = 1$ eine Versicherungsleistung $L \geq 0$. Für den Zahlungsstrom gilt aus Sicht des Versicherungsnehmers

$$Z = (Z_0, Z_1) = (-\pi, L).$$

Die Risikoprämie π wird mit aktuariellen Methoden im Rahmen der Prämienkalkulation ermittelt und entspricht dem kalkulatorischen Deckungsbeitrag für die Versicherungsleistung. Eine Versicherungsleistung erfolgt nur dann, wenn in der Periode ein Versicherungsfall oder gar mehrere Versicherungsfälle eintreten. Da das Eintreten, die Anzahl und die Höhe der eingetretenen Schäden zufällig sind, ist die Versicherungsleistung L eine Zufallsvariable. Die Versicherungsleistung L entspricht im Fall einer Illimité-Deckung (und sofern kein Selbstbehalt des Versicherungsnehmers vereinbart wurde) dem zufälligen Originalschaden S des Versicherungsnehmers. Im Folgenden wird stets vereinfachend $L = S$ angenommen.

Relevant für ein Versicherungsunternehmen ist die Betrachtung eines (Teil-)Kollektivs von Versicherungsverträgen (Anzahl: n), also der Gesamtheit aller eingenommen Risikoprämien $\pi = \sum_{i=1}^{n} \pi_i$ im Vergleich zur Gesamtheit aller aggregierten Versicherungsleistungen $S = \sum_{i=1}^{n} S_i$. Hierbei kann der Gesamtschaden S alternativ auch über das **kollektive Modell der Risikotheorie** beschrieben werden, d. h.

$$S = \sum_{k=1}^{N} X_k \tag{1.4}$$

für die zufällige (kollektive) Anzahl von Schäden N in der Periode und die zufälligen Schadenhöhen X_k des k-ten Schadenfalls, $k = 1, \ldots, N$, im Kollektiv. Die Größe $\pi - S$ nennt man dann den periodischen versicherungstechnischen Erfolg.

In der Gesamtschau sind für die Darstellung des Zahlungsstroms, der durch das Versicherungskollektiv induziert wird, neben den versicherungstechnischen Größen weitere Komponenten zu berücksichtigen:

- die aggregierte Gesamtprämie $B = \sum_{i=1}^{n} B_i$, wobei B_i die Bruttoprämie für den i-ten Vertrag bezeichnet und neben der Risikoprämie π für die Versicherungsleistung insbesondere einen Deckungsbeitrag für die Betriebskosten sowie einen Gewinnzuschlag enthält,
- die aggregierten Betriebskosten des Kollektivs K,
- die aggregierten, vom Kollektiv induzierten Kapitalanlageerträge IE.

Die Zahlungen B und K werden in der Regel als deterministisch betrachtet und dem Zeitpunkt $t = 0$ zugeordnet. Die Schadenzahlungen S und der Kapitalanlageertrag sind dagegen stochastisch und entsprechen Zahlungen zu $t = 1$. Für den Zahlungsstrom gilt aus Sicht des Versicherungsunternehmens

$$Z = (Z_0, Z_1) = (B - K, \mathrm{IE} - S).$$

Der Periodengesamterfolg G ist (ohne Diskontierung) gegeben durch

$$G = B - S - K + \mathrm{IE}.$$

In der Praxis ist häufig eine Mehrperiodenanalyse geboten. Diese kann z. B. unter folgenden zwei Aspekten erfolgen:

- Erstens können mehrperiodig bestehende Versicherungsverträge betrachtet bzw. eine Mehrperiodenanalyse eines Versicherungskollektivs vorgenommen werden. Hierfür sind lediglich die Zahlungsströme der vorstehend diskutierten Einperiodenmodelle hintereinander zu schalten bzw. zu dynamisieren.

  Eine Möglichkeit zur zeitstetigen Modellierung der Schäden bietet beispielsweise das Grundmodell der **Ruintheorie**, das **Cramér-Lundberg-Modell**. Hierbei ist der bis zum Zeitpunkt $t \geq 0$ kumulierte Schaden - in Analogie zum Ansatz des kollektiven Modells (1.4) im statischen Kontext - gegeben durch

  $$S_t := \sum_{k=1}^{N_t} X_k, \quad t \geq 0,$$

  wobei N_t die zufällige Schadenanzahl bis zum Zeitpunkt t bezeichnet und X_k, $k \in \mathbb{N}$, die zufällige Höhe des k-ten Schadens beschreibt. Die Schadenhöhen $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind dabei unabhängig und identisch verteilt sowie unabhängig vom **Schadenanzahlprozess** $(N_t)_{t\geq 0}$. Der Schadenanzahlprozess wird durch einen (zeitlich homogenen) **Poisson-Prozess** modelliert. Für gegebenes Startkapital $u > 0$ und die bis t kumulierte kollektive Risikoprämie π_t heißt der stochastische Prozess

  $$K_t^u := u + \pi_t - S_t \quad t \geq 0,$$

  Risikoreserveprozess.

- Zweitens sind einjährige Vertragsverhältnisse unter dem Aspekt der Schadenregulierung zu analysieren. Bei der Schadenabwicklung entsteht in der Regel ein Zeitverzug zwischen dem Eintritt eines versicherten Schadens und seiner endgültigen Regulierung durch den Versicherer: Der Schaden muss zunächst durch den Versicherungsnehmer gemeldet und anschließend die Forderung durch den Versicherer geprüft werden. Die Abwicklungsperioden sind oft kurz. Bei manchen Versicherungsfällen kann sich die Regulierung aber auch über mehrere Jahre erstrecken oder es können Schäden erst später identifiziert und gemeldet werden, z. B. bei Haftpflichtversicherungen. Im Endeffekt können häufig nicht alle Schäden, die während eines Geschäftsjahres eintreten, in diesem Jahr auch abschließend reguliert werden. In diesem Kontext spricht man von Spätschäden. Dieser Sachverhalt kann durch die Modellierung

  $$S = S_0 + S_1 + \ldots + S_k$$

  berücksichtigt werden, wobei S_i den Regulierungsbeitrag in der i-ten Folgeperiode ($i = 0, 1, \ldots, k$) bezeichnet und k die Dauer der Schadenregulierung ist.

1.3.2 Personenversicherung

In der Personenversicherung (Lebens-, Pensions- und Krankenversicherung) besitzen Versicherungsverträge in der Regel eine sehr lange Laufzeit, sodass grundsätzlich eine Mehrperiodenperiodenanalyse durchzuführen ist. Versicherungsleistungen der Personenversicherung werden fällig, wenn sich der „Zustand“ einer Person ändert. Beispiele sind in der Lebensversicherung der Übergang von „lebend“ zu „tot“ oder der Übergang von „aktiv“ zu „invalide“ in der Pensionsversicherung.

Als wahrscheinlichkeitstheoretisches Modell für die zeitliche Entwicklung des Zustands einer versicherten Person, aus dem sich nachgelagert ein stochastisches Modell für den Zahlungsstrom von Versicherungsverträgen ableitet, bietet sich das Konzept einer **Markov’schen Kette** an.

Im Folgenden wird die Diskussion auf die Lebensversicherung beschränkt und der Lebenszustand einer Person nur diskret (jeweils am Periodenbeginn) erfasst. Dies erfolgt modelltechnisch für Alter $x = 1, 2, \ldots$ durch die Zufallsvariablen

$$S_x = \begin{cases} L, & \text{falls die Person zum Zeitpunkt } x \text{ lebt (sie erreicht das Alter } x\text{),} \\ T, & \text{falls die Person zum Zeitpunkt } x \text{ nicht mehr lebt.} \end{cases}$$

Als Startzustand wird $S_0 = L$ angenommen. Der stochastische Prozess $(S_x)_{x=0,1,\ldots}$ heißt **Lebensprozess** einer Person. Formal ist darauf hinzuweisen, dass (trotz Unisex-Tarifen) per Konvention x das Alter einer männlichen versicherten Person kennzeichnet, während für weibliche Versicherte y gebräuchlich ist. Im Folgenden wird zur Vereinfachung stets das Symbol x synonym für männliche und weibliche versicherte Personen verwendet.

Der Lebensprozess wird als Markov’sche Kette mit zwei Zuständen L (lebend) und T (tod) modelliert. Hierbei ist der Zustand T absorbierend und die Wahrscheinlichkeit, ein weiteres Jahr zu überleben bzw. nicht zu überleben, hängt nur vom gegenwärtigen Alter ab. Das Bewegungsgesetz einer Markov-Kette ist eindeutig bestimmt durch den Startzustand (hier: $S_0 = L$) sowie die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten. Diese sind gegeben durch die einjährige **Sterbewahrscheinlichkeit** einer x-jährigen Person

$$q_x := P[S_{x+1} = T \,|\, S_x = L]$$

sowie durch die einjährige **Überlebenswahrscheinlichkeit**

$$p_x := P[S_{x+1} = L \,|\, S_x = L].$$

Der Lebensprozess ist eine zeitlich inhomogene Markov’sche Kette, da sich die einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten im Zeitablauf, d. h. hier mit dem Alter der Person, ändern.

Weitere zentrale Wahrscheinlichkeiten der Lebensversicherungsmathematik sind:

- die n-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit ${}_np_x := P[S_{x+n} = L \,|\, S_x = L]$,
- die n-jährige Sterbewahrscheinlichkeit ${}_nq_x = P[S_{x+n} = T \,|\, S_x = L]$,
- die um n Jahre aufgeschobene einjährige Sterbewahrscheinlichkeit

$${}_{n|}q_x = {}_{n|1}\, q_x = P[S_{x+n+1} = T, S_{x+n} = L \,|\, S_x = L].$$

Hierbei können die n-jährigen Wahrscheinlichkeiten aus den einjährigen Wahrscheinlichkeiten berechnet werden:

$${}_np_x = p_x \cdot p_{x+1} \cdot \ldots \cdot p_{x+n-1} = (1 - q_x) \cdot (1 - q_{x+1}) \cdot \ldots \cdot (1 - q_{x+n-1}).$$

Alle Wahrscheinlichkeiten ergeben sich aus den einjährigen Sterbewahrscheinlichkeiten $(q_x)_{x=0,1,\ldots}$, die statistisch ermittelt und in Sterbetafeln, z. B. der Deutschen Aktuarvereinigung, zusammengefasst werden.

Mit diesen Vorbereitungen können die stochastischen Zahlungsströme von Lebensversicherungverträgen beschrieben werden. Dies erfolgt hier separat für den **Prämienstrom**, d. h. die Zahlungen des Versicherungsnehmers an das Versicherungsunternehmen, und den **Leistungsstrom**, d. h. die Zahlungen des Versicherungsunternehmens. Unter Beachtung der Vorzeichen (Einzahlungen vs. Auszahlungen) ergeben sich hieraus leicht die über Prämien und Leistungen saldierten Zahlungsströme aus Sicht des Versicherungsnehmers bzw. Versicherungsunternehmens.

Prämienstrom. Eine bei Vertragsbeginn x-jährige versicherte Person schließt einen Versicherungsvertrag mit Laufzeit von n Jahren ab, bei dem vorschüssig (normierte) Prämienzahlungen der Höhe 1 zu leisten sind, solange die x-jährige Person lebt. Der zugehörige Zahlungsstrom ist (aus Sicht des Versicherungsunternehmens) gegeben durch

- $Z_0 = 1$ mit Wahrscheinlichkeit 1,
- $Z_t = 1 \Leftrightarrow S_{x+t} = L$ $(t = 1, \ldots, n-1)$,
- $Z_n = 0$ (aufgrund der vorschüssigen Zahlungsweise).

Hierbei gilt für $t = 0, 1, \ldots, n-1$:

$$P[Z_t = 1] = P[S_{x+t} = L | S_x = L] = {}_t p_x.$$

Der so beschriebene Prämienzahlungsstrom ist grundsätzlich stochastisch, da die Prämienzahlungen von der zufälligen Lebensdauer abhängen.

Im Fall einer Einmalprämie, d. h., nur bei Beginn des Versicherungsvertrags erfolgt eine (normierte) Prämienzahlung, gilt $Z_0 = 1$ und $Z_t = 0$ für $t = 1, \ldots, n-1$.

Leistungsstrom.

Risikolebensversicherung

Eine n-jährige Risikolebensversicherung für eine bei Versicherungsbeginn x-jährige versicherte Person (Startzustand: $S_x = L$) zahlt nachschüssig eine (normierte) Leistung der Höhe 1, wenn der Tod der versicherten Person im Alter $(x+t-1, x+1]$, $t = 1, \ldots, n$, eintritt. Dies entspricht formal (aus Sicht des Versicherungsnehmers) dem stochastischen Zahlungsstrom $Z = (Z_t)_{t=0,1,\ldots,n}$ mit

- $Z_0 = 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1,
- $Z_t = 1 \Leftrightarrow S_{x+t-1} = L$, $S_{x+t} = T$ $(t = 1, \ldots, n)$.

Entsprechend gilt

$$P[Z_t = 1] = P[S_{x+t} = T, S_{x+t-1} = L | S_x = L] = {}_{t-1|}q_x. \tag{1.5}$$

Die Darstellung des Zahlungsstroms einer lebenslänglichen Todesfallversicherung als stochastischer Prozess ergibt sich analog. Es sind nur $n = \infty$ (Ansatz ohne Höchstlebensalter w) bzw. $n = w - x + 1$ (Ansatz mit Höchstlebensalter) zu setzen.

Kapitallebensversicherung

Eine n-jährige Kapitallebensversicherung für eine bei Versicherungsbeginn x-jährige versicherte Person (Startzustand: $S_x = L$) kombiniert eine n-jährige Risikolebensversicherung mit einer n-jährigen Erlebensfallversicherung. Sie zahlt entsprechend nachschüssig eine (normierte) Leistung der Höhe 1 aus, wenn der Tod der versicherten Person im Alter $(x+t-1, x+t]$, $t = 1, \ldots, n$, eintritt, und liefert zudem bei Erleben des Alters $x+n$ eine Auszahlung der Höhe 1. Dies entspricht formal dem stochastischen Zahlungsstrom $Z = (Z_t)_{t=0,1,\ldots,n}$ mit

- $Z_0 = 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1,

- $Z_t = 1 \Leftrightarrow S_{x+t-1} = L$, $S_{x+t} = T$ $(t = 1, \ldots, n-1)$ (analog Risikolebensversicherung),
- $Z_n = 1 \Leftrightarrow S_{x+n-1} = L$, $S_{x+n} = T$ oder $S_{x+t-1} = L$, $S_{x+t} = L$.

Ergänzend zu (1.5) gilt

$$P[Z_n = 1] = P[S_{x+n} = T, S_{x+n-1} = L | S_x = L] + P[S_{x+n} = L | S_x = L] = {}_{n-1|}q_x + {}_n p_x.$$

Leibrentenversicherung

Eine um m Jahre aufgeschobene, temporäre Rentenversicherung mit Dauer von n Jahren für eine bei Versicherungsbeginn x-jährige versicherte Person (Startzustand: $S_x = L$) generiert ab Erreichen des Alters $x + m$ vorschüssige Rentenzahlungen der Höhe 1 bei Erleben des Zahlungszeitpunkts für die Dauer von n Jahren. Der hieraus resultierende stochastische Zahlungsstrom $Z = (Z_t)_{t=0,1,\ldots,m,\ldots,m+n}$ ist gegeben durch

- $Z_0 = Z_1 = \ldots = Z_{m-1} = 0$ (mit Wahrscheinlichkeit 1),
- $Z_t = 1 \Leftrightarrow S_{x+t} = L$ $(t = m, \ldots, m+n-1)$,
- $Z_{m+n} = 0$ (aufgrund vorschüssiger Zahlweise).

Es folgt für $t = m, \ldots, m+n-1$

$$P[Z_t = 1] = P[S_{x+t} = L | S_x = L] = {}_t p_x.$$

Für eine lebenslängliche Rentenzahlung (Leibrente) muss zur Anpassung der Formeln das kalkulatorische Höchstalter w verwendet werden, d. h. es muss gelten $m + n = w + 1 - x$.

Lernergebnisse (B3)
Die Studierenden kennen die formale Darstellung einfacher, klassischer Versicherungsprodukte und Zahlungsströme der Schaden- und Personenversicherung mithilfe stochastischer Prozesse. Sie sind in der Lage, diese Darstellung auf weitere Produkte zu übertragen.

2 Grundkonzepte zur Bewertung

2.1 Bewertung von Zahlungsströmen

Kerninhalte

- Grundlegende Bewertungskonzepte: Individualbewertung, Bewertung durch Marktgleichgewichte (CAPM), No-Arbitrage-Ansätze
- Abgrenzung: klassische versicherungsmathematische Bewertung versus finanzmathematische Bewertung von Zahlungsströmen

2.1.1 Bewertung finanzieller Zahlungsströme - Grundkonzepte im Überblick[2]

Bei der Bewertung finanzieller Zahlungsströme ist grundsätzlich (in aufsteigender Komplexität) zwischen folgenden Situationen zu unterscheiden:

1. **Bewertung unter Sicherheit**,
2. **Bewertung unter Risiko**,
3. **Bewertung unter Unsicherheit**.

Im ersten Fall liegen deterministische Zahlungsströme vor und die Bewertung ist standardmäßig auf die Berechnung des Barwerts des Zahlungsstroms zurückzuführen (siehe Kapitel 3). Bei Zahlungsströmen, die dem Zufall unterworfen sind, sind die Methoden komplexer. Ist die Verteilung eines Zahlungsstroms (bezüglich eines vorab spezifizierten Wahrscheinlichkeitsmaßes) bekannt bzw. wird als bekannt vorausgesetzt, so spricht man im Sinn von Knight von „Risiko“, anderenfalls von „Unsicherheit“ (siehe Abschnitt 4.1). Im Folgenden liegt der Fokus auf der Bewertung unter Risiko. Konzeptionell lassen dabei Ansätze einer **Individualbewertung** (Bernoulli-Prinzip, Risiko/Wert-Modelle) und Ansätze einer **Marktbewertung** (Gleichgewichtsmodelle, No Arbitrage-Ansätze) unterscheiden.

Individualbewertung. Bei der Individualbewertung erfolgt die Bewertung einer zufälligen Auszahlung aus Sicht eines individuellen Entscheidungsträgers bzw. Investors. Ausschlaggebend sind hierbei die **individuellen Präferenzen** des Investors. Mathematisch entspricht eine Auszahlung zu einer terminalen Zeit einer reell-wertigen Zufallsvariable X auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$, und dem Investor steht eine Menge $\mathcal{X}$ solcher Finanzpositionen zur Auswahl. Im Kontext der Bewertung unter Risiko wird im Folgenden ein Referenzmaß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ betrachtet.

Definition 2.1 (Präferenzordnung)**.** *Eine vollständige, schwache* ***Präferenzordnung*** *auf $\mathcal{X}$ ist eine binäre Relation $\succeq$ mit den folgenden beiden Eigenschaften:*

- ***Vollständigkeit****: Für alle $X, Y \in \mathcal{X}$ gilt entweder $Y \succeq X$ oder $X \succeq Y$ oder beides trifft zu.*
- ***Transitivität****: Aus $X \succeq Y$ und $Y \succeq Z$ folgt $X \succeq Z$.*

Die Relation $X \succeq Y$ bedeutet, dass der Investor die Auszahlung X gegenüber Y bevorzugt oder als indifferent zu Y ansieht. Jede vollständige und transitive schwache Präferenzordnung $\succeq$ auf $\mathcal{X}$ induziert eine **starke Präferenzordnung** $\succ$ durch die Negation von $\succeq$:

$$Y \succ X \quad \Leftrightarrow \quad X \not\succeq Y.$$

[2] Die folgenden Ausführungen orientieren sich partiell an Albrecht, P.; Maurer, R.: *Investment und Risikomanagement - Modelle, Methoden, Anwendungen*. Schäffer-Poeschel-Verlag, 4. Auflage, 2016, Abschnitte 5.2-5.3.

Für eine Präferenzordnung wird typischerweise **Monotonie** unterstellt, d. h. man geht davon aus, dass höhere Auszahlungen bevorzugt werden. Eine Präferenzordnung eines Investors heißt **risikoavers**, wenn der Investor für jede nicht-konstante Finanzposition $X \in \mathcal{X}$ die sichere Auszahlung in Höhe des Erwartungswert $\mathrm{E}_P[X]$ gegenüber der unsicheren Auszahlung X bevorzugt.

Präferenzordnungen können als normativer Rahmen für Entscheidungen oder deskriptiv, d. h. als Beschreibung von realem Entscheidungsverhalten interpretiert werden. Im Gegensatz zur Monotonie ist Risikoaversion aus deskriptiver Perspektive keine natürliche Eigenschaft. Empirische Studien zeigen, dass Investoren kontextgebunden zwischen risikoaversem und risikofreudigem Verhalten wechseln. Insbesondere können Investoren nach vorangegangenen Gewinnen risikoavers sein und risikofreudig werden, sobald sie eine Möglichkeit sehen, vorausgegangene Verluste zu kompensieren. Eine Beschreibung eines derartigen Verhaltens ist Gegenstand der **Prospect Theory**.[3]

Unter milden Voraussetzungen existiert eine **numerische Darstellung** einer Präferenzordnung $\succ$ mithilfe eines **Präferenzfunktionals** $\mathcal{U} : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$, d. h. für $X, Y \in \mathcal{X}$ gilt

$$X \succ Y \quad \Longleftrightarrow \quad \mathcal{U}(X) > \mathcal{U}(Y).$$

Dies ist äquivalent zu $X \succeq Y$ genau dann, wenn $\mathcal{U}(X) \geq \mathcal{U}(Y)$. Die numerische Darstellung $\mathcal{U}$ ist nicht eindeutig: Ist f eine streng monoton wachsende Funktion, so ist $\widetilde{\mathcal{U}}(X) := f(\mathcal{U}(X))$ ebenfalls eine numerische Darstellung von $\succ$.

Bemerkung 2.2 ((μ, σ)-Prinzip)**.** *Besitzt das Präferenzfunktional eine Darstellung der Form*

$$\mathcal{U}(X) = H(\mathrm{E}[X], \sigma(X))$$

mithilfe des Erwartungswerts $\mu(x) = \mathrm{E}[X]$ *und der Standardabweichung* $\sigma(X)$ *sowie einer Funktion H, die typischerweise in der ersten Komponente monoton steigend und in der zweiten monoton fallend ist, so spricht man von einem* (μ, σ)*-Prinzip. Wird die Funktion H konkret festgelegt, beispielsweise durch*

$$H(x, y) = x - ay^2 \quad \text{mit } a > 0,$$

so wird teilweise auch von der (μ, σ)*-Regel gesprochen.*

Bernoulli-Prinzip

Im Allgemeinen untersucht man Bedingungen (Axiome rationalen Verhaltens), unter denen die Präferenzordnung eine numerische Darstellung der Form

$$\mathcal{U}(X) = \mathrm{E}_P[u(X)] \tag{2.6}$$

besitzt. Die Funktion u wird als (Risiko-)**Nutzenfunktion** bezeichnet. Die Nutzenfunktion ist nur bis auf eine positive lineare Transformation eindeutig bestimmt. Damit existieren zwei Freiheitsgrade für ihre eindeutige Festlegung. Eine Standardwahl ist dabei $u(0) = 0$ und $u'(0) = 0$. Die Präferenzordnung eines Investors wird als monoton bezeichnet, wenn er für sichere Auszahlungen x und y mit $x > y$ stets x bevorzugt. Im Falle der numerischen Darstellung (2.6) ist dies offensichtlich äquivalent dazu, dass für $x > y$ stets $u(x) > u(y)$ gilt, d. h. die Nutzenfunktion streng monoton wachsend ist. Risikoaversion des Investors im Sinne, dass er für jede nicht-konstante Finanzposition $X \in \mathcal{X}$ die sichere Auszahlung in Höhe des Erwartungswert $\mathrm{E}_P[X]$ gegenüber der unsicheren Auszahlung X bevorzugt, bedeutet hier $\mathrm{E}_P[u(X)] < u(\mathrm{E}_P[X])$ für alle $X \in \mathcal{X}$. Dies ist jedoch (Jensen'sche Ungleichung) äquivalent zur strengen Konkavität von u. Im Grundwissen werden standardmäßig streng mononoton wachsende und streng konkave Nutzenfunktionen betrachtet.

Die Darstellung (2.6) heißt **von Neumann-Morgenstern-Darstellung**. Die damit verbundene Entscheidungstheorie wird als **Erwartungsnutzentheorie** oder als **Bernoulli-Prinzip** bezeichnet. Die Portfoliooptimierung durch Nutzenmaximierung ist Gegenstand von Abschnitt 5.1.

[3]Siehe: Kahneman, D.; Tversky, A.: *Advances in Prospect Theory: Kumulative Representation of Uncertainty*. J. Risk Uncertainty, 5, 1992.

Das Bernoulli-Prinzip ist in der Entscheidungstheorie unter Risiko ein weitverbreitetes Paradigma. Ausgangspunkt des Bernoulli-Prinzips ist das Paradoxon beim sogenannten **St.-Petersburg-Spiel** (publiziert von Daniel Bernoulli (1738)), bei dem der Erwartungswert des Gewinns unendlich ist. Allerdings waren Teilnehmer des Spiels nicht bereit einen „unendlich" hohen Preis für die Teilnahme an diesem Spiel zu bezahlen. Dies falsifizierte empirisch die Hypothese, dass der faire Preis eines Spiels dem erwarteten Gewinn entsprechen sollte. Bernoulli schlug daher vor, den Erwartungswert bezüglich des mit einer Nutzenfunktion (konkret: $u(x) = \ln(x)$) gewichteten Gewinns für die Bewertung zu betrachten und als Preis das sogenannte Sicherheitsäquivalent zu verwenden.

Das **Sicherheitsäquivalent** einer Finanzposition X ist dabei derjenige deterministische Wert $s(X)$, der als nutzenäquivalent angesehen wird:

$$u(s(X)) = \mathrm{E}_P[u(X)].$$

Für eine monoton steigende Nutzenfunktion ist das Sicherheitsäquivalent gegeben durch

$$s(X) = u^{-1}(\mathrm{E}_P[u(X)]).$$

Risikoaversion ist für eine streng monoton steigende Nutzenfunktion damit äquivalent zu $s(X) < \mathrm{E}_P[X]$.

Eine axiomatische Charakterisierung von Präferenzordnungen (auf Lotterien), die kompatibel zu einer numerischen Darstellung der Form (2.6) sind, geht auf von Neumann und Morgenstern[4] zurück und bildet die Grundlage der modernen Erwartungsnutzentheorie.

Risiko/Wert-Modelle

Bei Risiko/Wert-Modellen erfolgt die Bewertung einer Zufallsvariable, die eine Finanzposition beschreibt, in einem zweistufigen Verfahren:

1. Wert $V(X)$ und Risiko $\rho(X)$ von X werden durch den Entscheidungsträger isoliert quantifiziert.
2. Die isolierte Wert- und Risikoeinschätzung wird zu einer Gesamtpräferenz zusammengeführt.

Formal entspricht dies einer Präferenz mit numerischer Darstellung

$$\mathcal{U}(X) = H(V(X), \rho(X)).$$

Hierbei werden $\rho(X)$ als **Risikomaß** und $V(X)$ als **Wertmaß** bezeichnet. Die Funktion H heißt Trade-off-Funktion und gewichtet bei der Gesamtpräferenz zwischen Wertmaß und Risikomaß. Im Standardfall ist H monoton wachsend in der ersten Komponente und monoton fallend in der zweiten Komponente. Ferner wird häufig standardmäßig der Erwartungswert als Wertmaß verwendet.

Die Trade-off-Funktion H bleibt dabei entweder unspezifiziert (im Rahmen von Effizienzanalysen) oder wird konkret festgelegt.

- Bleibt die Trade off-Funktion H unspezifiziert, so führt dies zu einer partiellen Ordnung. Es dominiert (im Standardfall) eine Finanzposition X die Finanzposition Y (strikt), wenn $V(X) > V(Y)$ und $\rho(X) \leq \rho(Y)$ oder, wenn $\rho(X) < \rho(Y)$ und $V(X) \geq V(Y)$ gelten. Dies wird auch als **Rendite/Risiko-Dominanz** bezeichnet. Die von keinen anderen Finanzpositionen in $\mathcal{X}$ dominierten Finanzpositionen werden als **effizient** bezeichnet. Für $\rho(X) = \mathrm{Var}(X)$ und $V(X) = \mathrm{E}_P[X]$ ergibt sich - auch abgeleitet aus dem (μ, σ)-Prinzip - die **Erwartungswert-Varianz-Effizienz**. Die Konzeption der Erwartungswert-Varianz-Effizienz wird im Kontext der Portfoliotheorie von Markowitz verwendet, um effiziente Portfolios und den sogenannten effizienten Rand zu definieren (siehe Abschnitt 5.2).

[4] Siehe: von Neumann, J.; Morgenstern, O.: *Theory of games and economic behavior*. Princeton, New Jersey: Princeton University Press. XVIII, 1944.

- Die explizite Festlegung $H(x, y) = x - \alpha y$, $\alpha > 0$, führt beispielsweise auf das Risiko/Wert-Prinzip
$$\mathcal{U}(X) = \mathrm{E}[X] - \alpha\rho(X), \tag{2.7}$$
das insbesondere risikoaverses Verhalten beschreibt. Im Spezialfall ergibt sich das (μ, σ)-Prinzip.

Ein Hauptvertreter sogenannter nicht-kompensatorischer Varianten von Risiko/Wert-Modellen ist das Prinzip
$$V(X) \to \max! \quad \text{unter der Nebenbedingung } \rho(X) \leq c.$$
Hierbei findet unter der Nebenbedingung einer beschränkten Höhe des Risikos eine Maximierung des Wertes statt.

Marktbewertung. Wird ein Finanztitel an einem Kapitalmarkt gehandelt, so spiegelt der Marktpreis des Titels seine Bewertung durch die Akteure an diesem Markt wider. Eine (echte) Marktbewertung setzt somit voraus, dass der zu bewertende Titel an einem Markt gehandelt wird und Preise festgestellt werden können (**„mark-to-market"**). Eine Erweiterung dieses Ansatzes, die **marktkonsistente Bewertung**, setzt ein Preismodell voraus, dessen Parameter marktkonsistent kalibriert werden können (**„mark-to-model"**).

Versicherungsprodukte werden nicht standardmäßig an einem Markt gehandelt (Ausnahme etwa Katastrophenbonds) und sind einer (echten) Marktbewertung somit nicht zugänglich. Traditionellerweise findet die Preisfestsetzung für Versicherungsprodukte daher im Rahmen einer Individualbewertung statt. Im Rahmen moderner Produkte (etwa: aktienindexgebundene Lebensversicherung mit Zinsgarantie) sowie „neuerer" Entwicklungen (Solvency II, IFRS 4) hat jedoch eine marktkonsistente Bewertung an Relevanz gewonnen.

Ziel einer Marktbewertung auf der Modellebene ist die Ermittlung von Gleichgewichtspreisen unter Risiko. Zu spezifizieren sind unter anderem die am betrachteten Markt gehandelten Titel, die Präferenzen der am Markt handelnden Akteure sowie die zulässigen Handelsstrategien (und allgemein auch die zulässigen Konsumpläne).

<u>Marktgleichgewichte</u>

Das **Capital Asset Pricing Model (CAPM)** ist das fundamentale Marktgleichgewichtsmodell der Kapitalmarkttheorie. Entwickelt wurde es bereits in den 1960er Jahren von Jack Treynor, William Sharpe, John Lintner und Jan Mossin in unabhängigen Arbeiten. Gegenstand und Kernziel des CAPM ist die Herleitung von **Gleichgewichtspreisen** von Finanztiteln unter Risiko (beispielsweise Aktien), d. h. (bezogen auf ein Einperiodenmodell mit Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$) die Ermittlung von Marktpreisen in $t = 0$ in Abhängigkeit der zufälligen Marktwerte/Returns zu $t = 1$. Wesentlich für die Herleitung eines Gleichgewichtspreises ist die Annahme der **Markträumung**, d. h. das Gesamtangebot und die Gesamtnachfrage nach den Finanztiteln sind ausgeglichen.

Die wesentlichen Modellvoraussetzungen und Annahmen lauten wie folgt:

- Das CAPM ist ein Einperiodenmodell mit Zeitpunkten $t = 0$ und $t = 1$.
- Das Marktmodell besteht aus n riskanten Finanztiteln mit Periodenrenditen R_i sowie einer risikolosen Anlage mit Zins r_0.
- Im Markt gibt es m Investoren.
  - Alle Investoren folgen einem (μ, σ)-Prinzip und handeln nach dem Konzept der Erwartungswert-Varianz-Effizienz.
  - Die Investoren treffen damit ihre Anlageentscheidungen nur auf Basis der Größen $\mathrm{E}[R_i]$, $\mathrm{Var}(R_i)$ und $\mathrm{Cov}(R_i, R_j)$. Bezüglich dieser Größen haben alle Investoren die gleiche Erwartung.

- Am Periodenbeginn (in $t = 0$) bilden sich für alle Finanztitel Gleichgewichtspreise, bei denen Angebot und Nachfrage übereinstimmen (Markträumung).

Im Modellrahmen des CAPM ergeben sich folgende Schlussfolgerungen:

- Für jedes Portfolio aus betrachteten Finanztiteln (insbesondere auch für Einzelaktien) gilt im Marktgleichgewicht für dessen erwartete Periodenrendite R

$$\mathrm{E}[R] - r_0 = \beta_R(\mathrm{E}[R_M] - r_0),$$

  wobei $\beta_R = \mathrm{Cov}(R, R_M)/\mathrm{Var}(R_M)$ den **Beta-Faktor** bezeichnet und R_M die Rendite des Marktportfolios (siehe Definition 5.9), das alle riskanten Finanztitel des Marktes enthält, darstellt. Mit anderen Worten: Die Risikoprämie jedes Portfolios, definiert als die über den sicheren Zins hinausgehende erwartete Rendite, ergibt sich als Risikoprämie des Marktportfolios skaliert mit dem portfoliospezifischen Beta-Faktor.

- Bezeichnet V den zufälligen Periodenendwert eines Portfolios aus betrachteten Finanztiteln, so gilt für den markträumenden Gleichgewichtspreis dieses Portfolios zum Periodenbeginn:

$$P = \frac{\mathrm{E}[V]}{1 + \mathrm{E}[R]} = \frac{\mathrm{E}[V]}{1 + r_0 + \beta_R(\mathrm{E}[R_M] - r_0)}.$$

  Dies bedeutet, dass die Bewertung mithilfe eines risikoadjustierten Diskontierungszinses $r_0 + \beta_R(\mathrm{E}[R_M] - r_0)$ erfolgt.

Das klassische CAPM sowie die hier skizzierten Ergebnisse werden in Abschnitt 5.4 im Detail behandelt. Alternativ dazu wird beispielsweise auf die **Gleichgewichtstheorie von Arrow-Debreu** verwiesen.[5]

No-Arbitrage-Ansätze

In bestimmten Konstellationen, typischerweise im Kontext der Bewertung von Derivaten, ist es nicht notwendig, ein vollständiges Gleichgewichtsmodell zu formulieren, um Preise für Finanztitel modell-basiert bestimmen zu können.

In diesen Konstellationen führen bereits No-Arbitrage-Ansätze zum Ziel. Basis dieser Ansätze ist die Hypothese, dass effiziente Märkte keine Arbitrage, d. h. keine risikolosen Gewinne, erlauben. Hieraus leitet sich ab, dass Finanzpositionen mit identischen Auszahlungen denselben Wert haben müssen. Bestünden nämlich Bewertungsunterschiede, so könnte durch geschicktes Handeln dieser Finanzpositionen Arbitrage generiert werden. Insbesondere folgt, dass der Preis von Finanzderivaten, deren Auszahlung sich durch ein Portfolio von gehandelten Finanzprodukten replizieren lässt, den Kosten der perfekten Replikation entsprechen muss. Die Kosten der perfekten Replikation lassen sich auch mithilfe der **risikoneutralen Bewertung** als Erwartungswert der Auszahlung des Derivats unter einem Martingalmaß bestimmen. Die risikoneutrale Bewertung führt - auch für nicht-replizierbare Finanzderivate - zu einer Charakterisierung arbitrage-freier Preise.

Die aus der No-Arbitrage-Hypothese abgeleiteten Bewertungsansätze werden in Abschnitt 2.3 systematisch im Kontext von Einperiodenmodellen eingeführt. Die Verallgemeinerung auf Mehrperiodenmodelle ist Gegenstand von Abschnitt 2.4.

2.1.2 Bewertung von Zahlungsströmen: Versicherungs- vs. Finanzmathematik[6]

Versicherungsverträge werden - im Gegensatz zu Finanztiteln - typischerweise nicht an Märkten gehandelt. Daher ist der traditionelle Bewertungsansatz hier die Individualbewertung. Die klassische Versicherungsmathematik beruht auf dem wichtigsten Grundprinzip

[5] Siehe z. B.: Föllmer, H.; Schied, A.: *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter, 4. Auflage, 2016, Abschnitt 3.6.

[6] Die Ausführungen dieses Abschnitts folgen partiell Knispel, T.; Stahl, G.; Weber, S.: *Black-Scholes, marktkonsistente Bewertung und Risikomaße*. Schriftenreihe des Kompetenzzentrum Versicherungswissenschaften Hannover, Band 12, VVW Verlag Karlsruhe, 2012.

von Versicherungen, der Absicherung von Risiken durch den **Ausgleich im Kollektiv**. Anstelle eines Individuums trägt eine Gemeinschaft die Risiken aller ihrer Mitglieder, der Versicherungsnehmer; jeder Einzelne ist gegen eine in Relation zum möglichen Schaden geringe Prämie (bzw. Versicherungsbeitrag) abgesichert.

Voraussetzung hierfür ist, dass Schäden stochastisch unabhängig auftreten und keine systematischen Risiken bestehen. Damit wirken auf der Kollektivebene wahrscheinlichkeitstheoretische Mechanismen wie das **Gesetz der großen Zahlen** und der **Zentrale Grenzwertsatz**. Sind nämlich $R_1, \ldots, R_n$ unabhängige und identisch verteilte Risiken (auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$), so gilt nach dem starken Gesetz der großen Zahlen

$$\lim_{n\uparrow\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} R_k = \mathrm{E}[R_1] \quad P\text{-fast sicher.} \tag{2.8}$$

Die bedeutet, dass in großen Portfolien mit diesen Eigenschaften der zufällige Schadenbedarf pro Risiko ungefähr dem Erwartungswert - berechnet unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß, das die tatsächlichen Eintrittwahrscheinlichkeiten widerspiegelt - entspricht. Dies motiviert (zumindest in erster Approximation), eine Bewertung der Risiken auf Basis des Erwartungswerts vorzunehmen und als **Nettorisikoprämie** den Erwartungswert anzusetzen. Dieser Prämienansatz ist jedoch aus praktischer und theoretischer Sicht ungeeignet, um Schwankungen aufzufangen. Für große Portfolien folgt aus dem Zentralen Grenzwertsatz, dass bei diesem Prämienansatz die Schäden die Prämien mit Wahrscheinlichkeit 1/2 übersteigen. Man kann in Mehrperiodenmodellen, eingebettet in den Kontext der **Ruintheorie**, auch zeigen, dass die Nettorisikoprämie fast sicher zum Ruin führt.

Dies verdeutlicht, dass die Bewertung bzw. die Prämie für ein Versicherungsrisiko einen positiven **Sicherheitszuschlag** (safety loading) α auf den Erwartungswert enthalten muss. Wird für unabhängige, identisch verteilte Risiken $R_1, \ldots, R_n$ jeweils die Prämie $\pi = \mathrm{E}_P[X] + \alpha$ erhoben, so gilt für die Verlustwahrscheinlichkeit gemäß Tchebychev-Ungleichung

$$P\left[\sum_{k=1}^{n} R_k > n\pi\right] \leq P\left[\sum_{k=1}^{n} R_k - n\mathrm{E}_P[R_k] \geq n\alpha\right] \leq \frac{n\mathrm{Var}(R_1)}{(n\alpha)^2}.$$

Damit konvergiert die Verlustwahrscheinlichkeit für einen wachsenden homogenen Bestand gegen 0, d. h. es gilt ein Gesetz der großen Zahlen in der Form

$$\lim_{n\uparrow\infty} P\left[\sum_{k=1}^{n} R_k > n\pi\right] = 0.$$

Der Sicherheitszuschlag kann - in Abhängigkeit des Bewertungsansatzes - impliziter oder expliziter Natur sein.

- Ein **impliziter Sicherheitszuschlag** wird durch praxisübliche konservative Rechnungsgrundlagen induziert. Angenommen, ein Risiko $X \geq 0$ besitzt unter P die Verteilungsfunktion F, der Aktuar rechnet jedoch mit einer konservativeren Verteilungsfunktion G mit
  $$1 - F(x) \leq 1 - G(x) \quad (x \in \mathbb{R}_+),$$
  die zu einem Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P}$ korrespondiert. Dann ergibt sich für die Nettorisikoprämie unter der konservativen Verteilungsannahme
  $$\begin{aligned} \mathrm{E}_{\tilde{P}}[X] &= \int_0^\infty (1 - G(x))\,dx \\ &= \int_0^\infty (1 - F(x))\,dx + \int_0^\infty (F(x) - G(x))\,dx \\ &= \left(1 + \frac{\int_0^\infty (F(x) - G(x))\,dx}{\int_0^\infty (1 - F(x))\,dx}\right) \mathrm{E}_P[X], \end{aligned}$$

also ein Sicherheitszuschlag der Höhe

$$\alpha := \frac{\int_0^\infty (F(x) - G(x))\,dx}{\int_0^\infty (1 - F(x))\,dx}\, \mathrm{E}_P[X] > 0$$

zur tatsächlichen Nettorisikoprämie $\mathrm{E}_P[X]$. In diesem Sinn nimmt der Aktuar zur Bewertung einen impliziten und subjektiven Maßwechsel vor und bewertet dann mit dem Erwartungswert.

- **Explizite Sicherheitszuschläge** resultieren z. B., indem der Aktuar eine Individualbewertung vornimmt. So ergeben sich beispielsweise (unter Beachtung der Vorzeichenkonvention für Verlustvariablen) für das Risiko/Wert-Modell (2.7) mit einem Risikomaß (z. B. Standardabweichung, Varianz, Semivarianz, Schiefe, ...) **explizite Prämienprinzipien** der Form

  $$\pi = \mathrm{E}_P[X] + \alpha\rho(X) \quad \text{für } \alpha > 0.$$

  Für $\rho(X) = \sigma(X)$ spricht man vom **Standardabweichungsprinzip**.

Zufällige Zahlungsströme wie z. B. Leistungen einer Rentenversicherung oder einer Risikolebensversicherung können - unter Beachtung obiger Anmerkungen - auf Basis des erwarteten Barwerts BW bewertet werden. Dieser ergibt sich im Zeitpunkt 0 für zufällige Auszahlungen der Höhen $Z_0, Z_1, \ldots, Z_n$ mit Fälligkeiten $0, 1, \ldots, n$ und einen deterministischen Einperiodenzins $r \geq 0$ als Erwartungswert der Summe der diskontierten Zahlungen $(1+r)^{-t} Z_t$, $t = 0, 1, \ldots, n$. Formal ausgedrückt:

$$\mathrm{BW}_0(Z_0, Z_1, \ldots, Z_n) = \mathrm{E}\left[\sum_{t=0}^{n} \tfrac{1}{(1+r)^t} Z_t\right].$$

Dieser Bewertungsansatz ist die Basis für die Prämienkalkulation für klassische Versicherungsprodukte. Das sogenannte **versicherungsmathematische Äquivalenzprinzip** postuliert, dass der erwartete Barwert der Prämien gleich dem erwarteten Barwert der Leistungen ist. Hierbei wird in allen Praxisanwendungen des Äquivalenzprinzips mit „konservativen Rechnungsgrundlagen“ gearbeitet.

Zentral ist bei diesem Bewertungsprinzip, dass alle Erwartungswerte unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß berechnet werden, das - modulo konservativer Adjustierungen z. B. für die Rechnungsgrundlagen Sterblichkeit, Zins und Kosten im Kontext der Lebensversicherung - die tatsächliche Häufigkeit des Eintretens von Ereignissen beschreiben soll. Beim perfekten **Ausgleich im Kollektiv** können Mittelwerte zur Bewertung herangezogen werden. Dieses Verfahren wird mathematisch durch das Gesetz der großen Zahlen (2.8) gerechtfertigt.

Der Ausgleich im Kollektiv ist bei der Bewertung von Produkten per Gesetz der großen Zahlen anwendbar, wenn Schadenereignisse weitgehend unabhängig auftreten. Sind jedoch systematische Risiken mit im Spiel, dann wird die Analyse deutlich komplexer und das Äquivalenzprinzip ist nicht mehr bezüglich des Maßes P anwendbar. Dieses wird insbesondere relevant bei modernen, fondsgebundenen Versicherungsprodukten wie z. B. Variable Annuities, die eine Kombination von versicherungstechnischen Risiken und Finanzmarktrisiken beinhalten. Auch die Bewertung von Gesamtportfolios von Versicherungen, z. B. im Kontext des Market Consistent Embedded Values (MCEV) für Lebensversicherungsgesellschaften, erfordert eine Analyse auf Basis der Methoden moderner Finanzmathematik, denn diese sind stets Finanzmarktrisiken und oft auch systematischen versicherungstechnischen Risiken ausgesetzt.

Bei systematischen Risiken tritt nun das **Prinzip der risikoneutralen Bewertung** an die Stelle des versicherungsmathematischen Äquivalenzprinzips. Bei der risikoneutralen Bewertung handelt es sich nicht um ein willkürliches Verfahren, sondern um ein Bewertungsprinzip, das aus einfachen axiomatischen Annahmen in Modellen exakt abgeleitet wird. Die zentrale Hypothese ist dabei, dass Märkte keinen risikolosen Gewinn zulassen („no free lunch“). Dies bedeutet, dass man keine kostenlose Handelsstrategie konstruieren kann, die ohne jegliches Verlustrisiko echte Gewinne verspricht. Diese Annahme wird auf der Metaebene gerechtfertigt, indem auf die Wirkung von Angebot und Nachfrage, also auf die Gleichgewichtstheorie von Preisen, verwiesen wird. Bei einem „**free lunch**“ gäbe es auf Märkten mit gewinnorientierten Akteuren immer eine erhebliche Nachfrage. Diese würde Preise so verändern, dass die entsprechende Handelsstrategie nicht mehr kostenlos wäre. Die Möglichkeit eines „free lunch“ würde somit entfallen.

Bei der **risikoneutralen Bewertung** erfolgt die Bewertung von Finanz- und Versicherungsverträgen formal genau wie im Äquivalenzprinzip. Preise ergeben sich wieder als Erwartungswert der Auszahlungen, d. h. als ob Akteure risikoneutral wären. Aufgrund dieses formalen Zusammenhangs spricht man vom Prinzip der risikoneutralen Bewertung. In der korrekten Bewertungsformel muss das statistische Maß jedoch im Gegensatz zum klassischen Äquivalenzprinzip durch ein technisches Wahrscheinlichkeitsmaß ersetzt werden, das **risikoneutrales Maß** (oder auch **Martingalmaß** oder **Pricing-Maß**) genannt wird.

Die Wahl des Bewertungsmaßes ist der zentrale Unterschied zwischen klassischer aktuarieller Bewertung und moderner Finanzmathematik. Obwohl als „risikoneutral“ bezeichnet aufgrund der formalen Struktur, ist dieser Ansatz vollständig konsistent mit risikoaversen Marktakteuren. Risikoaversion spiegelt sich marktkonsistent im Martingalmaß wider. Im aktuariellen Kontext erfordert die marktkonsistente Bewertung von modernen Versicherungsprodukten und Gesamtportfolios eine Integration von finanzmathematischen Bewertungsprinzipien und versicherungsmathematischen Fragestellungen.

Lernergebnisse (B2-B3)
Die Studierenden kennen die grundlegenden Konzepte zur Bewertung finanzieller Zahlungsströme und können deren Anwendbarkeit in konkreten Situationen beurteilen.
Die Studierenden kennen die strukturellen Unterschiede von Versicherungs- und Finanzrisiken und verstehen - abgeleitet daraus - die zentralen Unterschiede der klassischen versicherungsmathematischen Bewertung und der finanzmathematischen Bewertung.

2.2 Effiziente Märkte

Kerninhalte

- Hypothese der effizienten Märkte (schwach, semi-stark, stark)

Die Theorie zur Entwicklung von Preisen in effizienten Märkten (**Efficient Market Theory** oder auch **Efficient Market Hypothesis**) geht auf Arbeiten von Samuelson[7] und Fama[8] zurück. Wesentliche Aspekte dieser Theorie betreffen die Nicht-Prognostizierbarkeit bzw. Unvorhersehbarkeit von Renditen sowie die Charakterisierung von Preisprozessen, insbesondere dabei die Anpassung der Preise aufgrund verfügbarer Information.

Nach Fama heißt ein Markt **effizient**, wenn Preise die „verfügbare Information“ stets vollständig widerspiegeln. In effizienten Märkten sollte kein Marktteilnehmer in der Lage sein, durch technische Analyse, Insiderhandel oder anderweitig dauerhaft überdurchschnittliche Gewinne zu erzielen. Hierbei wird die Markteffizienz bezogen auf die „verfügbare Information“ in folgenden Abstufungen klassifiziert:

- **Schwache Informationseffizienz:** Die verfügbare Information besteht nur aus der Kurshistorie.
- **Semi-starke Informationseffizienz:** Die verfügbare Information beinhaltet alle öffentlich bekannten Informationen.

[7] Siehe: Samuelson, P. A.: *Proof that Properly Anticipated Prices Fluctuate Randomly*. Industrial Management Review, 1965.
[8] Siehe z. B.: Fama, E. F.: *Efficient Capital Markets, A Review of Theory and Empirical Work*. Journal of Finance, Band 25, 1970.

- **Starke Informationseffizienz:** Die Informationsmenge besteht aus allen verfügbaren Informationen der Marktteilnehmer inklusive privater Informationen (auch Insiderinformation).

In der starken Form bedeutet Effizienz insbesondere, dass der aktuelle Preis eines Finanz-Instruments (modulo Diskontierung) die beste Vorhersage für zukünftige Preise $(X_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ darstellt. Ausgedrückt ist der Sprache der Stochastik besitzen diskontierte Preisentwicklungen $\tilde{X}_t = (1+r)^{-t}X_t$, $t \in \mathbb{N}_0$ (r risikoloser Periodenzins), - wenn man diese als stochastische Prozesse $(\tilde{X}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$ mit Informationsfiltration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in\mathbb{N}_0}$ interpretiert - die **Martingaleigenschaft** unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß P, das die empirischen Eintrittswahrscheinlichkeiten von Ereignissen am Finanzmarkt beschreibt. Formal (geschrieben mithilfe der bedingten Erwartung):

$$\mathrm{E}_P[\tilde{X}_{t+1}|\mathcal{F}_t] = \tilde{X}_t \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{E}_P\left[\frac{X_{t+1}-X_t}{X_t}\middle|\mathcal{F}_t\right] = r \quad \text{für alle } t \geq 0.$$

Dies jedoch bedeutet, dass in effizienten Märkten keine Handelsstrategien mit positiver Gewinnerwartung oberhalb einer risikofreien Rendite existieren können. Dies zeigt, dass die Hypothese der effizienten Märkte sehr restriktiv ist. Viel realistischer ist dagegen, die Annahme der Arbitrage-Freiheit von Finanzmärkten (siehe Seite 23). Diese Annahme ist äquivalent zur Existenz eines zu P maßtheoretisch äquivalenten Wahrscheinlichkeitmaßes (**Martingalmaß**), unter dem diskontierte Preisprozesse die Martingaleigenschaft haben, während unter P diskontierte Preise keine Martingale sein müssen.

Lernergebnisse (B2)
Die Studierenden kennen die Hypothese der effizienten Märkte, deren Implikationen und Kritikpunkte.

2.3 Grundprinzipien der Finanzmathematik: Einperiodenmodelle[9]

Kerninhalte

- Einperiodenmodelle mit endlich vielen Zuständen
- Kernbegriffe: Handelsstrategie, Arbitrage-Strategie, replizierende Handelsstrategie, Contingent Claim, Vollständigkeit und Unvollständigkeit von Marktmodellen, äquivalente Martingalmaße, preiserzeugende Vektoren
- Fundamentalsätze der Wertpapierbewertung
- Risikoneutrale Bewertungsformel
- Arbitragepreisgrenzen und Zusammenhang arbitrage-freier Preise mit den Kosten der perfekten Replikation

Wie funktioniert moderne Finanzmathematik? Wie lassen sich aus einfachen Axiomen Bewertungsprinzipien herleiten und anwenden? Diesen Fragen soll zunächst im Rahmen einfacher Einperiodenmodelle mit endlich vielen Szenarien/Zuständen (**State-Space-Markt**) nachgegangen werden, die eine transparente und mathematisch einfache Darstellung von Grundbegriffen, Kerngedanken und -resultaten erlauben, wie sie auch in komplexeren Multiperiodenmodellen Gültigkeit besitzen.

Einperiodenmodelle sind Finanzmarktmodelle, die nur eine Handelsperiode bzw. zwei Zeitpunkte $t = 0, 1$ umfassen. Der Zeitpunkt 0 wird als gegenwärtiger Zeitpunkt interpretiert, zu dem aktuelle Marktpreise beobachtbar sind. Die zukünftige Entwicklung von Preisen ist noch nicht bekannt, sondern dem Zufall unterworfen.

[9] Die Ausführungen dieses Abschnitts folgen Knispel, T.; Stahl, G.; Weber, S.: *Black-Scholes, marktkonsistente Bewertung und Risikomaße*. Schriftenreihe des Kompetenzzentrum Versicherungswissenschaften Hannover, Band 12, VVW Verlag Karlsruhe, 2012.

Aus didaktischen Gründen wird im Folgenden die „Komplexität“ in Bezug auf die Anzahl der primären Finanzprodukte und Szenarien stufenweise erhöht; Definitionen und Begrifflichkeiten sind jedoch in allgemeiner Form angegeben.

2.3.1 Ein einfaches Einperiodenmodell mit zwei Szenarien

In der Modellwelt wird zunächst angenommen, dass genau zwei verschiedene Szenarien auftreten können: ω_1 und ω_2. Die Menge aller möglichen Szenarien ist damit $\Omega = \{\omega_1, \omega_2\}$. Beiden Szenarien werden statistische Wahrscheinlichkeiten $P[\{\omega_1\}] > 0$ und $P[\{\omega_2\}] > 0$ zugeordnet, die strikt positiv sind (sonst wäre eines der Szenarien irrelevant).

Im Finanzmarktmodell muss die Dynamik der Preise der primären, liquide handelbaren Finanzprodukte spezifiziert werden. Im einfachsten Fall werden genau zwei primäre Produkte modelliert, ein Sparbuch und eine Aktie, deren Anfangspreise im Markt beobachtbar sind. Der Wert der Produkte zum Zeitpunkt 1 ist szenarioabhängig und zum Zeitpunkt 0 nicht bekannt. Zur mathematischen Formalisierung wird dem Sparbuch die Wertpapierkennnummer „0“ zugeordnet, der Aktie die Nummer „1“. Mit dieser Konvention entsprechen S_t^0, S_t^1 den Werten von Sparbuch und Aktie zu den Zeitpunkten $t = 0, 1$. Das Sparbuch hat strikt positive Preise.

Ein Investor kann in diesem Finanzmarktmodell zum Zeitpunkt 0 Geld investieren oder einnehmen, indem er Produkte kauft oder verkauft. Positive Stückzahlen nennt man **long positions**, negative dagegen **short positions**. Eine short position im Sparbuch ist gleichbedeutend mit Schulden.

Definition 2.3 (Handelsstrategie)**.** *Eine **Handelsstrategie** im Einperiodenmodell ist eindeutig festgelegt durch die Stückzahlen $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$ des Sparbuchs und der Aktie, die in der Periode von 0 bis 1 gehalten werden. Das Anfangsinvestment V_0^ϑ berechnet sich durch*

$$V_0^\vartheta = \vartheta^0 S_0^0 + \vartheta^1 S_0^1,$$

und das resultierende Endvermögen V_1^ϑ ist gegeben durch

$$V_1^\vartheta = \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1.$$

Für die theoretische Analyse werden zunächst eine Reihe vereinfachender Annahmen gemacht. So wird u. a. angenommen, dass Produkte in beliebiger - auch nicht-ganzzahliger und negativer - Stückzahl handelbar sind, dass unbegrenzt Kapital zum selben Zins angelegt wie geliehen werden kann und dass keine Steuern und Transaktionskosten anfallen. In der Praxis sind diese Aspekte jedoch relevant und werden in komplexeren Modellen - je nach Zielsetzung des Modells - adäquat berücksichtigt.

Die zentrale Grundannahme ist die **Abwesenheit von Arbitrage**:

Definition 2.4 (Arbitrage)**.** *Eine **Arbitragestrategie** ist eine Handelsstrategie ϑ mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Die Implementierung der Strategie ist kostenneutral, d. h. $V_0^\vartheta = 0$.*
2. *Im Zeitpunkt 1 treten keine Verluste auf, d. h. es gilt $V_1^\vartheta(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega$.*
3. *Mit positiver Wahrscheinlichkeit führt die Strategie zu einem Gewinn, d. h.*

$$P[V_1^\vartheta > 0] > 0.$$

*Ein Finanzmarktmodell, das keine Arbitragestrategie zulässt, heißt **arbitrage-frei**.*

Finanzmarktmodelle sind nicht a priori arbitrage-frei, sondern müssen in Hinblick auf Arbitrage untersucht werden.

Die Finanzmathematik stellt Methoden zur Bewertung und (partiellen) Absicherung von Finanzprodukten (den **Contingent Claims**) bereit. Contingent Claims sind Verträge zwischen zwei Handelspartnern, die verbindlich Zahlungen festlegen, die zu einem zukünftigen Zeitpunkt geleistet werden. Die Höhe der Zahlungen wird in Abhängigkeit von zukünftigen Ereignissen spezifiziert. Contingent Claims umfassen sowohl **Finanzderivate** als auch **Zahlungsströme aus Versicherungsverträgen**. Im ersten Fall kann die Höhe der Zahlungen z. B. von der Kursentwicklung von Referenzprodukten abhängen. Als Basiswerte kommen dabei vor allem Aktien, Anleihen, Währungen, Rohstoffe und Indices in Frage. Im zweiten Fall werden Zahlungen durch das Eintreten und den Umfang von Schäden festgelegt.

Definition 2.5 (Europäischer Contingent Claim)**.** *Ein* ***Europäischer Contingent Claim*** *mit Maturität* 1 *ist ein Finanzvertrag, der die im Zeitpunkt* 1 *fälligen Auszahlungen* $C_1(\omega)$ *für alle Szenarien* $\omega \in \Omega$ *festlegt. Mathematisch entspricht dies einer Zufallsvariablen* $C_1 : \Omega \to [0, \infty)$.

Zu den elementaren Beispielen zählen Call- und Put-Optionen (siehe Abschnitt 1.2.4) auf die Aktie mit Maturität 1 und Ausübungspreis (Strike) K:

$$C_1^{\mathrm{call}} = (S_1^1 - K)^+, \quad C_1^{\mathrm{put}} = (K - S_1^1)^+.$$

Zwei Fragen stellen sich:

- Was ist der faire Preis C_0 eines Contingent Claims C_1 im Zeitpunkt 0?
- Wie kann sich der Emittent des Claims gegen die zufällige Auszahlung C_1 absichern?

Die Antworten auf beide Fragen sind eng miteinander verknüpft und können ausgehend von der Hypothese der Abwesenheit von Arbitrage formuliert werden.

Ein Preis C_0 eines Contingent Claims C_1 ist **fair**, wenn im Finanzmarktmodell, das um den Contingent Claim mit Preisprozess (C_0, C_1) erweitert wird, keine Arbitrage entsteht. Dieser Bewertungsansatz ist eng verbunden mit den **Kosten der perfekten Replikation**.

Definition 2.6 (Replizierende Handelsstrategie)**.** *Ein Contingent Claim* C_1 *wird* ***replizierbar*** *genannt, falls eine Handelsstrategie* $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$ *existiert, deren Endvermögen* V_1^ϑ *in jedem Szenario mit der Auszahlung* C_1 *übereinstimmt. In diesem Fall heißt* ϑ ***replizierende Handelsstrategie***, *und die Kosten der Replikation sind gegeben durch das Anfangsinvestment* V_0^ϑ.

Existiert keine Arbitrage, so ist für jeden replizierbaren Contingent Claim C_1 der **arbitragefreie Preis** C_0 gleich den **Kosten der perfekten Replikation**. Wie kann man man das begründen? Angenommen, es gelte $C_0 > V_0^\vartheta$. In diesem Fall könnte man zum Zeitpunkt 0 eine Einheit von C_1 zum Preis C_0 verkaufen, die Absicherungsstrategie ϑ für C_1 zum Preis V_0^ϑ implementieren und das freie Kapital $C_0 - V_0^\vartheta > 0$ in das Sparbuch investieren. Diese Strategie ist zum Zeitpunkt 0 kostenneutral. Im Zeitpunkt 1 muss nun die durch den Verkauf des Contingent Claims eingegangene Zahlungsverpflichtung C_1 erfüllt werden, die Absicherungsstrategie liefert das Endvermögen $V_1^\vartheta = C_1$ und die Anlage im Sparbuch bringt den Ertrag $S_1^0(C_0 - V_0^\vartheta)$. Netto bleibt also der risikofreie Gewinn $S_1^0(C_0 - V_0^\vartheta) > 0$, d. h. ein Preis $C_0 > V_0^\vartheta$ ist nicht konsistent mit der Abwesenheit von Arbitrage. Mit analogen Argumenten sieht man, dass auch im Fall $C_0 < V_0^\vartheta$ Arbitrage generiert werden kann.

Die replizierende Handelsstrategie für einen gegebenen Contingent Claim C_1 ist durch folgendes **lineares Gleichungssystem** mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten bestimmt:

$$\begin{aligned} C_1(\omega_1) &= V_1^\vartheta(\omega_1) = \vartheta^0 S_1^0(\omega_1) + \vartheta^1 S_1^1(\omega_1) \\ C_1(\omega_2) &= V_1^\vartheta(\omega_2) = \vartheta^0 S_1^0(\omega_2) + \vartheta^1 S_1^1(\omega_2) \end{aligned}$$

Dieses Gleichungssystem ist im einfachen Einperiodenmodell mit zwei Zuständen für jeden Contingent Claim $C_1(\omega_1) = c_1$, $C_1(\omega_2) = c_2$ lösbar, d. h. jeder Contingent Claim ist replizierbar.

Definition 2.7 (vollständiges Finanzmarktmodell)**.** *Ein Finanzmarktmodell, in dem jeder Contingent Claim replizierbar ist, heißt* ***vollständig****.*

Die Bewertung von Contingent Claims lässt sich von der Replikation entkoppeln mittels der **risikoneutralen Bewertung**. Im Einperiodenmodell bringt dieses alternative Bewertungsverfahren keine signifikanten Vorteile. In komplexeren realistischeren Modellen ergeben sich aber substantielle Vereinfachungen durch diese Technik. Für eine transparente konzeptionelle Beschreibung der risikoneutralen Bewertung ist das Einperiodenmodell jedoch gut geeignet. Der faire Preis ist genau wie im Äquivalenzprinzip der klassischen Versicherungsmathematik ein (bedingter) Erwartungswert aller zukünftigen diskontierten Auszahlungen. Jedoch müssen erstens alle Erwartungswerte nicht unter dem **statistischen Maß**, sondern unter einem **risikoneutralen Maß** berechnet werden. Zweitens erfolgt die Diskontierung mittels eines **Numéraires**, eines Referenzprodukts. Als Numéraire im Einperiodenmodell sei das Sparbuch gewählt. Dieses formalisiert, dass ökonomisch nur relative Preise

$$\tilde{S}_t^i = \frac{S_t^i}{S_t^0}, \quad i = 0, 1, t = 0, 1,$$

relevant sind.

Definition 2.8 (risikoneutrales Maß)**.** *Ein* ***risikoneutrales Maß*** *bezüglich des Numéraires S^0 ist ein technisches Wahrscheinlichkeitsmaß Q mit folgenden Eigenschaften:*

1. *Für alle $\omega \in \Omega$ ist $Q[\{\omega\}] > 0$.*
2. *Für alle primären Finanzprodukte gilt*

$$\tilde{S}_0^i = \mathrm{E}_Q\left[\tilde{S}_1^i\right] := Q[\{\omega_1\}] \cdot \tilde{S}_1^i(\omega_1) + Q[\{\omega_2\}] \cdot \tilde{S}_1^i(\omega_2), \quad i = 0, 1. \tag{2.9}$$

Eigenschaft 1 bedeutet, dass jedes mögliche Szenario ω auch bei der Preisberechnung einfließt. Mathematisch sind die Maße P und Q **äquivalent** im folgenden Sinn:

Definition 2.9 (Äquivalenz von Maßen)**.** *Es seien μ und ν zwei Wahrscheinlichkeitsmaße auf einem messbaren Raum $(E, \mathcal{E})$. Die Maße μ und ν heißen* ***äquivalent*** *auf $\mathcal{E}$, falls sie dieselben Nullmengen besitzen, d. h. für alle Ereignisse $A \in \mathcal{E}$ gilt:*

$$\mu(A) = 0 \iff \nu(A) = 0.$$

Die definierende Eigenschaft 2 besagt, dass sich für die primären Produkte, hier Sparbuch und Aktie, der diskontierte Preis zum Zeitpunkt 0 als mit den Q-Wahrscheinlichkeiten gewichtetes Mittel der diskontierten Preise zum Zeitpunkt 1 ergibt. In der Sprache der Wahrscheinlichkeitstheorie heißen die diskontierten Preisprozesse dann Martingale[10] bezüglich des Maßes Q, und Q wird daher auch **äquivalentes Martingalmaß** genannt.

Im arbitrage-freien Einperiodenmodell mit zwei Zuständen und Numéraire S^0 besitzt Formel (2.9) aufgrund der Nebenbedingung $Q[\{\omega_1\}] + Q[\{\omega_2\}] = 1$ eine eindeutige Lösung. Somit existiert im arbitrage-freien und vollständigen einfachen Finanzmarktmodell genau ein risikoneutrales Maß. Diese Beobachtung gilt auch in der umgekehrten Richtung und in komplexeren Finanzmarktmodellen (siehe 1. Fundamentalsatz 2.16 und 2. Fundamentalsatz 2.17 der Wertpapierbewertung).

Mithilfe des risikoneutralen Maßes Q kann der arbitrage-freie Preis eines Contingent Claims berechnet werden, und zwar ohne zuvor die replizierende Handelsstrategie zu bestimmen. Idee ist, dass sich die Martingaleigenschaft auf die diskontierten Preise des Contingent Claims überträgt.

[10] Martingale sind ein Synonym für „faire Spiele“. Fair bedeutet, dass der erwartete zukünftige Wert des Spiels gleich dem aktuellen Wert ist; im Mittel gewinnt man nichts dazu, verliert aber auch nichts.

Theorem 2.10 (Risikoneutrale Bewertungsformel)**.** *Der eindeutige arbitrage-freie Preis C_0 eines Contingent Claims C_1 im Zeitpunkt* 0 *ergibt sich durch risikoneutrale Bewertung bezüglich des risikoneutralen Maßes Q, d. h.*

$$C_0 = S_0^0 \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right].$$

Der so berechnete Preis stimmt mit den Kosten der perfekten Replikation des Contingent Claims überein.

2.3.2 Ein einfaches Einperiodenmodell mit drei Zuständen

In der Realität und in vielen komplexeren Modellen können nicht alle Contingent Claims perfekt repliziert werden. Viele Risiken werden nicht durch primäre Finanzprodukte abgebildet. Der Markt ist **unvollständig**. In diesem Fall impliziert die Abwesenheit von Arbitrage oft keinen eindeutigen fairen Preis, sondern liefert ein Intervall fairer Preise.

Die Unvollständigkeit von Märkten und ihre Konsequenzen für die Bewertung und Absicherung von Produkten lassen sich bereits im Kontext von Einperiodenmodellen illustrieren. Zu diesem Zweck wird wiederum ein Einperiodenmodell mit den primären Produkten „Sparbuch" S^0 und „Aktie" S^1 betrachtet. Im Gegensatz zum vorhergehenden Abschnitt sind in der Modellwelt nun drei Szenarien $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ möglich, denen unter dem statistischen Maß P strikt positive Wahrscheinlichkeiten zugeordnet werden. Dies bedeutet formal $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3\}$. Die Wertentwicklung des Sparbuchs ist nach wie vor unabhängig vom zukünftigen Zustand ω der Welt. Der Aktienkurs hingegen entwickelt sich szenarioabhängig mit den Ausprägungen $S_1^1(\omega_1)$, $S_1^1(\omega_2)$ und $S_1^1(\omega_3)$. Es wird angenommen, dass das erweiterte Modell arbitrage-frei ist.

Die Hinzunahme eines weiteren Szenarios ist auf den ersten Blick nur eine kleine Modifikation, hat jedoch gravierende Konsequenzen für die Eigenschaften des Finanzmarktmodells. Es gibt nun Contingent Claims C_1, die nicht durch Handel mit den primären Produkten replizierbar sind, d. h. es existiert keine Handelsstrategie $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1)$ mit Endwert $V_1^\vartheta = C_1$. Mathematisch bedeutet dies, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned}
\vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega_1) &= C_1(\omega_1)\\
\vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega_2) &= C_1(\omega_2)\\
\vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega_3) &= C_1(\omega_3)
\end{aligned}$$

mit drei Gleichungen und zwei Unbekannten keine Lösung $(\vartheta^0, \vartheta^1)$ besitzt.

Definition 2.11 (unvollständiges Finanzmarktmodell)**.** *Ein Finanzmarktmodell, in dem mindestens ein Contingent Claim nicht replizierbar ist, heißt* ***unvollständig****.*

Eine Abgrenzung zwischen replizierbaren und nichtreplizierbaren Contingent Claims ergibt sich unmittelbar. Replizierbare Contingent Claims haben Endauszahlungen der Form

$$C_1(\omega) = \vartheta^0 S_1^0(\omega) + \vartheta^1 S_1^1(\omega), \quad \omega \in \Omega,$$

und einen eindeutigen fairen Preis C_0, der durch die Kosten der perfekten Replikation

$$V_0^\vartheta = \vartheta^0 S_0^0 + \vartheta^1 S_0^1$$

gegeben ist. Alle übrigen Contingent Claims sind nicht replizierbar. Für diese Claims kann eine arbitrage-freie Bewertung nicht mehr auf Basis der perfekten Replikation erfolgen. Die risikoneutrale Bewertung von Contingent Claims besitzt jedoch weiterhin Gültigkeit; ihre Interpretation muss dabei modifiziert werden.

Zunächst müssen alle äquivalenten risikoneutralen Maße (siehe Definition 2.8) bestimmt werden: diese sind die technischen Wahrscheinlichkeitsmaße Q mit $Q[\{\omega_i\}] > 0$, $i = 1, 2, 3$, mit der Eigenschaft

$$\tilde{S}_0^1 = \mathrm{E}_Q\left[\tilde{S}_1^1\right] := Q[\{\omega_1\}] \cdot \tilde{S}_1^1(\omega_1) + Q[\{\omega_2\}] \cdot \tilde{S}_1^1(\omega_2) + Q[\{\omega_3\}] \cdot \tilde{S}_1^1(\omega_3).$$

Unter der Beachtung der Nebenbedingung $Q[\{\omega_1\}] + Q[\{\omega_2\}] + Q[\{\omega_3\}] = 1$ folgt, dass diese Bedingung für jedes Tripel $(Q^\alpha[\{\omega_1\}], Q^\alpha[\{\omega_2\}], Q^\alpha[\{\omega_3\}])$, $\alpha \in (0, 1)$, der Form

$$\begin{aligned}
Q^\alpha[\{\omega_1\}] &= \alpha \\
Q^\alpha[\{\omega_2\}] &= \frac{\tilde{S}_0^1 - \tilde{S}_1^1(\omega_3) - \alpha\left(\tilde{S}_1^1(\omega_1) - \tilde{S}_1^1(\omega_3)\right)}{\tilde{S}_1^1(\omega_2) - \tilde{S}_1^1(\omega_3)} \\
Q^\alpha[\{\omega_3\}] &= 1 - \frac{\tilde{S}_0^1 - \tilde{S}_1^1(\omega_3) - \alpha\left(\tilde{S}_1^1(\omega_1) - \tilde{S}_1^1(\omega_2)\right)}{\tilde{S}_1^1(\omega_2) - \tilde{S}_1^1(\omega_3)}
\end{aligned}$$

erfüllt ist. Die Menge der risikoneutralen Maße $\mathcal{Q}$ besteht somit aus überabzählbar vielen Elementen und ist gegeben durch

$$\mathcal{Q} = \{Q_\alpha | \alpha \in (0, 1)\}.$$

Die Existenz unendlich vieler risikoneutraler Maße ist charakteristisch für unvollständige Finanzmarktmodelle.

Man kann nun zeigen, dass jedes der risikoneutralen Maße Q_α durch die Formel

$$C_{0,\alpha} := S_0^0 \mathrm{E}_{Q_\alpha}\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right]$$

einen Preis $C_{0,\alpha}$ für den Contingent Claim C_1 liefert, der konsistent mit der Abwesenheit von Arbitrage ist. Mit anderem Worten, es gibt eine ganze Klasse fairer (d. h. arbitrage-freier) Preise, nämlich

$$\mathcal{C}_0 := \left\{S_0^0 \mathrm{E}_{Q_\alpha}\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right] \middle| Q_\alpha \in \mathcal{Q}\right\}.$$

Die Werte

$$C_0^{\inf} := \inf_{Q \in \mathcal{Q}} S_0^0 \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right] \quad \text{und} \quad C_0^{\sup} := \sup_{Q \in \mathcal{Q}} S_0^0 \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right]$$

können als **Arbitragepreisgrenzen** interpretiert werden.

Wie sieht die Menge $\mathcal{C}_0$ für replizierbare und nicht replizierbare Contingent Claims aus?

Theorem 2.12 (arbitrage-freie Preise)**.** *Für einen Contingent Claim C_1 gelten die Aussagen:*

1. *Der Contingent Claim C_1 ist replizierbar genau dann, wenn er einen eindeutigen arbitrage-freien Preis C_0 besitzt. Dieser entspricht den Kosten der perfekten Replikation.*

2. *Ist C_1 nicht replizierbar, so gilt $C_0^{\inf} < C_0^{\sup}$ und die Menge der arbitrage-freien Preise bildet das offene Intervall*

$$\left(C_0^{\inf}, C_0^{\sup}\right) = \left(\inf_{Q \in \mathcal{Q}} S_0^0 \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right], \sup_{Q \in \mathcal{Q}} S_0^0 \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_1}{S_1^0}\right]\right).$$

In unvollständigen Finanzmärkten sind bestimmte Contingent Claims C_1 nicht perfekt replizierbar. Daraus ergibt sich die natürliche Fragestellung: Wie kann sich ein Emittent eines Contingent Claims trotzdem gegen die die Auszahlung C_1 absichern?

Ein Ansatz ist das sogenannte **Superhedging**, eine Art „Überabsicherung". Unter einer Superhedgingstrategie versteht man eine Handelsstrategie ϑ, deren Endvermögen V_1^ϑ in jedem Szenario die Auszahlung des Contingent Claims dominiert. Formal ausgedrückt:

$$V_1^\vartheta(\omega) = \vartheta^0 S_1^0 + \vartheta^1 S_1^1(\omega) \geq C_1(\omega) \quad \text{für alle } \omega \in \Omega.$$

Man kann zeigen, dass eine solche Superhedging-Strategie stets existiert und dass das minimal erforderliche Anfangsinvestment gerade durch die obere Arbitragepreisgrenze C_0^{sup} gegeben ist. Man nennt C_0^{sup} daher auch **Superhedging-Preis**.

Vollständige Absicherung ist jedoch ökonomisch nicht immer sinnvoll. Stattdessen können Verfahren zur partiellen Absicherung (z. B. Quantilhedging, Efficient Hedging) verwendet werden.

2.3.3 Ein allgemeines Einperiodenmodell mit endlich vielen Szenarien

Implikationen der Arbitragefreiheit sowie der Vollständigkeit bzw. Unvollständigkeit eines Finanzmarktmodells auf die Bewertung von Contingent Claims konnten bereits in einfachen Finanzmarktmodellen mit zwei primären Produkten und zwei bzw. drei Zuständen illustriert werden. Ziel dieses Abschnitts ist einerseits, die Erweiterung der finanzmathematischen Grundkonzepte auf ein Einperiodenmodell mit endlich vielen Szenarien (**State-Space-Markt**) und primären Produkten zu skizzieren. Andererseits wird der Vollständigkeit halber - eingebettet in den Kontext der **linearen Algebra** - die in der ökonomischen Literatur gebräuchliche Charakterisierung der Arbitragefreiheit mithilfe von **preiserzeugenden Vektoren** sowie deren Beziehung zur allgemeineren Konzeption der risikoneutralen Bewertungsmaße dargestellt.

Modellbildung und Grundbegriffe. Im Einperiodenmodell können sich $K \in \mathbb{N}$ Szenarien bzw. Zustände mit positiven Eintrittswahrscheinlichkeiten realisieren. Formal korrespondiert dies zu einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$, der Potenzmenge $\mathcal{F}$ von Ω als σ-Algebra und einem Wahrscheinlichkeitsmaß P, das allen Szenarien $\omega_k \in \Omega$ eine positive Wahrscheinlichkeit $P[\{\omega_k\}] > 0$ zuordnet. In diesem Kontext besteht eine Bijektion zwischen der Menge der reellwertigen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und den Vektoren des $\mathbb{R}^K$, d. h. jede Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ lässt sich mit dem Vektor $\mathbf{X} = (X(\omega_1), \dots, X(\omega_K))^T$ der Realisierungen $X(\omega_k)$, $k = 1, \dots, K$, identifizieren. Im Folgenden wird von dieser Konvention Gebrauch gemacht.

Der zugrunde liegende Finanzmarkt besteht aus $d + 1$ ($d \in \mathbb{N}$) primären Finanzprodukten, die liquide handelbar sind. Diese sind beschrieben durch deterministische Anfangspreise $S_0^0, S_0^1, \dots, S_0^d$ zu $t = 0$ und nicht-negative, zufallsabhängige Preise $S_1^0, S_1^1, \dots, S_1^d$ zu $t = 1$. Das primäre Finanzprodukt 0 entspricht dabei zur Vereinfachung einem Sparbuch mit Startwert $S_0^0 = 1$ und sicherem Einperiodenzins $r > -1$. Im Folgenden seien

$$S_0 = (S_0^0, S_0^1, \dots, S_0^d)^T, \quad S_1 = (S_1^0, S_1^1, \dots, S_1^d)^T$$

der deterministische Vektor der Anfangspreise bzw. der stochastische Vektor der Endpreise. Ferner bezeichne $\mathbf{S}_1$ die mit den primären Finanzprodukten assoziierte Auszahlungsmatrix:

$$\mathbf{S}_1 = (S_1^i(\omega_k))_{1 \le k \le K, 0 \le i \le d} = \begin{pmatrix} S_1^0(\omega_1) & S_1^1(\omega_1) & \dots & S_1^d(\omega_1) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ S_1^0(\omega_K) & S_1^1(\omega_K) & \dots & S_1^d(\omega_K) \end{pmatrix}.$$

Das Tupel $(S_0, \mathbf{S}_1)$ wird auch **Marktmodell** genannt.

Eine **Handelsstrategie** bzw. ein Portfolio ist beschrieben durch den Vektor der Stückzahlen $\vartheta = (\vartheta^0, \vartheta^1, \dots, \vartheta^d)^T \in \mathbb{R}^{d+1}$ der primären Finanzprodukte, die in der Periode von 0 bis 1 gehalten werden. Das Anfangsinvestment V_0^ϑ berechnet sich durch

$$V_0^\vartheta = S_0^T \vartheta,$$

und das resultierende Endvermögen V_1^ϑ ist gegeben durch

$$V_1^\vartheta = S_1^T \vartheta \quad \text{bzw. in Vektorform} \quad \mathbf{V}_1^\vartheta = \mathbf{S}_1 \vartheta.$$

Ein **Contingent Claim** - definiert gemäß Definition 2.5 als Zufallsvariable $C_1 : \Omega \to \mathbb{R}$ bzw. der assoziierte Vektor $\mathbf{C}_1$ der Realisierungen - ist **replizierbar**, wenn es eine Handelsstrategie ϑ gibt mit

$$C_1 = V_1^\vartheta = S_1^T \vartheta \quad \text{bzw. in Vektorform} \quad \mathbf{C}_1 = \mathbf{V}_1^\vartheta = \mathbf{S}_1 \vartheta.$$

In diesem Fall heißt ϑ **replizierende Handelsstrategie**.

Sind alle Contingent Claims im Marktmodell $(S_0, \mathbf{S}_1)$ replizierbar, so heißt das Modell **vollständig** (siehe Definition 2.7). Die Vollständigkeit des Marktes $(s, \mathbf{S}_1)$ ist nach elementarer linearer Algebra äquivalent dazu, dass für den Rang der Auszahlungsmatrix $\text{rg}(\mathbf{S}_1) = K$ gilt. Dies erfordert insbesondere $d + 1 \geq K$, d. h. für die Vollständigkeit des Marktmodells muss es mindestens so viele handelbare primäre Produkte geben wie Szenarien. Diese Aussage wird durch die Ergebnisse der Abschnitte 2.3.1 und 2.3.2 illustriert.

Arbitragefreiheit und preiserzeugender Vektor. Die zentrale Anforderung an ein Finanzmarktmodell ist die die Abwesenheit von Arbitrage (siehe Definition 2.4).

Theorem 2.13 (Arbitragefreiheit)**.** *Ein State-Space-Markt ist arbitrage-frei genau dann, wenn ein Vektor $\psi \in \mathbb{R}^K_{>0} = (0, \infty)^K$ existiert mit*

$$S_0 = \mathbf{S}_1^T \psi. \tag{2.10}$$

Die Analyse des linearen Gleichungssystems (2.10) bildet die Grundlage für die konstruktive Überprüfung der Arbitragefreiheit. Eine Lösung existiert, wenn $\text{rg}(\mathbf{S}_1^T) = \text{rg}((\mathbf{S}_1^T, S_0))$. Bei Lösbarkeit gilt:

- eindeutige Lösbarkeit, wenn $\text{rg}(\mathbf{S}_1^T) = K$,
- mehrdeutige Lösbarkeit, wenn $\text{rg}(\mathbf{S}_1^T) < K$.

Der Vektor ψ heißt **preiserzeugender Vektor** oder auch **Vektor von Zustandspreisen** (State-Price-Vektor). Unmittelbar aus der definierenden Eigenschaft (2.10) folgt, dass ein Vektor $\psi \in \mathbb{R}^K_{>0}$ genau dann ein preiserzeugender Vektor ist, wenn gilt:

$$\psi^T \mathbf{S}_1 \vartheta = S_0^T \vartheta \quad \text{für alle Handelsstrategien } \vartheta \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Ein preiserzeugender Vektor ψ ordnet also jedem Zustand k einen Zustandspreis ψ_k derart zu, dass sich für ein beliebiges Portfolio ϑ durch Gewichtung des Endvermögen $\mathbf{V}_1^\vartheta = \mathbf{S}_1 \vartheta$ mit den Zustandspreisen der Anfangswert ergibt. Insbesondere führt für jeden Contingent Claim C_1 bzw. $\mathbf{C}_1$, der durch eine Handelsstrategie ϑ replizierbar ist, die Bewertungsvorschrift

$$\psi^T\ \mathbf{C}_1 = \psi^T \mathbf{V}_1^\vartheta \tag{2.11}$$

zu den **Kosten der perfekten Replikation** $S_0^T \vartheta$, und zwar unabhängig von der Wahl des preiserzeugenden Vektors, sofern mehrere existieren.

Bemerkung 2.14 (Arrow-Debreu-Titel)**.** *Ein preiserzeugender Vektor kann als Preisvektor derjenigen Finanztitel (**Arrow-Debreu-Titel**), deren Auszahlungen in $t = 1$ den Einheitsvektoren entsprechen, interpretiert werden. Für die formale Argumentation wird der Markt $(S_0, \mathbf{S}_1)$ um K zusätzliche fiktive Finanztitel mit Preisen $\hat{S}_0^k = \psi_k$ und Auszahlung $\hat{S}_1^k = e_k$ ($= k$-ter Einheitsvektor) erweitert. Welche Preise ψ_k sind nun ökonomisch sinnvoll und konsistent zur Annahme der Arbitragefreiheit?*

Da der Markt arbitrage-frei sein soll und $P[\{\omega_k\}] > 0$ für jedes Szenario k gilt, muss erstens $\psi_k > 0$ für alle $1 \leq k \leq K$ gelten. Zweitens lässt sich die Auszahlung $\mathbf{S}_1 \vartheta$ einer beliebigen

Handelsstrategie $\vartheta \in \mathbb{R}^{d+1}$ replizieren, indem man $(\mathbf{S}_1\vartheta)_k$ Stück vom k-ten Arrow-Debreu-Titel kauft. Bei Abwesenheit von Arbitrage müssen die Anfangskosten dieser beiden Strategien identisch sein:

$$S_0^T\vartheta = \sum_{i=1}^{K}(\mathbf{S}_1\vartheta)_i\psi_i = \psi^T\mathbf{S}_1\vartheta \quad \textit{für alle } \vartheta \in \mathbb{R}^{d+1}.$$

Dies impliziert Eigenschaft (2.10), d. h. der Preisvektor ψ der Arrow-Debreu-Titel muss ein preiserzeugender Vektor sein.

Preiserzeugende Vektoren und risikoneutrale Wahrscheinlichkeitsmaße. In den vorhergehenden Abschnitten 2.3.1 und 2.3.2 wurde die arbitrage-freie Bewertung von Contingent Claims an die risikoneutrale Bewertungsformel gekoppelt. Dieses Konzept ist konsistent mit der Bewertungsformel 2.11 auf Basis von preiserzeugenden Vektoren.

Definition 2.15 (Risikoneutrale Bewertung)**.** *Ein Wahrscheinlichkeitsmaß Q auf dem Grundraum $\Omega = \{\omega_1, \dots, \omega_K\}$ mit $Q[\{\omega_k\}] > 0$, $k = 1, \dots, K$ heißt zu P äquivalentes **risikoneutrales Wahrscheinlichkeitsmaß** für den State-Space-Markt $(S_0, \mathbf{S}_1)$, falls für den Endwert $V_1^\vartheta = S_1^T\vartheta$ bzw. für den Vektor der Realisierungen $\mathbf{V}_1^\vartheta = \mathbf{S}_1\vartheta$ jeder Handelsstrategie $\vartheta \in \mathbb{R}^{d+1}$ gilt:*

$$S_0^T\vartheta = \frac{1}{1+r}\mathrm{E}_Q[V_1^\vartheta] = \frac{1}{1+r}(Q[\{\omega_1\}], \dots, Q[\{\omega_K\}])^T\mathbf{V}_1^\vartheta$$

Dies verdeutlicht, dass - für den State-Space-Markt - eine Bijektion zwischen preiserzeugenden Vektoren und risikoneutralen Maßen besteht:

(i) Ist Q ein risikoneutrales Maß, dann wird durch $\psi_k = Q[\{\omega_k\}]/(1+r)$, $k = 1, \dots, K$, ein preiserzeugender Vektor definiert.

(ii) Ist umgekehrt $\psi \in \mathbb{R}^K_{>0}$ ein preiserzeugender Vektor, so wird durch $Q[\{\omega_k\}] = (1+r)\psi_k$ ein risikoneutrales Maß Q definiert.

Die Bijektion liefert mit Blick auf Theorem 2.13 die folgende allgemeine Charakterisierung von arbitrage-freien State-Space-Märkten:

Theorem 2.16 (1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung)**.** *Für einen State-Space-Markt $(S_0, \mathbf{S}_1)$ sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

a) Der Markt ist arbitrage-frei.

b) Es existiert ein preiserzeugender Vektor.

c) Es existiert ein äquivalentes risikoneutrales Maß.

Eindeutigkeit von Zustandspreisen und Marktvollständigkeit. Vollständigkeit eines State-Space-Marktes ist charakterisiert durch den 2. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung:

Theorem 2.17 (2. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung)**.** *Es sei $(S_0, \mathbf{S}_1)$ ein arbitrage-freier State-Space-Markt. Dann sind äquivalent:*

a) Der Markt ist vollständig.

b) Es existiert genau ein preiserzeugender Vektor ψ.

c) Es existiert genau ein äquivalentes risikoneutrales Maß Q.

Bei Vollständigkeit ist der arbitrage-freie Preis C_0 jedes Contingent Claim C_1 bzw. in Vektorform $\mathbf{C}_1$ eindeutig bestimmt durch

$$C_0 = \tfrac{1}{1+r}\mathrm{E}_Q[C_1] = \psi^T\ \mathbf{C}_1$$

und entspricht den Kosten der perfekten Replikation.

Unvollständigkeit. Märkte, in denen nicht jeder Contingent Claim replizierbar ist, sind unvollständig (siehe Definition 2.11). Arbitragefreiheit in unvollständigen State-Space-Märkten ist dadurch charakterisiert, dass die Menge Ψ der preiserzeugenden Vektoren und die assoziierte Menge von äquivalenten risikolosen Maßen $\mathcal{Q}$ unendlich viele Elemente besitzen. Für arbitrage-freie Preise besteht folgende Dichotomie:

a) Ein Contingent Claim $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^K$ ist genau dann replizierbar, wenn

$$a := \inf\{\psi^T \mathbf{C}_1 \,|\, \psi \in \Psi\} = \sup\{\psi^T\ \mathbf{C}_1 \,|\, \psi \in \Psi\} =: b.$$

b) Der Contingent Claim $\mathbf{C}_1 \in \mathbb{R}^K$ ist genau dann nicht replizierbar, wenn $a < b$ gilt. In diesem Fall ist jeder Preis im offenen Intervall $(a, b) = \{\psi^T \mathbf{C}_1 \,|\, \psi \in \Psi\}$ vereinbar mit der Abwesenheit von Arbitrage.

Lernergebnisse (B2-B3)
Die Studierenden kennen im Kontext von Einperiodenmodellen die Grundbausteine eines Finanzmarktmodells. Sie können die folgenden universellen Grundprinzipien der Finanzmathematik erklären:

- 1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung (Arbitragefreiheit und Existenz von äquivalenten Martingalmaßen bzw. preiserzeugenden Vektoren),
- 2. Fundamentalsatz (Vollständigkeit/Unvollständigkeit und Anzahl der äquivalenten Martingalmaße bzw. Anzahl der preiserzeugenden Vektoren),
- risikoneutrale Bewertungsformel,
- Charakterisierung arbitrage-freier Preise für replizierbare und nicht-replizierbare Contingent Claims.

Die Studierenden können die Grundprinzipien der Finanzmathematik in Fallstudien anwenden und sind in der Lage arbitrage-freie Preise im Kontext von Einperiodenmodellen durch Replikation sowie risikoneutrale Bewertung zu berechnen.

2.4 Risikoneutrale Bewertung in Mehrperiodenmodellen

Kerninhalte

- Grundstruktur mehrperiodiger Finanzmarktmodelle in diskreter Zeit
- Fundamentalsätze der Wertpapierbewertung
- Risikoneutrale Bewertungsformel in Mehrperiodenmodellen
- Dynamische Simulationsmodelle für zeitdiskrete Finanzmarktmodelle

Die vorgestellten Spielzeugmodelle sind für eine realistische Modellierung von Finanzmärkten nicht geeignet. Realistischer und flexibler sind Modelle mit mehreren primären Produkten, einer großen Zahl von Szenarien Ω (oft unendlich vielen) und mehreren Handelszeitpunkten t, zu denen Portfolios readjustiert werden können. Beinhaltet ein Modell nur Handelszeitpunkte $t = 0, 1, \ldots, T$ bis zu einer Maturität T, so spricht man von einem Modell in diskreter Zeit. Ein Basismodell in diskreter Zeit ist das **Binomialmodell** von Cox-Ross-Rubinstein, das in Abschnitt 3.4.2 vorgestellt wird. Die Modellierung kann aber auch in stetiger Zeit erfolgen. Dies wird im Abschnitt 3.5.2 im Rahmen des **Black-Scholes-Modells** erläutert. Charakteristisch für Modelle in stetiger Zeit ist, dass Preisprozesse primärer Finanzprodukte durch stochastische Differentialgleichungen (SDE) (mit oder ohne Sprünge) modelliert werden. Die Grundkonzepte aus den Einperiodenmodellen lassen sich - mutatis mutandis - auf die komplexeren Situationen übertragen. Dabei nimmt mit der Komplexität der Modelle auch der mathematische Anspruch zu. So basiert z. B. die Finanzmathematik in stetiger Zeit auf den Methoden der **Stochastischen Analysis** (SDEs, Itô-Kalkül, Levy-Prozesse, ...).

Die Kernaussagen zur Wertpapierbewertung lassen sich in diskreter Zeit wie folgt zusammenfassen. Die zufälligen Preise von $d+1$ primären Finanzprodukten zu den Zeiten $t = 0, 1, \ldots, T$ seien mit $S_t^0, S_t^1, \ldots, S_t^d$ bezeichnet. Das 0-te Produkt hat strikt positive Preise (z. B. Sparbuch oder Geldmarktfonds) und wird als Numéraire gewählt. Die Preise der primären Finanzprodukte werden als stochastische Prozesse auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ modelliert. Hierbei bezeichnet P das statistische Maß, das die tatsächlichen Eintrittswahrscheinlichkeiten von Ereignissen beschreibt.

Die Bewertung von Finanzprodukten zu verschiedenen Zeitpunkten hängt von der zur Verfügung stehenden Information ab. Die Information wird mithilfe einer Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ beschrieben (siehe Definition 1.4). Die Preisprozesse $(S_t^i)_{t=0,1,\ldots,T}$, $i = 0, 1, \ldots, d$, werden als adaptiert an die Filtration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ vorausgesetzt. Dies spiegelt wider, dass zum Zeitpunkt t gegeben die in der Sigma-Algebra $\mathcal{F}_t$ kodierte Information die Historie der Preisentwicklungen bis t bekannt sein soll.

Im gegebenen Finanzmarktmodell können die primären Finanzprodukte zu den diskreten Handelszeitpunkten gehandelt werden. Die Anzahl von Finanzprodukt i, die in der Periode $(t-1, t]$ im Portfolio gehalten wird, wird mit ϑ_t^i bezeichnet. Die Stückzahl ϑ_t^i wird zu Beginn der Handelsperiode auf Basis der verfügbaren Information $\mathcal{F}_{t-1}$ vom Investor festgelegt. Damit ist diese Stückzahl bis $t-1$ nicht bekannt, also eine Zufallsvariable, und $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar.

Definition 2.18 (Handelsstrategie und Wertprozesse)**.** *a) Eine **Handelsstrategie** ist ein reellwertiger, $(d+1)$-dimensionaler stochastischer Prozess*

$$\vartheta = (\vartheta_t)_{t=1,\ldots,T} = \left((\vartheta_t^0, \ldots, \vartheta_t^d)^T\right)_{t=1,\ldots,T}$$

mit der Eigenschaft, dass die Zufallsvariablen ϑ_t^i $\mathcal{F}_{t-1}$-messbar sind ($i = 0, 1, \ldots, d$, $t = 1, \ldots, T$). Letzteres bedeutet, dass der Prozess ϑ $\mathbb{F}$-vorhersehbar ist.

b) Der Wert des Portfolios ϑ ist gegeben durch

$$V_0^\vartheta = \sum_{i=0}^{d} \vartheta_1^i S_0^i, \quad V_t^\vartheta = \sum_{i=1}^{d} \vartheta_t^i S_t^i \quad \text{für } t = 1, \ldots, T.$$

*Der stochastische Prozess $(V_t^\vartheta)_{t=0,1,\ldots,T}$ heißt **Wertprozess** der Handelsstrategie ϑ.*

*c) Eine Handelsstrategie ϑ heißt **selbstfinanzierend**, falls für alle $t = 1, \ldots, T-1$ gilt:*

$$V_t^\vartheta = \sum_{i=0}^{d} \vartheta_t^i S_t^i = \sum_{i=0}^{d} \vartheta_{t+1}^i S_t^i.$$

Mit anderen Worten: Der Wert des Portfolios zum Zeitpunkt t ist gleich dem Wert des für den Zeitraum $(t, t+1]$ umgeschichteten Portfolios zum Zeitpunkt t.

Man kann zeigen, dass eine Handelsstrategie ϑ genau dann selbstfinanzierend ist, falls der zugehörige Wertprozess die Form

$$V_t^\vartheta = V_0^\vartheta + \sum_{k=1}^{t} \sum_{i=0}^{d} \vartheta_k^i (S_k^i - S_{k-1}^i), \quad t = 0, 1, \ldots, T,$$

besitzt. Dies bedeutet, dass sich der Wert in t aus dem Anfangsinvestment V_0^ϑ und den bis t kumulierten Periodengewinnen ergibt. - Es wird dem Portfolio kein Geld hinzugefügt oder entzogen.

Ein Contingent Claim C_T mit Fälligkeit in T ist **replizierbar**, wenn es eine selbstfinanzierende Handelsstrategie ϑ gibt mit $V_T^\vartheta = C_T$. In diesem Fall ist - in Abwesenheit von Arbitrage - der Preis des Contingent Claims durch die Kosten der perfekten Replikation V_0^ϑ gegeben.

Ein äquivalentes Martingalmaß Q muss im Mehrperiodenfall (als Erweiterung von (2.9)) für die diskontierten Preise $\tilde{S}_t^i = S_t^i / S_t^0$, $t = 0, 1, \ldots, T$, $i = 0, 1, \ldots, T$, die Bedingung

$$\tilde{S}_t^i = \mathrm{E}_Q\left[\tilde{S}_{t+1}^i \middle| \mathcal{F}_t\right], \quad t = 0, 1, \ldots, T-1, \; i = 0, 1, \ldots, d,$$

erfüllen. Hierbei bezeichnet $\mathrm{E}_Q[\cdot|\mathcal{F}_t]$ den Erwartungswert unter Q bedingt auf die in t verfügbare Information $\mathcal{F}_t$. Die Bedingung besagt, dass die diskontierten Preisprozesse der primären Produkte unter dem Martingalmaß **Martingale** sind.

Definition 2.19 (Martingal)**.** *Ein stochastischer Prozess* $(X_t)_{t=0,1,\ldots,T}$ *auf einem filtrierten Wahrscheinlichkeitsraum* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, Q)$ *heißt* ***Martingal*** *bezüglich* Q*, wenn der Prozess an die Filtration* $\mathbb{F}$ *adaptiert ist, die Integrierbarkeitsbedingung* $\mathrm{E}_Q[|X_t|] < \infty$ *für alle* t *erfüllt ist und gilt:*

$$X_s = \mathrm{E}_Q[X_t|\mathcal{F}_s] \quad \textit{für alle } 0 \leq s \leq t \leq T.$$

Bemerkung 2.20 (Martingaleigenschaft von Wertprozessen)**.** *Die diskontierten Wertprozesse* $\tilde{V}_t^\vartheta := V_t^\vartheta / S_t^0$*,* $t = 0, 1, \ldots, T$*, jeder selbstfinanzierenden Handelsstrategie sind unter jedem äquivalenten Martingalmaß wiederum Martingale.*

Mithilfe der risikoneutralen Maße können die **Abwesenheit von Arbitrage** und **Vollständigkeit** beschrieben werden. Diese Charakterisierung nennt man **Fundamentalsätze der Wertpapierbewertung**. Für das Binomialmodell von Cox-Ross-Rubinstein und das Black-Scholes-Modell wird die Konstruktion des Martingalmaßes in den Abschnitten 3.4.2 und 3.5.2 explizit diskutiert.

Theorem 2.21 (1. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung)**.** *Das Finanzmarktmodell ist arbitrage-frei genau dann, wenn ein äquivalentes Martingalmaß existiert.*

Bemerkung 2.22. *In zeitstetigen Finanzmarktmodellen benötigt man den allgemeineren Begriff der lokalen äquivalenten Martingalmaße (bzw. äquivalenten Sigma-Martingalmaße im Fall nicht lokal beschränkter Preisprozesse). Aus der Existenz eines solchen Maßes ergibt sich mühelos die Arbitragefreiheit des Finanzmarktmodells. Die Umkehrung dieser Aussage gilt jedoch im Allgemeinen nicht. Für die Existenz eines äquivalenten lokalen Martingalmaßes (bzw. äquivalenten Sigma-Martingalmaßes) ist eine stärkere Bedingung notwendig, nämlich* ***„no free lunch with vanishing risk"****.*

Die Analyse der Einperiodenmodelle mit zwei bzw. drei Szenarien zeigt, dass es entweder genau ein oder unendlich viele äquivalente Martingalmaße gibt. Diese beiden Fälle korrespondieren mit der Vollständigkeit und der Unvollständigkeit der Marktmodelle.

Theorem 2.23 (2. Fundamentalsatz der Wertpapierbewertung)**.** *Ein arbitrage-freies Finanzmarktmodell ist vollständig genau dann, wenn exakt ein äquivalentes Martingalmaß existiert.*

Mithilfe der äquivalenten Martingalmaße können wie zuvor Contingent Claims arbitrage-frei bewertet werden.

Theorem 2.24 (risikoneutrale Bewertung)**.** *Es sei* C_{T^*} *ein Contingent Claim mit Maturität* $T^* \leq T$*, also ein Vertrag, der zum Zeitpunkt* T^* *szenarioabhängig die Auszahlungen* $C_{T^*}(\omega)$*,* $\omega \in \Omega$*, leistet. Dann definiert jedes äquivalente Martingalmaß* Q *im Bewertungszeitpunkt* $t \leq T^*$ *durch*

$$C_t := S_t^0 \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_{T^*}}{S_{T^*}^0} \middle| \mathcal{F}_t\right] \tag{2.12}$$

einen arbitrage-freien Preis.

Analog zu Theorem 2.12 gilt hierbei, dass C_{T^*} genau dann replizierbar ist, wenn es exakt einen arbitrage-freien Preis C_t gibt. Dieser entspricht den Kosten der perfekten Replikation im Zeitpunkt t durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie. Der Claim C_{T^*} ist hingegen genau dann nicht replizierbar, wenn die Menge der arbitrage-freien Preise ein nichtleeres offenes Intervall bildet.

Bemerkung 2.25 (Dynamische Simulationsmodelle)**.** *Die risikoneutrale Bewertungsformel (2.12) reduziert die Bewertung eines Contingent Claims auf die Berechnung eines (bedingten) Erwartungswerts unter einem äquivalenten Martingalmaß. Dies ist in einfachen Situationen - wie den Einperiodenmodellen aus Abschnitt 2.3 oder für Europäische Call- und Put-Optionen im Kontext des Binomialmodells (siehe Abschnitt 3.4.2) sowie des Black-Scholes-Modells (siehe Abschnitt 3.5.2) - in geschlossenen Formeln möglich, da zum einen die zugrunde liegenden Verteilungen unter der risikoneutralen Maß explizit bekannt sind und einfache analytische Berechnungen erlauben und zum anderen die betrachteten Contingent Claims eine simple Struktur aufweisen.*

Für komplexere Derivate und Finanzmarktmodelle ist dies in der Regel nicht möglich. In diesem Fall kann die Berechnung des Erwartungswerts jedoch mithilfe von ***Monte-Carlo-Methoden*** *erfolgen. Betrachtet man z. B. in einem diskreten Finanzmarktmodell für ein primäres Asset mit Preisprozess $(S_t)_{t=0,1,\dots,T}$ (Konvention: $S_0 = s_0$, $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$) ein Derivat der Form $C_T := f(S_1, S_2, \dots, S_T)$, bei dem die terminale Auszahlung eine Funktion des gesamten Kursverlaufs bis T ist, so sind unter dem risikoneutralen Maß Q eine hinreichende Anzahl n von Pfaden zu simulieren. Elementar ist dies u. a. für einen Preisprozess der Form*

$$S_t = S_0 \prod_{k=1}^{t} (1 + R_k), \quad t = 1, \dots, T,$$

mit unter Q unabhängigen und identisch verteilten Returns $(R_t)_{t=1,\dots,T}$ (vgl. auch Binomialmodell). In diesem Fall sind einfach Realisierungen $r_1(j), \dots, r_T(j)$, $j = 1, \dots, n$, der Returns zu simulieren, aus denen sich Realisierungen

$$s_t(j) := s_0 \prod_{k=1}^{t} (1 + r_k(j)), \quad t = 1, \dots, T,$$

der Preise ergeben. Liegen nun allgemeiner Realisierungen der Preise vor, so gilt nach dem Gesetz der großen Zahlen

$$C_0 = \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_T}{(1+r)^T}\right] \approx \frac{1}{(1+r)^T} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} f(s_1(j), \dots, s_T(j)). \tag{2.13}$$

Erfolgt die Diskontierung mit einem stochastischen Zinsmodell, so ist die Simulation auf den Zins auszuweiten.

*In der aktuariellen Praxis spielen Monte-Carlo-Methoden bei der Bewertung von Finanztiteln und Versicherungsverträgen (Fondsgebundene Policen) sowie in stochastischen Unternehmensmodellen (**Market Consistent Embedded Value**) eine zentrale Rolle. Grundlage hierfür bilden risikoneutrale ökonomische Szenarien für Risikofaktoren (Zinskurven, Spreadkurven, Inflation, Aktien, Immobilien etc.) aus einem sogenannten **Ökonomischen Szenariogenerator** (Economic Szenario Generator, ESG). Dieser liefert auf Basis finanzmathematischer Modelle, die an Marktdaten kalibriert werden, risikoneutrale Simulationen für die Entwicklung von Risikofaktoren.*

*Es ist jedoch zu beachten, dass der Monte-Carlo-Ansatz (2.13) in Bewertungsmodellen (ebenso wie in internen Risikomodellen unter Solvency II) eine Approximation darstellt und insofern gegeben die endliche Anzahl der Simulationen eine bemerkenswerte Abweichung (**Monte-Carlo-Fehler**) vorliegen kann. In praktischen Anwendungen kann der sogenannte Monte-Carlo-Fehler durch eine hinreichend hohe Anzahl von Simulationen und/oder den Einsatz von **Varianzreduktionstechniken** (z. B. antithetische Zufallszahlen, Importance Sampling, Stratified Sampling) in geeigneter Form begrenzt werden.*

Lernergebnisse (B3)
Die Studierenden kennen die Grundbausteine eines mehrperiodigen Finanzmarktmodells in diskreter Zeit. Sie können die universellen Grundprinzipien der Finanzmathematik im Kontext mehrperiodiger Finanzmarktmodelle erklären und in einfachen Fallstudien anwenden. Die Studierenden kennen die Bedeutung dynamischer Simulationsansätze für Finanzmarktmodelle sowie im Versicherungskontext.

3 Analyse primärer Finanztitel und Bewertung von Derivaten

3.1 Grundlagen der Zinstheorie

Kerninhalte

- Arten der Verzinsung: einfache Verzinsung, zusammengesetzte Verzinsung, gemischte Verzinsung, unterjährige Verzinsung, stetige Verzinsung
- Finanzmathematische Barwerte und Endwerte, Rentenbarwert- und Rentenendwertfaktoren
- Investitions- und Renditerechnung
- Zinsstrukturkurven: Diskontkurve, Spot Rates, Forward Rates, Short Rates

3.1.1 Arten der Verzinsung

Im Anwendungskontext sind verschiedene Arten der Verzinsung gebräuchlich. Als Konversionsperiode bezeichnet man das Zeitintervall, an dessen Ende die Zinsen gutgeschrieben werden. Man unterscheidet zwischen der diskontinuierlichen Zinsgutschrift, d. h. die Zinsgutschrift erfolgt am Ende einer bestimmten Periode, und einer kontinuierlichen Zinsgutschrift. Im Folgenden sei p der Zinsfuß für eine Bezugsperiode (z. B. $p = 2$) und $r := \frac{p}{100}$ bezeichne den Zinssatz der Periode (z. B. $r = 0,02$ bzw. $r = 2\%$). In der Praxis sind Jahre als Standardperioden für die Angabe von Zinssätzen üblich. Zur korrekten Erfassung von unterjährigen Zahlungen sind daher Tagesberechnungsmethoden (**Day Count Convention**) (typisch: 1 Jahr=360 Tage, 1 Monat=30 Tage) gebräuchlich, um die Dauer der Zinszahlungen zu ermitteln.

Zur Einführung der verschiedenen Verzinsungsarten sei K_0 das Anfangskapital und K_t bezeichne das durch Verzinsung bis zum Zeitpunkt t generierte Kapital. Es wird zunächst der Fall betrachtet, dass die Konversionsperiode mit der Bezugsperiode übereinstimmt und r der nominelle Zins der Bezugsperiode ist. Ferner bezeichne $[t]$ den ganzzahligen Anteil von t.

(a) **Einfache Verzinsung:**

- diskontinuierlich: $K_t = K_0\,(1 + [t]\,r)$
- kontinuierlich: $K_t = K_0\,(1 + t\,r)$

(b) **Zusammengesetzte Verzinsung (Verzinsung mit Zinseszins):**

- diskontinuierlich: $K_t = K_0\,(1 + r)^{[t]}$
- kontinuierlich: $K_t = K_0\,(1 + r)^t$

(c) **Gemischte Verzinsung:** Bei der gemischten Verzinsung werden die zusammengesetzte Verzinsung für ganze Jahre $[t]$ und die einfache Verzinsung für den unterjährigen Anteil $t - [t] \in [0, 1)$ verwendet. Die Kapitalentwicklung ist gegeben durch

$$K_t = K_0\,(1 + r)^{[t]}\,(1 + (t - [t])r).$$

Erfolgen die Zinsgutschriften unterjährig, so unterscheiden sich die Konversionsperiode und die Bezugsperiode des Zinssatzes. Es sei m die Anzahl der äquidistanten Konversionsperioden pro Jahr (z. B. $m = 4, 12, 360$) und r_{nom} bezeichne den nominellen jährlichen Zinssatz.

Als Zinssatz pro Konversionsperiode wird der Bruchteil r_{nom}/m angesetzt. Damit ist der **effektive Jahreszinssatz** r_{eff} bei zusammengesetzter unterjähriger Verzinsung definiert via

$$1 + r_{\text{eff}} = \left(1 + \tfrac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m$$

und übersteigt für $r_{\text{nom}} > 0$ den nominellen Zinssatz. Für die Kapitalentwicklung gilt:

(d) **Unterjährige Verzinsung mit Zinseszins:**

- diskontinuierlich: $K_t = K_0\,(1 + \tfrac{r_{\text{nom}}}{m})^{[t]\,m}$
- kontinuierlich: $K_t = K_0\,(1 + \tfrac{r_{\text{nom}}}{m})^{t\,m}$

Das Endkapital wächst mit der Anzahl der Konversionsperioden und es gilt im Limes

$$\lim_{m\uparrow\infty} \left(1 + \tfrac{r_{\text{nom}}}{m}\right)^m = e^{r_{\text{nom}}}.$$

Mit anderen Worten: Bei systematischer Erhöhung der Konversionsperioden erfolgt der Übergang zur stetigen Verzinsung.

(e) **Stetige Verzinsung:** $K_t = K_0 e^{rt}$

Hierbei gilt $e^r = 1 + r + o(r)$ für kleines r ($o(r)/r \to 0$ für $r \to 0$). In Anwendungen verwendet man die stetige Verzinsung gerne, da die Exponentialfunktion analytisch besser handhabbar als die Potenzfunktion ist.

3.1.2 Barwerte und Endwerte

Finanz- und Versicherungsprodukte aber auch Investitionsmöglichkeiten sind mit einem Zahlungsstrom verbunden, für den eine angemessene Bewertung vorzunehmen ist. Im einfachsten Fall liegt dabei ein endlicher, deterministischer Zahlungsstrom $\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_T\}$ vor. Da die Zahlungen zu verschiedenen Zeitpunkten stattfinden, erfordert die Bewertung grundsätzlich die Spezifikation der Zeitpräferenz des Entscheidungsträgers. Am einfachsten geschieht dies im Rahmen eines Zinsmodells, z. B. dem **vollkommenen Kapitalmarkt**.

Bei einem vollkommenen Kapitalmarkt (in diskreter Zeit) können zu einem deterministischen Periodenzinssatz $r > 0$ beliebig hohe Geldbeträge angelegt und auch beliebig hohe Kredite aufgenommen werden. Dies bedeutet, dass beliebige (positive wie negative) Zahlungen zu einem beliebigen Zeitpunkt auf einen beliebigen anderen (früheren oder späteren) Zeitpunkt in äquivalenter Weise (d. h. zu Kapitalmarktbedingungen) transferiert werden können. Im Folgenden werden folgende Notationen verwendet:

$$\begin{aligned} q &:= 1 + r && \text{Aufzinsungsfaktor,} \\ v &:= \tfrac{1}{1+r} && \text{Diskontierungsfaktor.} \end{aligned}$$

Die Kapitalmarktbewertung des Zahlungsstroms zum Zeitpunkt 0 entspricht dem **Barwert** der Zahlungsreihe, d. h. der Summe der Barwerte aller Einzelzahlungen:

$$\mathrm{BW}_0(r) := \sum_{t=0}^{T} Z_t q^{-t} = \sum_{t=0}^{T} Z_t v^t.$$

Ökonomisch kann der Barwert eines Zahlungsstroms $\{Z_0, Z_1, \ldots, Z_T\}$ als derjenige Geldbetrag interpretiert werden, aus dem bei Anlage/Finanzierung zu Kapitalmarktbedingungen derselbe Wert in T resultiert, wie bei Anlage/Finanzierung der Zahlungen zu Kapitalmarktbedingungen. Die resultierende Größe ist der **Endwert** der Zahlungsreihe

$$\mathrm{EW}_T(r) := \mathrm{BW}_0(r) \cdot q^T = \sum_{t=0}^{T} Z_t q^{T-t}.$$

Hierbei ist zu beachten, dass der Barwert spezifische Investitions-/Finanzierungsbedingungen voraussetzt und nur dann der korrekte Wert des Zahlungsstroms ist, wenn die angenommenen Bedingungen auch eintreten.

3.1.3 Rentenrechnung

Als **Rente** bezeichnet man eine Folge von Zahlungen in festen Zeitabständen, und zwar nicht nur an Senioren (Altersrente). Die Unterteilung kann u. a. hinsichtlich der Dauer der Zahlungen (Zeitrente, ewige Rente, Leibrente), der Zahlungsweise (vorschüssig vs. nachschüssig), dem Zahlungsbeginn (sofort vs. aufgeschoben) oder der Rentenhöhe (konstant vs. dynamisch) erfolgen.

Aus aktuarieller Sicht ergeben sich (zunächst ohne biometrisches Risiko) folgende Fragestellungen: Wie hoch ist zum Bewertungszeitpunkt $t = 0$ der Kapitalbedarf für eine Rentenzahlung der Höhe R über n Perioden? Welche Rentenhöhe R kann umgekehrt über n Perioden bei gegebenem Anfangskapital gewährt werden? Die Antworten ergeben sich aus dem finanzmathematischen Äquivalenzprinzip. Dieses besagt, dass der Barwert der Leistung gleich dem Barwert der Gegenleistung entsprechen muss.

Für die Berechnung sind sogenannte **Rentenbarwertfaktoren** nützlich, die in Abhängigkeit von Zahlungsweise, Zahlungsdauer und Zahlungsbeginn den Barwert einer auf $R = 1$ normierten Rente bezeichnen. Unter den Prämissen, dass der Periodenzins r beträgt und dass die Rentenperiode mit der Zinsperiode übereinstimmt, sind die Rentenbarwertfaktoren für eine sofort beginnende Rente über n Perioden bei vorschüssiger bzw. nachschüssiger Zahlungsweise (in aktuarieller Notation) gegeben durch

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} := \sum_{t=0}^{n-1} v^t \quad \text{bzw.} \quad a_{\overline{n}|} := \sum_{t=1}^{n} v^t.$$

Diese Summenausdrücke lassen sich für $r \neq 0$ mithilfe der Rechenregeln der geometrischen Reihe vereinfachen (für $r = 0$ gilt trivialerweise $\ddot{a}_{\overline{n}|} = a_{\overline{n}|} = n$):

$$\ddot{a}_{\overline{n}|} = \tfrac{1-v^n}{1-v} \quad \text{und} \quad a_{\overline{n}|} = v\ddot{a}_{\overline{n}|} = \tfrac{1-v^n}{r}.$$

Analog dazu ergeben sich weitere Rentenbarwertfaktoren:

- **Ewige Rente:** Eine Rente mit unbegrenzter Laufzeit heißt ewige Rente. Für $r > 0$ sind die zugehörigen Rentenbarwertfaktoren gegeben durch:
  - vorschüssige Zahlungsweise: $\ddot{a}_{\overline{\infty}|} := \sum_{t=0}^{\infty} v^t = \lim_{n\uparrow\infty} \ddot{a}_{\overline{n}|} = \frac{1}{1-v} = \frac{1+r}{r}$
  - nachschüssige Zahlungsweise: $a_{\overline{\infty}|} := \sum_{t=1}^{\infty} v^t = v\ddot{a}_{\overline{\infty}|} = \frac{1}{r}$
- **Aufgeschobene Rente:** Eine Rente, deren Zahlungen erst nach einer Wartezeit beginnen, heißt aufgeschobene Rente. Für $r \neq 0$ betragen die Rentenbarwertfaktoren einer um m Perioden aufgeschobenen Rente, die über n Perioden gezahlt wird:
  - vorschüssige Zahlungsweise: ${}_{m|}\ddot{a}_{\overline{n}|} := \sum_{t=m}^{n+m-1} v^t = v^m \ddot{a}_{\overline{n}|} = v^m \frac{1-v^n}{1-v}$
  - nachschüssige Zahlungsweise: ${}_{m|}a_{\overline{n}|} := \sum_{t=m+1}^{n+m} v^t = v^m a_{\overline{n}|} = v^m \frac{1-v^n}{r}$

Während Barwerte alle Zahlungen durch Diskontierung auf den Bewertungszeitpunkt projizieren, entsteht umgekehrt die Frage, welcher Endwert aus verzinsten Zahlungen in fester Höhe über n Perioden resultiert. **Rentenendwertfaktoren** geben für einen Periodenzins $r \neq 0$ und eine normierte Rentenhöhe $R = 1$ den Endwert an:

- vorschüssige Rente: $\ddot{s}_{\overline{n}|} := \sum_{t=0}^{n-1} (1+r)^{n-t} = (1+r)^n \ddot{a}_{\overline{n}|} = (1+r)^n \frac{1-v^n}{1-v}$
- nachschüssige Rente: $s_{\overline{n}|} := \sum_{t=1}^{n} (1+r)^{n-t} = (1+r)^{-1} \ddot{s}_{\overline{n}|} = (1+r)^n \frac{1-v^n}{r}$

3.1.4 Investitions- und Renditerechnung

Investoren steht eine Vielzahl von Investitionsmöglichkeiten zur Verfügung. Bei der Auswahl von Investitionsmöglichkeiten ist anhand ihres Zahlungsstroms - definiert als Saldo von Einnahmen und Ausgaben - erstens zu prüfen, ob die Durchführung einer Investition grundsätzlich vorteilhaft ist. Zweitens sind zwecks Auswahl alternative Investitionsmöglichkeiten miteinander zu vergleichen. Im Folgenden wird vereinfachend angenommen, dass die Zahlungsströme deterministisch sind bzw. erwarteten Zahlungsströmen entsprechen.

Kapitalwertmethode. Es sei r ein vorgegebener Kalkulationszinssatz (Hurdle Rate) wie z. B. die geforderte Eigenkapitalrendite. Der Kapitalwert $C_0(r)$ einer Investition im Bewertungszeitpunkt $t = 0$ ist der Barwert des Zahlungsstroms der Investition bezogen auf den Kalkulationszinssatz r. Eine Investition ist vorteilhaft, falls ihr Kapitalwert positiv ist, d. h. der Barwert der Einnahmen den Barwert der Ausgaben für die Investition übersteigt. Hierbei ist zu beachten, dass die Vorteilhaftigkeit einer Investition vom zugrunde liegenden Kalkulationszinssatz abhängt.

Renditerechnung. Die Renditerechnung zielt darauf ab, die Kapitalrentabilität bzw. Effektivverzinsung eines bei Durchführung einer Investition anfänglich eingesetzten Kapitals (bzw. allgemeiner eines eingesetzten Kapitalstroms) zu bestimmen. Die Berechnung kann dabei zum einen aus der Planungsperspektive (Planrendite eines Investments unter Sicherheit) und zum anderen aus der Kontrollperspektive (realisierte Performance) erfolgen.

Ein gebräuchliches Verfahren ist die Methode der **internen Rendite** (auch interner Zinsfuß). Eine interne Rendite r^* eines Zahlungsstroms ist eine Nullstelle der Kapitalwertfunktion $r \mapsto C_0(r)$, d. h. ein Zinssatz, für den der Barwert der Einnahmen einer Investition gleich dem Barwert der Ausgaben ist.

Auf der Entscheidungsebene wird eine Investition als vorteilhaft angesehen, wenn die interne Rendite r^* größer als ein Referenzzins (z. B. die geforderte Eigenkapitalrendite) ausfällt, bei der Entscheidung zwischen verschiedenen Investitionsmöglichkeiten wählt man diejenige mit der höchsten internen Rendite.

Mit der Methode der internen Rendite sind bei der Anwendung verschiedene Probleme verknüpft. Erstens kann die Kapitalwertfunktion als Polynom - bei Vorzeichenwechsel in der Zahlungsreihe - mehrere Nullstellen besitzen, sodass die interne Rendite nicht eindeutig bestimmt ist. Zweitens wird implizit angenommen, dass sämtliche Wiederanlagen zur internen Rendite des Ausgangsinvestments vorgenommen werden. Dies ist jedoch sehr unrealistisch, d. h. die interne Rendite beinhaltet im Allgemeinen eine verzerrte Renditemessung.

3.1.5 Allgemeine Zinsstrukturkurven

In der Realität sind Zinsen fristigkeitsabhängig, unterliegen Änderungen im Zeitverlauf (stochastische Modellierung) und hängen von der Bonität (Rating) ab. Im Arbeitsalltag von Aktuaren ist eine Vielzahl von Zinsbegriffen im Umlauf (u. a. **Spot Rate**, **Forward Rate**, **Short Rate**, **Swap Rate**), die man sorgfältig gegeneinander abgrenzen muss.

Zur formalen Beschreibung der Zinsstruktur und der diversen Zinsbegriffe werden als Ankerpunkt Nullkuponanleihen (Zero Coupon Bond) (siehe Seite 11) betrachtet, die den normierten Nennwert der Höhe 1 zur jeweiligen Fälligkeit auszahlen. Im Folgenden sei $P(t, T)$ der Preis einer solchen Nullkuponanleihe mit Fälligkeit in T zum Zeitpunkt $t \leq T$, wobei im Fälligkeitszeitpunkt offenbar $P(T, T) = 1$ gilt. Die Bondpreise $P(t, T)$ sind vor t nicht mit Sicherheit bekannt, d. h. $t \mapsto P(t, T)$ ist ein stochastischer Prozess.

Da $P(t, T)$ in t den Zeitwert der Auszahlung 1 in T angibt, kann der Preis $P(t, T)$ als **Diskontierungsfaktor** verwendet werden. Die Funktion $T \mapsto P(t, T)$ ist die **Diskontkurve** in t.

Diese Interpretation erlaubt, die Definition von Bar- und Endwerten deterministischer Zahlungsströme $Z_{t_1}, \ldots, Z_{t_n}$, $t \leq t_1 < \ldots < t_n \leq T$, auf beliebige Diskontkurven zu erweitern:

$$\mathrm{BW}_t = \sum_{k=1}^{n} Z_{t_k} P(t, t_k), \quad \mathrm{EW}_T = \sum_{k=1}^{n} Z_{t_k} (P(t_k, T))^{-1}.$$

Zinssätze beziehen sich auf Zeitperioden. Beginnt die Zeitperiode zum „aktuellen Betrachtungszeitpunkt", so spricht man von **Spot Rates** (Kassazinsen) und beginnt sie „in der Zukunft" und ist der Zinssatz bereits zum „aktuellen Betrachtungszeitpunkt" festgelegt, so spricht man von **Forward Rates** (Terminzinsen). Zinssätze werden üblicherweise für eine einheitliche Bezugsperiodenlänge von 1 angegeben. Aufgrund der Konvention „1 = 1 Jahr" spricht man auch von **annualisierten Zinsen**. Zur Herleitung der Zinsbegriffe (im Rahmen einer theoretischen Analyse) wird im Folgenden angenommen, dass Nullkuponanleihen für alle Maturitäten bzw. Fälligkeiten T liquide gehandelt werden und Marktpreise feststellbar sind. Negative Zinsen, die zurzeit am Markt beobachtet werden, sind eingeschlossen.

Spot Rates (Kassazinsen). Für Zeitpunkte $t < T$ ist die Spot Rate (Kassazins) der annualisierte Zins in t, der für eine Anlage von t bis T fällig wird. Da ein zum Zeitpunkt t getätigtes Investment in Höhe von $P(t, T)$ in T die sichere Auszahlung 1 liefert, ergeben sich in Abhängigkeit der Zinsmethode folgende Formeln für die Spot Rates, ausgedrückt über die Diskontierungsfunktion:

- Spot Rate $r_t^e(T)$ für $[t, T]$ bei einfacher Verzinsung:

$$P(t,T)(1+(T-t)r_t^e(T)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r_t^e(T) = \frac{1}{T-t}\left(\frac{1}{P(t,T)} - 1\right)$$

- Spot Rate $r_t^z(T)$ für $[t, T]$ bei zusammengesetzter Verzinsung:

$$P(t,T)(1+r_t^z(T))^{T-t} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r_t^z(T) = \left(\frac{1}{P(t,T)}\right)^{\frac{1}{T-t}} - 1$$

- Spot Rate $r_t^s(T)$ für $[t, T]$ bei stetiger Verzinsung:

$$P(t,T)\exp(r_t^s(T)(T-t)) = 1 \quad \Leftrightarrow \quad r_t^s(T) = -\frac{\ln P(t,T)}{T-t}$$

Die Menge aller Kassazinsen in t für alle Maturitäten $T > t$ bezeichnet man als **(Kassa-) Zinsstruktur** in t. Die Zinsstruktur heißt steigend (oder normal), falls die Zinsen wachsend in der Laufzeit T sind. Sind die Zinsen fallend in T, so spricht man von einer fallenden (oder inversen) Zinsstruktur. Besteht keine Abhängigkeit der Zinsen von der Laufzeit, so liegt eine flache Zinsstruktur vor.

Forward Rates (Terminzinsen). Für Zeitpunkte $t \leq T < S$ ist die Forward Rate (Terminzins) der annualisierte Zins in t, der im Zeitpunkt t für eine Anlage von T bis S vereinbart wird, in Analogie zum Konzept des Forward-Kontrakts (siehe Seite 12). Mit „no arbitrage"-Argumenten ergeben sich in Abhängigkeit der Zinsmethode folgende Formeln für die Forward Rate, ausgedrückt über die Diskontierungsfunktion:

- Forward Rate bei einfacher Verzinsung für $[T, S]$ zum Zeitpunkt t:

$$f_t^e(T,S) = \frac{1}{S-T}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right).$$

- Forward Rate bei zusammengesetzter Verzinsung für $[T,S]$ zum Zeitpunkt t:

$$f_t^z(T,S) = \left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)}\right)^{\frac{1}{S-T}} - 1$$

- Forward Rate bei stetiger Verzinsung für $[T,S]$ zum Zeitpunkt t:

$$f_t^s(T,S) = -\frac{\ln P(t,S) - \ln P(t,T)}{S-T}.$$

Forward Rates sind durch zwei Punkte der Diskontierungsfunktion festgelegt. In Abwesenheit von Arbitrage besteht zudem ein direkter Zusammenhang zwischen Forward Rates und Spot Rates, z. B. bei zusammengesetzter Verzinsung

$$(1 + r_t^z(T))^{T-t} = \prod\nolimits_{k=1}^{T-t}(1 + f_t^z(t+k-1, t+k)).$$

Arbitragefreiheit bedeutet, dass ein Kapitalbetrag, der in t über T Perioden zur Spot Rate angelegt wird, am Ende der Periode T einen identischen Endwert aufweisen muss wie der Kapitalbetrag, der revolvierend jeweils über 1 Jahr zu den in t gültigen Forward Rates angelegt wird.

Instantaneous Forward Rates. Die Instantaneous Forward Rate $f_t(T)$ in t bezeichnet gedanklich den Terminzins für eine Anlage in einem späteren „sehr kleinen" Zeitfenster $[T, T+\Delta T]$. Unter der Prämisse, dass die Diskontierungsfunktion $T \mapsto P(t,T)$ differenzierbar ist, berechnet man

$$\begin{aligned} f_t(T) &= \lim_{\Delta T \downarrow 0} f_t^s(T, T+\Delta T) \\ &= \lim_{\Delta T \downarrow 0} -\frac{\ln P(t, T+\Delta T) - \ln P(t,T)}{\Delta T} \\ &= -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}. \end{aligned}$$

Die Instantaneous Forward Rates hängen nicht von der Zinsmethode ab, sondern nur von der Diskontkurve $T \mapsto P(t,T)$. Die Abbildung $T \mapsto f_t(T)$ heißt **Forward-Kurve** zum Zeitpunkt t. Umgekehrt erhält man durch Integration die Preise der Nullkuponanleihen, ausgedrückt mithilfe der kurzfristigen Terminzinsen:

$$P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f_t(u)\,du\right).$$

Short Rates und risikoneutrale Bewertung. Die Short Rate zum Zeitpunkt t ist die Spot Rate für eine kurzfristige Anlage, d. h. $r_t = \lim_{T\downarrow t} r_t^s(T)$. In Praxisanwendungen ist die stochastische Modellierung der Short Rate (**Short-Rate-Modelle**) häufig der Ausgangspunkt der Zinsmodellierung (siehe Abschnitt 3.3). Mithilfe der Short Rate kann die Wertentwicklung eines **Geldmarktfonds** mit Startkapital $K_0 > 0$

$$K_t := K_0 \exp\left(\int_0^t r_s\,ds\right) \quad (t \geq 0)$$

beschrieben werden, der in zeitstetigen Finanzmarktmodellen mit stochastischen Zinsen standardmäßig als Numéraire bei der **risikoneutralen Bewertung** dient.

Bezeichnet Q ein (geeignet kalibriertes) äquivalentes Martingalmaß bezüglich des Numéraires Geldmarktfonds in einem arbitrage-freien Finanzmarktmodell, so ist der arbitrage-freie

Preis eines Contingent Claims C_T mit Maturität T im Zeitpunkt $t \leq T$ gegeben durch die risikoneutrale Bewertungsformel

$$C_t = K_t \mathrm{E}_Q \left[\frac{C_T}{K_T} \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Insbesondere gilt für die Preise der Nullkuponanleihen mit Nennwert 1

$$P(t,T) = \mathrm{E}_Q \left[\frac{K_t}{K_T} \middle| \mathcal{F}_t \right] = \mathrm{E}_Q \left[\exp\left(- \int_t^T r_u \, du \right) \middle| \mathcal{F}_t \right].$$

Lernergebnisse (A2)
Die Studierenden können grundlegende Definitionen, Konventionen und grundlegende Konzeptionen im Bereich von Zinsen und Zinsprodukten (Arten der Verzinsung, Diskontkurve, Spot Rates und Forward Rates, finanzmathematische Barwerte/Endwerte, Investitions- und Renditerechnung) erläutern und anwenden. Sie kennen insbesondere die Formeln, um Diskontfaktoren, Spot Rates und Forward Rates ineinander zu überführen.

3.2 Zinsprodukte und Zinssensitivitäten

Kerninhalte

- Festverzinsliche und variabel verzinsliche Anleihen: Bewertung und Anwendungen
- Quantifizierung des Zinsänderungsrisikos mit Sensitivitäten (Duration, Konvexität)
- Grundlegende Zinsderivate (Forward-Kontrakte auf Anleihen, Zinsswaps): Bewertung und Anwendungen

3.2.1 Einfache Zinsprodukte

Festverzinsliche Anleihe. Eine festverzinsliche Anleihe (siehe auch Seite 11) ist ein Finanztitel, der beschrieben ist durch eine Maturität bzw. Fälligkeit T_n, zukünftige Zahlungszeitpunkte $T_1 < T_2 < \ldots < T_n$ mit äquidistantem Abstand $\delta := T_k - T_{k-1}$, $k = 1, \ldots, n$, deterministische, bei Vertragsabschluss festgelegte Kuponzahlungen $c_1, \ldots, c_n$ sowie einen Nennwert N. Der Käufer der festverzinslichen Anleihe erhält vom Emittenten zu den Zeitpunkten T_k, $k = 1, \ldots, n$, jeweils die Auszahlung c_k und zusätzlich den Nennwert N zur Maturität.

Der **Preis einer festverzinslichen Kuponanleihe** $p(t)$ zum Bewertungszeitpunkt $t < T_1$ ist - durch Diskontierung bzw. Replikation - direkt aus den Preisen $P(t, T_k)$ von Nullkuponanleihen ablesbar:

$$p(t) = N \cdot P(t, T_n) + \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot P(t, T_k).$$

Als Spezialfälle ergeben sich Preise einer Nullkuponanleihe mit beliebigem Nennwert sowie eines Standardbonds. Die Bewertungsformel ist jedoch auch anwendbar auf **Staffelzinsanleihen**, bei denen sich die Kuponhöhe gemäß einer von vornhinein festgelegten Zinsstaffel verändert (Varianten: Step-up-Anleihe, Step-down-Anleihe).

- Nullkuponanleihe mit Nennwert N: $c_k = 0$, $k = 1, \ldots, n$

$$p(t) = NP(t, T_n)$$

- Standardbond: Nominalzins r, $c_k = r\delta N$, $k = 1, \ldots, n$

$$p(t) = N \left(r\delta \sum_{k=1}^{n} P(t, T_k) + P(t, T_n) \right) \tag{3.14}$$

Bemerkung 3.1 (Marktwert: „dirty“ vs. „clean“). *Der Preis einer festverzinslichen Anleihe fällt zu den Zahlungszeitpunkten der Kupons um die Höhe der Zahlung:*

$$p(t) = \sum_{k=1}^{n} c_k \cdot P(t, T_k) 1_{[0,T_k]}(t) + N \cdot P(t, T_n) 1_{[0,T_n]}(t).$$

*Aufgrund des unstetigen Verlaufs wird dieser Preis in der Praxis **„dirty“-Marktwert** genannt und üblicherweise um die zeitanteiligen **Stückzinsen** (accrued interest) reduziert. Bei proportionaler Aufteilung der Kuponzahlung c_k auf die Zinsperiode betragen die bis $t \in (T_{k-1}, T_k]$ kumulierten Stückzinsen*

$$\mathrm{AI}(k, t) = c_k \frac{t - T_{k-1}}{T_k - T_{k-1}}.$$

*Der **„clean“-Marktwert** der festverzinslichen Anleihe in $t \in (T_{k-1}, T_k]$ beträgt dann.*

$$p^{\text{clean}}(t) = p(t) - \mathrm{AI}(k, t).$$

In der Praxis müssen die beiden Sichtweisen gegeneinander abgegrenzt werden.

Aus Standardbonds verschiedener Fälligkeiten können ein Portfolio und damit eine Kapitalanlagestrategie generiert werden, die zukünftige, deterministische Zahlungsverpflichtungen aus dem Versicherungsgeschäft replizieren (**Cashflow-Matching**). Zudem können Preise von am Markt liquide gehandelten Standardbonds genutzt werden, um empirisch die Zinsstrukturkurve zu ermitteln.

Variabel verzinsliche Anleihe. Variabel verzinsliche Anleihen (**Floating Rate Notes**, kurz: FRN, **„Floater“**) sind Anleihen mit variablen Zinssätzen (vgl. Seite 12). Diese beinhalten mehrere Zinsperioden mit einer bestimmten Zeitspanne (z. B. 3 Monate, 6 Monate oder 12 Monate). Nach jeder Periode zahlt der Emittent der Anleihe die Zinsen; gleichzeitig wird der Zinssatz für die nächste Periode festgestellt. Dieser Zinssatz orientiert sich häufig an einem am Markt quotierten Referenzzinssatz, z. B. dem **LIBOR** (London Interbank Offered Rate) oder **EURIBOR** (European Interbank Offered Rate). Der Emittent zahlt einen Zins, der um einen festen Aufschlag bzw. Abschlag (Spread) über bzw. unter diesen Sätzen liegen kann und insbesondere seine Bonität widerspiegelt.

Formal ist eine variabel verzinsliche Anleihe spezifiziert durch zukünftige Zeitpunkte $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ sowie einen Nennwert N. Im Gegensatz zur festverzinslichen Anleihe werden jedoch die deterministischen Kuponzahlungen zu den Zeitpunkten $T_1, \ldots, T_n$ ersetzt durch zufällige Kuponzahlungen

$$c_k = (T_k - T_{k-1}) r^e_{T_{k-1}}(T_k) N,$$

wobei $r^e_{T_{k-1}}(T_k)$ den aktuellen Marktzins bei einfacher Verzinsung im Zeitpunkt T_{k-1} für eine Anlage von T_{k-1} bis T_k bezeichnet. Da die Realisierung des aktuellen Marktzinses erst zum Zeitpunkt T_{k-1} bekannt ist, ist die Höhe der Kuponzahlung c_k nicht deterministisch. Die Verwendung der einfachen Verzinsung spiegelt wider, dass die Zinsperioden als unterjährig angenommen werden.

In Abwesenheit von Arbitrage lässt sich zeigen, dass der **Preis der variabel verzinslichen Anleihe** zum Zeitpunkt $t \leq T_0$ gegeben ist durch

$$p(t) = N \cdot P(t, T_0). \tag{3.15}$$

Insbesondere gilt $p(T_0) = N$.

Die Gestaltungsmöglichkeiten sind bei variabel verzinslichen Anlagen sehr vielfältig. Beispielsweise können die Schwankungsbreite der Verzinsung eingeschränkt sein (z. B. **Floor Floater**, **Cap Floater**, **Collared Floater**) oder die Schwankung in der Verzinsung auch der Entwicklung am Geldmarkt entgegenlaufen (**Reverse Floater** oder **Bull Floater**). Zudem sind variabel verzinsliche Anleihen mit anderen Anleihetypen kombinierbar; so beinhalten beispielsweise **Convertible Floating Rate Notes** ein Wandlungsrecht (für den Anleger oder den Emittenten) in normale Festzinsanleihen.

3.2.2 Analyse des Zinsänderungsrisikos: Duration und Konvexität

Der Marktwert einzelner Finanztitel sowie von Portfolien von Finanzinstrumenten aber auch der Wert der versicherungstechnischen Rückstellungen auf der Passivseite der Bilanz hängen von der Zinsstruktur im Bewertungszeitpunkt ab. Änderungen der Zinsstruktur führen zu einer Änderung in der Bewertung und können sich auf der Aktiv- und Passivseite (mit Effekt auf die Eigenmittel) unterschiedlich auswirken. In der Praxis ist die Quantifizierung des Zinsänderungsrisikos durch Neubewertung aufgrund der Komplexität der Portfolien aufwändig, sodass man an einer approximativen Quantifizierung der Auswirkung von potentiellen Änderungen der Zinsstruktur mithilfe von Sensitivitäten (**Duration**, **Konvexität**) interessiert ist.

Voraussetzung einer Quantifizierung der Auswirkungen des Zinsänderungsrisikos ist die Beschreibung der Zinsstrukturkurve und ihrer möglichen zeitlichen Änderungen. Ziel dieses Abschnitts ist, in einem einfachen deterministischen Rahmen die Kernbegriffe sowie Techniken zur Abschätzung von Marktwertänderungen einzuführen. Hierzu wird angenommen, dass die Zinsstruktur im Zeitpunkt $t=0$ flach ist mit Periodenzins $r>0$ und dass die Zinsänderung in einem einmaligen Übergang in eine flache Zinsstruktur der Höhe $r+\Delta r$ besteht, der unmittelbar in $t=0$ erfolgt. Gegenstand der Analyse ist ein festverzinslicher Finanztitel mit nichtnegativem (und nicht-trivialem) deterministischem Zahlungsstrom $\{Z_1,\dots,Z_T\}$, dessen Marktwert bezüglich des Ausgangszinsniveaus durch den Barwert

$$P(r)=\sum_{t=1}^{T} Z_t(1+r)^{-t}$$

gegeben ist. Die Barwertänderung beträgt $\Delta P(r):=P(r+\Delta r)-P(r)$.

Bei flacher Zinsstruktur ist die Barwertfunktion $r\mapsto P(r)$ eine streng monoton fallende ($P'(r)<0$) und konvexe Funktion ($P''(r)>0$). Mit anderen Worten: Bei steigendem Marktzins fällt der Barwert, bei fallendem Marktzins steigt der Barwert. Eine Zinssenkung führt zu einer stärkeren Barwertänderung als eine gleich hohe Zinssteigerung. Die Höhe der absoluten Barwertänderung $\Delta P(r)$ sowie der relativen Barwertänderung $\Delta P(r)/P(r)$ bei einer Zinsänderung Δr kann - für kleine Zinsänderungen - durch eine Taylor-Approximation 1. Ordnung näherungsweise beschrieben werden, d. h.

$$\Delta P(r)\approx P'(r)\cdot\Delta r \quad \text{bzw.} \quad \frac{\Delta P(r)}{P(r)}\approx\frac{P'(r)}{P(r)}\cdot\Delta r.$$

Definition 3.2 (Duration)**.** *Bei gegebenem Zinsniveau r heißt*

$$\mathrm{DUR}^A(r):=-P'(r)=\frac{1}{1+r}\sum\nolimits_{t=1}^{T} tZ_t(1+r)^{-t}>0$$

***Absolute Duration** des Zahlungsstroms $\{Z_1,\dots,Z_T\}$. Die **Modifizierte Duration** (Modified Duration) ist definiert durch*

$$\mathrm{DUR}^M(r):=\frac{\mathrm{DUR}^A}{P(r)}=-\frac{P'(r)}{P(r)}>0.$$

Die Absolute Duration ist ein approximatives Maß (Sensitivität) für die absolute Barwertänderung bei absoluter Zinsänderung, die Modifizierte Duration ist ein approximatives Maß für die relative Barwertänderung bei absoluter Zinsänderung:

$$\Delta P(r)\approx-\mathrm{DUR}^A(r)\cdot\Delta r,\quad \frac{\Delta P(r)}{P(r)}\approx-\mathrm{DUR}^M(r)\cdot\Delta r.$$

Das Zinsänderungsrisiko ist umso größer, je größer die Duration ausfällt. Sind die Absolute Duration und der Barwert für das Ausgangszinsniveau bekannt, so können absolute und relative Barwertänderungen, die aus einer Änderung des Zinsniveaus resultieren, leicht abgeschätzt werden, ohne eine Neubewertung durchzuführen.

In der Praxis wird häufig die **Macaulay-Duration**

$$\mathrm{DUR}^{Mac}(r) := (1+r)\mathrm{DUR}^{M}(r) = \left(\sum_{t=1}^{T} tZ_t(1+r)^{-t}\right)/P(r)$$

verwendet. Definiert man die Gewichte $w_t = Z_t(1+r)^{-t}/P(r)$, $t = 1,\ldots,T$, so folgt

$$\mathrm{DUR}^{Mac}(r) = \sum_{t=1}^{T} t \cdot w_t,$$

und die Macaulay-Duration kann als das gewichtete Mittel (Einheit: Jahre) der Fälligkeitszeitpunkte der einzelnen Zahlungen $\{Z_1,\ldots,Z_T\}$ interpretiert werden. Dies erkärt, warum Durationen häufig mit der durchschnittlichen Fälligkeit von Zahlungen assoziert werden. Ausgedrückt mithilfe der Macaulay-Duration gilt für die relative Barwertänderung bei absoluter Zinsänderung:

$$\frac{\Delta P(r)}{P(r)} \approx -\frac{1}{1+r}\mathrm{DUR}^{Mac}(r)\cdot\Delta r.$$

Bemerkung 3.3 (Portfolio-Duration)**.** *Sind $X = \{X_1,\ldots,X_T\}$ und $Z = \{Z_1,\ldots,Z_T\}$ zwei Zahlungsreihen mit Kursen P_X bzw. P_Z, dann gilt für die zugehörigen Durationen:*

$$\mathrm{DUR}^{Mac}_{X+Z}(r) = \frac{P_X}{P_X+P_Z}\mathrm{DUR}^{Mac}_{X}(r) + \frac{P_Z}{P_X+P_Z}\mathrm{DUR}^{Mac}_{Z}(r).$$

Für die Portfolio-Duration gilt analog

$$\mathrm{DUR}^{Mac}_{P}(r) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot \mathrm{DUR}^{Mac}_{i}(r),$$

wobei $x_i = P_i/P$ der anteilige Barwert von Titel i bezogen auf den Gesamtportfoliowert P ist.

Bei der Taylor-Approximation 1. Ordnung erfolgt die Approximation mithilfe der Tangente an die Barwertfunktion, sodass die Krümmung der konvexen Barwertfunktion nicht berücksichtigt wird. Der Approximationsfehler ist umso größer, je größer Δr ist und je gekrümmter die Kurve um das Ausgangszinsniveau r ist. Dies bedeutet, dass bei der Taylor-Approximation 1. Ordnung der Effekt steigender Zinsen (Barwertverfall) überschätzt und der Effekt fallender Zinsen (Barwertanstieg) unterschätzt wird. Die Approximation lässt sich durch eine Taylor-Approximation 2. Ordnung verbessern:

$$\Delta P(r) \approx P'(r)\cdot\Delta r + \tfrac{1}{2}P''(r)\cdot(\Delta r)^2.$$

Der Term $P''(r)\cdot(\Delta r)^2$ erfasst die absolute Barwertänderung aufgrund der Konvexität der Barwertkurve.

Definition 3.4 (Konvexität)**.** *Die **Absolute Konvexität** ist definiert durch*

$$\mathrm{CONV}^{A}(r) := P''(r).$$

*Der Ausdruck $\mathrm{CONV}(r) = P''(r)/P(r)$ heißt **Relative Konvexität**.*

Mithilfe der Konvexität lassen sich absolute und relative Barwertänderungen approximieren:

$$\begin{aligned}\Delta P(r) &\approx -\mathrm{DUR}^{A}(r)\cdot\Delta r + \frac{1}{2}\mathrm{CONV}^{A}(r)\cdot(\Delta r)^2,\\ \frac{\Delta P(r)}{P(r)} &\approx -\mathrm{DUR}^{M}(r)\cdot\Delta r + \tfrac{1}{2}\mathrm{CONV}(r)\cdot(\Delta r)^2.\end{aligned}$$

Das einfache Durationskonzept baut auf restriktiven Annahmen auf. Insbesondere wird eine flache Zinsstruktur, die nur einer einzigen anfänglichen deterministischen Änderung in einer bestimmten Form unterliegen darf, unterstellt. Für die Implementierung des Durationskonzepts in der Praxis sind die Erweiterung um mehrfache Änderungen sowie die Abbildung nicht-flacher Zinsstrukturen (Faktormodelle, Key Rate Duration) konzeptionell möglich und auch erforderlich.

3.2.3 Zinsderivate

Neben fest- und variabel verzinslichen Anleihen werden am Finanzmarkt eine Vielzahl komplexerer Zinsprodukte gehandelt. Typische Beispiele umfassen Forward-Kontrakte auf Bonds, Zinsswaps, Swaptions sowie Callable und Putable Bonds.

Forward-Kontrakt auf einen Bond. Forward-Kontrakte (siehe Seite 12) können sich insbesondere auf einen Bond als zugrunde liegenden Basistitel beziehen. Für Zeitpunkte $t < T_1 < T_2$ ist ein **Forward-Kontrakt** auf einen T_2-Bond (im Weiteren kurz für Nullkuponanleihe mit Maturität T_2 und normiertem Nennwert $N = 1$) mit Fälligkeit T_1 und in t festgelegtem **Forward-Preis** $F(t; T_1, T_2)$ die in t getroffene vertragliche Vereinbarung, in T_1 den T_2-Bond zum Preis $F(t; T_1, T_2)$ zu kaufen (**forward long**) bzw. zu verkaufen (**forward short**). Aus Sicht der Long-Partei resultiert hieraus im Zeitpunkt T_1 die Auszahlung

$$P(T_1, T_2) - F(t; T_1, T_2).$$

Der „faire" Forward-Preis wird zum Zeitpunkt t so bestimmt, dass der Wert des Forward-Kontrakts bei Vertragsabschluss in t gleich null ist. Die Herleitung kann ausgehend von der „no arbitrage"-Hypothese mit verschiedenen Argumentationslinien erfolgen, die zu jedoch konsistente Ergebnisse für den Forward-Preis liefern. Zum einen können zwei Strategien betrachtet werden, die in T_2 beide die Auszahlung 1 € liefern:

Strategie A:

- In t: Kauf eines T_2-Bonds auf Kredit, d. h. Kreditaufnahme der Höhe $P(t, T_2)$
- In T_1: Tilgung des Kredits durch die Zahlung $P(t, T_2)\frac{1}{P(t,T_1)}$

Strategie B:

- In t: Abschluss des Forward-Kontrakts (nach Voraussetzung kein Zahlungsfluß!)
- In T_1: Zahlung des Forward-Preises $F(t; T_1, T_2)$

Die Nettozahlung beider Strategien in t ist null, Zahlungen, deren Höhe bereits in t bekannt ist, erfolgen nur in T_1. Damit muss der „faire" Forward-Preis die sogenannte **Cost-of-Carry-Formel**

$$F(t; T_1, T_2) = \frac{P(t, T_2)}{P(t, T_1)} \tag{3.16}$$

erfüllen. Der Forward-Preis hängt nicht von einem speziellen Zinsmodell ab, sondern basiert auf zwei Datenpunkten der Diskontierungsfunktion.

Zum anderen kann der Forward-Preis durch risikoneutrale Bewertung der Auszahlung $P(T_1, T_2) - F(t; T_1, T_2)$ bestimmt werden. Ist Q ein äquivalentes Martingalmaß bezüglich des Numéraires Geldmarktfonds $(K_t)_{t \geq 0}$, so sind die diskontierten Preise der Nullkuponanleihen Martingale unter Q und für den Wert der Auszahlung des Forward-Kontrakts berechnet man

$$\begin{aligned} K_t \mathrm{E}_Q[\tfrac{1}{K_{T_1}}(P(T_1, T_2) - F(t; T_1, T_2))|\mathcal{F}_t] &= K_t \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{K_{T_1}} P(T_1, T_2)\middle|\mathcal{F}_t\right] - F(t; T_1, T_2) K_t \mathrm{E}_Q\left[\tfrac{1}{K_{T_1}}\middle|\mathcal{F}_t\right] \\ &= P(t, T_2) - F(t; T_1, T_2) P(t, T_1). \end{aligned}$$

Dieser Wert ist 0 genau dann, wenn der Forward-Preis $F(t; T_1, T_2)$ der Cost-of-Carry-Formel (3.16) genügt.

Zinsswap. Ein **Zinsswap** ist ein Finanzderivat, bei dem zwei Vertragsparteien vereinbaren, zu vorher festgesetzten zukünftigen Zeitpunkten Zinszahlungen auf Nennwerte zu tauschen. Zur Vereinfachung wird häufig nur die Differenz zwischen den Zinszahlungen ausgeglichen (Netting). Die Nennwerte stimmen in der Regel überein, sie können jedoch auch auf verschiedene Währungen lauten (**Zins-Währungs-Swap**). Typisch ist ein Austausch von festen Zinszahlungen gegen variable Zinszahlungen. Man unterscheidet begrifflich:

- **Payer Swap:** Swap aus Sicht der Vertragspartei, die den festen Zins zu zahlen hat und dafür den variablen Zinssatz erhält
- **Receiver Swap:** Swap aus Sicht der Vertragspartei, die den festen Zins erhält und dafür den variablen Zinssatz zu entrichten hat

Zinsswaps können zur Absicherung gegen Zinsänderungen dienen, erlauben aber auch auf diese zu spekulieren.

Formal wird ein Zinsswap beschrieben durch zukünftige Zeitpunkte $T_0 < T_1 < \ldots < T_n$ (T_n =Maturität), einen Nennwert N, einen festen Zinssatz r (**Swapsatz**) sowie einen variablen Zinssatz, etwa bei unterjährigen Zahlungen die aktuelle Spot Rate $r^e_{T_{k-1}}(T_k)$ in T_{k-1} für die Anlage von T_{k-1} bis T_k bei einfacher Verzinsung. Zur Vereinfachung gelte $T_k - T_{k-1} = \delta$, d. h. die Zeitpunkte sind äquidistant. Bei einem Payer Swap zahlt der Payer in jedem Zeitpunkt T_k, $k = 1, \ldots, n$, den festen Betrag $r\delta N$ und erhält dafür die variable Zinszahlung $r^e_{T_{k-1}}(T_k)\delta N$. Dies entspricht im Zeitpunkt T_k aus Sicht des Payers der Nettozahlung

$$(r^e_{T_{k-1}}(T_k) - r)\delta N.$$

Diese Nettozahlungen lassen sich als Differenz der Kuponzahlungen einer variabel und einer festverzinslichen Anleihe mit Nennwert N interpretieren. Da bei beiden Anleihetypen neben den Kuponzahlungen zur Maturität der Nennwert zurückgezahlt wird, ergibt sich insgesamt der Wert des Payer Swaps in $t \leq T_0$ als Differenz der Preise einer variabel verzinslichen Anleihe (3.15) und einer festverzinslichen Anleihe (3.14):

$$\Pi^p(t) = N\left(P(t, T_0) - P(t, T_n) - r\delta \sum_{k=1}^{n} P(t, T_k)\right). \tag{3.17}$$

Die Zahlungsströme von Payer und Receiver Swap sind entgegengerichtet, d. h. aus Sicht des Receivers erfolgt zum Zeitpunkt T_k die Nettozahlung $(r - r^e_{T_{k-1}}(T_k))\delta N$ und der Wert $\Pi^r(t)$ des Receiver Swaps in $t \leq T_0$ ist gegeben durch

$$\Pi^r(t) = -\Pi^p(t).$$

Die **Forward Swap Rate** $r_t^{\text{swap}}(T_n)$ in $t \leq T_0$ für Anlagen von t bis T_n ist der feste Swapsatz r, für den der Zinsswap aus Sicht beider Vertragsparteien „fair“ ist, d. h.

$$\Pi^p(t) = -\Pi^r(t) = 0$$

gilt. Ausgehend von der Bewertungsformel (3.17) des Payer Swaps lässt sich die Swap Rate aus den Preisen von Nullkuponanleihen berechnen:

$$r_t^{\text{swap}}(T_n) = \frac{P(t, T_0) - P(t, T_n)}{\delta \sum_{k=1}^{n} P(t, T_k)}. \tag{3.18}$$

Die Funktion $u \mapsto r_t^{\text{swap}}(u)$ wird als **Swap-Kurve** bezeichnet. Am Markt wird die Zinsstruktur über Swap Rates quotiert. Aus diesen können (durch Inversion von (3.18)) rekursiv Preise von Nullkuponanleihen und damit Spot Rates sowie Forward Rates berechnet werden.

Bemerkung 3.5 (Swaption)**.** *Auf Swap-Kontrakte können Optionen geschrieben werden. Diese nennt man - als Kombination der beiden Begriffe „Swap“ und „Option“ -* ***Swaption****. Eine* ***Europäische Payer Swaption*** *mit Swapsatz K beinhaltet das Wahlrecht (Option) in einen Payer Swap mit Swapsatz K zu einem zukünftigen bei Vertragsabschluss festgelegten Zeitpunkt einzutreten. Analog dazu entspricht eine* ***Europäische Receiver Swaption*** *mit Swapsatz K dem Wahlrecht in einen Receiver Swap mit Swapsatz K zu einem zukünftigen bei Vertragsabschluss festgelegten Zeitpunkt einzutreten.*

Callable und Putable Bonds. Ein **Callable Bond** beinhaltet für den Emittenten eines Bonds die Option, diesen vor der Maturität zurückzukaufen, also quasi ein **Kündigungsrecht**. Ein solches Recht bietet für den Emittenten eine „Absicherung“ gegen fallende Zinsen. Bei fallenden Zinsen ist es für den Emittenten sinnvoll zu kündigen und einen neuen Bond zu emittieren. Man unterscheidet zwischen einfach kündbaren (**single callables**) und mehrfach kündbaren (**multi callables**) Anleihen. Da der Käufer der Anleihe dem Emittenten ein Kündigungsrecht einräumt, ist die Verzinsung im Vergleich zu einer herkömmlichen Anleihe höher. Dies spiegelt sich in höheren Kuponzahlungen wider.

Bei einem **Putable Bond** hat der Käufer der Anleihe ein Kündigungsrecht (single/multi). Callable Bonds und Putable Bonds können synthetisch mithilfe einer Swaption generiert werden.

Lernergebnisse (B2-B3)
Die Studierenden können fest- und variabel verzinsliche Anleihen bewerten. Sie kennen typische Anwendungen von Standardbonds, die im Kurs vermittelt werden, und können diese in Fallstudien implementieren.
Die Studierenden kennen die grundlegenden Zinssensitivitäten (Duration, Konvexität) und können mithilfe dieser Sensitivitäten in Fallstudien die durch eine Zinsänderung induzierte Barwertänderung (absolut, relativ) approximativ quantifizieren.
Sie können grundlegende Zinsderivate wie Forward-Kontrakte auf Bonds oder Zinsswaps erläutern, deren Zahlungsströme bewerten und Anwendungen dieser Zinsprodukte beschreiben.

3.3 Zinsmodelle

Kerninhalte

- Bewertung in Short-Rate-Modellen
- Beispiele für Short-Rate-Modelle
- Erweiterungen und Alternativen: Heath-Jarrow-Morton-Ansatz, LIBOR-Marktmodell

Bewertung sowie Risikomessung und -management von Zinsderivaten erfordern stochastische Zinsmodelle, die im Bankenbereich seit Jahrzehnten etabliert sind. Im Versicherungsbereich sind stochastische Zinsmodelle für die marktkonsistente Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellungen oder von Versicherungsportfolien relevant, werden aber auch z. B. in internen Modellen zur Risikomessung unter Solvency II verwendet. Für Bewertungsfragen ist dabei die stochastische Modellierung und Simulation von Zinskurven unter einem geeigneten risikoneutralen Maß ausschlaggebend, während für die Risikomessung eine Modellierung bezüglich des statistischen Maßes erfolgt. Die Wahl des konkreten Zinsmodells und des zugrunde liegenden Maßes ist an den Anwendungszweck gebunden.

Einen einfachen - und deswegen in der Praxis gängigen - Ansatz zur stochastischen Zinsmodellierung bieten sowohl für Fragen der Bewertung als auch der Risikomessung **Short-Rate-Modelle**. **Short-Rate-Modelle** (im einfachsten Fall: Ein-Faktor-Modelle) beschreiben die Dynamik der Short Rate durch einen Diffusionsprozess

$$dr_t = b(t, r_t)\,dt + \sigma(t, r_t)\,dW_t, \tag{3.19}$$

gegeben als Lösung einer **stochastischen Differentialgleichung** (SDE)[11], bzw. allgemeiner durch einen Itô-Prozess. Hierbei sind b und σ deterministische Funktionen und W bezeichnet eine Brownsche Bewegung unter dem entsprechenden Wahrscheinlichkeitsmaß. Im Folgenden liegt der Fokus auf dem Bewertungsaspekt.

[11] Siehe: Leitfaden „Grundwissen Angewandte Stochastik“, Abschnitt 6.6

3.3.1 Short-Rate-Modelle: Bewertung

Basis eines Finanzmarktmodells zur Bewertung von Zinsprodukten ist ein filtrierter Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P)$, der Zufall und Information beschreibt. P ist das statistische Wahrscheinlichkeitsmaß. Die Short-Rate ist ein adaptierter Prozess $(r_t)_{t\geq 0}$, dessen Dynamik unter P durch die SDE (3.19) bestimmt ist. Im Bewertungsmodell wird der Geldmarktfonds

$$K_t = e^{\int_0^t r_s ds}$$

als Numeráire gewählt. Ist der Geldmarktfonds Numeráire und einziges primäres Produkt, dann sind die Modelle im Allgemeinen unvollständig.

Die **Arbitrage-Pricing-Theorie** impliziert eine konsistente Bewertung in Modellen für die Short-Rate. Zentrale Produkte sind alle Nullkuponanleihen $t \mapsto P(t,T)$, $P(T,T) = 1$. In Abwesenheit von Arbitrage existiert nach dem 1. Fundamentalsatz ein äquivalentes Martingalmaß Q, sodass die diskontierten Preise $P(t,T)/K_t$ $(t \leq T)$ ein Q-Martingal für alle $T > 0$ bilden. Risikoneutrale Bewertung mittels eines geeigneten Martingalmaßes liefert

$$P(t,T) = \mathrm{E}_Q[e^{-\int_t^T r_s ds} | \mathcal{F}_t]. \tag{3.20}$$

Der **Satz von Girsanov** beschreibt alle äquivalenten Maße. Jeder Maßwechsel wird kodiert durch einen adaptierten stochastischen Prozess θ, sodass die Radon-Nikodým-Dichte gegeben ist durch

$$\tfrac{dQ}{dP} = \exp\left(-\int_0^\infty \theta_u dW_u - \frac{1}{2}\int_0^\infty \theta_u^2 du\right).$$

Dann ist der Prozess $\tilde{W} = (\tilde{W}_t)_{t\geq 0}$, definiert durch $d\tilde{W}_t = dW_t + \theta_t dt$, eine Brownsche Bewegung unter Q. Das Maß Q liefert ein arbitrage-freies Pricing. Die Dynamik der Short Rate $(r_t)_{t\geq 0}$ und der Bond-Preise $t \mapsto P(t,T)$ lässt sich unter Q bestimmen:

$$dr_t = (b_t - \theta_t \sigma_t)dt + \sigma_t d\tilde{W}_t, \quad dP(t,T) = P(t,T)\big(r_t dt + v(t,T)d\tilde{W}_t\big)$$

Unter dem Ausgangsmaß P ergibt sich somit:

$$dP(t,T) = P(t,T)\Big\{(r_t + v(t,T)\theta_t)\,dt + v(t,T)\,dW_t\Big\}$$

Die Größe $\theta_t = (\text{Instantaneous Return} - r_t)/v(t,T)$, wobei „Instanteneous Return“ der Drift des Renditeprozesses $dP(t,T)/P(t,T)$ unter P entspricht, heißt **Market Price of Risk** und kann als lokale Risikoprämie interpretiert werden. Wird nur der Geldmarktfonds im theoretischen Modell als primärer Preisprozess und Numeraire gewählt, dann ist jedes Maß $Q \sim P$ ein äquivalentes Martingalmaß (Unvollständigkeit) und liefert Modellpreise (3.20). Ein Short-Rate-Modell ist ohne die exogene Festlegung des Market Price of Risk nicht vollständig spezifiziert.

In der Praxis fixiert man daher die Dynamik der Short-Rate und das Bewertungsmaß Q direkt in einer gut handhabbaren, parametrischen Klasse von Modellen. Diese sind arbitrage-frei und werden implizit als vollständig angenommen. Ein typisches Beispiel ist die Familie der **Vasicek-Modelle**

$$dr_t = (b + \beta r_t)\,dt + \sigma\,d\tilde{W}_t$$

mit den a priori unbekannten Parametern b, β und $\sigma > 0$ und einer Brownschen Bewegung $\tilde{W}$ unter Q. Jede Wahl der Parameter in der parametrischen Klasse von Short-Rate-Modellen beschreibt eine stochastische Entwicklung der Short-Rate unter dem zugehörigen Q und liefert mittels risikoneutraler Bewertung Modellpreise für Zinsprodukte.

Die **Modellkalibrierung** in der parametrischen Klasse erfolgt zum aktuellen Zeitpunkt $t = 0$ mittels bekannter Marktpreise liquide gehandelter Zinsprodukte, die die Zinsstruktur kodieren. So ist zum Kalibrierungszeitpunkt $t = 0$ u. a. die Startzinskurve $T \mapsto P(0,T)$, ausgedrückt über Preise von Nullkuponanleihen (zumindest für bestimmte diskrete Zeitpunkte) bekannt. Für ein gegebenes Modell müssen die Modellparameter so gewählt werden, dass die Zinskurve möglichst gut repliziert wird.

3.3.2 Affine Modelle und Beispiele für Short-Rate-Modelle

Affine Zinsstrukturmodelle erlauben deutlich vereinfachte Preisformeln und besitzen für wichtige Beispiele geschlossene Preisformeln für Nullkuponanleihen, die eine effiziente Kalibrierung der Modellparameter unterstützen.

Definition 3.6 (Affines Modell)**.** *Ein Short-Rate-Modell*

$$dr_t = b(t, r_t)\,dt + \sigma(t, r_t)\,d\tilde{W}_t$$

(mit deterministischen Funktionen b und σ) besitzt eine affine Zinsstruktur, falls für jedes $T > 0$ die Preise der Nullkuponanleihen $P(t, T)$ von der Form

$$P(t, T) = \exp(-A(t, T) - B(t, T)r_t) \tag{3.21}$$

für deterministische Funktionen $A(\cdot, T)$ und $B(\cdot, T)$ sind.

Man kann zeigen, dass eine affine Zinsstruktur genau dann vorliegt, wenn die Funktionen b und σ von der Form

$$b(t, r) = b(t) + \beta(t)r, \quad \sigma^2(t, r) = a(t) + \alpha(t)r$$

für stetige Funktion b, β, a, α sind, und die Funktionen A und B für alle $t \leq T$ die **Riccati-Gleichungen** lösen:

$$\begin{aligned}
\partial_t A(t, T) &= \tfrac{1}{2}a(t)B^2(t, T) - b(t)B(t, T), \quad A(T, T) = 0, \\
\partial_t B(t, T) &= \tfrac{1}{2}\alpha(t)B^2(t, T) - \beta(t)B(t, T) - 1, \quad B(T, T) = 0.
\end{aligned}$$

Hierbei handelt es sich um gewöhnliche Differentialgleichungen. Im Folgenden werden Beispiele für Short-Rate-Modelle im Kontext affiner Modelle vorgestellt.

Vasicek-Modell. Das Vasicek-Modell ist ein affines Modell, das die Dynamik der Short-Rate durch die SDE

$$dr_t = (b + \beta r_t)\,dt + \sigma\,d\tilde{W}_t$$

beschreibt. Deren explizite Lösung ist gegeben durch

$$r_t = r_0 e^{\beta t} + \tfrac{b}{\beta}\left(e^{\beta t} - 1\right) + \sigma e^{\beta t}\int_0^t e^{-\beta s}d\tilde{W}_s.$$

Aus probabilistischer Sicht handelt es sich dabei um einen **Ornstein-Uhlenbeck-Prozess**. Dieser zählt zu den Gauß'schen Prozessen, und es gilt:

$$\mathrm{E}_Q[r_t] = r_0 e^{\beta t} + \tfrac{b}{\beta}\left(e^{\beta t} - 1\right), \quad \mathrm{Var}_Q(r_t) = \sigma^2 e^{2\beta t}\int_0^t e^{-2\beta s}ds = \tfrac{\sigma^2}{2\beta}\left(e^{2\beta t} - 1\right).$$

Insbesondere nimmt die Short Rate mit positiver Wahrscheinlichkeit negative Werte an, d. h. $Q[r_t < 0] > 0$ für alle $t > 0$. Das Vasicek-Modell liefert mit den Funktionen

$$B(t, T) = \tfrac{1}{\beta}\left(e^{\beta(T-t)} - 1\right), \quad A(t, T) = \tfrac{\sigma^2(4e^{\beta(T-t)} - e^{2\beta(T-t)} - 2\beta(T-t) - 3)}{4\beta^3} + b\tfrac{e^{\beta(T-t)} - 1 - \beta(T-t)}{\beta^2}$$

Bondpreise (3.21) in geschlossener Form ebenso wie Preise vieler Zinsoptionen. Es besitzt jedoch Schwächen in Bezug auf die Gestalt und die Dynamik der Zinskurven.

Ist $\beta < 0$, so strebt die Short Rate im Vasicek-Modell mit Geschwindigkeit β („speed of mean reversion") gegen $r_\infty := b/|\beta|$ („mean reversion level") und stabilisiert sich demnach langfristig. Die Limesverteilung für $t \to \infty$ ist Gauß'sch mit Erwartungswert $b/|\beta|$ und Varianz $\sigma^2/(2|\beta|)$. Ebenso gilt im Vasicek-Modell für die langfristige Spot-Rate (bei stetiger Verzinsung)

$$\lim_{T\uparrow\infty} r_t(T) = \lim_{T\uparrow\infty}(-\tfrac{1}{T-t}\ln P(t, T)) = -\tfrac{b}{\beta} - \tfrac{1}{2}\tfrac{\sigma^2}{\beta^2}.$$

Somit sind die langfristige Short-Rate r_∞ und die langfristige Spot Rate Modellinvarianten.

Cox-Ingersoll-Ross-Modell (CIR). Im CIR-Modell ist die Dynamik der Short Rate gegeben durch die SDE

$$dr_t = (b + \beta r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}\,d\tilde{W}_t.$$

Dieses affine Modell unterscheidet sich vom Vasicek-Modell nur hinsichtlich der Volatilität. Eine explizite Lösung existiert nicht; Existenz und Eindeutigkeit einer nicht-negativen Lösung wurden jedoch für $r_0 \geq 0$ von Feller nachgewiesen, zu dessen Ehren der Prozess auch Feller-Diffusion genannt wird. Die Lösung ist strikt positiv, falls $b \geq \sigma^2/2$ und $r_0 > 0$. Die Short-Rate im CIR-Modell strebt für $\beta < 0$ ebenfalls gegen einen Gleichgewichtslevel („Mean Reversion"). Bond-Preise sowie Preise vieler Zinsoptionen lassen sich in geschlossener Form angeben.

Hull-White-Modell. Das Vasicek-Modell und das CIR-Modell besitzen in Bezug auf die Startzinskurven nicht genug Flexibilität. Eine einfache Modellerweiterung des Vasicek-Modells, die diesen Mangel behebt, ist das Hull-White-Modell. Dabei wird der Driftparameter b zu einer deterministischen Funktion $b(t)$ erweitert:

$$dr_t = (b(t) + \beta r_t)\,dt + \sigma\,d\tilde{W}_t.$$

Aufgrund dieser Konstruktion spricht man auch von einem **Extended Vasicek Model**. Nach Wahl von σ und β kann das Modell durch Bestimmung von $b(t)$ perfekt an die aktuelle Startzinskurve kalibriert werden. Der Short-Rate-Prozess besitzt für $\beta < 0$ eine zeitabhängige Mean-Reversion. Er ist ein Gauß'scher Prozess, d. h. die Lösung kann negativ werden.

Im Hull-White-Modell können viele wichtige Zinsprodukte mit analytischen Formeln bewertet werden, z. B. Call- und Put-Optionen auf Nullkuponanleihen, Caps, Floors und Swaptions. Dies erleichtert die Anwendung des Modells in der Praxis.

3.3.3 Ausblick: Alternative Ansätze

Für viele Praxisanwendungen sind Ein-Faktor-Modelle für die Short Rate aufgrund ihrer Einfachheit nicht angemessen, sodass sich Erweiterungen und Alternativen etabliert haben. Mehr Flexibilität in Bezug auf die Dynamik der Zinskurven bieten **Multi-Faktor-Modelle** für die Short Rate. Hierbei werden Ein-Faktor-Short-Rate-Modelle r^k als Bausteine genommen und kombiniert, etwa $r = \sum r^k$.

Anstelle der Short Rate kann man auch die Dynamik der Forward Rates als Ausgangspunkt der Modellierung verwenden. Ein allgemeinerer Ansatz - bekannt als **Heath-Jarrow-Morton-Ansatz** (kurz: HJM) - modelliert für $T > 0$ die Dynamik der Forward-Rates unter dem statistischen Maß in der Form

$$df_t(T) = \alpha(t,T)\,dt + \sigma(t,T)\,dW_t,$$

wobei als Risikotreiber eine mehrdimensionale Brownsche Bewegung verwendet wird. Die Arbitragefreiheit des Modells muss wiederum explizit untersucht werden und erfordert Bedingungen (**HJM-Drift-Condition**). Short Rate Modelle sind Spezialfälle.

Short Rates und kurzfristige Forward-Raten (Basis von HJM) sind jedoch nicht einfach zu schätzen. Als Alternative haben sich daher sogenannte Marktmodelle etabliert, die am Markt beobachtbare Zinssätze im Zeitablauf direkt modellieren. **LIBOR-Modelle** modellieren dabei die LIBOR Forward Rates, das **Swap-Market-Modell** setzt auf Swap Rates auf. Marktmodelle sind per Konstruktion zinsstrukturkonform.

Lernergebnisse (B3)
Die Studierenden sind mit den Grundzügen der Bewertung in Short-Raten-Modellen vertraut. Sie können grundlegende Beispiele für Short-Rate-Modelle erläutern. Die Studierenden können einen Ausblick auf alternative Modellierungsansätze (Heath-Jarrow-Morton-Ansatz, LIBOR-Marktmodell) geben.

3.4 Risikoneutrale Bewertung klassischer Aktienderivate in Binomialbäumen[12]

Kerninhalte

- Aktienderivate: Europäische Call- und Put-Optionen, Exotische Optionen, Amerikanische Optionen
- Binomialmodell von Cox-Ross-Rubinstein: Modellbildung, Arbitragefreiheit und Vollständigkeit, äquivalentes Martingalmaß
- Bewertung und Absicherung von Contingent Claims im Binomialmodell

Grundaufgaben der Finanzmathematik sind die **Bewertung** (Pricing) von Derivaten, wie z. B. Call- und Put-Optionen auf Aktien, sowie die **Konstruktion von Absicherungsstrategien** (Hedging) gegen die zufälligen Auszahlungen eines Derivats. Startpunkt der Analyse ist dabei die Spezifikation eines Finanzmarktmodells, insbesondere also eines stochastischen Modells für den Preisprozess der betrachteten Aktie. Hierfür kommt a priori grundsätzlich eine Vielzahl von Modellen unterschiedlicher Komplexität in Frage, wobei die Modellwahl durchaus erheblichen Einfluß auf die berechneten Preise haben kann. Der Modellierer muss das Modell unter verschiedenen Aspekten (mathematische Handhabbarkeit, Kompatibilität des Modells mit empirischen Beobachtungen, ...) wählen. Unabhängig davon ist bei der Verwendung der Modellergebnisse die **Knight'sche Unsicherheit** zu beachten (siehe Abschnitt 4.1).

Ein einfaches und gut handhabbares Modell für den Preisprozess einer Aktie ist das **Binomialmodell** von Cox-Ross-Rubinstein, auch **Cox-Ross-Rubinstein-Modell** genannt. Dieses erlaubt für beliebige Europäische Contingent Claims eine rekursive Berechnung des Werts entlang eines Binomialbaums und liefert für Standardoptionen sogar geschlossene Bewertungsformeln.

3.4.1 Klassische Aktienderivate

Ein Aktienderivat ist ein Finanzkontrakt, dessen Auszahlung (bzw. allgemeiner dessen Zahlungsstrom) sich aus dem realisierten Kursverlauf einer Aktie ableitet. Formal - in einem zeitdiskreten Kontext für einen Aktienpreisprozess $(S_t)_{t=0,1,\dots,T}$ und eine terminale Auszahlung C_T - ausgedrückt:

$$C_T = f(S_0, S_1, \dots, S_T) \quad \text{für eine Funktion } f.$$

Typische Beispiele sind Europäische Aktienoptionen. Diese verbriefen das Recht zur Ausübung einer Option zu einem im Vertrag festgelegten Ausübungszeitpunkt. Elementare Beispiele, bei denen die Auszahlung nur durch den Aktienkurs zur Maturität T bestimmt ist, sind Europäische Call- und Put-Optionen (vgl. Seite 12):

- **Europäische Call-Option:** $C_T^{\text{call}} = (S_T - K)^+$ für einen Ausübungspreis (Strike) $K > 0$
- **Europäische Put-Option:** $C_T^{\text{put}} = (K - S_T)^+$ für einen Ausübungspreis (Strike) $K > 0$

Es gibt jedoch auch **exotische Optionen**, bei denen der gesamte Kursverlauf für die Höhe der Auszahlung relevant ist. Beispiele sind:

- **Up-and-in Call-Option**: Der Halter der Option besitzt das Recht zur Maturität T eine Aktie zum Ausübungspreis K zu erwerben, sofern der Aktienpreis bis dahin eine Schranke $B > \max\{S_0, K\}$ überschritten hat. Formal entspricht dies der terminalen Auszahlung
$$C_T^{\text{call,up\&in}} = \begin{cases} (S_T - K)^+ & \text{falls } \max_{0\le t\le T} S_t \ge B, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

[12] Die folgenden Ausführungen orientieren sich am Lehrbuch Föllmer, H.; Schied, A.: *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter, 4. Auflage, 2016, Kapitel 5.

- **Up-and-out Call-Option:** Der Halter der Option besitzt das Recht zur Maturität T eine Aktie zum Ausübungspreis K zu erwerben, sofern der Aktienpreis bis dahin eine Schranke $B > \max\{S_0, K\}$ nicht überschritten hat. Formal entspricht dies der terminalen Auszahlung

$$C_T^{\text{call,up\&out}} = \begin{cases} 0 & \text{falls } \max_{0\le t\le T} S_t \ge B, \\ (S_T - K)^+ & \text{sonst.} \end{cases}$$

- **Lookback Put-Option:** $C_T^{\text{put,max}} := \max_{0\le t\le T} S_t - S_T$

Bemerkung 3.7. *Europäische Optionen beinhalten einen festen Ausübungszeitpunkt, zu dem das Optionsrecht genutzt werden kann. Eine Option, deren Halter diese zu jedem beliebigen Zeitpunkt bis und einschließlich zur Maturität ausüben kann, heißt* ***Amerikanische Option****. Dieses vorzeitige Ausübungsrecht bedingt, dass eine Amerikanische Option stets mindestens soviel wie die entsprechende Europäische Option wert ist. Zwischen Amerikanischen und Europäischen Optionen stehen die* ***Bermuda-Optionen****, bei denen die vorzeitige Ausübung nur zu einer endlichen Anzahl vertraglich festgelegter Zeitpunkte erfolgen kann. Bewertung und Absicherung Amerikanischer Optionen sind nicht Gegenstand dieses Basiskurses.*

3.4.2 Binomialmodell

Das Binomialmodell (bzw. Cox-Ross-Rubinstein-Modell) ist ein zeitdiskretes Finanzmarktmodell mit T Handelsperioden. Es besteht aus einer risikofreien Anlage

$$S_t^0 := (1+r)^t, \quad t = 0, \dots, T,$$

mit einem deterministischen Zins $r > -1$ und einer risikobehafteten Anlage (Aktie) $S := S^1$, für die in jeder Handelsperiode eine prozentuale „Aufwärtsbewegung" mit einem Faktor u („Up"-Faktor) und eine prozentuale „Abwärtsbewegung" mit einem Faktor d („Down"-Faktor) ($0 < d < u$) unterstellt wird. Damit springt der Aktienpreis ausgehend von S_{t-1} entweder auf den höheren Wert $S_t = S_{t-1}u$ oder auf den niedrigeren Wert $S_t = S_{t-1}d$.

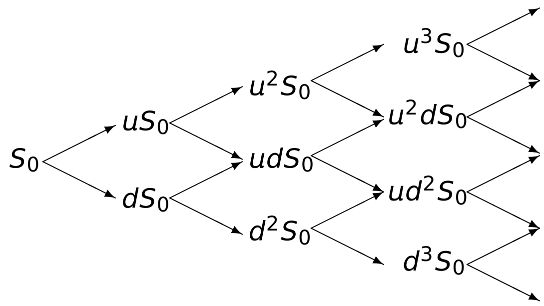

Abbildung 1: Entwicklung des Aktienpreises im Binomialmodell

Ziel dieses Abschnitts ist, im Kontext des Binomialmodells explizite Formeln für den arbitragefreien Preis und für die replizierende Handelsstrategie für Finanzderivate zu ermitteln.

Das Binomialmodell wird formal konstruiert auf dem Grundraum

$$\Omega := \{d, u\}^T = \{\omega = (y_1, \dots, y_T) | y_i \in \{d, u\}, i = 1, \dots, T\}.$$

Bezeichnet man nun mit $Y_t(\omega) := y_t$ für $\omega = (y_1, \dots, y_T)$ die Projektion auf die t-te Koordinate, so kann der Preisprozess der Aktie für einen konstanten Startwert $S_0 > 0$ modelliert werden durch

$$S_t(\omega) := S_0 \prod_{k=1}^{t} Y_k(\omega) = S_0 \cdot d^{t-N_t(\omega)} \cdot u^{N_t(\omega)}, \quad \omega \in \Omega,$$

wobei $N_t(\omega) := \#\{1 \le s \le t | y_s = u\}$ die Anzahl der Aufwärtsbewegungen bis t ist. Insbesondere ist der logarithmierte Preisprozess ein Random Walk:

$$\ln(S_t) = \ln(S_0) + \sum_{k=1}^{t} \ln(Y_k).$$

Die Informationsstruktur ist über die Filtration

$$\mathcal{F}_t := \sigma(S_0, \dots, S_t), \quad t = 0, \dots, T,$$

gegeben. Hierbei gilt $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\}$, $\mathcal{F}_t = \sigma(Y_1, \dots, Y_t)$ und $\mathcal{F} := \mathcal{F}_T$ stimmt mit der Potenzmenge von Ω überein.

Im Folgenden wird ein beliebiges Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ mit $P[\{\omega\}] > 0$ für alle $\omega \in \Omega$ fixiert, das als statistisches Maß fungiert.

Das so definierte Modell nennt man **Binomialmodell** oder **CRR-Modell**. Das folgende Theorem charakterisiert die Parameter d, u, r, für die das Modell arbitrage-frei ist.

Theorem 3.8 (Arbitragefreiheit und Vollständigkeit des Binomialmodells)**.** *Das Binomialmodell ist **arbitrage-frei** genau dann, wenn $d < 1 + r < u$. In diesem Fall ist das Binomialmodell **vollständig**, und es gibt ein eindeutiges äquivalentes Martingalmaß Q. Das Martingalmaß Q ist charakterisiert durch die Eigenschaft, dass die Zufallsvariablen $Y_1, \dots, Y_T$ stochastisch unabhängig unter Q sind mit Verteilung*

$$Q[Y_t = u] = q := \frac{1 + r - d}{u - d}, \quad t = 1, \dots, T.$$

Insbesondere gilt aufgrund der Unabhängigkeit

$$Q[\{\omega\}] = (1 - q)^{T - N_T(\omega)} \cdot q^{N_T(\omega)}, \quad \omega \in \Omega,$$

und in jedem Knoten sind die Übergangswahrscheinlichkeiten unter Q gegeben durch

$$Q[Y_{t+1} = u | \mathcal{F}_t] = q \quad \text{bzw.} \quad Q[Y_{t+1} = d | \mathcal{F}_t] = 1 - q.$$

Im Folgenden wird ein arbitrage-freies Binomialmodell betrachtet; Q bezeichnet das eindeutige äquivalente Martingalmaß. Hierbei ist zu beachten, dass Q - und damit die Bewertung jedes Derivats - vollkommen unabhängig von der ursprünglichen Spezifikation des statistischen Wahrscheinlichkeitsmaßes P ist.

3.4.3 Bewertung und Absicherung im Binomialmodell

Ziel ist, im Kontext des Binomialmodells die **Bewertung** und die **Absicherung** eines gegebenen Derivats mit terminaler Auszahlung C_T ($\mathcal{F}_T$-messbare Zufallsvariable) zu diskutieren. Die Auszahlung C_T besitzt aufgrund der Messbarkeitseigenschaft für eine Funktion f die Darstellung

$$C_T = f(S_0, \dots, S_T).$$

Proposition 3.9 (Risikoneutrale Bewertung im Binomialmodell)**.** *Der Wertprozess*

$$V_t = S_t^0 \mathrm{E}_Q \left[\frac{C_T}{S_T^0} \middle| \mathcal{F}_t \right], \quad t = 1, \dots, T,$$

einer replizierenden Handelsstrategie für C_T (und damit die arbitrage-freien Preise) ist von der Form

$$V_t(\omega) = v_t(S_0, S_1(\omega), \dots, S_t(\omega)),$$

wobei die Funktion v_t gegeben ist durch

$$v_t(x_0, \dots, x_t) = (1 + r)^{-(T-t)} \mathrm{E}_Q \left[f\left(x_0, \dots, x_t, x_t \frac{S_1}{S_0}, \dots, x_t \frac{S_{T-t}}{S_0} \right) \right]. \tag{3.22}$$

Da der Wertprozess $(V_t)_{0\le t\le T}$ aufgrund der Projektivität der bedingten Erwartung durch die Rekursion

$$V_T := C_T \quad \text{und} \quad V_t = \frac{1}{1+r} \mathrm{E}_Q[V_{t+1}|\mathcal{F}_t], \quad t = T-1, \dots, 0,$$

charakterisiert ist, ergibt sich für die Funktionen v_t, definiert in (3.22), die Rekursionsformel:

$$\begin{aligned} v_T &= f(x_0, \dots, x_T) \\ v_t &= \frac{1}{1+r}[q \cdot v_{t+1}(x_0, \dots, x_t, x_t u) + (1-q) \cdot v_{t+1}(x_0, \dots, x_t, x_t d)]. \end{aligned}$$

Dieses allgemeingültige Rekursionsschema erlaubt eine effiziente numerische Berechnung.

Direkte Berechnungen des Wertprozesses in geschlossenen Formeln sind insbesondere in folgenden Spezialfällen möglich:

Spezialfall I. Ist die diskontierte Auszahlung $C_T = f(S_T)$ nur vom Aktienkurs zum terminalen Zeitpunkt T abhängig, so hängt V_t nur vom gegenwärtigen Wert S_t der Aktie ab, d. h.

$$V_t(\omega) = v_t(S_t(\omega)).$$

Weiterhin reduziert sich Formel (3.22) für v_t zu einem Erwartungswert bezüglich einer Binomialverteilung mit Parameter q:

$$v_t(x_t) = (1+r)^{-(T-t)} \sum_{k=0}^{T-t} f(x_t d^{T-t-k} u^k) \binom{T-t}{k} q^k (1-q)^{T-t-k}.$$

Insbesondere ist der eindeutige arbitrage-freie Preis von C_T in $t = 0$ gegeben durch

$$v_0(S_0) = (1+r)^{-T} \sum_{k=0}^{T} f(S_0 d^{T-k} u^k) \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k}.$$

Bemerkung 3.10 (Preise Europäischer Call- und Put-Optionen im Binomialmodell)**.** *Für die Funktionen $f(x) = (x-K)^+$ oder $f(x) = (K-x)^+$ ergeben sich hieraus unmittelbar Formeln für den arbitrage-freien Preis der Europäischen Call-Option bzw. Europäischen Put-Option mit Ausübungspreis K. So ist beispielsweise der Preis von $C_T^{\mathrm{call}} := (S_T - K)^+$ gegeben durch*

$$C_0^{\mathrm{call}} = \frac{1}{(1+r)^T} \sum_{k=0}^{T} (S_0 d^{T-k} u^k - K)^+ \binom{T}{k} q^k (1-q)^{T-k}.$$

Spezialfall II. Für Exotische Optionen wie z. B. die Up-and-in Call-Option oder den Lookback Put ist der Contingent Claim von der Form $C_T := f(S_T, M_T)$, wobei

$$M_t := \max_{0\le s\le t} S_t, \quad 0 \le t \le T$$

das laufende Maximum des Preisprozesses $(S_t)_{0\le t\le T}$ bezeichnet. In diesem Fall ist der Wertprozess von der Form $V_t = v_t(S_t, M_t)$ mit

$$v_t(x_t, m_t) = (1+r)^{-(T-t)} \mathrm{E}_Q \left[f(x_t \frac{S_{T-t}}{S_0}, \max \left\{ m_t, x_t \frac{M_{T-t}}{S_0} \right\} \right],$$

da $\max_{t\le u\le T} S_u/S_t$ unabhängig von $\mathcal{F}_t$ ist und dieselbe Verteilung wie M_{T-t}/S_0 unter Q besitzt. Für die Bewertung ist folglich die gemeinsame Verteilung von (S_{T-t}, M_{T-t}) unter Q zu bestimmen. Dies erfolgt mithilfe des sogenannten **Spiegelungsprinzips** und führt zu geschlossenen Bewertungsformeln für bestimmte Exotische Optionen.

Neben der Bewertung des Derivats $C_T = f(S_0, \dots, S_T)$ ist die Herleitung einer **Absicherungsstrategie** $\bar{\vartheta} = (\vartheta^0, \vartheta)$ von zentraler Bedeutung. Diese ergibt sich durch rekursives Lösen linearer Gleichungssysteme in jedem Knoten.

Proposition 3.11 (Hedging im Binomialmodell)**.** *Die Absicherungsstrategie ist gegeben durch*

$$\vartheta_t(\omega) = \Delta_t(S_0, S_1(\omega), \dots, S_{t-1}(\omega))$$

mit

$$\Delta_t(x_0, \dots, x_{t-1}) := \frac{v_t(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}u) - v_t(x_0, \dots, x_{t-1}, x_{t-1}d)}{x_{t-1}u - x_{t-1}d}.$$

Der Ausdruck Δ_t in der Absicherungsstrategie kann als diskrete „Ableitung" der Wertfunktion v_t bezüglich der möglichen Änderungen des Aktienkurses interpretiert werden. Eine Absicherungsstrategie, die auf einer Ableitung des Wertprozesses basiert, wird **Delta-Hedge** genannt.

Lernergebnisse (B3)
Die Studierenden kennen klassische Aktienderivate und verstehen, dass zur Bewertung und Absicherung dieser Derivate geeignete Finanzmarktmodelle zu spezifizieren sind.
Die Studierenden können das Binomialmodell beschreiben, kennen Bedingungen für dessen Arbitragefreiheit sowie Vollständigkeit und können das eindeutige äquivalente Martingalmaß angeben. Sie können in Anwendungsbeispielen den arbitrage-freien Preis eines Contingent Claims durch risikoneutrale Bewertung sowie eine Absicherungsstrategie bestimmen.

3.5 Vom Binomialmodell zum Black-Scholes-Modell

Kerninhalte

- Konvergenz von arbitrage-freien Preisen im Binomialmodell gegen Black-Scholes-Preise
- Black-Scholes-Formel für Europäische Call- und Put-Optionen
- Grundlagen des zeitstetigen Black-Scholes-Modells

3.5.1 Konvergenz gegen den Black-Scholes-Preis[13]

Zwischen dem aktuellen Zeitpunkt $t = 0$ und der Maturität T eines Europäischen Contingent Claims kann eine große Anzahl von Handelsperioden liegen bzw. ein Portfolio kann in sehr kleinen Zeitabschnitten adjustiert werden. Dies bedeutet, dass die Berechnung von Optionspreisen mithilfe der risikoneutralen Bewertung im zeitdiskreten Modellrahmen aufwändig sein kann. Man kann jedoch hoffen, dass die Preisformeln in diskreter Zeit gegen einen transparenten Grenzwert konvergieren, wenn die Anzahl der Handelsperioden wächst. In diesem Abschnitt werden Bedingungen für diese Konvergenz formuliert und die Brücke zum Black-Scholes-Preis geschlagen.

Im Folgenden bezeichnet T nicht die Anzahl der Handelsperioden in einem bestimmten Finanzmarktmodell in diskreter Zeit, sondern einen zukünftigen Zeitpunkt. Das Zeitintervall $[0, T]$ wird in N äquidistante Zeitschritte $\frac{T}{N}, \frac{2T}{N}, \dots, \frac{NT}{N}$ zerlegt, und der Zeitpunkt $\frac{kT}{N}$, $k = 0, 1, \dots, N-1$, wird als k-ter Handelszeitpunkt eines arbitrage-freien Finanzmarktmodells aufgefasst. Zur Vereinfachung wird angenommen, dass jedes approximierende Marktmodell nur aus einem risikofreien Bond und einer Aktie besteht. In der N-ten Approximation wird der Preisprozess der Aktie mit $S^{(N)}$ bezeichnet und die Wertentwicklung des risikofreien Bonds ist durch den konstanten Periodenzins $r_N > -1$ festgelegt.

Der entscheidende Punkt ist nun, ob die Preise der Contingent Claims in den approximierenden Marktmodellen für $N \uparrow \infty$ konvergieren. Für die weitere Analyse werden die folgenden Annahmen getroffen:

[13] Die folgenden Ausführungen orientieren sich am Lehrbuch Föllmer, H.; Schied, A.: *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter, 4. Auflage, 2016, Kapitel 5.

- **Bond:** Da die Endwerte der risikofreien Bonds konvergieren sollten, wird
$$\lim_{N\uparrow\infty}(1+r_N)^N = e^{rT}$$
für eine endliche Konstante r angenommen. Dies ist äquivalent zu $\lim_{N\uparrow\infty} Nr_N = rT$.

- **Aktie:** Es gilt $S_0^{(N)} = S_0$ für eine Konstante $S_0 > 0$, d. h. die Startpreise sind unabhängig von N. Die Preise $S_k^{(N)}$ sind Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_N, \mathcal{F}^{(N)}, Q^{(N)})$, wobei $Q^{(N)}$ ein risikoneutrales Maß für jedes approximierende Marktmodell sei. Dies bedeutet, dass der diskontierte Preisprozess
$$\tilde{S}_k^{(N)} = S_k^{(N)}/(1+r_N)^k, \quad k = 0, \ldots, N,$$
ein $Q^{(N)}$-Martingal bezüglich der Filtration $\mathcal{F}_k^{(N)} = \sigma(S_1^{(N)}, \ldots, S_k^{(N)})$ ist. Die übrigen Annahmen sind bezüglich der Zuwächse
$$Y_k^{(N)} = S_k^{(N)}/S_{k-1}^{(N)}, \quad k = 1, \ldots, N,$$
formuliert. Erstens wird angenommen, dass für jedes N die Zufallsvariablen $Y_1^{(N)}, \ldots, Y_N^{(N)}$ stochastisch unabhängig unter $Q^{(N)}$ sind und die Bedingung
$$0 < \alpha_N \leq Y_k^{(N)} \leq \beta_N, \quad k = 1, \ldots, N,$$
für Konstanten α_N und β_N mit $\lim_{N\uparrow\infty} \alpha_N = \lim_{N\uparrow\infty} \beta_N = 1$ erfüllen. Zweitens wird postuliert, dass die Varianzen $\mathrm{Var}_N(Y_k^{(N)})$ unter $Q^{(N)}$ der folgenden Bedingung genügen:
$$\sigma_N^2 := \frac{1}{T}\sum_{k=1}^{N} \mathrm{Var}_N(Y_k^{(N)}) \to \sigma^2 \in (0, \infty).$$

Das folgende Resultat kann als multiplikative Version des **Zentralen Grenzwertsatzes** aufgefasst werden, angewendet auf
$$\ln(S_N^{(N)}) = \ln(S_0) + \sum_{k=1}^{N} \ln(Y_k^{(N)}).$$

Theorem 3.12 (Konvergenz gegen das Black-Scholes-Modell)**.** *Unter den obigen Annahmen konvergieren die Verteilungen $S_N^{(N)}$ unter $Q^{(N)}$ schwach gegen eine Lognormalverteilung mit den Parametern $\ln S_0 + rT - \frac{1}{2}\sigma^2 T$ und $\sigma\sqrt{T}$, d. h. gegen die Verteilung der Zufallsvariablen*
$$S_T := S_0 \exp\Big(\sigma W_T + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T\Big), \tag{3.23}$$
wobei W_T eine zentrierte Normalverteilung $\mathcal{N}(0, T)$ mit Varianz T besitzt.

Die Zufallsvariable S_T entspricht dem Aktienkurs zum Zeitpunkt T im Black-Scholes-Modell unter dem Martingalmaß, wobei W_T der Wert einer Brownschen Bewegung in T ist.

Im Folgenden wird ein Derivat betrachtet, das als Funktion $f \geq 0$ der risikobehafteten Anlage zum terminalen Zeitpunkt definiert ist. In jedem approximierenden Modell entspricht dies dem Derivat
$$C^{(N)} = f(S_N^{(N)}).$$

Korollar 3.13. *Ist f beschränkt und stetig, so konvergieren die unter $Q^{(N)}$ berechneten arbitrage-freien Preise von $C^{(N)}$ gegen die diskontierte Erwartung bezüglich einer Lognormalverteilung, die als **Black-Scholes-Preis** bezeichnet wird. Genauer gilt*
$$\begin{aligned}\lim_{N\uparrow\infty} \mathrm{E}_{Q^{(N)}}\left[\frac{C^{(N)}}{(1+r_N)^N}\right] &= e^{-rT}\mathrm{E}_Q[f(S_T)] \qquad (3.24)\\ &= \frac{e^{-rT}}{\sqrt{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} f(S_0 e^{\sigma\sqrt{T}y + rT - \sigma^2 T/2})e^{-y^2/2}\,dy,\end{aligned}$$
wobei S_T die Form (3.23) unter Q besitzt.

Dieses Konvergenzresultat ist insbesondere auf die Funktion $f(x)=(K-x)^+$ anwendbar, die einer Europäischen Put-Option mit Ausübungspreis K entspricht.

Korollar 3.14 (Black-Scholes-Formel für den Preis einer Put-Option)**.** *Der Grenzwert der arbitrage-freien Preise von $C^{(N)}=(K-S_N^{(N)})^+$ in $t=0$ ist gegeben durch $C_0^{\mathrm{put}}=v^{\mathrm{put}}(S_0,T)$ mit der Preisfunktion (x Wert der Aktie im Bewertungszeitpunkt, τ Restlaufzeit)*

$$v^{\mathrm{put}}(x,\tau)=e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}(K-xe^{\sigma\sqrt{\tau}y+r\tau-\sigma^2\tau/2})^+e^{-y^2/2}\,dy.$$

Weitere Berechnungen liefern die Darstellung

$$v^{\mathrm{put}}x,\tau)=-x\Phi(-d_+(x,\tau))+e^{-r\tau}K\Phi(-d_-(x,\tau)),\tag{3.25}$$

wobei $\Phi(z)=(2\pi)^{-1}\int_{-\infty}^{x}e^{-y^2/2}\,dy$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet und folgende Bezeichnungen gelten:

$$d_\pm(x,\tau):=\frac{\ln(x/K)+(r\pm\frac{1}{2}\sigma^2)\tau}{\sigma\sqrt{\tau}}.\tag{3.26}$$

Formel (3.25) ist die **Black-Scholes-Formel** für den Preis einer Europäischen Put-Option.

Da wegen $(x-K)+-(K-x)^+=x-K$ auf der Bewertungsebene die sogenannte **Put-Call-Parität**

$$\mathrm{E}_{Q^{(N)}}\left[\frac{(S_N^{(N)}-K)^+}{(1+r_N)^N}\right]=\mathrm{E}_{Q^{(N)}}\left[\frac{(K-S_N^{(N)})^+}{(1+r_N)^N}\right]+S_0-\frac{K}{(1+r_N)^N}$$

für jedes N besteht, ist das Konvergenzresultat (3.24) ebenso richtig für die Europäische Call-Option mit unbeschränktem Auszahlungsprofil $f(x)=(x-K)^+$.

Korollar 3.15 (Black-Scholes-Formel für den Preis einer Call-Option)**.** *Der Grenzwert der arbitrage-freien Preise von $C^{(N)}=(S_N^{(N)}-K)^+$ in $t=0$ ist gegeben durch $C_0^{\mathrm{call}}=v^{\mathrm{call}}(S_0,T)$ mit*

$$v^{\mathrm{call}}(x,\tau)=e^{-r\tau}\int_{-\infty}^{\infty}(xe^{\sigma\sqrt{\tau}y+r\tau-\sigma^2\tau/2}-K)^+e^{-y^2/2}\,dy.$$

Weitere Berechnungen liefern die Darstellung

$$v^{\mathrm{call}}(x,\tau)=x\Phi(d_+(x,\tau))-e^{-r\tau}K\Phi(d_-(x,\tau))\tag{3.27}$$

mit den Parametern aus (3.26).

Dies ist die **Black-Scholes-Formel** für den Preis einer Europäischen Call-Option.

3.5.2 Exkurs: Black-Scholes-Modell[14]

Die wesentlichen Grundideen zur Bewertung und Absicherung von Finanzprodukten wurden Anfang der 1970er Jahre von Fischer Black, Robert C. Merton und Myron S. Scholes im Kontext des Black-Scholes-Modells entwickelt. Das Finanzmarktmodell von Black, Merton und Scholes geht auf den Ökonomen und Nobelpreisträger **Paul A. Samuelson** zurück, der dieses 1965 in einem Artikel als Weiterentwicklung des **Bachelier-Modells** vorgeschlagen hat. Dieselben Grundkonzepte, die im zeitdiskreten Fall bereits erläutert worden sind, können auch erfolgreich in diesem einfachen Modell in stetiger Zeit und modernen, komplexeren Modellen angewendet werden. Mathematisch basiert die Analyse auf den Methoden der **Stochastischen Analysis**.

[14] Die Ausführungen dieses Abschnitts folgen Knispel, T.; Stahl, G.; Weber, S.: *Black-Scholes, marktkonsistente Bewertung und Risikomaße.* Schriftenreihe des Kompetenzzentrum Versicherungswissenschaften Hannover, Band 12, VVW Verlag Karlsruhe, 2012.

Das Black-Scholes-Modell ist ein Modell eines Finanzmarktes, auf dem zwei primäre Finanzprodukte gehandelt werden: Investoren können ihr Geld zu einem festen Zins anlegen (diese Investitionsmöglichkeit sei mit einem „Sparbuch“ assoziiert) oder Aktienanteile kaufen. Zeit wird im Modell als kontinuierlich modelliert und korrespondiert zu einem Zeitintervall $[0, T]$ für ein $T > 0$.

Wie in zeitdiskreten Modellen muss auch in zeitstetigen Modellen die Preisdynamik der primären Produkte festgelegt werden. Das Sparbuch im Black-Scholes-Modell verzinst Einlagen stetig mit einem festen Zinssatz $r > 0$. Die Wertentwicklung eines Anfangsinvestments von 1 wird also beschrieben durch

$$S_t^0 = \exp(rt), \quad 0 \le t \le T.$$

Der obere Index bezeichnet die „Wertpapierkennnummer“ des Produkts. Wie bisher steht „0“ für Sparbuch. Die Aktie ist das Produkt mit Wertpapierkennnummer „1“ und mit Preisprozess $(S_t^1)_{0\le t\le T}$. Der Aktienpreisprozess im Black-Scholes-Modell ist eine **geometrische Brownsche Bewegung**, die stetige Pfade besitzt und deren Dynamik von einer Brownschen Bewegung W getrieben wird:

$$S_t^1(\omega) = S_0^1 \exp\Big(\sigma W_t(\omega) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t\Big), \quad \omega \in \Omega.$$

Diese Beschreibung impliziert auch die Verteilungseigenschaften des Aktienpreisprozesses S^1 unter dem statistischen Maß P. Returns sind in diesem Fall normalverteilt und Aktienpreise besitzen eine Lognormalverteilung.

Die Informationsfiltration $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\le T}$ wird durch die Beobachtung des Aktienpreisprozesses und damit von der Brownschen Bewegung generiert. Wie in den diskutierten diskreten Modellen kann man auch im Black-Scholes-Modell selbstfinanzierende Handelsstrategien definieren, die Investitionen in die primären Produkte, Sparbuch und Aktie, beschreiben. Im Gegensatz zum diskreten Fall können Stückzahlen jederzeit adjustiert werden: eine kontinuierliche Anpassung des Portfolios ist im Black-Scholes-Modell möglich. Mathematisch beruhen die erforderlichen Herleitungen auf dem **Itô-Kalkül**.

Man kann nachweisen, dass sich im Black-Scholes-Modell jedes Derivat mittels einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie replizieren lässt – das Modell ist vollständig. Jedes Derivat kann somit unter der Annahme der Abwesenheit von Arbitrage bewertet werden: sein Preis sind die Kosten der perfekten Replikation. Das Konzept der Martingalmaße, das im zeitdiskreten Fall bereits diskutiert wurde, lässt sich auf zeitstetige Modelle wie das Black-Scholes-Modell erweitern.

Im Black-Scholes-Modell wählt man typischerweise das Sparbuch als Numéraire. Die Konstruktion des eindeutigen äquivalenten Martingalmaßes erfolgt nun mit Methoden der **Stochastischen Analysis**. Mithilfe der Itô-Formel ergibt sich für den diskontierten Aktienpreisprozess $\widetilde{S}_t^1 := e^{-rt} S_t^1$ die **stochastische Differentialgleichung** (SDE)

$$d\widetilde{S}_t^1 = \widetilde{S}_t^1(\sigma\, dW_t + (\mu - r)\, dt) \tag{3.28}$$

bzw. in integrierter Form

$$\widetilde{S}_t^1 = \widetilde{S}_0^1 + \int_0^t \widetilde{S}_u^1 \sigma\, dW_u + \int_0^t \widetilde{S}_u^1 (\mu - r)\, du.$$

Bemerkung 3.16 (Itô-Integral)**.** *Das Integral bezüglich der Brownschen Bewegung ist (pfadweise) kein klassisches Integral im Sinne von **Riemann-Stieltjes**, da die Pfade der Brownschen Bewegung sehr „rauh und wild“, also insbesondere nicht lokal von endlicher Variation sind. Es handelt sich hierbei um ein **stochastisches Integral** bzw. **Itô-Integral**, das in allgemeinerer Form für Integratoren aus der Klasse der Semimartingale wohldefiniert ist. Itô-Integrale bezüglich der Brownschen Bewegung sind (lokale) Martingale, und der Itô'sche Martingaldarstellungssatz besagt, dass umgekehrt jedes stetige lokale Martingal als Itô-Integral bezüglich der Brownschen Bewegung dargestellt werden kann.*

In der SDE (3.28) für den diskontierten Preisprozess $\widetilde{S}^1$ verschwindet der Drift-Term im Fall $\mu = r$, und in diesem Fall wäre der diskontierte Aktienpreisprozess als Itô-Integral bezüglich der Brownschen Bewegung ein lokales, ja sogar ein echtes Martingal. Folglich ist das Martingalmaß Q also so zu konstruieren, dass der Drift-Term verschwindet bzw. äquivalent $W_t^* := W_t + \frac{\mu - r}{\sigma} t$, $t \in [0, T|$, unter Q eine Brownsche Bewegung ist. Als Werkzeug dient der **Satz von Girsanov**.

Theorem 3.17 (Satz von Girsanov für die Brownsche Bewegung)**.** *Für $b \in \mathbb{R}$ sei das Maß P^* über $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ durch die Radon-Nikodým-Dichte*

$$\frac{dP^*}{dP} = \exp(bW_T - \tfrac{1}{2} b^2 T)$$

festgelegt, d. h. für jedes Ereignis $A \in \mathcal{F}_T$ gilt

$$P^*[A] = \int_A \frac{dP^*}{dP}\, dP.$$

Dann ist der Prozess $W_t^* := W_t - bt$, $t \in [0, T]$, eine Brownsche Bewegung unter dem Maß P^*.

Damit ist das Martingalmaß Q durch die Radon-Nikodým-Dichte

$$\frac{dQ}{dP} = \exp(-\tfrac{\mu - r}{\sigma} W_T - \tfrac{1}{2} \left(\tfrac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T)$$

festgelegt. Dieser Maßwechsel überführt die geometrische Brownsche Bewegung unter P mit Drift μ und Volatilität σ in eine geometrische Brownsche Bewegung unter Q mit dem risikolosen Zins r als Drift und der Volatilität σ.

Mithilfe von Versionen der **Fundamentalsätze der Asset-Pricing-Theorie** für zeitstetige Finanzmarktmodelle kann man aus der Existenz des Martingalmaßes folgern, dass keine Arbitrage im Black-Scholes-Modell existiert und dass der Markt vollständig ist. Gleichzeitig kann der eindeutige Preis jedes Derivats, die Kosten seiner perfekten Replikation, mittels der Formel für die risikoneutrale Bewertung ermittelt werden.

Theorem 3.18 (Risikoneutrale Bewertungsformel)**.** *Der Preis eines Finanzderivats C_T mit Maturität T ist im Black-Scholes-Modell gegeben durch*

$$C_0 = S_0^0 \mathrm{E}_Q\left[\frac{C_T}{S_T^0}\right] = e^{-rT} \cdot \mathrm{E}_P\left[\exp(-\tfrac{\mu - r}{\sigma} W_T - \tfrac{1}{2}\left(\tfrac{\mu - r}{\sigma}\right)^2 T) \cdot C_T\right].$$

Der Preis C_0 entspricht den Anfangskosten einer perfekten Replikation des Claims C_T.

Das klassische Beispiel für die Optionspreisbewertung, das in den Originalarbeiten von Black, Scholes und Merton betrachtet wurde, ist eine Europäische Call-Option. Wie alle Derivate im Black-Scholes-Modell ist eine Europäische Call-Option replizierbar. Die berühmte **Black-Scholes-Formel** für den Preis der Europäischen Call-Option auf die Aktie mit Maturität T und Ausübungspreis K ergibt sich direkt mittels risikoneutraler Bewertung aus Theorem 3.18:

$$\mathrm{E}_Q\left[e^{-rT} \max\{S_T^1 - K, 0\}\right] = S_0^1 \Phi(d_+(S_0^1, T)) - e^{-rT} K \Phi(d_-(S_0^1, T))$$

mit den Konstanten

$$d_\pm(S_0^1, T) = \frac{\ln(S_0^1/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)T}{\sigma\sqrt{T}}.$$

Das Black-Scholes-Modell besticht durch seine Einfachheit. Zur realistischen Beschreibung von Marktdaten ist es jedoch nicht geeignet (siehe auch Bemerkung 3.22). Die moderne Finanzmathematik hat für den Aktienbereich, aber auch für andere Assetklassen eine Vielzahl von Modellen entwickelt, von denen einige die Realität deutlich besser abbilden als das Black-Scholes-Modell. Beispiele sind **lokale** und **stochastische Volatilitätsmodelle** (Heston, Hull-White, SABR,. . .) für Aktienoptionen.

Lernergebnisse (B3)
Die Studierenden können die Konvergenz des Binomialmodells gegen das Black-Scholes-Modell erklären. Sie kennen die Black-Scholes-Formel für den arbitrage-freien Preis einer Europäschen Put-Option und einer Europäischen Call-Option und können damit Preise berechnen. Die Studierenden können die Put-Call-Parität herleiten und anwenden.

3.6 Optionspreissensitivitäten (Greeks)[15]

Kerninhalte

- Optionspreissensitiviäten (Greeks) der Europäischen Call-Option
- Black-Scholes-PDE und Zusammenhang mit Cauchy-Problem
- Implizite Volatilität

Ziel dieses Abschnitts ist, den **Black-Scholes-Preis** $v(x,\tau)$ - gegeben als als Funktion von aktuellem Aktienkurs x und der Restlaufzeit τ (siehe (3.27)) - einer Europäischen Call-Option, d. h. des Derivats mit Auszahlung $f(x) = (x-K)^+$ bezogen auf den terminalen Wert der Aktie, genauer zu analysieren. Von besonderen Interesse sind dabei die Abhängigkeiten des Preises von den Modellparametern und die damit verbundenen **Sensitivitäten** gegenüber diesen Parametern. In der Praxis hat die Sensitivität von Preisen bezüglich der Eingangsgrößen eine große Bedeutung: Dynamische Hedging-Strategien können nicht perfekt implementiert werden; Sensitivitäten gestatten jedoch eine Steuerung des Risikos bei semistatischem Hedging. Ebenso können Sensitivitäten zur Berechnung des Risikokapitals eingesetzt werden (siehe Abschnitt 4.4.2).

Delta. Die Abhängigkeit vom aktuellen Aktienpreis x kann mithilfe der partiellen Ableitung der Preisfunktion $v(x,\tau)$ in der Black-Scholes-Formel (3.27) nach x analysiert werden. Die erste Ableitung

$$\Delta(x,\tau) := \frac{\partial}{\partial x} v(x,\tau) = \Phi(d_+(x,\tau))$$

nennt man das **Delta** der Option. In Analogie zur Formel für die Absicherungsstragie im Binomialmodell aus Proposition 3.11 bestimmt $\Delta(x,\tau)$ das „Delta Hedging Portfolio“, das zur perfekten Replikation der Call-Option im Black-Scholes-Modell erforderlich ist (siehe Abschnitt 3.5.2).

Approximativ gilt für die Wertänderung des Optionspreises C_t^{call}, $t \in [0,T]$, der Call-Option in kleinen Zeitintervallen $[t,t+h]$, $h>0$,

$$C_{t+h}^{\text{call}} - C_t^{\text{call}} = v(S_{t+h}^1, \tau-h) - v(S_t^1,\tau) \approx \Delta(S_t^1,\tau)(S_{t+h}^1 - S_t^1).$$

wobei (wie oftmals in der Literatur) der Effekt der Restlaufzeit, die sich verkürzt, vernachlässigt wird. Dies erlaubt, die Optionsposition gegen Preisänderungen des Basiswertes statisch im Zeitintervall $[t,t+h]$ abzusichern, in dem eine Position im Basiswert aufgebaut wird, deren Wertänderungen bei Preisbewegung den Wertänderungen der Optionsposition genau entgegengesetzt sind. Das resultierende Portfolio aus Option und Basisposition hat dann ein Gesamt-Delta von Null (Δ-neutral).

[15] Die folgenden Ausführungen orientieren sich am Lehrbuch Föllmer, H.; Schied, A.: *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter, 4. Auflage, 2016, Kapitel 5.

Gamma. Das **Gamma** der Call-Option ist gegeben durch

$$\Gamma(x,\tau) := \frac{\partial}{\partial x}\Delta(x,\tau) = \frac{\partial^2}{\partial x^2}v(x,\tau) = \varphi(d_+(x,\tau))\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}.$$

Hierbei bezeichnet $\varphi(x) = \Phi'(x) = e^{-x^2/2}/\sqrt{2\pi}$ die Dichte der Standardnormalverteilung. Das Γ ist stets positiv. Dementsprechend ist $v(x,\tau)$ eine streng konvexe Funktion bezüglich x. Große Werte von Γ ergeben sich in Preisbereichen, in denen das Delta sich schnell ändert und insofern häufige Änderungen des Delta-Hedging-Portfolios erforderlich sind. Approximativ kann man das Risiko semistatischer Hedges über ein kurzes Zeitfenster weiter verringern, indem ein Gesamtportfolio konstruiert wird, das Γ-neutral ist.

Bemerkung 3.19 (Leverage-Effekt)**.** *Wegen* $0 \le \Delta(x,\tau) \le 1$ *gilt einerseits*

$$|v(x,\tau) - v(y,\tau)| \le |x-y|.$$

*Dies bedeutet, dass die **absolute Wertänderung** des Optionspreises immer kleiner als die entsprechende Veränderung des Aktienkurses ist. Andererseits folgt aus der strikten Konvexität von* $x \mapsto v(x,\tau)$ *für* $\tau > 0$ *und* $x < y < z$

$$\frac{v(x,\tau)-v(y,\tau)}{v(y,\tau)} < \frac{x-y}{y} \quad \textit{und} \quad \frac{v(z,\tau)-v(y,\tau)}{v(y,\tau)} > \frac{z-y}{y}.$$

*Damit ist die **relative Wertänderung** des Optionspreises betragsmäßig größer als die relative Änderung des Aktienkurses. Diese Beobachtung kann als **Leverage-Effekt** für Call-Optionen interpretiert werden.*

Theta. Das **Theta** der Option

$$\Theta(x,\tau) := \frac{\partial}{\partial t}v(x,\tau) = \frac{x\sigma}{2\sqrt{\tau}}\varphi(d_+(x,\tau)) + Kre^{-r\tau}\Phi(d_-(x,\tau))$$

beschreibt die Abhängigkeit des Optionspreises der Call-Option von der Restlaufzeit. Wegen $\Theta > 0$ ist der arbitrage-freie Preis der Europäischen Call-Option eine wachsende Funktion bezüglich der Restlaufzeit.

Bemerkung 3.20 (Black-Scholes-Differentialgleichung)**.** *Für* $\tau > 0$ *sind die Sensitivitäten* Δ, Γ *und* Θ *durch die Gleichung*

$$\Theta(x,\tau) = rx\Delta(x,\tau) + \frac{1}{2}\sigma^2x^2\Gamma(x,\tau) - rv(x,\tau)$$

verbunden. Daher löst die Funktion v *für* $(x,\tau) \in (0,\infty)\times(0,\infty)$ *die partielle Differentialgleichung (PDE)*

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = rx\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma^2x^2\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - rv. \tag{3.29}$$

*Diese wird als **Black-Scholes-PDE** bezeichnet. Wegen*

$$\lim_{t\downarrow 0} v(x,\tau) = f(x) = (x-k)^+ \tag{3.30}$$

ist $v(x,\tau)$ *die Lösung des durch (3.29) und (3.30) definierten **Cauchy-Problems**.*

Diese Beobachtung ist nicht nur auf den Fall einer Europäischen Call-Option beschränkt, sondern gilt in allgemeinerem Kontext. Insbesondere kann die Berechnung von arbitragefreien Preisen auf das Lösen von PDEs zurückgeführt werden (**Feynman-Kac-Theorem**).

Rho. Das **Rho** der Option, definiert durch

$$\rho(x,\tau) := \frac{\partial}{\partial r} v(x,\tau) = K\tau e^{-r\tau}\Phi(d_-(x,\tau)),$$

beschreibt die Sensitivität des Optionspreises gegenüber dem risikofreien Zins r. Da der Black-Scholes-Preis $v(S_0, T)$ als Erwartungswert der diskontierten Auszahlung $e^{-rT}(S_T - K)^+$ unter dem Maß Q berechnet wurde, ist es zunächst überraschend, dass ρ strikt positiv ist, also der Optionspreis wachsend in r ist. Hierbei ist jedoch zu beachten, dass das Maß Q wegen der Martingalbedingung $\mathrm{E}_Q[e^{-rT}S_T] = S_0$ von r abhängt.

Vega. Der Parameter σ heißt **Volatilität**. Das **Vega** der Option, definiert durch

$$\mathcal{V}(x,\tau) := \frac{\partial}{\partial \sigma} v(x,\tau) = x\sqrt{\tau}\varphi(d_+(x,\tau)),$$

beschreibt die Sensitivität des Optionspreises gegenüber der Volatilität. Dies strikte Positivität von $\mathcal{V}$ zeigt, dass der Black-Scholes-Preis einer Call-Option eine wachsende Funktion der Volatilität ist.

Die Optionspreissensitivitäten Δ, Γ, Θ, ρ und $\mathcal{V}$ werden in der Praxis als **Greeks** bezeichnet (ungeachtet der Tatsache, dass „Vega“ kein Buchstabe des griechischen Alphabets ist).

Bemerkung 3.21 (Greeks für eine Europäische Put-Option)**.** *Für die Europäische Put-Option sind die Greeks gegeben durch:*

- $\Delta(x,\tau) = -\Phi(-d_+(x,\tau))$
- $\Gamma(x,\tau) = \varphi(d_-(x,\tau))\frac{1}{x\sigma\sqrt{\tau}}$
- $\Theta(x,\tau) = \frac{x\sigma}{2\sqrt{\tau}}\varphi(d_+(x,\tau) - rKe^{-r\tau}\Phi(-d_-(x,\tau))$
- $\rho(x,\tau) = -K\tau e^{-r\tau}\Phi(-d_-(x,\tau))$
- $\mathcal{V}(x,\tau) = x\sqrt{\tau}\varphi(d_+(x,\tau))$

Bemerkung 3.22 (Volatility Skew and Smile)**.** *Plain-Vanilla-Optionen wie Europäische Call- und Put-Optionen werden für viele Aktien liquide gehandelt. Die Preise sind transparent am Markt beobachtbar. Um dieselben Preise im Black-Scholes-Modell zu generieren, benötigt man den gegenwärtigen Aktienpreis, den Strike, die Maturität, den Zins und die Aktienvolatilität. Verwendet man von diesen Eingangsgrößen alle bis auf die Volatilität als feste Parameter in der Black-Scholes-Formel, so erhält man eine Preisformel für eine Europäische Call-Option in Abhängigkeit der Volatilität. Unter der* ***impliziten Volatilität*** *einer Option versteht man nun die Volatilität, unter der das Black-Scholes-Modell denselben Preis liefert wie der Markt. Für verschiedene Strikepreise und Maturitäten kann diese implizite Volatilität bestimmt werden, und man kann die Abhängigkeit der impliziten Volatilität von Strike und Maturität untersuchen. Man beobachtet eine Abhängigkeit von der Maturität (****term structure****) und eine Abhängigkeit vom Strike (****smile*** *und* ***skew****). Die Abhängigkeit der impliziten Volatilität von Strike und Maturität ist ein weiterer Nachweis, dass das Black-Scholes-Modell die Realität der Finanzmärkte nicht korrekt beschreibt: in einem Black-Scholes-Modell mit einem vorgegebenen Parametervektor gibt es nur eine Volatilität der Aktie, die dann die Preise aller Call-Optionen für beliebige Strikes und Maturitäten determiniert. Die implizite Volatilität wäre in einer Black-Scholes-Welt also eine Konstante.*

Lernergebnisse (B2)
Die Studierenden kennen die Konzeption von Optionspreissensitivitäten (Greeks). Sie können diese für Europäische Call-Optionen interpretieren und im Kontext des semistatischen Hedgings anwenden (Delta-Hedging). Die Studierenden kennen den Begriff der impliziten Volatilität und können diese in Zusammenhang mit einer wesentlichen Schwäche des Black-Scholes-Modells setzen.

4 Risiko und Risikomaße

4.1 Risiko und Knightian Uncertainty

Kerninhalte

- Vielschichtigkeit des Risikobegriffs
- Abgrenzung: Risiko und Unsicherheit im Sinn von Knight

Der Begriff „Risiko“ ist vielschichtig und wird im Alltag sowie in der Literatur - je nach Kontext - anders verwendet. Insbesondere gibt es keinen einheitlichen Risikobegriff.

Umgangssprachlich bedeutet Risiko z. B. die Gefahr des Eintritts „ungünstiger“ Ereignisse mit nachteiligen (wirtschaftlichen) Folgen. Die Norm „ISO 31000 - Risk Management“[16] beschreibt Risiko als „effect of uncertainty on objectives“ (Auswirkung von Unsicherheit auf Ziele). Quantitative Ansätze zur Risikobewertung identifizieren häufig Risiko mit der Schwankung einer Wertgröße. Hierbei misst der **einseitige Ansatz** nur „ungünstige“ Abweichungen, während der **zweiseitige Ansatz** sowohl „günstige“ als auch „ungünstige“ Abweichungen berücksichtigt. Insofern bedeutet zweiseitiges Risiko eine Erweiterung, bei der Chancen („Risk is opportunity.“ (SOA-Motto)) als Teil des Risikobegriffs verstanden werden.

Eine wesentliche Charakterisierung von Risiko geht auf den Ökonomen Frank Knight[17] zurück, der im Kontext der ökonomischen Entscheidungstheorie eine Differenzierung zwischen **„Risiko“** und **„Unsicherheit“** eingeführt hat. Hierbei bezieht sich „Risiko“ auf Situationen, in denen das zugrunde liegende Wahrscheinlichkeitsmaß P und damit die Verteilungen von Zielgrößen bekannt sind („known unknowns“), während „Unsicherheit“ auf Fälle abstellt, in denen dies nicht der Fall ist („unknown unknowns“). Zufällige Ereignisse werden als unsicher bezeichnet, wenn ihre genauen Eintrittswahrscheinlichkeiten nicht bekannt sind. Knight'sche Unsicherheit („Knightian Uncertainty“) kann formal dargestellt werden durch eine Menge $\mathcal{P}$ von möglichen Wahrscheinlichkeitsmaßen, wobei jedes Element eine mögliche Ausprägung der zugrunde liegenden Wahrscheinlichkeitsverteilung widerspiegelt.

Im Kontext von „Unsicherheit“ beschrieb Savage[18] die Bedingungen, die garantieren, dass eine Präferenzordnung (siehe Definition 2.1) auf einer Menge von Finanzpositionen $\mathcal{X}$, definiert als Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F})$ (ohne Spezifikation eines Referenzmaßes), die spezielle numerische Darstellung, eine **von-Neumann-Morgenstern-Darstellung**,

$$\mathcal{U}(X) = \mathrm{E}_Q[u(X)] = \int u(X(\omega))\, Q(d\omega), \quad X \in \mathcal{X}, \tag{4.31}$$

ausgedrückt mithilfe einer wachsenden, stetigen Funktion $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ und mithilfe eines Wahrscheinlichkeitsmaßes Q auf $(\Omega, \mathcal{F})$, besitzt. Hierbei ist Q ein „subjektives“ Wahrscheinlichkeitsmaß, das implizit durch die individuellen Präferenzen des Investors bestimmt ist und das von einem gegebenen „objektiven“ Wahrscheinlichkeitsmaß abweichen kann. Die Funktion u heißt **Nutzenfunktion**. Ihre Monotonie spiegelt die natürliche Monotonieeigenschaft der Präferenzordnung wider. Die Funktion u in (4.31) ist strikt konkav genau dann, wenn der Investor risikoavers ist. Robuste Erweiterungen der Savage-Darstellung besitzen die Form

$$\mathcal{U}(X) = \inf_{Q \in \mathcal{P}} (\mathrm{E}_Q[u(X)] + \alpha(Q)).$$

Hierbei ist $\mathcal{P}$ eine Klasse von möglichen Wahrscheinlichkeitsmaßen Q. Die numerische Darstellung ergibt sich durch Minimierung über den erwarteten Nutzen bezüglich aller Maße $Q \in \mathcal{P}$, wobei jedes Maß Q entsprechend des Strafterms $\alpha(Q)$ mehr oder weniger in Betracht gezogen wird. Strukturell ist hier eine Analogie zur robusten Darstellung (4.36) von konvexen Risikomaßen zu erkennen.

[16] https://www.iso.org/iso-31000-risk-management.html
[17] Siehe: Knight, F.: *Risk, uncertainty and profit*. 1921.
[18] Siehe: Savage, L. J.: *The foundations of statistics*. John Wiley & Sons Inc., New York, 1954.

In der klassischen Finanzmathematik wird ein Finanzmarkt durch stochastische Preisprozesse für eine bestimmte Anzahl von primären Finanzprodukten modelliert. Deren Dynamik ist in der Regel bezüglich eines festen Wahrscheinlichkeitsmaßes P spezifiziert. Damit wird in der Modellierung (in der Regel stillschweigend) angenommen, dass ein Investor in diesem Markt Kenntnis der Wahrscheinlichkeitsverteilung der zugrunde liegenden Preisprozesse hat. Es scheint jedoch realistischer, dass die Wahrscheinlichkeiten von Finanzmarktereignissen unbekannt sind. Knight argumentiert, dass Finanzinstitutionen wie Banken oder Versicherungen - wenn Unsicherheit nicht vorliegen würde - in der Lage sein sollten, Finanzprodukte oder Versicherungsverträge so zu bewerten, dass sie mögliche Verluste kontrollieren können. Empirische Evidenz - wie etwa die Beobachtungen der Finanzmarktkrise vor etwa einem Jahrzehnt - zeigen jedoch, dass dies von der Realität weit entfernt ist. Es besteht in der Wissenschaft - aber auch bei Praktikern - eine verstärktes Bewusstsein für die Probleme, die aus einen exzessiven Vertrauen auf ein spezifisches probabilistisches Modell und die daraus resultierende Kontrollillusion verursacht werden können. Damit rückt die die inhaltliche Befassung mit dem Thema Modellunsicherheit, zu Ehren von Frank Knight auch Knight'sche Unsicherheit genannt, in den Fokus.

Bei Knight'scher Unsicherheit wird anstelle eines Wahrscheinlichkeitsmaßes P, das die Dynamik von Preisprozessen beschreiben soll, eine ganze Familie $\mathcal{P}$ von Wahrscheinlichkeitsmaßen betrachtet. Jedes Wahrscheinlichkeitsmaß $\tilde{P} \in \mathcal{P}$ steht dabei für eine mögliche Ausprägung der Verteilung des Preisprozesses. Ein Beispiel hierfür ist ein Marktmodell mit einer Aktie mit Preisprozess der Form

$$S_t = S_0 \exp\left(\sum_{k=1}^{t} R_k\right), \quad t = 0, 1, \ldots, T$$

und einer Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen

$$\mathcal{P} := \{P^\mu | \mu \in [a, b] \text{ und } R_1, \ldots, R_T \text{ i. i. d. mit } R_k \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2) \text{ unter } P^\mu\},$$

d. h. der erwartete Return ist unsicher. Die Inkorporierung Knight'scher Unsicherheit führt zu einer Erweiterung der klassischen Portfoliotheorie. So wird z.B. die Konstruktion optimaler Portfolien durch Maximierung des erwarteten Nutzens $\mathrm{E}_P[u(X)]$ über eine Klasse $\mathcal{X}$ von Finanzpositionen X robustifiziert durch:[19]

$$\text{Maximiere } \inf_{\tilde{P}\in\mathcal{P}} \mathrm{E}_{\tilde{P}}[u(X)] \text{ über alle } X \in \mathcal{X}.$$

Lernergebnisse (B2)
Die Studierenden wissen, dass der Begriff „Risiko" vielschichtig belegt ist. Sie können Risiko und Unsicherheit im Sinn von Knight gegeneinander abgrenzen.

4.2 Streuungsmaße und Risikomaße des Downside Risk

Kerninhalte

- Streuungsmaße
- Risikomaße des Downside Risk
- Value at Risk: Definition und kritische Würdigung

Zur Bewertung des „Risikos" von Finanzpositionen werden häufig einfache Streuungsmaße oder Risikomaße des Verlustrisikos („Downside Risk") verwendet. Während Streuungsmaße der zweiseitigen Definition des Risikobegriffs entsprechen, fokussieren Risikomaße des Downside Risk auf die „ungünstigen" Abweichungen (einseitige Definition des Risikobegriffs). Streuungsmaße sind insbesondere invariant gegenüber der Lage der Verteilung.

[19] Siehe z. B.: Föllmer, H.; Schied, A.: *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter, 4. Auflage, 2016, Abschnitt 3.5.

Im Folgenden sei X eine (hinreichend integrierbare) Zufallsvariable auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, die den Wert einer Finanzposition am Ende einer vorgegebenen Handelsperiode beschreibt. Die Menge solcher Finanzpositionen wird mit $\mathcal{X}$ bezeichnet. Ein **Risikomaß** ist allgemein ein Funktional

$$\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}, \quad X \mapsto \rho(X),$$

das einer Finanzposition X eine Risikokennzahl $\rho(X)$ zuordnet. Anwendungsfelder von Risikomaßen in der Praxis sind u. a.:

- Pufferfunktion gegen adverse Entwicklungen (z. B. ökonomisches Risikokapital, Solvenzkapital),
- Steuerungsfunktion (z. B. Limit- und Schwellenwertsystem),
- Vergleichsfunktion für Finanzpositionen, Portfolien oder Unternehmen,
- Bewertungsfunktion (risikoadjustierte Preise, Versicherungsprämien).

Bezüglich der Vorzeichenkonvention ist zu beachten, dass eine Verlustvariable L der Finanzposition $-X$ entspricht. Risikomaße werden kontextgebunden entweder bezogen auf Finanzpositionen oder bezogen auf Verlustvariablen definiert. Dieser Unterschied ist in der praktischen Arbeit und bei der Anwendung von Ergebnissen aus der Literatur zu beachten. Nachfolgend wird per Konvention in der Regel das Risiko von Finanzpositionen betrachtet. Nur an ausgewählten Stellen wird zur Illustration für Verlustvariablen argumentiert.

Varianz und Standardabweichung. Einfache Streuungsmaße umfassen:

- **Varianz:** Die Varianz
  $$\mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2]$$
  misst die erwartete quadratische Abweichung einer Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert. Hierbei werden im Sinne der zweiseitigen Interpretation des Risikobegriffs Abweichungen nach oben und unten gleich behandelt.

- **Standardabweichung (Volatilität):**
  $$\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)} = \sqrt{\mathrm{E}[(X - \mathrm{E}[X])^2]}$$
  Der **Variationskoeffizient** ist definiert durch
  $$\frac{\sigma(X)}{\mathrm{E}[X]}$$
  und kann als normierte Standardabweichung interpretiert werden. Die Betrachtung des Variationskoeffizienten wird dadurch motiviert, dass Zufallsvariablen mit großem Erwartungswert im Allgemeinen eine größere Varianz bzw. Standardabweichung aufweisen als Zufallsvariablen mit kleinem Erwartungswert. Daher ist die Beurteilung der der Standardabweichung nur normiert sinnvoll.

- **Einseitige Standardabweichung (Semivarianz):** Die Semivarianz ist definiert durch:
  $$\sigma_+(X) = \sqrt{\mathrm{E}[((\mathrm{E}[X] - X)^+)^2]} \quad \text{bzw.} \quad \sigma_+(L) = \sqrt{\mathrm{E}[((L - \mathrm{E}[L])^+)^2]}.$$
  Im Gegensatz zur Varianz oder zur Standardabweichung werden bei einer Finanzposition X nur Unterschreitungen $X < \mathrm{E}[X]$ bzw. für eine Verlustvariable L nur Überschreitungen $L > \mathrm{E}[L]$ des Erwartungswertes berücksichtigt.

Partielle Momente und Verlustwahrscheinlichkeit. Die Gefahr einer Über- bzw. Unterschreitung einer vorgegebenen Verlustschwelle α messen die sogenannten **Shortfall-Maße**. Die **oberen partiellen Momente** beziehen sich auf die Verlustvariable und gewichten die Abweichung mit einer Potenzfunktion:

$$\mathrm{UPM}_{k,\alpha}(L) := \begin{cases} \mathrm{E}[((L-\alpha)^+)^k] & \text{für } k > 0, \\ P[L \geq \alpha] & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

Analog dazu sind die **unteren partiellen Momente** bezogen auf die Finanzposition definiert:

$$\mathrm{LPM}_{k,\alpha}(X) := \begin{cases} \mathrm{E}[((\alpha-X)^+)^k] & \text{für } k > 0, \\ P[X < \alpha] & \text{für } k = 0. \end{cases}$$

Als Spezialfälle ergeben sich:

- $k = 0$: Shortfall-Wahrscheinlichkeit zur Verlustschwelle α,
- $k = 1$: mittlere Überschreitung bzw. Unterschreitung der Schwelle α,
- $k = 2$: Shortfall-Varianz.

Value at Risk. Das in der Versicherungs- und Finanzbranche am häufigsten verwendete Risikomaß ist der **Value at Risk** (V@R):

Definition 4.1 (Value at Risk)**.** *Der **Value at Risk** zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ einer Finanzposition X ist der kleinste Geldbetrag, den man zu X hinzufügen muss, sodass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes kleiner oder gleich λ ausfällt:*

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) := \inf\{m \in \mathbb{R} : P[X + m < 0] \leq \lambda\}.$$

Der Parameter $\lambda \in (0,1)$ wird nahe 0 gewählt.

Alternativ kann anstelle der Finanzposition X die assoziierte Verlustgröße $L := -X$ betrachtet werden. In diesem Fall gilt, ausgedrückt über die Verteilungsfunktion F_L von L,

$$P[X + m < 0] \leq \lambda \quad \Leftrightarrow \quad F_L(m) := P[L \leq m] \geq 1 - \lambda,$$

und man schreibt

$$\mathrm{V@R}_{1-\lambda}(L) := \inf\{m \in \mathbb{R} : F_L(m) \geq 1 - \lambda\}.$$

Obwohl in der Praxis aufgrund seiner einfachen Interpretation und guten Implementierbarkeit beliebt, wird der Value at Risk als Basis von Risikomanagement und -steuerung im akademischen Bereich bereits seit Mitte der 90er Jahre sehr kritisch gesehen. Kritik am Value at Risk äußert ebenso beispielsweise der **Turner Review** der Britischen Finanzaufsicht, der im Nachgang der letzten globalen Finanzkrise verfasst wurde.[20] V@R weist zwei wesentliche Defizite auf. Erstens werden extreme Verluste, die nur mit kleiner Wahrscheinlichkeit auftreten, vom V@R völlig ausgeblendet. Unternehmen, die Risiken ausschließlich auf Basis von V@R messen, können folglich keine adäquaten Strategien für den Umgang mit Extremereignissen entwickeln. In Krisenzeiten kann eine mangelhafte Vorsorge die Stabilität der gesamten Volkswirtschaft gefährden. Zweitens ist V@R kein sinnvoller Ausgangspunkt für die Steuerung von Unternehmensportfolios, weil V@R keine angemessenen Anreize für die Diversifikation von Positionen setzt.

[20] *The Turner review - A regulatory response to the global banking crisis*, published by the British Financial Services Authority, `www.fsa.gov.uk/pubs/other/turner_review.pdf`, 2009

Mean Value at Risk. Der Value at Risk kann per definitionem - zu gegebenen Sicherheitsniveau - als notwendiges Risikokapital aufgefasst werden. In der Praxis wird das notwendige Risikokapital jedoch in vielen Situationen - so z. B. für Kreditrisiken und Versicherungstechnische Risiken - mithilfe des **Mean Value at Risk** ermittelt. Dieser entsteht durch Anwendung des Value at Risk auf die zentrierten Größen:

$$\mathrm{MV@R}_\lambda(X) := \mathrm{V@R}_\lambda(X - \mathrm{E}[X]) \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{MV@R}_{1-\lambda}(L) := \mathrm{V@R}_{1-\lambda}(L - \mathrm{E}[L]). \tag{4.32}$$

Aufgrund der Translationsinvarianz ist dies gleichbedeutend mit

$$\mathrm{MV@R}_\lambda(X) := \mathrm{V@R}_\lambda(X) - \mathrm{E}[-X] \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{MV@R}_{1-\lambda}(L) := \mathrm{V@R}_{1-\lambda}(L) - \mathrm{E}[L],$$

d. h. erwartete Verluste werden in Abzug gebracht. Das Risikokapital dient dann nur als Puffer für „unerwartete Verluste“. Der Mean Value at Risk ist Grundlage für die Definition der Solvabilitätskapitalanforderung unter Solvency II, siehe Abschnitt 4.4.1.

Lernergebnisse (B2)
Die Studierenden kennen die wesentlichen Streuungsmaße und Risikomaße des Downside Risk. Sie können die Unterschiede zwischen Streuungsmaßen und Risikomaßen des Downside Risk erklären.
Die Studierenden kennen die wesentlichen Schwächen des Value at Risk und können diese in einfachen Fallstudien illustrieren.

4.3 Axiomatische Theorie der Risikomaße[21]

Kerninhalte

- Monetäre Risikomaße
- Kohärente und konvexe Risikomaße
- Robuste Darstellung von Risikomaßen
- Verteilungsinvariante Risikomaße
- Beispiele: Value at Risk, Average Value at Risk/Expected Shortfall, Tail Value at Risk, Shortfall Risk, entropisches Risikomaß, Expectiles

Die Schwächen des Value at Risk führten zur Jahrtausendwende zur Entwicklung einer axiomatischen Theorie der Risikomaße.[22] Diese Risikomaße lassen sich per Konstruktion direkt als Kapitalanforderungen interpretieren.

4.3.1 Risikomaße, Akzeptanzmengen und robuste Darstellung

Eine **Finanzposition** wird durch seine Auszahlungen beschrieben, die jedoch typischerweise unsicher und dem Zufall unterworfen sind. So sind z. B. der Kurs einer Aktie in einem Jahr oder die Wertentwickung eines Fonds heute nicht mit Sicherheit bekannt. Diese Unsicherheit wird mathematisch durch einen messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ möglicher Szenarien abgebildet. Eine Finanzposition wird dementsprechend als Zufallsvariable $X : \Omega \to \mathbb{R}$ modelliert, wobei $X(\omega)$ den (diskontierten) Wert der Position am Ende einer vorgegebenen Handelsperiode im Szenario ω beschreibt. Das Ziel ist, das mit der Position X verbundene Risiko durch ein Mindestkapital $\rho(X)$ zu quantifizieren, das zur Position X hinzugefügt werden muss, sodass diese - z. B. aus Sicht der Aufsichtsbehörde - akzeptabel wird. Dieser Ansatz führt zum Konzept des monetären Risikomaßes, das als ein Funktional ρ auf einer gegebenen Klasse $\mathcal{X}$ von Finanzpositionen definiert wird.

Im Folgenden bezeichnet $\mathcal{X}$ einen linearen Raum von messbaren Funktionen auf $(\Omega, \mathcal{F})$, der die Konstanten enthält.

[21] Die Ergebnisse dieses Abschnitts sind zu finden im Lehrbuch Föllmer, H.; Schied, A.:*Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter, 4. Auflage, 2016, Kapitel 4.

[22] Artzner, P.; Delbaen, F.; Eber, J.-M.; Heath, D.: *Coherent measures of risk*. Mathematical Finance 9, 1999 sowie Föllmer, H.; Schied, A.: *Convex measures of risk and trading constraints*. Finance&Stochastics 4, 2000.

Definition 4.2 (monetäres Risikomaß)**.** *Ein Funktional $\rho : \mathcal{X} \to \mathbb{R}$ heißt **monetäres Risikomaß**, falls folgende Eigenschaften bestehen:*

i) ***Inverse Monotonie:*** *Ist $X(\omega) \leq Y(\omega)$ für alle Szenarien $\omega \in \Omega$, so gilt $\rho(X) \geq \rho(Y)$.*

ii) ***Geldinvarianz:*** *Für jede reelle Zahl m gilt $\rho(X+m) = \rho(X) - m$.*

Eigenschaft *i)* besagt, dass die Risikokennziffer für eine Position Y kleiner ist als die Risikokennziffer einer Position X, wenn Y stets mindestens so viel wert ist wie X. Gemäß Eigenschaft *ii)* messen Risikomaße auf einer monetären Skala: Wird zur Finanzposition X das Kapital m € hinzugefügt, so verringert sich das Risiko der Finanzposition $X+m$ um diesen Betrag.

Akzeptanzmenge. Ist ρ ein monetäres Risikomaß, so definiert

$$\mathcal{A}_\rho := \{X \in \mathcal{X} | \rho(X) \leq 0\} \tag{4.33}$$

die **Akzeptanzmenge** von ρ, und das Risikomaß ρ kann umgekehrt aus der Akzeptanzmenge via

$$\rho(X) = \inf\{m \in \mathbb{R} | X + m \in \mathcal{A}_\rho\} \tag{4.34}$$

rekonstruiert werden. Ein monetäres Risikomaß kann somit als eine **Kapitalanforderung** interpretiert werden: $\rho(X)$ ist das kleinste Kapital, das zur Finanzposition X hinzugefügt werden muss, sodass X akzeptabel wird. Die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}_\rho$ ist nichtleer und besitzt die folgenden zwei Eigenschaften:

- $\inf\{m \in \mathbb{R} | m \in \mathcal{A}_\rho\} > -\infty$,
- $X \in \mathcal{A}_\rho,\ Y \in \mathcal{X},\ Y \geq X \quad \Longrightarrow \quad Y \in \mathcal{A}_\rho$.

Umgekehrt definiert jede nichtleere Teilmenge $\mathcal{A}$ von $\mathcal{X}$, die diese beiden Eigenschaften erfüllt, via (4.34) ein monetäres Risikomaß ρ mit Akzeptanzmenge $\mathcal{A}_\rho = \mathcal{A}$. Insofern können Risikomaße ausgehend von der Spezifikation akzeptabler Finanzpositionen definiert werden.

Diversifikation und Konvexität. Um der Idee Rechnung zu tragen, dass Diversifikation das Risiko nicht erhöhen sollte, ist es natürlich, die **Quasi-Konvexität** von ρ zu fordern:

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \max\{\rho(X), \rho(Y)\} \tag{4.35}$$

für $X, Y \in \mathcal{X}$ und $\lambda \in (0,1)$. In diesem Fall ist die Akzeptanzmenge $\mathcal{A}_\rho$ konvex. Dies jedoch impliziert aufgrund der Darstellung (4.34), dass ρ ein konvexes Funktional auf $\mathcal{X}$ ist, d. h. ρ erfüllt nicht nur (4.35), sondern sogar die stärkere Ungleichung

$$\rho(\lambda X + (1-\lambda)Y) \leq \lambda\rho(X) + (1-\lambda)\rho(Y).$$

Definition 4.3 (konvexes Risikomaß)**.** *Ein monetäres Risikomaß ρ heißt **konvexes Risikomaß**, falls es Bedingung (4.35) erfüllt und damit ein konvexes Funktional ist. Ein konvexes Risikomaß wird **kohärent** genannt, falls es zusätzlich positiv homogen ist, d. h. es gilt*

$$\rho(\lambda X) = \lambda\rho(X)$$

für alle $X \in \mathcal{X}$ und $\lambda \geq 0$.

Jedes kohärente Risikomaß ρ ist normiert durch $\rho(0) = 0$, und die zugehörige Akzeptanzmenge $\mathcal{A}_\rho$ bildet einen konvexen Kegel. Zudem ist jedes kohärente Risikomaß ρ **subadditiv**, d. h. es gilt

$$\rho(X+Y) \leq \rho(X) + \rho(Y)$$

für alle $X, Y \in \mathcal{X}$.

Robuste Darstellung. Ein konvexes Risikomaß ρ besitzt typischerweise eine **robuste Darstellung** in der Form

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \{\mathrm{E}_Q[-X] - \alpha^{\min}(Q)\}, \tag{4.36}$$

wobei $\mathcal{M}_1$ die Familie aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\mathcal{X}$ bezeichnet, $\mathrm{E}_Q[\cdot]$ den Erwartungswert unter dem Maß $Q \in \mathcal{M}_1$ symbolisiert und die sogenannte (minimale) **Straffunktion** (penalty function) $\alpha^{\min} : \mathcal{M}_1 \to (-\infty, \infty]$ durch

$$\alpha^{\min}(Q) := \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \mathrm{E}_Q[-X].$$

gegeben ist. Hierbei repräsentieren die Maße $Q \in \mathcal{M}_1$ mögliche probabilistische Modelle, die entsprechend der Straffunktion α mehr oder weniger ernst genommen werden. Die Kapitalanforderung $\rho(X)$ wird nun als „worst-case" des pönalisierten erwarteten Verlustes $\mathrm{E}_Q[-X]$ über alle Modelle $Q \in \mathcal{M}_1$ berechnet.

Im kohärenten Fall gilt $\alpha(Q) \in \{0, \infty\}$, und (4.36) reduziert sich auf

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{Q}} \mathrm{E}_Q[-X]$$

für die Klasse von Wahrscheinlichkeitsmaßen $\mathcal{Q} := \{Q \in \mathcal{M}_1 | \alpha(Q) = 0\}$. Umgekehrt kann mithilfe einer Straffunktion $\alpha : \mathcal{M}_1 \to (-\infty, \infty]$ und einer Teilmenge $\mathcal{Q}_\rho$ durch

$$\rho(X) := \sup_{Q \in \mathcal{Q}_\rho} \{\mathrm{E}_Q[-X] - \alpha(Q)\}$$

ein konvexes Risikomaß auf $\mathcal{X}$ konstruiert werden.

Verteilungsbasierte Risikomaße. Es sei nun P ein Referenzwahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathcal{F})$. Gilt dann $\rho(X) = \rho(Y)$ für $X = Y$ P-f. s., so kann ρ als ein konvexes Risikomaß auf $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aufgefasst werden. In diesem Fall existiert die robuste Darstellung (4.36) falls ρ **stetig von oben** ist, d. h.

$$\rho(X_n) \nearrow \rho(X) \quad \text{falls } X_n \searrow X \in \mathcal{X},$$

und $\mathcal{M}_1$ kann durch die Klasse $\mathcal{M}_1(P) := \{Q \in \mathcal{M}_1 | Q \ll P\}$ ersetzt werden.

Definition 4.4 (verteilungsbasiertes Risikomaß)**.** *Ein monetäres Risikomaß ρ auf $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ heißt **verteilungsbasiert**, falls $\rho(X)$ nur von der Verteilung von X unter P abhängt, d. h. es gilt $\rho(X) = \rho(Y)$, falls X und Y unter P dieselbe Verteilung besitzen.*

Das folgende Resultat konkretisiert die **robuste Darstellung** konvexer Risikomaße im Kontext der verteilungsbasierten Risikomaße. Es zeigt insbesondere, dass das Risikomaß **Average Value at Risk**

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) := \tfrac{1}{\lambda} \int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\, d\alpha \quad \lambda \in (0, 1),$$

der wesentliche Baustein für alle verteilungsbasierten konvexen Risikomaße ist.

Theorem 4.5 (robuste Darstellung verteilungsbasierter Risikomaße)**.** *Ein konvexes Risikomaß $\rho : L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P) \to \mathbb{R}$ ($L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ separabel) ist genau dann verteilungsbasiert, wenn*

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}_1((0,1])} \left(\int_{(0,1]} \mathrm{AV@R}_\lambda(X)\, \mu(d\lambda) - \beta_{\min}(\mu) \right)$$

mit

$$\beta_{\min}(\mu) = \sup_{X \in \mathcal{A}_\rho} \int_{(0,1]} \mathrm{AV@R}_\lambda(X)\, \mu(d\lambda).$$

$\mathcal{M}_1((0,1])$ bezeichnet hierbei die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(0, 1]$, versehen mit der Borel-σ-Algebra $\mathcal{B}((0, 1])$ auf dem Intervall $(0, 1]$.

Ein kohärentes Risikomaß ρ ist entsprechend verteilungsbasiert genau dann, wenn

$$\rho(X) = \sup_{\mu \in \mathcal{M}} \int_{(0,1]} \mathrm{AV@R}_\lambda(X)\,\mu(d\lambda)$$

für eine Teilmenge $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1((0,1])$ gilt.

Einige Standardbeispiele für verteilungsbasierte Risikomaße werden im nächsten Abschnitt zusammengestellt.

4.3.2 Beispiele

In den folgenden Beispielen wird ein Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathcal{F})$ fixiert und der lineare Raum $\mathcal{X} = L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ betrachtet. Alle Risikomaße sind zunächst auf $\mathcal{X}$ definiert, besitzen jedoch kanonische Fortsetzungen auf größere Räume.

Value at Risk. Das Standardrisikomaß in Versicherungen und Banken ist der **Value at Risk**. Für eine Schranke $\lambda \in (0,1)$ sei $\mathrm{V@R}_\lambda$ das monetäre Risikomaß, das durch die Akzeptanzmenge

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{X} | P[X < 0] \leq \lambda\} \tag{4.37}$$

definiert wird. Für eine Finanzposition X spezifiziert der Wert $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ somit den kleinsten Geldbetrag, der zu X hinzugefügt werden muss, sodass die Wahrscheinlichkeit eines Verlustes kleiner oder gleich λ ausfällt:

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_\lambda(X) &= \inf\{m \in \mathbb{R} | P[X + m < 0] \leq \lambda\} = q^-_{-X}(1-\lambda) \\ &= -\sup\{c \in \mathbb{R} | P[X < c] \leq \lambda\} = -q^+_X(\lambda). \end{aligned}$$

Hierbei bezeichnet $q^-_{-X}(1-\lambda)$ das untere $(1-\lambda)$-Quantil der Verteilung von $-X$; $q^+_X(\lambda)$ symbolisiert das obere λ-Quantil von X. Für eine stetige Zufallsvariable X stimmen für gegebenes Niveau λ oberes und unteres Quantil überein, d. h. $q^-_X(\lambda) = q^+_X(\lambda) =: q_X(\lambda)$, und es gilt:

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = q_{-X}(1-\lambda) = -q_X(\lambda). \tag{4.38}$$

Bemerkung 4.6 (Value at Risk - Normalverteilung)**.** *Der Value at Risk ist offenbar ein positiv homogenes monetäres Risikomaß, das auf dem linearen Raum $L^0(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aller endlichen Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ wohldefiniert ist. Insbesondere gilt für eine normalverteilte Zufallsvariable X mit Varianz $\sigma_P^2(X)$*

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = \mathrm{E}_P[-X] + \Phi^{-1}(1-\lambda)\sigma_P(X) = \mathrm{E}_P[-X] - \Phi^{-1}(\lambda)\sigma_P(X), \tag{4.39}$$

wobei Φ^{-1} die Inverse der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung bezeichnet.

Da σ_P ein konvexes Funktional auf $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ist, kann $\mathrm{V@R}_\lambda$ für Parameter $\lambda \leq 0,5$ als ein konvexes Risikomaß auf jedem Unterraum normalverteilter Zufallsvariablen des $L^2(\Omega, \mathcal{F}, P)$ aufgefasst werden. Das monetäre Risikomaß $\mathrm{V@R}_\lambda$ ist jedoch nicht konvex auf $L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und kann somit ökonomisch sinnvolle Diversifikation bestrafen, sofern die zugrunde liegenden Finanzpositionen nicht mehr gemeinsam normalverteilt sind.

Bemerkung 4.7 (Quantiltransformation)**.** *Ist $X = f(Y)$ für eine wachsende Funktion f und bezeichnet q_Y eine Quantilfunktion für Y, so ist $\lambda \mapsto f(q_Y(\lambda))$ eine Quantilfunktion für X:*

$$q_X(\lambda) = q_{f(Y)}(\lambda) = f(q_Y(\lambda)) \quad \text{für fast alle } \lambda \in (0,1).$$

Ist f eine fallende Funktion, so ist $\lambda \mapsto f(q_Y(1-\lambda))$ eine Quantilfunktion für X:

$$q_X(\lambda) = q_{f(Y)}(\lambda) = f(q_Y(1-\lambda)) \quad \text{für fast alle } \lambda \in (0,1).$$

Als Anwendung ergibt sich ausgehend von einer zu den Parameter (μ, σ^2) normalverteilten Zufallsvariable Y und (4.39) eine Berechnungsformel für den Value at Risk der Finanzposition $X = -\exp(Y)$, deren Verluste $L = -X$ lognormalverteilt sind:

$$\mathrm{V@R}_\lambda(X) = -q_X(\lambda) = \exp(q_Y(1-\lambda)) = \exp(\mathrm{V@R}_\lambda(-Y)) = \exp(\mu + \Phi^{-1}(1-\lambda)\sigma).$$

Average Value at Risk. Der **Average Value at Risk**, auch **Expected Shortfall** genannt, zum Niveau $\lambda \in (0,1]$ ist definiert durch

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \tfrac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\,d\alpha. \tag{4.40}$$

Per definitionem berücksichtigt dieses Risikomaß extreme Verluste. Die alternative Bezeichnung ist motiviert durch die alternative Darstellung

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \tfrac{1}{\lambda}\mathrm{E}_P[(q(\lambda)-X)^+] - q(\lambda) = \tfrac{1}{\lambda}\inf_{l\in\mathbb{R}}\{\mathrm{E}_P[(l-X)^+] - \lambda l\} \tag{4.41}$$

für jedes λ-Quantil $q(\lambda)$ von X. Das Minimierungsproblem erlaubt insbesondere eine Ermittlung des AV@R ohne vorherige Bestimmung des V@R. Im Spezialfall gilt

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \mathrm{V@R}_\lambda(X) + \tfrac{1}{\lambda}\mathrm{E}_P[(-X-\mathrm{V@R}_\lambda(X))^+].$$

Dies zeigt erstens, dass das gemäß $\mathrm{AV@R}_\lambda$ ermittelte Risiko aus dem $\mathrm{V@R}_\lambda$ und einer zusätzlichen „Exzess-Reserve“ besteht, die die mittlere Überschreitung quantifiziert. Zweitens folgt

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) \geq \mathrm{V@R}_\lambda(X).$$

Genauer gesagt, kann $\mathrm{AV@R}_\lambda$ als das kleinste konvexe Risikomaß charakterisiert werden, das verteilungsbasiert ist und $\mathrm{V@R}_\lambda$ dominiert. Für $\lambda = 1$ entspricht der Average Value at Risk dem erwarteten Verlust $\mathrm{E}_P[-X]$.

$\mathrm{AV@R}_\lambda$ ist ein kohärentes Risikomaß, dessen robuste Darstellung die Form

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \max_{Q\in\mathcal{Q}_\lambda}\mathrm{E}_Q[-X]$$

mit $\mathcal{Q}_\lambda := \left\{Q \ll P \,|\, \frac{dQ}{dP} \leq \frac{1}{\lambda}\right\}$ besitzt.

Bemerkung 4.8 (Average Value at Risk - Normalverteilung)**.** *Ist X normalverteilt, so gilt*

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \mathrm{E}_P[-X] + \tfrac{1}{\lambda}\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))\sigma_P(X),$$

wobei φ die Dichte der Standardnormalverteilung bezeichnet. Dies folgt unmittelbar aus (4.39) kombiniert mit der Substitution $x = \Phi^{-1}(\alpha)$ und $\varphi'(x) = -x\varphi(x)$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{AV@R}_\lambda(X) &= \tfrac{1}{\lambda}\int_0^\lambda \mathrm{V@R}_\alpha(X)\,d\alpha = \mathrm{E}_P[-X] + \left(\tfrac{1}{\lambda}\int_0^\lambda -\Phi^{-1}(\alpha)\,d\alpha\right)\sigma_P(X)\\
&= \mathrm{E}_P[-X] + \left(\tfrac{1}{\lambda}\int_{-\infty}^{\Phi^{-1}(\lambda)} -x\varphi(x)\,dx\right)\sigma_P(X) = \mathrm{E}_P[-X] + \tfrac{1}{\lambda}\varphi(\Phi^{-1}(\lambda))\sigma_P(X).
\end{aligned}$$

Tail Value at Risk. Der **Tail Value a Risk** zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ ist definiert durch

$$\mathrm{TV@R}_\lambda(X) := \mathrm{E}_P[-X \,|\, -X > \mathrm{V@R}_\lambda(X)].$$

Er entspricht somit dem bedingten erwarteten Verlust gegeben, dass der Verlust $-X$ den Value at Risk $\mathrm{V@R}_\lambda(X)$ überschreitet, und besitzt somit eine klare ökonomische Interpretation. In der Praxis ist der Tail Value at Risk eine weitverbreitete Alternative zum Risikomaß Value at Risk. Es ist jedoch zu beachten, dass der Tail Value at Risk kein konvexes Risikomaß ist.

Zwischen dem Average Value at Risk und dem Tail Value at Risk besteht der Zusammenhang

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \gamma_\lambda \cdot \mathrm{TV@R}_\lambda(X) + (1-\gamma_\lambda)\mathrm{V@R}_\lambda(X)$$

für $\gamma_\lambda = P[-X > \mathrm{V@R}_\lambda(X)]/\lambda$. Hieraus folgt $\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \mathrm{TV@R}_\lambda(X)$ für alle $\lambda \in (0,1)$ mit $P[-X = \mathrm{V@R}_\lambda(X)] = 0$. Insbesondere stimmen für alle Zufallsvariablen mit stetiger Verteilung der Average Value at Risk und der Tail Value at Risk überein.

Exkurs: Shortfall Risk. Für eine gegebene konvexe und wachsende Verlustfunktion $l : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei das Verlustrisiko (**shortfall risk**) einer Finanzposition X durch $\mathrm{E}_P[\,l(-X)]$ quantifiziert. Ist nun $r_0 > \inf l$ eine vorgegebene Schranke für das Verlustrisiko, so ergibt sich die Akzeptanzmenge

$$\mathcal{A} := \{X \in \mathcal{X} | \mathrm{E}_P[\,l(-X)] \le r_0\}.$$

Diese ist offenbar konvex, und das durch $\mathcal{A}$ via (4.34) induzierte konvexe Risikomaß ρ^{SR} heißt **Shortfall-Risikomaß**. Da die Akzeptanzmenge auch in der Form

$$\mathcal{A} = \{X \in \mathcal{X} | \mathrm{E}_P[\,u(X)] \ge -r_0\}$$

mithilfe der Nutzenfunktion $u(x) := -l(-x)$ dargestellt werden kann, wird ρ^{SR} auch **Utility-based-Shortfall-Risikomaß** genannt. Hierbei ist $m = \rho^{\mathrm{SR}}(X)$ die eindeutige Lösung der Gleichung

$$\mathrm{E}_P[\,l(-X-m)] = r_0.$$

Dies erlaubt, klassische Verfahren zur stochastischen Nullstellensuche zur numerischen Berechnung heranzuziehen.

Das Shortfall-Risikomaß besitzt die robuste Darstellung

$$\rho(X) = \sup_{Q \in \mathcal{M}_1(P)} \{\mathrm{E}_Q[-X] - \alpha^{\min}(Q)\}$$

mit (minimaler) Straffunktion

$$\alpha^{\min}(Q) = \inf_{\lambda > 0} \tfrac{1}{\lambda}(r_0 + \mathrm{E}_P[\,l^*(\lambda \tfrac{dQ}{dP})]),$$

wobei $l^*(z) := \sup_{x \in \mathbb{R}}\{zx - l(x)\}$ die Fenchel-Legendre-Transformierte von l bezeichnet.

Exkurs: Entropisches Risikomaß. Wird die Straffunktion $\alpha(Q) := \frac{1}{\gamma} H(Q|P)$ durch einen Parameter $\gamma > 0$ und die **relative Entropie**

$$H(Q|P) := \begin{cases} \mathrm{E}_Q[\ln \frac{dQ}{dP}] & \text{falls } Q \ll P, \\ +\infty & \text{sonst.} \end{cases} \tag{4.42}$$

definiert, so heißt das konvexe Risikomaß e_γ mit robuster Darstellung

$$e_\gamma(X) := \sup_{Q \in \mathcal{M}_1} \{\mathrm{E}_Q[-X] - \tfrac{1}{\gamma} H(Q|P)\}$$

entropisches Risikomaß mit Parameter $\gamma > 0$. Aus dem Variationsprinzip

$$H(Q|P) = \sup_{X \in L^\infty(\Omega, \mathcal{F}, P)} \{\mathrm{E}_Q[-X] - \ln \mathrm{E}_P[e^{-X}]\}$$

für die relative Entropie folgt für e_γ die explizite Darstellung

$$e_\gamma(X) = \tfrac{1}{\gamma} \ln \mathrm{E}_P[e^{-\gamma X}].$$

Damit besitzt die zugehörige Akzeptanzmenge (4.33) die Form

$$\begin{aligned} \mathcal{A} &= \{X | e_\gamma(X) \le 0\} \\ &= \{X | \mathrm{E}_P[\,l(-X)] \le 1\} = \{X | \mathrm{E}_P[\,u(X)] \ge 0\} \end{aligned}$$

für die konvexe Verlustfunktion $l(x) = e^{\gamma x}$ und die exponentielle Nutzenfunktion $u(x) = 1 - e^{-\gamma x}$, d. h. das entropische Risikomaß ist ein Spezialfall des Shortfall-Risikomaßes.

Expectiles and Expectile Value at Risk. Die unteren und oberen Quantile $q_X^-(\lambda)$ und $q_X^+(\lambda)$ zum Niveau $\lambda \in (0,1)$ einer Zufallsvariable X können durch die Minimierung einer asymmetrischen, stückweise linearen Verlustfunktion definiert werden:

$$[q_X^-(\lambda), q_X^+(\lambda)] = \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}}\left(\lambda \mathrm{E}_P[(X-x)^+] + (1-\lambda)\mathrm{E}_P[(X-x)^-]\right).$$

Die **Expectiles** sind definiert als die Minimierer des asymmetrischen quadratischen Verlustes:

$$\mathrm{E}_\lambda(X) := \mathrm{argmin}_{x\in\mathbb{R}}\left(\lambda \mathrm{E}_P[((X-x)^+)^2] + (1-\lambda)\mathrm{E}_P[((X-x)^-)^2]\right).$$

Für $\lambda = 1/2$ gilt $\mathrm{E}_{1/2}(X) = \mathrm{E}_P[X]$. Insofern können Expectiles als eine asymmetrische Verallgemeinerung des Erwartungswerts interpretiert werden. Der Begriff „Expectiles“ vereint motiviert durch diese Zusammenhänge die Begriffe „Expectation“ und „Quantile“.

Die Expectiles sind eindeutig bestimmt durch die first-order-condition

$$\lambda \mathrm{E}_P[(X-\mathrm{E}_\lambda(X))^+] = (1-\lambda)\mathrm{E}_P[(X-\mathrm{E}_\lambda)^-]. \tag{4.43}$$

Setzt man $l_\lambda(x) := \lambda x^+ + (1-\lambda)x^-$, so ist die Bedingung (4.43) äquivalent zu

$$\mathrm{E}_P[l_\lambda(X-\mathrm{E}_\lambda(X))] = 0.$$

Damit sind Expectiles Spezialfälle der Shortfall-Risikomaße.

Analog zu $\mathrm{V@R}_\lambda(X) = -q_\lambda^+(X)$ wird der **Expectile Value at Risk** definiert durch

$$\mathrm{EV@R}_\lambda(X) := -\mathrm{E}_\lambda(X).$$

Für $\lambda \in (0, \frac{1}{2})$ ist $\mathrm{EV@R}_\lambda$ ein kohärentes Risikomaß und in der Tat das einzige, welches „elicitible“ im Sinn von Bemerkung 4.9 ist. Der Expectile Value at Risk ist charakterisiert durch die Akzeptanzmenge

$$\mathcal{A}_{\mathrm{EV@R}_\lambda} = \left\{X \middle| \frac{\mathrm{E}_P[X^+]}{\mathrm{E}_P[X^-]} \geq \frac{1-\lambda}{\lambda}\right\}.$$

Insofern ist $\mathrm{EV@R}_\lambda(X)$ als Kapitalanforderung, die zu einer Finanzposition X hinzugefügt werden sollte, sodass diese eine vordefinierte, hinreichend hohe Gewinn-Verlust-Quote besitzt, zu interpretieren.

Bemerkung 4.9 (Exkurs: elicitable risk measure)**.** *Regulatorische Vorgaben (BASEL, Solvency II) erfordern, dass Banken und Versicherungen ihre Bilanzen in die Zukunft projizieren und Kapitalanforderungen aus der Verteilung der projizierten Bilanz berechnen. Als Funktionale der unbekannten zukünftigen Verteilungen sind über verteilungsinvariante Risikomaße definierte Kapitalanforderungen prognostizierte Größen, die innerhalb eines probabilistischen Modells auf Basis der verfügbaren Daten geschätzt werden. Back Testing ist der Vergleich dieser Prognose mit vergangener Erfahrung mit dem Ziel, das Modell und die daraus abgeleitete Prognoseverteilung zu validieren.*

Ein in der Praxis weitverbreiteter Ansatz besteht in der Berechnung des „Average Score“

$$\bar{S} := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} S(x_i, y_i)$$

*gegeben eine Scoring-Funktion S, gegeben eine Historie von Beobachtungen y_i mit unbekannter Verteilung μ aus einer Klasse von Verteilungen $\mathcal{M}$ und gegeben eine Historie von Prognosen x_i für das betrachtete statistische Funktional $T(\mu)$. Die Performance wird als gut bewertet, wenn der „Average Score“ $\bar{S}$ klein ist. Dieses Kriterium ist jedoch nur dann sinnvoll, wenn die Scoring-Funktion konsistent zum statistischen Funktional T im folgendem Sinn ist: Für großes n und eine feste Schätzung x wird der Average Score typischerweise ungefähr der Erwartung $\int S(x,y)\mu(dy)$ entsprechen, wenn die Daten stationär und gemäß der Verteilung μ verteilt sind. Daher sollte der entsprechende Wert $T(\mu)$ des statistischen Funktionals für jedes $\mu \in \mathcal{M}$ den erwarteten Score $\int S(x,y)d\mu$ minimieren. In diesem Fall wird die Scoring-Funktion S konsistent zum Funktional T auf $\mathcal{M}$ genannt. Das Funktional T heißt **elicitable** auf $\mathcal{M}$, falls es eine konsistente Scoring-Funktion besitzt. So ist beispielsweise der Erwartungswert $T(\mu) = \int y\mu(dy)$ elicitable bezüglich der Scoring-Funktion $S(x,y) = (y-x)^2$.*

Lernergebnisse (B3)
Die Studierenden kennen die Axiomatik für monetäre und konvexe Risikomaße und können die Axiome interpretieren. Sie kennen zudem die robuste Darstellung konvexer Risikomaße und deren Interpretation. Die Studierenden kennen wesentliche Beispiele für Risikomaße und können diese in die axiomatische Theorie der Risikomaße einordnen. Sie können das Risiko von Finanzpositionen in einfachen Spezialfällen berechnen.

4.4 Anwendung von Risikomaßen zur Bestimmung des erforderlichen Risikokapitals

Kerninhalte

- Risikokategorisierung, Abgrenzung: quantifizierbare vs. qualitativ bewertbare Risiken
- Fallstudie: Solvabilitätskapitalanforderung (SCR) unter Solvency II (SCR-Definition, Standardformel vs. (partielles) internes Modell)
- Fallstudie: Berechnung des Value at Risk per Delta-Normal-Approximation

Zur einheitlichen Beschreibung und Klassifizierung von Risiken sind Risikokategorien ein wesentlicher Bestandteil eines guten Risikomanagementsystems. Es gibt viele mögliche Ansätze, zum Beispiel:

- Quantifizierbare vs. qualitativ bewertete Risiken
- Marktrisiko, Ausfallrisiko, Versicherungstechnisches Risiko Leben, Versicherungstechnisches Risiko Nichtleben, Operationelles Risiko
- Systematische Risiken vs. unternehmensspezifische Risiken

Quantifizierbare Risiken umfassen insbesondere Marktrisiken, Ausfallrisiken, Versicherungstechnische Risiken Leben, Kranken und Nichtleben sowie Operationelle Risiken. Diese können mithilfe von mathematischen Modellen quantifiziert werden. Dies erfolgt in der Regel durch Anpassung gewählter Modelle an die verfügbaren internen und externen Daten, die in Form von Zeitreihen für Finanzmärkte oder Schadenhistorien zur Verfügung stehen. Zu beachten ist dabei, dass die Quantifizierung im Rahmen eines Modells - das an Daten angepasst wird - erfolgt. Insofern besteht **Modellunsicherheit** bei der Risikomessung insbesondere durch die Modellwahl, die Qualität der Daten und Schätzungenauigkeiten (Konfidenzintervalle) für die zugrunde liegenden Parameter. Erfolgt die Messung im Rahmen eines Simulationsmodells ist zusätzlich der Monte-Carlo-Fehler zu beachten. Bei den quantifizierbaren Risiken nimmt das operationelle Risiko eine Sonderstellung ein, da kaum bzw. nur wenige Daten vorliegen. Die Modellierung basiert daher in hohem Maße auf Expertensetzungen für die Parameter des Modells zur Messung operationeller Risiken. Von besonderer Bedeutung sind in der Modellierung die Spezifikation von Abhängigkeiten innerhalb von Risikokategorien (z. B. Prämienrisiko zwischen Sparten, Abhängigkeiten zwischen Risikofaktoren in den ökonomischen Szenarien zur Messung des Marktrisikos) und zwischen Risikokategorien, die die Diversifikation steuern. Hierfür stehen verschiedene Verfahren zur Verfügung (u. a. Kopplung von Risikofaktoren, gemeinsame Risikotreiber, Copula-Ansätze). Typischerweise beruht die Modellierung aufgrund fehlender Daten auf Expertensetzungen, sodass in Bezug auf Abhängigkeiten und die Diversifikation eine ausgeprägte Modellunsicherheit besteht.

Einer qualitativen Bewertung unterliegen dagegen häufig Emerging Risks, Strategische Risiken oder etwa Reputationsrisiken. Deren Bewertung basiert in der Regel auf Experteneinschätzungen.

Im Folgenden werden zwei Praxisbeispiele zur Berechnung des erforderlichen Risikokapitals skizziert.

4.4.1 Risikomessung unter Solvency II

Solvency II ist die seit dem 1.01.2016 in der EU gültige Regulierung von Versicherungsunternehmen, die analog zu den BASEL-Anforderungen im Bankenbereich in drei Säulen gegliedert ist. Kernthema von Säule I ist dabei die Berechnung der **Solvabilitätskapitalanforderung** (Solvency Capital Requirement, SCR), die gemäß Erwägungsgrund 64 der Richtlinie 2009/138/EU bei dem ökonomischen Kapital angesetzt werden sollte, „das Versicherungs- und Rückversicherungsunternehmen halten müssen, um sicherzustellen, dass es höchstens in einem von 200 Fällen zur Insolvenz kommen kann oder diese Unternehmen mit einer Wahrscheinlichkeit von 99,5 % in den kommenden zwölf Monaten weiterhin in der Lage sein werden, ihren Verpflichtungen gegenüber den Versicherungsnehmern und Begünstigten nachzukommen.“ Gedanklich ist hierzu die Bilanz im Einjahreshorizont für eine Anzahl realistischer Szenarien zu projizieren und das SCR aus der Verteilung der Basiseigenmittel zu ermitteln.

Formal kann dies in ein (marktwertbasiertes) Einperiodenmodell mit Zeitpunkten $t = 0, 1$ eingebettet werden, wobei der Zeitpunkt 0 als der aktuelle Bewertungsstichtag aufzufassen ist und der Zeitpunkt 1 dem Einjahreshorizont von Solvency II entspricht. Die Basiseigenmittel - definiert als Differenz von Assets und Liabilities gemäß Solvenzbilanz - werden im Folgenden mit E_0 bzw. E_1 bezeichnet. Hierbei sind die Basiseigenmittel E_0 zu $t = 0$ deterministisch, während die Basiseigenmittel E_1 im Einjahreshorizont stochastisch sind und formal eine Zufallsvariable auf einem geeigneten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ darstellen.

Gemäß Richtlinie 2009/138/EU muss die Solvabilitätskapitalanforderung ausreichend sein, um einem Ruin im Einjahreshorizont mit der Wahrscheinlichkeit 99,5 % vorzubeugen, d. h. $P[E_1 < 0] \leq \lambda$ mit $\lambda = 0,005$. Wird nun die Solvabilitätskapitalanforderung gemäß

$$\widetilde{\mathrm{SCR}}(E_1) := \mathrm{V@R}_\lambda(E_1 - E_0) \tag{4.44}$$

definiert, so sind die folgenden Bedingungen äquivalent:

$$P[E_1 < 0] \leq \lambda \quad \Leftrightarrow \quad E_1 \in \mathcal{A}_{\mathrm{V@R}_\lambda} \quad \Leftrightarrow \quad \widetilde{\mathrm{SCR}}(E_1) \leq E_0.$$

Hierbei bezeichnet $\mathcal{A}_{\mathrm{V@R}_\lambda} = \{X | P[X < 0] \leq \lambda\}$ die in (4.37) definierte Akzeptanzmenge von $\mathrm{V@R}_\lambda$. Insofern ergibt sich mit dieser Definition aus der Richtlinie eine Akzeptanzmenge für die Basiseigenmittel des Unternehmens zum Zeitpunkt 1. Akzeptanz der Eigenmittel ist wegen (4.34) äquivalent dazu, dass das SCR kleiner als die Basiseigenmittel zum Zeitpunkt 0 ausfällt bzw. anders ausgedrückt die Bedeckungsquote größer gleich 100 % ist.

Im Gegensatz zur SCR-Definition (4.44) besteht jedoch regulatorisch (siehe §97(2) VAG bzw. §101(3) Richtlinie 2009/138/EU) die Vorgabe, dass die Solvabilitätskapitalanforderung nur unerwartete Verluste abdeckt. Zugleich wird vorgegeben, dass die Solvabilitätskapitalanforderung „dem Value-at-Risk der Basiseigenmittel eines Versicherungsunternehmens zu einem Konfidenzniveau von 99,5 Prozent über einen Zeitraum von einem Jahr“ entspricht. In diesem Sinn wird das SCR in der Praxis mithilfe des **Mean Value at Risk** (4.32) der Basiseigenmittel E_1 bestimmt:

$$\mathrm{SCR}(E_1) = \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1 - \mathrm{E}[E_1]) = \mathrm{E}[E_1] + \mathrm{V@R}_{0,005}(E_1). \tag{4.45}$$

Das so definierte SCR ist kein monetäres Risikomaß gemäß Definition 4.2. Zudem kann es sich - vererbt vom Value at Risk - nicht subadditiv verhalten und damit Diversifikation bestrafen.

Zur Berechnung der Solvabilitätskapitalanforderung können Versicherungsunternehmen (partielle) **interne Modelle** verwenden oder auf die **Standardformel** zurückgreifen.

Die Standardformel ist modular aufgebaut. Das gesamte Risiko wird auf oberster Ebene in das operationelle Risiko und die Risikomodule „nichtlebensversicherungstechnisches Risiko“, „lebensversicherungstechnisches Risiko“, „krankenversicherungstechnisches Risiko“,

„Marktrisiko“ und „Gegenparteiausfallrisiko“ der Basissolvabilitätskapitalanforderung aufgeteilt, die wiederum in weitere Untermodule untergliedert werden. Für jedes Untermodul wird eine Kapitalanforderung, basierend auf formelbasierten Faktoransätzen mit vorgegebenen Stressleveln, berechnet. Standardformel und unternehmensindividuelle Modellierung können auf Ebene der Untermodule (und auch aggregiert) zu teils deutlich unterschiedlichen Risikobewertungen führen. Ursächlich hierfür ist grundsätzlich primär die unternehmensindividuelle Kalibrierung des internen Modells, die auf das spezifische Risikoprofil der Gesellschaft abstellt, dem die Standardformel aufgrund ihrer Universalität (ungeachtet der Möglichkeit unternehmensspezifische Parameter (USP) zur Verwendung bei der Aufsicht zu beantragen) nur bedingt Rechnung tragen kann.

Zur Berechnung der Kapitalanforderung für jedes Risikomodul und nachgelagert für das gesamte Risiko einer Gesellschaft werden die Kapitalanforderungen auf der Ebene der jeweiligen Untermodule bzw. Risikomodule mithilfe der sogenannten **„Wurzelformel“** iterativ aggregiert. Die Wurzelformel verwendet dabei aufsichtsrechtlich vorgegebene Korrelationen - das einfachste statistische Abhängigkeitsmaß - zwischen den Untermodulen bzw. Risikomodulen zur Spezifikation der Abhängigkeiten. Diese steuern die Diversifikationseffekte innerhalb und zwischen den Risikomodulen in der Standardformel. Für zwei Risiken X und Y besitzt die Wurzelformel die Form

$$\mathrm{SCR}(X+Y)=\sqrt{\mathrm{SCR}(X)^2+\mathrm{SCR}(Y)^2+2\rho\mathrm{SCR}(X)\mathrm{SCR}(Y)},$$

wobei ρ die lineare Korrelation zwischen X und Y bezeichnet.

Bemerkung 4.10 (Wurzel-Formel im Solvency-II-Standardmodel)**.** *Die Wurzelformel ähnelt strukturell der Formel für die Varianz* Var *bzw. Standardabweichung* $\sigma=\sqrt{\mathrm{Var}}$ *zweier Zufallsvariablen mit Korrelation* ρ*:*

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}(X+Y) &= \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)+2\rho\sqrt{\mathrm{Var}(X)}\sqrt{\mathrm{Var}(Y)},\\ \sigma(X+Y) &= \sqrt{\sigma^2(X)+\sigma^2(Y)+2\rho\sigma(X)\sigma(Y)}.\end{aligned}$$

Beachtet man nun, dass mit der SCR-Definition (4.45) und (4.39) das SCR *einer normalverteilten Zufallsvariable modulo Vorfaktor nur von der Standardabweichung abhängt, so ergibt sich hieraus für multivariate normalverteilte Zufallsvariablen - und zwar mathematisch exakt - die Solvency-II-Wurzelformel. Bei abweichenden Randverteilungen der Risiken oder Abhängigkeiten (Copula) ist die Wurzelformel dagegen mathematisch nicht korrekt zur Aggregation von Risiken.*

(Partielle) Interne Modelle modellieren alle Risiken und deren Abhängigkeiten unternehmensindividuell, um dem spezifischen Risikoprofil des Unternehmens Rechnung zu tragen. Die Implementierung erfolgt in komplexen Simulationsmodellen, teilweise unter Verwendung von Approximationsverfahren wie z. B. replizierenden Portfolien für interne Modelle von Lebensversicherungsgesellschaften.

4.4.2 Risikomessung in Faktormodellen: Delta-Approximation

In der Praxis ist die effiziente Messung des Risikos von Finanzpositionen/Portfolien von zentraler Bedeutung. Hierzu werden häufig **Faktormodelle** verwendet. Bei diesen ist der Wert V_t einer Finanzposition zur Zeit t erklärt über die Werte $Z_t^1, Z_t^2, \dots, Z_t^m$ von m Risikofaktoren zur Zeit t, d. h. es gilt

$$V_t = v(Z_t^1, Z_t^2, \dots, Z_t^m).$$

für eine deterministische Funktion $v = v(z^1, \dots, z^m)$. Im Folgenden sei t ein fester Zeitpunkt, zu dem die Risikomessung erfolgt.

Ist nun die gemeinsame Verteilung der Risikofaktoren bekannt, so kann der Value at Risk des Gewinns/Verlusts innerhalb der Periode $[t, t+h]$

$$\Delta V := V_{t+h} - V_t = v(Z_{t+h}^1, \dots, Z_{t+h}^m) - v(Z_t^1, \dots, Z_t^m)$$

analytisch (einfache Funktion v und Verteilungsannahmen), analytisch basierend auf Approximationen oder mithilfe von Monte-Carlo-Simulationen der Risikofaktoren berechnet werden.

Eine Möglichkeit zur approximativen Berechnung ist - die Differenzierbarkeit von v vorausgesetzt - die **Delta-Approximation**, die einer Taylor-Approximation 1. Ordnung entspricht. Die Darstellung erfolgt im Folgenden vereinfacht für zwei Risikofaktoren $i = 1, 2$. Es seien dazu $z^i = z^i(t)$ sowie $\Delta z^i = z^i(t+h) - z^i(t)$ für $t \geq 0$ und $h > 0$. Dann gilt gemäß Taylor-Approximation

$$\Delta v := v(z^1 + \Delta z^1, z^2 + \Delta z^2) - v(z^1, z^2) \approx \frac{\partial v(z^1, z^2)}{\partial z^1}\Delta z^1 + \frac{\partial v(z^1, z^2)}{\partial z^2}\Delta z^2. \tag{4.46}$$

Da es sich hierbei per Konstruktion um eine lokale Approximation handelt, ist nur für „kleine" Änderungen Δz^i eine gute Approximation zu erwarten. Übertragen auf die entsprechenden Zufallsvariablen $\Delta Z^1, \Delta Z^2$ ergibt sich mit $d_i = \frac{\partial v}{\partial z^i}$

$$\Delta V \approx d_1 \Delta Z^1 + d_2 \Delta Z^2.$$

Wird nun weiterhin angenommen, dass $(\Delta Z^1, \Delta Z^2)^\top \sim \mathcal{N}_2(h\mu, h\Sigma)$ zwei-dimensional normalverteilt ist, so gilt

$$\mathrm{E}[\Delta Z^i] = h\mu_i, \quad \mathrm{Var}[\Delta Z^i] = h\sigma_i^2, \quad \mathrm{Cov}[\Delta Z^1, \Delta Z2] = h\sigma_{1,2}$$

und ΔV ist normalverteilt mit

$$\mathrm{E}[\Delta V] = h(d_1\mu_1 + d_2\mu_2),\ \mathrm{Var}[\Delta V] = h(d_1^2\sigma_1^2 + d_2^2\sigma_2^2 + 2d_1d_2\sigma_{1,2}).$$

Dementsprechend ist unter Beachtung von (4.39) der Value at Risk des Periodengewinns ΔV ist gegeben durch

$$\mathrm{V@R}_\lambda(\Delta V) = \mathrm{E}[-\Delta V] - \Phi^{-1}(\lambda)\sqrt{\mathrm{Var}(\Delta V)}.$$

Hierbei bezeichnet Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung. Dieses Berechnungsverfahren heißt **Delta-Normal-Approximation**.

Anstelle der Taylor-Approximation 1. Ordnung (4.46) für Δv kann eine Taylor-Approximation 2. Ordnung (**Delta-Gamma-Approximation**) herangezogen werden:

$$\Delta v \approx \sum_{i=1,2} \frac{\partial v(z^1, z^2)}{\partial z^i}\Delta z^i + \frac{1}{2}\sum_{i=1,2}\sum_{j=1,2}\frac{\partial^2 v(z^1, z^2)}{\partial z^i \partial z^j}\Delta z^i \Delta z^j.$$

Wird in der weiteren Berechnung für die Änderung der Risikofaktoren wiederum eine multivariate Normalverteilung unterstellt, so spricht man von einer **Delta-Gamma-Normal-Approximation**. Die Delta-Gamma-Approximation kann als weitere Anwendung mit einer Simulation der Risikofaktoren kombiniert werden.

Lernergebnisse (C2)
Die Studierenden können die Anwendung von Risikomaßen zur Berechnung der Solvabilitätskapitalanforderung unter Solvency II erklären. Sie kennen die Standardformelmethodik und können die Wurzelformel zur Aggregation des Risikokapital kritisch würdigen.
Die Studierenden kennen Techniken zur Berechnung des Risikos in Faktormodellen und können insbesondere den Delta-Normal-Ansatz anwenden.

4.5 Risikoadjustierte Performancemaße

Kerninhalte

- Konzeption risikoadjustierter Performance-Maße
- Wesentliche Beispiele: Sharpe-Ratio, Jensen-Index, Treynor-Ratio, RoRaC, RaRoC, RaRoRac
- Kapitalallokation und RoRaC-Kompatibilität

In der Praxis spielen Performance-Kennzahlen eine wichtige Rolle. Je nach Branche und Zielsetzung gibt es diverse **Key-Performance-Indikatoren** (KPI). Mit diesen können verschiedene Ziele verbunden sein:

- Geschäftssteuerung
- Incentivierung
- Kommunikation (Investoren, Ratingagenturen)
- Vergleich verschiedener Investments

Gebräuchliche Kennzahlen - insbesondere in der externen Berichterstattung - sind dabei z. B. der **Return on Equity (ROE)** oder der **Return on Investment (ROI)**. Bei diesen handelt es sich um reine Ertragsmaßstäbe; ein Bezug zwischen Return und Risiko wird nicht hergestellt. Die Konzepte der risikoadjustierten Performance-Messung sind kontextbezogen vielfältig. Gemeinsam ist jedoch allen **risikoadjustierten Performance-Maßen**, dass sie den Return in Relation zu dem dafür eingegangenen Risiko setzen. Mit anderen Worten: Eine Form der Risikoadjustierung wird angewendet. (Risikoadjustierte) Performance-Maße können **ex ante** (erwarteter Return) oder **ex post** (tatsächlicher Return) verwendet werden.

- Ex-ante Betrachtungen dienen u. a. der Festlegung von Zielen oder kommen bei Anlageentscheidungen zum Einsatz.
- Ex-post Betrachtungen werden primär für die Kommunikation und Incentivierung sowie im Steuerungskreislauf zur Messung der Zielerreichung verwendet.

4.5.1 Risikoadjustierte Performancemaße - Beispiele

Wichtige klassische Beispiele für risikoadjustierte Performance-Maße sind die **Sharpe-Ratio**, der **Jensen-Index** und die **Treynor-Ratio**. Diese Performance-Maße kommen im **Investmentbereich** zum Einsatz und setzen ein Einperiodenmodell im Rahmen von Abschnitt 5.2 voraus, inklusive der Erweiterung um eine sichere Anlage mit risikolosem Einperiodenzins r_0.

- **Sharpe-Ratio:** Die (ex ante) Sharpe-Ratio einer Anlage mit stochastischer Einperiodenrendite R ist definiert durch

  $$\mathrm{SR}(R) = \frac{\mathrm{E}[R] - r_0}{\sigma(R)}.$$

  Insofern setzt die Sharpe-Ratio die Höhe der Risikoprämie $\mathrm{E}[R] - r_0$, definiert als mittlere Überrendite über den risikolosen Zins hinaus, in Relation zum für die Erzielung dieser Überrendite eingegangenen Schwankungsrisiko $\sigma(R)$.

- **Jensen-Index:** Der Jensen-Index leitet sich aus der Analyse der residualen Rendite

  $$\mathrm{RR}_P = (R_P - r_0) - \beta_P(R_M - r_0)$$

  eines Wertpapierportfolios mit Rendite R_P ab. Inhaltlich korrigiert die residuale Rendite die Exzessrendite $R_P - r_0$ um Markteffekte, indem die Exzessrendite des beta-äquivalenten Marktportfolios subtrahiert wird. Hierbei ist das beta-äquivalente Portfolio das Portfolio auf der Kapitalmarktlinie, also diejenige Mischung aus sicherer Anlage und Marktportfolio, das den gleichen Beta-Faktor wie das Ausgangsportfolio besitzt.

  Der Jensen-Index (auch Alpha-Faktor genannt) entspricht der erwarteten residualen Rendite:

  $$\alpha_P = \mathrm{E}[\mathrm{RR}_P] = [\mathrm{E}[R_P] - r_0] - \beta_P[\mathrm{E}[R_M] - r_0]$$

  Unter der Voraussetzung eines CAPM-Gleichgewichts gilt für jedes Portfolio $\alpha_P = 0$. Daher impliziert $\alpha_P > 0$ (bzw. $\alpha_P < 0$) eine erwartete Überrendite (bzw. Unterrendite).

- **Treynor-Ratio:** Die Treynor-Ratio einer Anlage mit Einperiodenrendite R ist definiert durch
$$\mathrm{TR}(R) = \frac{\mathrm{E}[R] - r_0}{\beta(R)}.$$
Die Treynor-Ratio setzt also die Risikoprämie in Relation zum Beta-Faktor, als Maß für das systematische Risiko (siehe Bemerkung 5.10).

In der Praxis finden des Weiteren die folgenden risikoadjustierten Performance-Maße in der **Unternehmenssteuerung** und im Risikomanagement Anwendung:

- **Return on Risk adjusted Capital (RoRaC):** Der RoRaC (ex ante) beschreibt das Verhältnis aus erwartetem ökonomischen Gewinn zum eingesetztem Risikokapital:
$$\mathrm{RoRaC} := \frac{\text{erwarteter ökonomischer Gewinn}}{\text{Risk Adjusted Capital}}.$$
Das **Risk Adjusted Capital (RAC)** ist dabei das Kapital, das zum Tragen der Verluste aus einen bestimmten Ereignis benötigt wird. Hierbei ist das Ereignis typischerweise als Verlust im Einjahreshorizont definiert, der mit einer vorgegebenen Wahrscheinlichkeit nicht überschritten werden darf.

- **Risk adjusted Return on Capital (RaRoC):** Die Steuerung von Geschäftseinheiten oder des Gesamtunternehmens erfolgt durch Vorgabe einer **Hurdle Rate** r_h sowie der Anforderung, dass der RoRaC die Hurdle Rate übersteigt. Die Hurdle Rate ist eine Mindestrendite, die vom Management für die Verzinsung des Risikokapitals als angemessen erachtet wird. Hierbei kann die Hurdle Rate den Kapitalkosten entsprechen. Der RaRoC (ex ante) ist definiert durch:
$$\mathrm{RaRoC} := \mathrm{RoRaC} - r_h.$$

- **Risk adjusted Return on Risk adjusted Capital (RaRoRaC):** RaRoRaC (ex ante) ist das Verhältnis aus erwartetem ökonomischen Ergebnis abzüglich Kapitalkosten und dem eingesetztem Risikokapital:
$$\mathrm{RaRoRaC} := \frac{\text{erwarteter ökonomischer Gewinn - Kapitalkosten}}{\text{Risk Adjusted Capital}}.$$

4.5.2 Exkurs: Kapitalallokation und RoRaC-Kompatibilität

Risiken setzen sich häufig aus Teilrisiken zusammen. So besteht z. B. ein Versicherungskonzern aus mehreren Versicherungsunternehmen, jedes dieser einzelnen Versicherungsunternehmen umfasst mehrere Sparten und jede Sparte bündelt verschiedene Produkte. Formal ausgedrückt entspricht dies einer Anzahl n von risikobehafteten Teilportfolien, gegeben durch die Finanzpositionen $X_1, \ldots, X_n$, aus denen ein Gesamtportfolio $X := X_1 + \ldots + X_n$ resultiert. Erfolgt die Risikomessung mithilfe eines Risikomaßes ρ, so ergibt sich in der Regel ein Diversifikationseffekt:
$$\rho(X) \leq \sum_{k=1}^{n} \rho(X_k).$$
Gegenstand der **Kapitalallokation** ist, jedem Teilportfolio X_k, $k = 1, \ldots, n$, einen Risikokapitalbeitrag $\rho(X_k|X)$ zuzuweisen, der seinen Beitrag zum Gesamtrisiko $\rho(X)$ und zur Diversifikation innerhalb des Gesamtportfolios angemessen widerspiegelt. Als Grundanforderungen an eine Kapitalallokation werden dabei folgende Bedingungen gestellt:

1. **Vollständige Kapitalallokation:** $\sum_{k=1}^{n} \rho(X_k|X) = \rho(X)$

2. **Diversifikation:** Für jedes Teilportfolio X_k, $k = 1, ..., n$, ist - bedingt durch Diversifikation - das allokierte Kapital höchstens so hoch wie das Kapital des Teilportfolios alleine:
$$\rho(X_k|X) \leq \rho(X_k) \quad \text{für } k = 1, ..., n$$

Eine Kapitalallokation mit diesen Eigenschaften nennt man auch Zuteilung.

Beispiele für Kapitalallokationen umfassen die proportionale Aufteilung, Marginalprinzipien (z. B. Euler-Allokation, Kovarianzprinzip) und spieltheoretische Ansätze (z. B. Shapley-Verfahren).

Im Kontext der risikokapitalbasierten Ergebnissteuerung wird als Anforderung an eine Kapitalalloaktion die **RoRaC-Kompatibilität** der Kapitalallokation propagiert:

3. **RoRaC-Kompatibilität:** Bezogen auf das Risikomaß ρ seien
$$\text{RoRaC}(X) = \frac{\text{E}[X]}{\rho(X)} \quad \text{und} \quad \text{RoRaC}(X_k|X) = \frac{\text{E}[X_k]}{\rho(X_k|X)}$$
der RoRaC des Gesamtportfolios X bzw. des Teilportfolios X_k. Die Kapitalallokation $\rho(X_k|X)$ heißt RoRaC-kompatibel, wenn ein $\epsilon_k > 0$ existiert mit:
$$\text{RoRaC}(X_k|X) > \text{RoRaC}(X) \quad \Rightarrow \quad \text{RoRaC}(X + hX_k) > \text{RoRaC}(X) \quad \text{für alle } 0 < h < \epsilon_k.$$
Dies bedeutet, dass sich durch Hinzunahme eines weiteren Anteils des Teilportfolios X_k, dessen RoRaC den RoRaC des Gesamtportfolios übersteigt, der RoRaC des Gesamtportfolios steigern lässt.

Unter geeigneten Differenzierbarkeitsannahmen an das Risikomaß ρ ist - sofern eine RoRaC-kompatible Kapitalallokation $\rho(X_k|X)$ existiert - diese eindeutig definiert durch die **Euler-Allokation**:
$$\rho(X_k|X) = \frac{d}{dh}\rho(X + hX_k)|_{h=0}$$

Eine Allokation, die den obigen drei Eigenschaften genügt, ergibt sich beispielsweise für den **Tail Value at Risk** zum Niveau $\lambda \in (0, 1)$ (siehe Seite 76)
$$\text{TV@R}_\lambda(X) := \text{E}[-X| - X \geq \text{V@R}_\lambda(X)].$$

In diesen Fall ist die Euler-Allokation gegeben durch den Conditional Shortfall
$$\rho(X_k|X) = \text{TV@R}_\lambda(X_k|X) := \text{E}[-X_k| - X \geq \text{V@R}_\lambda(X)].$$

Lernergebnisse (C3)
Die Studierenden können die Konzeption risikoadjustierter Performancemaße erläutern. Sie kennen die wesentlichen risikoadjustierten Performancemaße.

5 Portfoliooptimierung

Die Steuerung von Asset-Portfolien ist eines der zentralen Themen von institutionellen Anlegern wie Versicherungen (hier insbesondere im Zusammenspiel mit den „Liabilities“) und Banken, aber auch im Kleinen für Privatpersonen. Für die Anlage stehen riskante und weniger riskante Anlageformen zur Verfügung, wobei typischerweise eine höhere (mittlere) Rendite mit einem höheren Risiko der Anlage einhergeht. Wie ist die optimale Zusammensetzung eines Portfolios zu gestalten?

Entscheidend zur Beantwortung dieser Frage ist die Definition von „Optimalität“, gegebenenfalls unter Beachtung zusätzlicher Nebenbedingungen an das Portfolio. In der Theorie und Praxis gibt es zahlreiche Ansätze und Modelle zur Portfoliooptimierung. Im Folgenden werden einschlägig bekannte (klassische) Verfahren vorgestellt und einer kritischen Würdigung unterzogen.

5.1 Nutzenoptimierung[23]

Kerninhalte

- Nutzenmaximierungsproblem: Motivation und Formulierung
- Nutzenbasierte Portfoliooptimierung mit primären Produkten (Einperiodenmodell)
- Nutzenmaximierung mit Derivaten (Einperiodenmodell)
- Exkurs: Dynamische Nutzenmaximierung im Binomialmodell (Cox-Ross-Rubinstein-Modell): Prinzip der Dynamischen Programmierung, Martingal-Methode

Ein ökonomischer Agent hat das Ziel, ausgehend von einem Startkapital $v > 0$ den Wert seines Vermögens zu einem Zeitpunkt T zu optimieren. Weitere Kapitalzuführungen oder -entnahmen (z. B. für intertemporalen Konsum) sind nicht vorgesehen. Das Vermögen V zum Zeitpunkt T kann mit einer reellwertigen Zufallsvariable auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ identifiziert werden, und dem ökonomischen Agenten steht eine Menge $\mathcal{X}$ solcher Positionen zu Auswahl. Um die Positionen in $\mathcal{X}$ zu realisieren, kann der Agent z. B. geeignete Portfolios aus primären Finanzprodukten konstruieren oder mit komplexen derivativen Produkten handeln. In einem vollständigen Markt ergibt sich in diesen beiden Fällen dieselbe Menge erreichbarer Positionen; in einem unvollständigen Markt erlauben Derivate mehr Flexibilität als Portfolios, liefern damit ein reichhaltigeres Instrumentarium und können den Nutzen des Endvermögens erhöhen.

Optimalität wird ausgehend von den **individuellen Präferenzen** des ökonomischen Agenten definiert (siehe Seite 19), für den im Folgenden risikoaverses Verhalten unterstellt wird. Die Präferenzordnung $\succ$ auf $\mathcal{X}$ sei dabei über das Präferenzfunktional $\mathcal{U}(X) = \mathrm{E}_P[u(X)]$ expliziert (**von-Neumann-Morgenstern-Darstellung**):

$$X \succ Y \iff \mathrm{E}_P[u(X)] > \mathrm{E}_P[u(Y)] \quad (X, Y \in \mathcal{X})$$

Hierbei ist P das Referenzwahrscheinlichkeitsmaß und u bezeichnet eine Nutzenfunktion.

Eine Funktion $u : S \subset \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ist die **Nutzenfunktion** eines risikoaversen ökonomischen Agenten, falls u strikt konkav und strikt wachsend S ist (siehe Abschnitt 2.1.1). Zusätzlich wird im Folgenden Stetigkeit für u unterstellt. Beispiele für Nutzenfunktionen umfassen:

- **Exponentielle Nutzenfunktion:** $u(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x \in S = \mathbb{R}$, für $\lambda > 0$,
- **Logarithmische Nutzenfunktion:** $u(x) = \ln(x)$, $x \in S = (0, \infty)$,

[23] Die Darstellung der in den folgenden zwei Abschnitten vorgestellten Spezifikationen orientiert sich an Föllmer, H.; Schied, A.: *Stochastic Finance - An Introduction in Discrete Time*. De Gruyter, 4. Auflage, 2016, Kapitel 3.

- **Potenznutzenfunktion:** $u(x) = \frac{x^\eta}{\eta}$, $x \in S = (0, \infty)$, für $\eta \neq 0$.

Das Optimierungsproblem des ökonomischen Agenten mit Startkapital $v > 0$ lautet nun:

$$\text{Maximiere } \mathrm{E}_P[u(V)] \text{ über alle erreichbaren } V. \tag{5.47}$$

Das in (5.47) formulierte Optimierungskriterium heißt statisches **Nutzenmaximierungsproblem**. In der Literatur werden zahlreiche, auch dynamische Erweiterungen diskutiert (u. a. intertemporaler Konsum, Shortfall-Nebenbedingungen, Robustifizierung im Kontext von Knightian Uncertainty).

5.1.1 Nutzenbasierte Portfoliooptimierung im Einperiodenmodell

Der Finanzmarkt im Einperiodenmodell beinhaltet $d+1$ primäre Produkte, die liquide gehandelt werden. Zum Zeitpunkt 0 sind deren strikt positive Preise mit

$$\bar{\pi} = (\pi^0, \pi)^T = (\pi^0, \pi^1, \dots, \pi^d)^T$$

bezeichnet, zum Zeitpunkt $T > 0$ mit

$$\bar{S} = (S^0, S)^T = (S^0, S^1, S^2, \dots, S^d)^T.$$

Zum Zeitpunkt 0 wählt der Agent ein Portfolio

$$\bar{\vartheta} = (\vartheta^0, \vartheta)^T = (\vartheta^0, \vartheta^1, \vartheta^2, \dots, \vartheta^d)^T,$$

um das Nutzenmaximierungsproblem (5.47) zu lösen. Es sei nun angenommen, dass Produkt 0 risikofrei mit Zinssatz $r > -1$ verzinst wird. Nach einer Normierung ergibt sich $\pi^0 = 1$ und $S^0 = 1 + r$.

Zur Portfoliooptimierung stehen Akteuren Endpositionen aus dem endlich-dimensionalen Vektorraum $\mathcal{X} = \{\bar{\vartheta} \cdot \bar{S} : \bar{\vartheta} \in \mathbb{R}^{d+1}\}$ zur Verfügung. Ist $v > 0$ das Anfangsvermögen des Akteurs, so muss seine Portfoliostrategie $\bar{\vartheta}$ die Budgetbedingung $\bar{\vartheta} \cdot \bar{\pi} \leq v$ erfüllen. Das Problem (5.47) lässt sich somit umformulieren:

$$\text{Maximiere } \mathrm{E}_P\left[u(\bar{\vartheta} \cdot \bar{S})\right] \text{ über } \{\bar{\vartheta} \in \mathbb{R}^{d+1} : \bar{\vartheta} \cdot \bar{\pi} \leq v\}.$$

Im Optimum werden keine Ressourcen verschwendet, sodass (unter schwachen Voraussetzungen) die Budgetgrenze angenommen wird, d. h. das optimale $\bar{\vartheta}^*$ erfüllt die Gleichung $\bar{\vartheta}^* \cdot \bar{\pi} = v$. Diese Beobachtung erlaubt es, dass Optimierungsproblem auf $\mathbb{R}^{d+1}$ mit einer Nebenbedingung durch ein Optimierungsproblem auf $\mathbb{R}^d$ ohne Nebenbedingung zu ersetzen.

Zu diesem Zweck werden die diskontierten Gewinne der Produkte definiert:

$$Y^i = \frac{S^i}{1+r} - \pi^i, \quad i = 1, 2, \dots, d.$$

Unter Berücksichtigung der Gleichung $\bar{\vartheta} \cdot \bar{\pi} = v$, die von alle relevanten Strategien $\bar{\vartheta}$ erfüllt ist, ergibt sich $\bar{\vartheta} \cdot \bar{S} = (1+r)(\vartheta \cdot Y + v)$. Setzt man

$$\tilde{u}(y) := u((1+r)(y+v)),$$

ergibt sich das äquivalente Problem:

$$\text{Maximiere } \mathrm{E}_P[\tilde{u}(\vartheta \cdot Y)] \text{ über } \vartheta^1, \dots, \vartheta^d \in \mathbb{R}.$$

Dieses Problem kann mit klassischen Methoden analysiert werden.

5.1.2 Optimierung mit Derivaten

Während Portfolios im Einperiodenmodell linear aus den primären Produkten zusammengesetzt sind und einen endlich-dimensionalen Vektorraum aufspannen, bilden Derivate alle Auszahlungsprofile ab, die vertraglich vereinbart werden können. In diesem Abschnitt sei zur Vereinfachung der Notation angenommen, dass alle Auszahlungsprofile bereits bezüglich eines geeigneten Numéraires diskontiert seien. Zulässige Auszahlungsprofile zum Zeitpunkt T bilden einen Vektorraum $\mathcal{X}$ von Zufallsvariablen. Preise zum Zeitpunkt 0 werden mittels eines Preismaßes Q berechnet: Ist X eine Auszahlung zum Zeitpunkt T, so wird diese zum Zeitpunkt 0 mit $\mathrm{E}_Q[X]$ bewertet. Das Wahrscheinlichkeitsmaß Q ist äquivalent zum Referenzmaß P. Die Existenz von Preismaßen zur Bewertung folgt aus dem 1. Fundamentalsatz der Asset-Bewertung. Vollständigkeit des Marktes muss dabei nicht vorausgesetzt werden.

Wie zuvor wird das Nutzenmaximierungsproblem (5.47) betrachtet. Der Vektorraum $\mathcal{X}$ wird so gewählt, dass Auszahlungsprofile $X \in \mathcal{X}$ die folgenden zwei Bedingungen erfüllen:

(a) Der Preis $\mathrm{E}_Q[X]$ des Auszahlungsprofils ist endlich.

(b) Der Erwartungsnutzen $\mathrm{E}_P[u(X)]$ ist nicht unendlich groß, d. h. $\mathrm{E}_P[u(X)] < \infty$.

Ein Agent mit einem Anfangsvermögen $v > 0$ kann Auszahlungsprofile erwerben, deren Preis v nicht überschreitet. Dieses führt zur Definition seiner Budgetmenge

$$\mathcal{X}(v) := \{X \in \mathcal{X} | \mathrm{E}_Q[X] \le v\}.$$

Das Nutzenmaximierungsproblem kann somit formuliert werden als

$$W_0(v) = \sup_{X \in \mathcal{X}(v)} \mathrm{E}_P[u(X)]. \tag{5.48}$$

Die „heuristische“ Lösung von (5.48) ergibt sich wie folgt: Angenommen, das Nutzenmaximierungsproblem besitzt eine Lösung X^*. Da das Budget im Optimum ausgeschöpft wird, besteht die Identität $\mathrm{E}_Q[X^*] = v$. Betrachtet man die Finanzposition $X_\gamma := X^* + \gamma(X - \mathrm{E}_Q[X])$ für beliebiges beschränktes X, $\gamma \in \mathbb{R}$, so schöpft X_γ das Budget ebenfalls aus, d. h. $\mathrm{E}_Q[X_\gamma] = v$, und eine formale Rechnung - ausgehend von der Bedingung erster Ordnung - zeigt

$$\begin{aligned}
0 &= \tfrac{d}{d\gamma}\mathrm{E}_P[u(X_\gamma)]\big|_{\gamma=0} \\
&= \mathrm{E}_P[u'(X^*)(X - \mathrm{E}_Q[X])] \\
&= \mathrm{E}_P[u'(X^*)X] - \mathrm{E}_P[X\mathrm{E}_P[u'(X^*)]\tfrac{dQ}{dP}] \\
&= \mathrm{E}_P[X(u'(X^*) - \lambda\tfrac{dQ}{dP})] \quad \text{mit } \lambda := \mathrm{E}_P[u'(X^*)],
\end{aligned}$$

wobei in der dritten Zeile ein Maßwechsel mithilfe der Radon-Nikodým-Dichte dQ/dP von Q bezüglich P durchgeführt wird. Die Identität $\mathrm{E}_P[Xu'(X^*)] = \mathrm{E}_P[X\lambda\frac{dQ}{dP}]$ für alle beschränkten Zufallsvariablen X impliziert $u'(X^*) = \lambda\frac{dQ}{dP}$ P-fast sicher, also

$$X^* = (u')^{-1}(\lambda\tfrac{dQ}{dP}).$$

Theorem 5.1 (Lösung des statischen Nutzenmaximierungsproblems)**.** *Es sei $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Nutzenfunktion, deren Ableitung $\lim_{x\downarrow-\infty} u'(x) = +\infty$ erfüllt. Dann löst*

$$X^* := I\left(\lambda\frac{dQ}{dP}\right)$$

mit $I := (u')^{-1}$ das Nutzenmaximierungsproblem (5.48), wenn λ mit $\mathrm{E}_Q[X^*] = v$ gewählt werden kann.

Bemerkung 5.2. *Es sei u eine Nutzenfunktion auf* $S = (0, \infty)$ *mit*

$$\alpha := \lim_{x \uparrow \infty} u'(x) \geq 0 \quad \text{und} \quad \beta := \lim_{x \downarrow 0} u'(x) \leq +\infty.$$

In diesem Fall wird $I^+ : (\alpha, \beta) \to (0, \infty)$ *als stetige, bijektive und strikt fallende inverse Funktion von* u' *auf* (α, β) *definiert und fortgesetzt durch* $I^+(y) = 0$ *für* $y \geq \beta$ *sowie* $I^+(y) = \infty$ *für* $y \leq \alpha$*. Die Aussage von Theorem 5.1 gilt dann mit* I^+ *anstatt* I*.*

Mit diesen allgemeinen Resultaten ergeben sich die folgenden Lösungen des statischen Nutzenmaximierungsproblems (5.48) für ausgewählte Nutzenfunktionen:

- **Exponentielle Nutzenfunktion:** $u(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$, $x \in S = \mathbb{R}$, für $\lambda > 0$
  - Nutzenmaximierende Auszahlung: $X^* = -\frac{1}{\lambda} \ln(\frac{dQ}{dP}) + v + \frac{1}{\lambda} H(Q|P)$
  - Maximaler erwarteter Nutzen: $\mathrm{E}_P[u(X^*)] = 1 - \exp(-\lambda v - H(Q|P))$

    Hierbei bezeichnet $H(Q|P)$ die relative Entropie von Q bezüglich P (siehe (4.42)).
- **Logarithmische Nutzenfunktion:** $u(x) = \ln(x)$, $x \in S = (0, \infty)$
  - Nutzenmaximierende Auszahlung: $X^* = v\frac{dP}{dQ}$
  - Maximaler erwarteter Nutzen: $\mathrm{E}_P[u(X^*)] = \ln(v) + H(P|Q)$
- **Potenznutzenfunktion:** $u(x) = \frac{x^\eta}{\eta}$, $x \in S = (0, \infty)$, für $\eta \neq 0$
  - Nutzenmaximierende Auszahlung: $X^* = v(\mathrm{E}_P[(\frac{dQ}{dP})^{-\frac{\eta}{1-\eta}}])^{-1}(\frac{dQ}{dP})^{-\frac{1}{1-\eta}}$
  - Maximaler erwarteter Nutzen: $\mathrm{E}_P[u(X^*)] = \frac{1}{\eta} v^\eta (\mathrm{E}_P[(\frac{dQ}{dP})^{-\frac{\eta}{1-\eta}}])^{1-\eta}$

5.1.3 Exkurs: Portfoliooptimierung im Binomialmodell

Der letzte Abschnitt hat das Nutzenmaximierungsproblem in einem Einperiodenmodell untersucht. Die Analyse kann auf den Fall mehrerer Perioden verallgemeinert werden. Dieses wird am Beispiel des Binomialmodells von Cox-Ross-Rubinstein illustriert.

Ein ökonomischer Agent hat das Ziel, ausgehend von einem Startkapital $v > 0$ die Wertentwicklung seines Portfolios bis zu einem Zeitpunkt T zu optimieren. Weitere Kapitalzuführungen oder -entnahmen (z. B. für intertemporalen Konsum) sind nicht vorgesehen, d. h. der Investor verfolgt selbstfinanzierende Handelsstrategien. Jeder Portfoliowert V_T^ϑ einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie ϑ kann mit einer reellwertigen Zufallsvariable auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$ identifiziert werden, und dem ökonomischen Agenten steht eine Menge $\mathcal{X}$ solcher Positionen zu Auswahl. Das Optimierungsproblem des ökonomischen Agenten mit Startkapital $v > 0$ lautet nun:

$$\text{Maximiere } \mathrm{E}_P[u(V_T^\vartheta)] \text{ über alle selbstfinanzierenden Handelsstrategien } \vartheta. \tag{5.49}$$

Das in (5.49) formulierte Optimierungskriterium heißt **dynamisches Nutzenmaximierungsproblem**.

Zur Lösung dieses zunächst allgemein formulierten Problems existieren verschiedene Ansätze. Im Folgenden werden Grundtechniken im Kontext des Binomialmodells von Cox-Ross-Rubinstein erörtert (siehe Abschnitt 3.4.2). Das Binomialmodell ist ein diskretes Finanzmarktmodell mit T Handelsperioden und zwei Anlagemöglichkeiten:

- Risikofreie Anlage $S_t^0 := (1+r)^t$, $t = 0, \ldots, T$, mit einem deterministischen Zins $r > -1$

- Risikobehaftete Anlage (Aktie) $S := S^1$ mit Preisprozess $S_t = S_0 \cdot Y_1 \cdot \ldots \cdot Y_t$, $t = 0, 1, \ldots, T$, für Zuwächse Y_t, die nur Werte $d, u \in \mathbb{R}$ mit $0 < d < 1 + r < u$ annehmen

Mit dieser Spezifikation ist das Binomialmodell arbitrage-frei und vollständig, und es existiert ein eindeutig bestimmtes äquivalentes Martingalmaß Q (siehe Theorem 3.8). Für die weitere Analyse sei das Referenzmaß P für einen Parameter $p \in (0,1)$ festgelegt durch

$$P[\{\omega\}] = p^{N(\omega)} \cdot (1-p)^{T-N(\omega)} > 0 \quad \text{für alle } \omega = (y_1, \ldots, y_T) \in \Omega = \{d, u\}^T,$$

wobei $N(\omega)$ die Anzahl von u in $\omega = (y_1, \ldots, y_T)$ bezeichnet. Unter P sind folglich die Zuwächse $Y_1, \ldots, Y_T$ unabhängig mit $P[Y_t = u] = p$, $P[Y_t = d] = 1 - p$.

Die Maße P und Q sind äquivalent auf $(\Omega, \mathcal{F})$ und ineinander überführbar mithilfe der Radon-Nikodým-Dichte

$$\frac{dQ}{dP}(\omega) = \left(\frac{q}{p}\right)^{N(\omega)} \cdot \left(\frac{1-q}{1-p}\right)^{T-N(\omega)}, \quad \omega \in \Omega. \tag{5.50}$$

Lösungsansatz 1: Dynamische Programmierung. Ausgehend vom Startkapital $V_0 = v > 0$ soll der erwartete Nutzen des Vermögens

$$\mathrm{E}_P[u(V_T^\vartheta)]$$

zum Zeitpunkt T über alle selbstfinanzierenden Handelsstrategien $\vartheta = ((\vartheta_t^0, \vartheta_t^1))_{t=1,\ldots,T}$ mit Wertprozess $V_t^\vartheta > 0$, $t = 0, 1, \ldots, T$, optimiert werden. Hilfreich dazu ist, die Handelsstrategie über den Anteil des Portfoliowertes, der in das riskante Asset investiert wird, auszudrücken:

$$\pi_t = \frac{\vartheta_t^1 S_{t-1}}{V_{t-1}^\vartheta}, \quad t = 1, \ldots, T.$$

In diesem Fall gilt für die Wertentwicklung

$$V_t^\pi = V_{t-1}^\pi[(1-\pi_t)(1+r) + \pi_t Y_t] = V_{t-1}^\pi[(1+r) + \pi_t((Y_t - 1) - r)], \quad t = 1, \ldots, T.$$

Kernidee der Dynamischen Programmierung ist, anstelle des Ursprungsproblems eine Familie von Nutzenmaximierungsproblemen zu betrachten. Zu diesem Zweck werden für $v > 0$ die folgenden Definitionen eingeführt:

- Wertprozess einer selbstfinanzierenden Handelsstrategie ab $t \le T$:

$$V_k^{t,\pi}(v) := v \prod_{j=t+1}^{k} (1 + r + \pi_j((Y_j - 1) - r)), \quad k = t, \ldots, T$$

- Menge aller zulässigen Handelsstrategien ab $t \le T$:

$$\mathcal{A}_t(v) := \{\pi = (\pi_u)_{t+1 \le u \le T} | \pi \text{ vorhersehbar und } V_k^{t,\pi}(v) > 0 \text{ für alle } k = t, \ldots, T\}$$

- Wertfunktion des Nutzenmaximierungsproblems zur Zeit $t \le T$:

$$W_t(v) := \sup_{\pi \in \mathcal{A}_t(v)} \mathrm{E}_P[u(V_T^{t,\pi}(v))]$$

Für die Familie dieser Wertfunktionen kann das **Bellman-Prinzip** hergeleitet werden.

Theorem 5.3 (Bellman-Prinzip)**.** *Für alle Zeitpunkte $t \le T$ und $v \in (0, \infty)$ gilt:*

$$W_t(v) = \sup_{x \in \mathbb{R}} \mathrm{E}_P[W_{t+1}(v(1 + r + x((Y_{t+1} - 1) - r))].$$

Das Bellman-Prinzip ermöglicht eine rekursive Berechnung der Wertfunktionen ausgehend von der Endbedingung $W_T(v) = u(v)$. Im Spezialfall $u(x) = \ln(x)$ ergibt sich folgende Lösung des Nutzenmaximierungsproblems im Binomialmodell.

Korollar 5.4 (Optimale Strategie für die logarithmische Nutzenfunktion)**.** *Für alle $t \leq T$ und $v \in (0, \infty)$ gilt*

$$W_t = \ln(v) + (T-t)\left[1 + r + p\ln\left(\tfrac{p}{q}\right) + (1-p)\ln\left(\tfrac{1-p}{1-q}\right)\right].$$

Die Handelsstrategie

$$\pi_j^* = \frac{(1+r)(p-q)}{q(1-q)(u-d)}, \quad j \in \{t+1, \ldots, T\}$$

ist optimal für $W_t(v)$.

Ökonomisch bedeutet dies, dass bei einer logarithmischen Nutzenfunktion stets ein **konstanter Anteil** des Portfoliowerts in das riskante Asset investiert wird.

Lösungsansatz 2: Martingalmethode. Der Wertprozess $(V_t^\pi)_{t=0,1,\ldots,T}$ jeder selbstfinanzierenden Handelsstrategie $\pi \in \mathcal{A}_0(v)$ erfüllt

$$\mathrm{E}_Q[(1+r)^{-T} V_T^\pi] = v,$$

da der diskontierte Wertprozess ein Q-Martingal ist (siehe Bemerkung 2.20). Umgekehrt kann - gegeben die Vollständigkeit des Binomialmodells - jeder Contingent Claim

$$X \in \mathcal{X}(v) := \{X > 0 | X\ \mathcal{F}_T\text{-messbar mit } \mathrm{E}_Q[(1+r)^{-T}X] = v\}, \quad v > 0,$$

mit Fälligkeit T durch eine selbstfinanzierende Handelsstrategie mit Startwert $V_0^\pi = v$ und positivem Wertprozess repliziert werden. Dies bedeutet

$$\mathcal{X}(v) = \{V_T^\pi : \pi \in \mathcal{A}_0(v)\},$$

und es folgt:

$$W_0(v) = \sup_{X \in \mathcal{X}(v)} \mathrm{E}_P[u(X)].$$

Dementsprechend kann das dynamische Nutzenmaximierungsproblem in zwei Schritte zerlegt werden:

- **Schritt 1:** Lösung des statischen Nutzenmaximierungsproblems wie in (5.48)
- **Schritt 2:** Replikation des optimalen Auszahlungsprofils $X^* \in \mathcal{X}(v)$

Im Binomialmodell ergibt sich beispielsweise als Lösung des statischen Problems - in Übereinstimmung mit Korollar 5.4 - für die logarithmische Nutzenfunktion (Anwendung der Formeln auf Seite 89 mit $(1+r)^T v$ statt v):

Korollar 5.5. *Es sei $u(x) = \ln(x)$. Dann ist für alle $v > 0$ das optimale Auszahlungsprofil im Binomialmodell gegeben durch*

$$X^* = (1+r)^T v \left(\frac{p}{q}\right)^{N(\omega)} \cdot \left(\frac{1-p}{1-q}\right)^{T-N(\omega)},$$

und es gilt

$$W_0(v) = \ln(v) + T\left[\ln(1+r) + p\ln\left(\frac{p}{q}\right) + (1-p)\ln\left(\frac{1-p}{1-q}\right)\right].$$

Im zweiten Schritt muss man für X^* noch eine replizierende Handelsstrategie finden. Damit ist das dynamische Optimierungsproblem dann vollständig gelöst.

Lernergebnisse (B2)
Die Studierenden können das klassische Nutzenmaximierungsproblem im Einperiodenmodell formulieren und kennen die Motivation dieses Portfoliooptimierungskriteriums. Sie können Verfahren zur Lösung dieses Problems beschreiben.
Die Studierenden sind in der Lage, die Lösung des statischen Nutzenmaximierungsproblems für ausgewählte Nutzenfunktionen herzuleiten.

5.2 Portfoliotheorie nach Markowitz[24]

Kerninhalte

- Kapitalmarktmodell von Markowitz
- Konzeption effizienter Portfolios
- Bestimmung effizienter Portfolios und des effizienten Rands
- Bestimmung optimaler Portfolios
- Hauptkritikpunkte am Markowitz-Ansatz

5.2.1 Grundlagen

Investoren an Kapitalmärkten stehen eine Vielzahl von einzelnen Finanztiteln (oder im Kontext der Asset Allocation verschiedene Anlageklassen) als Investitionsobjekte zur Verfügung und können aus diesen Portfolien generieren. In diesem Kontext ist erstens zu klären, welche Effekte eine Portfoliobildung auf „Risiko“ und „Wert“ hat. Auf der **Risikoebene** ist Diversifikation zwischen den Einzeltiteln zentral, d. h. durch „geeignete“ Portfoliobildung kann das Risiko des Portfolios unter das Risiko der Einzeltitel gesenkt werden. Auf der **Risiko/Wert-Ebene** kommen Aspekte der Rendite/Risiko-Dominanz und effiziente Portfolios ins Spiel. Eine zweite Fragestellung betrifft die Konstruktion eines für einen gegebenen Investor „optimalen“ Portfolios (Portfolio-Mischung).

Beide Fragestellungen werden durch das klassische Kapitalmarktmodell von Markowitz adressiert. Hierbei handelt es sich um ein statisches Einperiodenmodell auf Renditeebene mit n Finanztiteln, bei dem vereinfachend Finanztitel beliebig teilbar sind und Transaktionskosten vernachlässigt werden. Die Beurteilung von Finanztiteln und Portfolien erfolgt mit der Renditestandardabweichung (bzw. äquivalent Renditevarianz) als Risikomaß und dem Renditeerwartungswert als Wertmaß. „Treiber“ für die Diversifikation bezogen auf die Standardabweichung sind hierbei die Korrelationen der Einzelrenditen. Das Referenzmaß ist das statistische Maß.

Investoren im Markowitz-Modell genügen folgender **Charakterisierung**: Sie ziehen bei gleichem Portfoliorisiko das Portfolio mit dem höheren Renditeerwartungswert vor (**Nicht-Sättigung**) sowie bei gleichem Renditeerwartungswert das Portfolio mit dem geringeren Risiko (**Ausdruck der Risikoaversion**). Dies lässt sich in folgender Definition formalisieren:

Definition 5.6 (Markowitz-Effizienz, Erwartungswert-Varianz-Effizienz)**.** *Ein Portfolio mit Rendite R_1 **dominiert** ein Portfolio mit Rendite R_2, wenn entweder*

$$\mathrm{Var}(R_1) < \mathrm{Var}(R_2) \quad \textit{und} \quad \mathrm{E}[R_1] \geq \mathrm{E}[R_2],$$

oder

$$\mathrm{E}[R_1] > \mathrm{E}[R_2] \quad \textit{und} \quad \mathrm{Var}(R_1) \leq \mathrm{Var}(R_2).$$

*Ein Portfolio heißt **Erwartungswert-Varianz-effizient** (kurz: **EV-effizient**), wenn es durch kein anderes Portfolio dominiert wird.*

Alternativ wird auch von Erwartungswert-Standardabweichung-Effizienz ((μ, σ)-Effizienz) gesprochen. Nur effiziente Portfolios können optimale Portfolios sein.

Anwendungsfelder des Markowitz-Modells sind die Herleitung optimaler Portfolios aus Einzeltiteln (Standardanwendung: Optimale Aktienportfolios) und die optimale Zusammenstellung von Anlageklassen (**Asset Allocation**). Im zweiten Fall entspricht ein Finanztitel einem Index, der eine gesamte Anlageklasse (Aktien, Zinstitel, Geldmarkt, Immobili-

[24] Die folgenden Ausführungen orientieren sich an Albrecht, P.; Maurer, R.: *Investment und Risikomanagement - Modelle, Methoden, Anwendungen*. Schäffer-Poeschel-Verlag, 4. Auflage, 2016, Abschnitt 6.3.2-6.3.3.

en, etc.) repräsentiert. Für die Asset Allocation von Versicherungsunternehmen sind zusätzlich die Verpflichtungen aus dem Versicherungsgeschäft zu beachten (**Asset-Liability-Management**).

Notationen und Konventionen. Ausgangsdaten des Markowitz-Modells sind formal die Einperiodenrenditen $R_1, \ldots, R_n$ der n riskanten Finanztitel, d. h. R_i sind Zufallsvariablen mit $\mathrm{Var}(R_i) > 0$ ($i = 1, \ldots, n$), sowie die anteiligen Investitionen $x_1, \ldots, x_n$ in diese Finanztitel. Die **Portfoliorendite** R_P ist dann gegeben durch

$$R_P = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i.$$

Im Folgenden werden auf Einzeltitelebene die Notationen

$$\mu_i := \mathrm{E}[R_i], \sigma_i := \sigma(R_i) \ (i = 1, \ldots, n) \text{ sowie } \rho_{ij} := \rho(R_i, R_j) \ (i, j = 1, \ldots, n; i \neq j)$$

verwendet. Auf Portfolioebene wird

$$\mu_P := \mathrm{E}[R_P], \sigma_P := \sigma(R_P)$$

gesetzt, und es gilt nach elementarer Rechnung

$$\mu_P = \sum_{i=1}^{n} x_i \mu_i, \sigma_P^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \sigma_i^2 + 2 \sum_{1 \leq i < j \leq n} x_i x_j \rho_{ij} \sigma_i \sigma_j.$$

Für die Zusammensetzung des Portfolios sind in praxi Restriktionen wie z. B. Einschränkungen bei Leerverkäufen oder Begrenzungen für den Anteil bestimmter Assetklassen zu beachten. Im Weiteren werden nur die folgenden Standardrestriktionen diskutiert:

- **Fall I („Short Sales Allowed“):** Das gesamte Anlagebudget muss in die n Finanztitel investiert werden, d. h. $x_1 + \ldots + x_n = 1$ (**Budgetrestriktion**). Leerverkäufe sind ohne Einschränkungen möglich.
- **Fall II („No Short Sales“):** Neben $x_1 + \ldots + x_n = 1$ besteht die Nichtnegativitätsrestriktion $x_i \geq 0$ ($i = 1, \ldots, n$), d. h. Leerverkäufe sind ausgeschlossen.

Denkbar sind jedoch auch allgemeinere Restriktionensysteme der Form $0 \leq a_i \leq x_i \leq b_i \leq 1$ ($i = 1, \ldots, n$). Die Menge der zulässigen Investmentgewichte wird mit D bezeichnet; M ist die entsprechende Menge der zulässigen (σ, μ)-Positionen.

Vektorschreibweise. Im Weiteren kommt folgende Vektorschreibweise zur Anwendung:

- $\mathbf{R} := (R_1, \ldots, R_n)^T$ (Renditevektor)
- $\boldsymbol{\mu} := (\mu_1, \ldots, \mu_n)^T$ (Erwartungswertvektor)
- $\mathbf{C} := (\mathrm{Cov}(R_i, R_j))_{i,j=1,\ldots,n}$ (Kovarianzmatrix)
- $\mathbf{x} := (x_1, \ldots, x_n)^T$ (Vektor Portfoliogewichte)
- $\mathbf{e} := (1, \ldots, 1)^T$, $\mathbf{0} := (0, \ldots, 0)^T$ (Einsvektor, Nullvektor)

Für die Portfoliorendite $R_P = R_P(\mathbf{x})$ des Portfolios $\mathbf{x}$ sowie für die zuhörige erwartete Rendite und Varianz gilt in Vektorschreibweise

$$R_P = \mathbf{x}^T \mathbf{R}, \mu_P = \mathrm{E}[R_P] = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\mu} \quad \text{und} \quad \sigma_P^2 = \mathrm{Var}(R_P) = \mathbf{x}^T \mathbf{C} \mathbf{x}.$$

Die betrachteten Restriktionen lauten im Fall 1 $\mathbf{x}^T \mathbf{e} = 1$ bzw. $\mathbf{x}^T \mathbf{e} = 1$, $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$ im Fall 2.

5.2.2 Effiziente Portfolios

Problembeschreibung und Lösungsansätze: Die Aufgabenstellung besteht in der Minimierung die Zielfunktion

$$Z(\mathbf{x}) = \mathrm{Var}(R_P) = \mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x}$$

unter den Nebenbedingungen $\mu_P = r$ (**Renditetarget**), $\mathbf{x}^T\mathbf{e} = 1$ (**Budgetrestriktion**) sowie gegebenenfalls einer **Nichtnegativitätsbedingung $\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$**.

Im **Fall I: Short Sales Allowed** ergibt sich die Lösung mit einem **Standard-Lagrange-Ansatz**, wobei der lokale Extremwert der Lagrange-Funktion zu bestimmen ist. Die Details werden nachfolgend expliziert. Ergebnisseitig kann vorwegnehmend festgehalten werden, dass der geometrische Rand der Menge aller zulässigen Portfolios aus denjenigen Punkten besteht, die bezüglich eines fixierten Erwartungswerts eine minimale Varianz (äquivalent: Standardabweichung) aufweisen [Kurve der lokalen Minimum-Varianz-Portfolios bzw. Randportfolios]. Dieser geometrische Rand ist eine Wurzelfunktion (als Funktion von σ^2) bzw. der rechte Ast einer Hyperbel (als Funktion von σ). Der **effiziente Rand** entspricht dem „oberen Ast" der Kurve inklusive dem global varianzminimalen Portfolio.

Im **Fall II: No Short Sales** fällt die Problemstellung in das Gebiet der „Quadratischen Programmierung", Im Allgemeinen existiert keine analytische Lösung. Stattdessen sind numerische Verfahren notwendig [Markowitz: Critical Line Algorithmus].

Lösung im Fall „Short Sales Allowed". In der Literatur werden eine Reihe von äquivalenten Problemformulierungen zur Bestimmung des effizienten Randes behandelt:

1) $Z_1(\mathbf{x}) = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow$ min! unter den Nebenbedingungen $\mathbf{x}^T\boldsymbol{\mu} = r$, $\mathbf{x}^T\mathbf{e} = 1$

2) $Z_2(\mathbf{x}) = t\boldsymbol{\mu}^T\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow$ max! unter der Nebenbedingung $\mathbf{x}^T\mathbf{e} = 1$

3) $Z_3(\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\boldsymbol{\mu} - \lambda\frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} \rightarrow$ max! unter der Nebenbedingung: $\mathbf{x}^T\mathbf{e} = 1$

Vorausgesetzt wird dabei jeweils die Regularität der Kovarianzmatrix **C**.

Zur Lösung des Problems in der Formulierung 2 wird die **Lagrange-Funktion** gebildet:

$$L(\mathbf{x}, \lambda) = t\mathbf{x}^T\boldsymbol{\mu} - \tfrac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{C}\mathbf{x} - \lambda(\mathbf{x}^T\mathbf{e} - 1).$$

Aus $L_{\mathbf{x}} = t\boldsymbol{\mu} - \mathbf{C} - \lambda\mathbf{e} = \mathbf{0}$ und $L_\lambda = \mathbf{x}^T\mathbf{e} - 1 = 0$ ergibt sich nach einer Reihe von Umformungen

$$\mathbf{x}(t) = \frac{1}{c}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e} + t\mathbf{h} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h},$$

wobei $\mathbf{x}_0 = \frac{1}{c}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}$, $c = \mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{e}$, $\mathbf{h} = \mathbf{C}^{-1}(\boldsymbol{\mu} - \frac{a}{c}\mathbf{e})$, $a = \mathbf{e}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}$, $b = \boldsymbol{\mu}^T\mathbf{C}^{-1}\boldsymbol{\mu}$. Für den Erwartungswert μ_t und die Varianz σ_t^2 des Portfolios $\mathbf{x}(t)$ folgt weiter mit $\alpha_0 = \frac{a}{c}$, $\alpha_1 = b - \frac{a^2}{c}$, $\gamma_0 = \frac{1}{c}$ und $\gamma_1 = \alpha_1$:

$$\mu_t = \alpha_0 + \alpha_1 t, \sigma_t^2 = \gamma_0 + \gamma_1 t^2.$$

Insgesamt lassen sich die folgenden Kernergebnisse festhalten:

Theorem 5.7 (Effizienter Rand)**.** *Mit den obigen Bezeichnungen gilt:*

*a) Für $t = 0$ ergibt sich das **global varianzminimale Portfolio**, d. h. $\sigma_0^2 = \gamma_0$, $\mu_0 = \alpha_0$.*

*b) Für die **Menge der effizienten Portfolios** gilt*

$$\begin{aligned} D^* &= \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}, t \geq 0\} \text{ bzw.} \\ M^* &= \{(\sigma, \mu) : \mu = \mu_0 + \alpha_1 t, \sigma^2 = \sigma_0^2 + \gamma_1 t^2, t \geq 0\}. \end{aligned}$$

*Die Gleichung des **effizienten Rands** lautet entsprechend ($t \geq 0$)*

$$\sigma^2 = \sigma_0^2 + \tfrac{1}{\alpha_1}(\mu - \mu_0)^2 \quad \text{bzw.} \quad \mu = \mu_0 \pm \sqrt{\alpha_1(\sigma^2 - \sigma_0^2)}.$$

c) *Es gilt* $\frac{d\mu}{d\sigma^2} = \frac{1}{2t}$ $(t \neq 0)$, *d. h. t quantifiziert die **Substitutionsrate** zwischen Renditeerwartungswert* μ *und Renditevarianz* σ^2.

5.2.3 Portfolioselektion

Jeder Investor muss einen „Trade-off“ zwischen „Risiko“ und „Rendite“ durchführen, d. h. jeder rationale EV-Investor selektiert eine für ihn charakteristische (σ, μ)-Position auf dem effizienten Rand. Zur Bestimmung dieser Position muss der Investor dabei direkt oder indirekt seine Präferenzvorstellungen hinsichtlich der Bewertung von risikobehafteten Investments offenlegen bzw. beachten.

Standardansatz. Die Standardvorgehensweise in Lehrbüchern besteht in der Nutzenoptimierung unter konkreter Spezifizierung einer EV-Präferenzfunktion

$$\mathcal{U}(R) = H(\mathrm{E}[R], \sigma(R)),$$

beispielsweise

$$H(\mathrm{E}[R], \sigma(R)) = \mathrm{E}[R] - a\sigma^2(R)$$

für einen Risikoaversionsparameter $a > 0$. Probleme der praktischen Umsetzung ergeben sich dabei in der angemessenen Wahl der Nutzen- bzw. Trade-off-Funktion oder spezieller der Wahl des Risikoaversionsparameters.

Da im Portfoliokontext erwartete Rendite und Standardabweichung von $x_1, \ldots, x_n$ abhängen, lautet das **Optimierungsproblem:**

$$H(\mu, \sigma) = V(x_1, \ldots, x_n) \quad \to \quad \max!$$
$$\text{unter der Nebenbedingung } (\sigma, \mu) \in M \text{ bzw. } \mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in D.$$

Hierbei ist M die Menge der zulässigen (σ, μ)-Positionen bzw. D die entsprechende Menge der zulässigen Investmentgewichte.

Die individuell optimale (σ, μ)-Kombination muss natürlich ein Element des effizienten Randes M^* sein. Für die Bestimmung des individuell optimalen Portfolios ist offensichtlich die vorherige Bestimmung des effizienten Randes nicht notwendig.

Exkurs: Markowitz & Value-at-Risk-Restriktionen. In praxi ist es oftmals wünschenswert, das eingegangene Risiko zu Zwecken einer Risikokontrolle explizit zu begrenzen. Die Höhe des Risikos darf dabei ein bestimmtes toleriertes Ausmaß nicht überschreiten. Im einfachsten Fall führt dies auf eine Begrenzung der Shortfallwahrscheinlichkeit („Shortfall-Restriktion“) der Form

$$P[R < z] \leq \epsilon \text{ bzw. hierzu äquivalent } P[R \geq z] \geq 1 - \epsilon.$$

Alternativ kann diese Shortfallrestriktion auch als äquivalente V@R-Restriktion formuliert werden. Besitzt nämlich R eine Dichte, so gilt zum einen $P[R < z] = P[R \leq z]$ und zum anderen (vgl. Seite 75)

$$\mathrm{V@R}_\lambda(R) = q_{-R}(1 - \lambda) = -q_R(\lambda).$$

Offenbar gilt

$$P[R \leq z] \leq \epsilon \quad \Leftrightarrow \quad z \leq q_R(\epsilon) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{V@R}_\epsilon(R) \leq -z.$$

Im Fall normalverteilter Renditen $R \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$ gilt mit der Notation $N_{1-\epsilon} = \Phi^{-1}(1 - \epsilon)$

$$\mathrm{V@R}_\epsilon(R) = N_{1-\epsilon}\sigma - \mu,$$

d. h. die **Shortfall-Restriktion** lautet:

$$\mu \geq z + N_{1-\epsilon}\sigma.$$

Die Menge zulässiger Portfolien im (σ, μ)-Raum wird somit begrenzt durch die **Shortfall-Gerade** $\mu = z + N_{1-\epsilon}\sigma$.

Durch die Shortfall- bzw. V@R-Restriktion wird der (σ, μ)-Raum in zwei disjunkte Sektoren unterteilt, bei Normalverteilungsannahme separiert durch die Shortfall-Gerade $\mu = z + N_{1-\epsilon}\sigma$. Nur der Sektor oberhalb der Geraden (inklusive dieser) ist dann noch zulässig im Sinne einer kontrollierten Shortfallwahrscheinlichkeit. In der Regel liegt dann nur noch ein Teil des effizienten Randes in dem zulässigen Sektor. Das optimale Portfolio entspricht dann dem (oberen) Schnittpunkt des effizienten Rands mit der Shortfall-Gerade.

In der Beurteilung dieses Ansatzes ist festzuhalten, dass es für Investoren oftmals intuitiver ist, eine Zielverzinsung z und ein Signifikanzniveau ϵ bzw. ein Konfidenzniveau $1-\epsilon$ zu spezifizieren als eine Nutzenfunktion oder einen Risikotoleranzparameter anzugeben. Zudem ist der Ansatz konsistent zur „Solvency II-Logik“, Risiko separat zu messen und den V@R als Risikomaß zu verwenden.

5.2.4 Probleme des Markowitz-Ansatzes

Wesentliche Probleme und Kritikpunkte des Markowitz Ansatzes lassen sich unter folgenden „Überschriften“ zusammenfassen:

a) **Standardabweichung als Risikomaß:** Das Markowitz-Basismodell beruht auf dem Risikomaß Standardabweichung. Die Standardabweichung hat als Risikomaß Bedeutung vor allem im Kontext elliptischer Verteilungen (speziell Normalverteilung), die insbesondere symmetrisch verteilt sind. In der Anwendungspraxis treten jedoch auch Fälle auf (Hedgefonds; Private Equity; Aktienportfolios, die durch Aktien- und Währungsderivate gesteuert werden), in denen eine signifikante Schiefe vorliegt. Die Standardabweichung wird diesen Asymmetrien in der Risikomessung nicht gerecht.

b) **Praxisferne analytische Lösungen:** Optimierte Portfolios besitzen oftmals extreme Allokationen. Typische Beispiele sind:

   - Ohne Leerverkaufsbeschränkung entstehen sehr hohe Leerverkaufspositionen.
   - Mit Leerverkaufsbeschränkung fällt die Diversifikation gering aus.
   - Optimale Portfolios übergewichten Assets, die hohe geschätzte erwartete Renditen sowie geringe geschätzte Varianzen bzw. Korrelationen aufweisen und vice versa.

c) **Fehlende Robustheit:** Die Optimierung ist sehr sensitiv bezüglich der Inputdaten. Die Variation der Inputdaten ergibt zum Teil strukturell völlig andere Portfolios. Insofern spielen die Inputdaten, vor allem die geschätzten Erwartungswerte, eine entscheidende Rolle für die Qualität der Portfoliooptimierung.

   Zur Robustifizierung existieren theoretische Ansätze (Behandlung der „Schätzfehlerproblematik“, Black/Litterman-Verfahren)[25] und Portfolioheuristiken wie Minimum Variance, Equal Weight oder Risk Parity.[26]

d) **Größenordnung bei der Parameterschätzung:** Bei n Einzeltiteln sind $n(n+1)/2$ Einträge der Kovarianzmatrix zu schätzen. Dies entspricht bei 100 Einzeltiteln ca. 5.000 Kovarianzen, bei 250 Einzeltiteln bereits über 30.000 Kovarianzen. Aufgrund dieser hohen Dimension erfolgen in der Praxis keine Einzelschätzungen, sondern eine

[25] Siehe: Albrecht, P.; Maurer, R.: *Investment und Risikomanagement - Modelle, Methoden, Anwendungen*. Schäffer-Poeschel-Verlag, 4. Auflage, 2016, Abschnitte 13.4-13.5

[26] Siehe: Albrecht, P.; Maurer, R.: *Investment und Risikomanagement - Modelle, Methoden, Anwendungen*. Schäffer-Poeschel-Verlag, 4. Auflage, 2016, Abschnitt 6.7.

Zurückführung auf „gemeinsame Faktoren" (Multifaktormodelle). Dies reduziert die Dimension der zu schätzenden (Ko-)Varianzen (und die Schätzfehlerproblematik) erheblich. Die Anwendung des reinen Markowitz-Ansatzes findet heute in praxi im Wesentlichen im Rahmen von „Asset Allocation-Entscheidungen" (auf der Ebene von Wertpapierklassen) statt. Die Optimierung auf Einzeltitelebene basiert auf Multifaktormodellen.

Lernergebnisse (B2)
Die Studierenden können den Markowitz-Ansatz beschreiben, sind mit der Herleitung der Kernergebnisse „effizienter Rand" und „optimale Portfolios" vertraut und können diese Ergebnisse interpretieren.
Sie können die Ergebnisse in einfachen Fallstudien selbst herleiten sowie explizite Berechnungen durchführen.
Die Studierenden können die Hauptkritikpunkte am Markowitz-Ansatz benennen.

5.3 Alternative Ansätze der Portfoliooptimierung

Kerninhalte

- Erweiterungen des Markowitz-Ansatzes
- Optimierung mit dem Average Value at Risk/Expected Shortfall als Risikomaß

Das Markowitz-Modell ist ein spezifisches **Risiko/Wert-Modell** mit der Standardabweichung als Risikomaß und dem Erwartungswert als Wertmaß. Eine direkte Verallgemeinerung als Ausgangspunkt der Portfoliooptimierung bilden allgemeinere Risiko/Wert-Modelle in folgenden Ausprägungen:

a) Eine erste Klasse von Modellverallgemeinerungen verwendet allgemeinere Risikomaße, behält aber den Erwartungswert als Wertmaß bei.

b) Daneben werden in der Literatur vereinzelt auch Modelle behandelt, bei denen zusätzlich mit allgemeineren Wertmaßen gearbeitet wird.

c) Eine weitere Alternative in diesem Kontext besteht darin, Risiko- und Wertmaß zu einem **(risikoadjustierten) Performancemaß** (siehe Abschnitt 4.5) zusammenzuführen und dieses Performancemaß zu maximieren.

Im Weiteren wird Verallgemeinerung a) näher beleuchtet, wobei die Standardabweichung durch ein alternatives Risikomaß ersetzt wird. Ein kanonischer Kandidat ist das monetäre Risikomaß **Value at Risk** (siehe Definition 4.1), das jedoch im Allgemeinen nicht konvex ist. Dies impliziert, dass das Portfoliorisiko $\mathrm{V@R}_\lambda(R_P(\mathbf{x}))$, wobei $R_p(\mathbf{x})$ die Portfoliorendite in Abhängigkeit vom Portfoliovektor $\mathbf{x}$ bezeichne, im Allgemeinen keine konvexe Funktion in $\mathbf{x}$ ist. Die fehlende Konvexität führt zu einem Nicht-Standard-Optimierungsproblem, was Probleme bei der Optimierung generiert.

Ist das Risikomaß ρ konvex, so ist das Funktional $\mathbf{x} \mapsto \rho(R_P(\mathbf{x}))$ konvex. Für das verteilungsbasierte, konvexe Risikomaß **Average Value at Risk** (siehe (4.40)) lautet das Optimierungsproblem dann:

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(R_P(\mathbf{x})) \to \min! \quad \text{unter den Nebenbedingungen } E[R_P(\mathbf{x})] = r,\ \mathbf{x}^T\mathbf{e} = 1,\ \mathbf{x} \geq \mathbf{0}.$$

Die Bestimmung des AV@R ist im Allgemeinen abhängig von der getroffenen Verteilungsannahme. In der Literatur hat sich daher, basierend auf Ergebnissen von Uryasev/Rockafellar[27], zur Lösung des Optimierungsproblems eine stichprobenbasierte Variante etabliert, die zudem den Vorteil besitzt, dass sie auf ein **Lineares Programm** führt.

[27] Rockafellar, R. T.; Uryasev, S.: *Optimization of conditional value-at-risk*. The Journal of Risk, 2, 2000.

Den Ausgangspunkt zur Überführung in ein lineares Programm zur E-AV@R-Optimierung bildet die Darstellung (4.41) des Average Value at Risk als **Minimierungsproblem**:

$$\mathrm{AV@R}_\lambda(X) = \inf_{l\in\mathbb{R}}\{l + \tfrac{1}{\lambda}\mathrm{E}[(-X-l)^+]\}.$$

Betrachtet wird nun eine Stichprobe $\{\mathbf{r}_1, \dots, \mathbf{r}_s\}$ des Vektors $\mathbf{R} = (R_1, \dots, R_n)^T$ der n Einzelfinanztitel im Portfolio. Für jeden Portfoliovektor $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)^T$ resultieren als Gewinnvariablen auf Portfolioebene die Größen $l_i = \mathbf{x}^T\mathbf{r}_i$ $(i = 1, \dots, s)$. Mit den (Hilfs-)Größen $z_i := (-l_i - l)^+$ $(i = 1, \dots, s)$ gilt nun $z_i \geq 0$, $z_i = -l_i - l$ für $-l_i \geq l$ und $(\sum z_i)/s$ ist das Stichprobengegenstück zu $\mathrm{E}[(-R_P(\mathbf{x}) - l)^+] = \mathrm{E}[(-\mathbf{x}^T\mathbf{R} - l)^+]$. Ferner sei $\bar{\mathbf{r}} = (\sum \mathbf{r}_i/s)$ der Schätzwert für den Erwartungswertvektor.

Mit diesen Vorbereitungen lautet das lineare Programm zur Minimierung des AV@R auf Portfolioebene nun:

$$\begin{aligned}
&l + \tfrac{1}{s\lambda}\textstyle\sum_{i=1}^{s} z_i \to \min!\\
&z_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, s)\\
&z_i + \mathbf{x}^T\mathbf{r}_i + l \geq 0 \quad (i = 1, \dots, s)\\
&\mathbf{x}^T\bar{\mathbf{r}} = r,\ \mathbf{x}^T\mathbf{e} = 1, \quad \mathbf{x} \geq \mathbf{0}
\end{aligned}$$

Bemerkung 5.8 (Relevanz alternativer Mean/Risk-Ansätze)**.** *Ist das verwendete Risikomaß ρ positiv-homogen, translationsinvariant und verteilungsbasiert, so gilt für (multivariat) elliptisch verteilte Finanzpositionen/Renditen (Spezialfall: Normalverteilung)*

$$\rho(X) = \mathrm{E}[-X] + k(\rho)\sqrt{\mathrm{Var}(X)}$$

mit einer Konstante $k(\rho)$, die vom Risikomaß ρ abhängig ist.[28] *Für jeden fixierten Erwartungswert minimiert jedes Portfolio, das Standardabweichung bzw. Varianz in Abhängigkeit vom Portfoliovektor* $\mathbf{x}$ *minimiert, somit auch das Risikomaß ρ. Dies jedoch bedeutet, dass alternative Mean/Risk-Ansätze ihre Relevanz erst außerhalb der Klasse elliptischer Verteilungen entfalten.*

Lernergebnisse (B2)
Die Studierenden können mögliche Verallgemeinerungen des Markowitz-Ansatzes benennen. Sie können als Alternative insbesondere die Optimierung mit dem Average Value at Risk als Risikomaß und dessen Zusammenhang mit einem linearen Programm beschreiben.

5.4 Asset Pricing[29]

Kerninhalte

- Portfoliotheorie mit sicherer Anlage (Tobin-Erweiterung): Herleitung des effizienten Rands, Einführung Tangentialportfolio, „Two Fund Theorem“ von Tobin
- Capital Asset Pricing Model (CAPM): Charakterisierung optimaler Portfolios (Kapitalmarktlinie) sowie beliebiger Portfolios (Wertpapiermarktlinie), Gleichgewichtspreise
- Kritikpunkte und Erweiterungen des CAPM

[28] Siehe z. B.: Theorem 8.28 (4) in McNeil, A. J.; Frey, R.; Embrechts, P.: *Quantitative Risk Management*. Princeton University Press, 2. Auflage, 2015.

[29] Die folgenden Ausführungen orientieren sich an Albrecht, P.; Maurer, R.: *Investment und Risikomanagement - Modelle, Methoden, Anwendungen*. Schäffer-Poeschel-Verlag, 4. Auflage, 2016, Abschnitt 6.4.3.

5.4.1 Portfoliotheorie mit sicherer Anlage

Das Anlagespektrum des Markowitz-Basismodells, dem nur rein riskante Anlagen (Renditevarianz > 0) zugrunde liegen, wird nun um eine risikolose Anlage (Renditevarianz = 0) zum sicheren Zins r_0 erweitert (**Tobin-Erweiterung**). Zum Zins r_0 können beliebige Beträge sowohl angelegt als auch aufgenommen werden (vollkommener Kapitalmarkt). Wichtig ist hervorzuheben, dass sich der Terminus „risikolose/sichere Anlage“ rein auf die Volatilität bezieht. Ausfallrisiken werden hierbei nicht berücksichtigt.

Elementare Analyse. Mit dieser Erweiterung können nun Portfolios $\tilde{P}$ gebildet werden, die zu einem Teil $x \in [0, \infty)$ in einem riskanten Portfolio $P \in M$, d. h. einem Portfolio aus der Menge der durch Aktienmischung realisierbaren Portfolios, angelegt und zu einem Teil $1 - x \in (-\infty, 1]$ in der risikolosen Anlage investiert (bzw. durch einen zusätzlichen Kredit finanziert) sind. Bezeichnet nun wie gehabt R_P die Rendite des Portfolios P, so ergibt sich für die Rendite $R_{\tilde{P}}$ des Gesamtportfolios

$$R_{\tilde{P}} = xR_P + (1-x)r_0.$$

Für die erwartete Rendite und die Renditevarianz des Gesamtportfolios erhält man

$$\begin{aligned} \mu_{\tilde{P}} &= x\mu_P + (1-x)r_0 = r_0 + x(\mu_P - r_0), \\ \sigma^2_{\tilde{P}} &= \mathrm{Var}(xR_P + (1-x)r_0) = x^2\sigma^2_P, \end{aligned}$$

wobei wie zuvor μ_P, σ^2_P die erwartete Rendite bzw. die Renditevarianz des rein riskanten Portfolios P bezeichnen. Hieraus folgt für den Erwartungswert des Gesamtportfolios unmittelbar

$$\mu_{\tilde{P}} = r_0 + \tfrac{\mu_P - r_0}{\sigma_P}\sigma_{\tilde{P}},$$

d. h. die Menge der im erweiterten Anlagespektrum erreichbaren Portfolios ist gegeben durch

$$\tilde{M} = \{(\sigma, \mu) : \mu = r_0 + \tfrac{\mu_P - r_0}{\sigma_P}\sigma, (\sigma_P, \mu_P) \in M\}.$$

In einem Erwartungswert-Standardabweichungs-Diagramm liegen also bei festem Portfolio P und variierendem Anteil x alle erreichbaren Portfolios auf einer Geraden durch r_0 (siehe Abbildung 2 links). Die Steigung der Gerade ist die **Sharpe Ratio** (siehe Seite 83)

$$\mathrm{SR}(R_P) = \frac{\mathrm{E}[R_P] - r_0}{\sigma(R_p)} = \frac{\mu_P - r_0}{\sigma_P}$$

der Portfoliorendite R_P.

Der effiziente Rand $\tilde{M}^*$ der Menge $\tilde{M}$ kann mithilfe geometrischer Überlegungen identifiziert werden (siehe Abbildung 2 rechts).

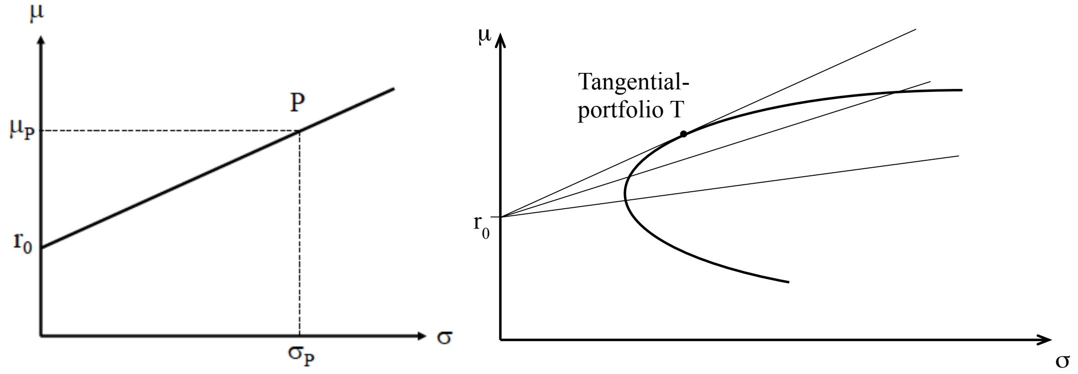

Abbildung 2: (μ, σ)-Diagramm der erreichbaren Portfolios (links), Effizienter Rand und Tangentialportfolio (rechts)

Hierbei stellt sich heraus, dass $\tilde{M}^*$ die Tangente von $(0, r_0)$ an den (bisherigen) effizienten Rand M^* des rein riskanten Portfolios ist, d. h.

$$\tilde{M}^* = \{(\sigma, \mu) : \mu = r_0 + \tfrac{\mu_T - r_0}{\sigma_T}\sigma\}.$$

Das Portfolio T heißt **Tangentialportfolio**, und es gilt $\mu_T = \mathrm{E}[R_T]$, $\sigma_T = \sigma(R_T)$.

Die optimalen Portfolios unterscheiden sich nur durch den Betrag x, der in das Tangentialportfolio T investiert wird. Der rein riskante Teil sämtlicher effizienter Portfolios ist strukturell (relativer Anteil der Einzelaktien) identisch. Dies bedeutet insbesondere, dass x den unterschiedlichen Grad an Risikoaversion vollständig ausdrückt.

Die Sharpe Ratio des Tangentialportfolios ist die maximal erreichbare Sharpe Ratio. Umgekehrt kann man das Tangentialportfolio durch Maximierung der Sharpe Ratio bestimmen.

Analytik des effizienten Rands. Die geometrischen Überlegungen sollen im Folgenden formalisiert werden. Dazu werden $n+1$ Finanztitel ($i = 0, \ldots, n$) betrachtet, wobei Finanztitel 0 der Anlage zum risikolosen Zins r_0 entspricht. Die Portfoliogewichte werden mit $w_0, w_1, \ldots, w_n$ bezeichnet, in Vektordarstellung $\mathbf{w} = (w_1, \ldots, w_n)$. Hierbei gilt - da Geld in die sichere Anlage investiert werden kann bzw. zum sicheren Zins finanziert werden kann -

$$w_0 = 1 - \sum_{i=1}^{n} w_i \quad \text{und} \quad w_0 = 1 - \mathbf{w}^T\mathbf{e}.$$

$\mathbf{w}^T\mathbf{e}$ unterliegt keiner Budgetrestriktion mehr, da zum sicheren Zins unbegrenzt Geld angelegt bzw. Kredit aufgenommen werden kann.

Alle weiteren Bezeichnungen werden aus dem Basismodell übernommen. Zusätzlich wird noch der Vektor

$$\mathbf{r} = (\mu_1 - r_0, \ldots, \mu_n - r_0)^T = \boldsymbol{\mu} - r_0\mathbf{e}$$

der erwarteten **Überrenditen** (Risikoprämien) eingeführt. Auf Portfolioebene gilt nun für die Rendite $R_P = w_0 r_0 + \mathbf{w}^T\mathbf{R}$

$$\mu_P = (1 - \mathbf{w}^T\mathbf{e})r_0 + \mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} \quad \text{sowie} \quad \sigma_P^2 = \mathrm{Var}(w_0 r_0 + \mathbf{w}^T\mathbf{R}) = \mathrm{Var}(\mathbf{w}^T\mathbf{R}) = \mathbf{w}^T\mathbf{C}\mathbf{w}.$$

Entsprechend folgt

$$r_P := \mu_p - r_0 = -\mathbf{w}^T\mathbf{e}r_0 + \mathbf{w}^T\boldsymbol{\mu} = \mathbf{w}^T\mathbf{r}.$$

Da die Budgetrestriktion wegfällt, lautet das Optimierungsproblem (Formulierung 2) im Short Sales Allowed-Fall nunmehr

$$Z(\mathbf{w}) = t\mathbf{w}^T\mathbf{r} - \frac{1}{2}\mathbf{w}^T\mathbf{C}\mathbf{w} \rightarrow \max!$$

Für eine reguläre Kovarianzmatrix $\mathbf{C}$ und $A := \mathbf{e}^T\mathbf{C}\mathbf{e}$, $B := \mathbf{r}^T\mathbf{C}^{-1}\mathbf{r}$ lassen sich die folgenden Resultate ableiten.[30]

1) Für jedes **varianzminimale Portfolio** gilt

$$\mathbf{w}_t = t\mathbf{C}^{-1}\mathbf{r},\ w_0 = 1 - At,\ (\mu_t, \sigma_t^2) = (Bt, Bt^2).$$

   Für $t \geq 0$ ergeben sich die EV-effizienten Portfolios.

2) Der **Menge der effizienten Portfolios** ist gegeben durch

$$M^* = \{(\sigma, \mu) : \mu = Bt, \sigma^2 = Bt^2, t \geq 0\}.$$

   Die Gleichung des **effizienten Randes** lautet:

$$\mu = r_0 + \sqrt{B}\sigma$$

[30] Siehe: Albrecht, P.; Maurer, R.: *Investment und Risikomanagement - Modelle, Methoden, Anwendungen*, Schäffer-Poeschel-Verlag, 4. Auflage, 2016, Anhang 6, A3.

3) Für die EV-effizienten Portfolios gilt

$$\mathrm{SR}(R_P) := \frac{\mathrm{E}[R_P] - r_0}{\sigma(R_P)} = \sqrt{B} = \text{const.}.$$

Die **Sharpe Ratio** $\mathrm{SR}(R_P)$ (siehe Seite 83) ist die Steigung des effizienten Randes.

Das Portfolio T wird als EV-effizientes Portfolio mit einem risikolosen Anteil von null definiert, d. h.

$$w_0^* = 0 \Leftrightarrow 1 - At = 0 \Leftrightarrow t = 1/A.$$

Es folgt

$$\mathbf{w}_T = \tfrac{1}{A}\mathbf{C}^{-1}\mathbf{r},\ r_T = B/A,\ \sigma_T^2 = B/A^2$$

Generell wird nun $r_0 < \mu_0 = a/c$ (risikoloser Zins geringer als erwartete Rendite des global varianzminimalen Portfolios) vorausgesetzt, da dies den einzig ökonomisch sinnvollen Fall darstellt.

Man kann zeigen:

1) T ist ein Element des rein riskanten effizienten Randes.

2) **(Tangentialportfolio)** T ist der Tangentialpunkt der Tangente von $(0, r_0)$ an den effizienten Rand der rein riskanten EV-Portfolios.

3) **(Fonds-Separation, Two Fund Theorem)** Für jedes EV-effiziente Portfolio P_t gilt

$$(w_0, \mathbf{w}_T) = \lambda(0, \mathbf{w}_T) + (1 - \lambda)(1, \mathbf{0}),$$

wobei $\lambda = tA$ ($t \geq 0$) die anteilige Investition in das Tangentialportfolio T ist.

In struktureller Vorbereitungen des CAPM lässt sich weiter nachweisen, wobei R_T die Rendite des Tangentialportfolios bezeichne:

4) $\mathrm{Cov}(R_i, R_T)$ ist linear in $\mathrm{E}[R_i]$. Konkret gilt

$$\mathrm{Cov}(R_i, R_T) = \lambda(\mu_i - r_0) \quad \text{mit } \lambda = \tfrac{\sigma_T^2}{\mu_T - r_0}.$$

Hieraus lässt sich dann für jedes R_i und damit für jedes Portfolio P mit Rendite R_P die Strukturgleichung

$$\mathrm{E}[R_P] = r_0 + \beta_{PT}(\mathrm{E}[R_T] - r_0)$$

mit dem **Beta-Faktor** $\beta_{PT} = \mathrm{Cov}(R_P, R_T)/\mathrm{Var}(R_T)$ ableiten.

5.4.2 Capital Asset Pricing Model (CAPM)

Das **Capital Asset Pricing Model (CAPM)** ist das fundamentale Marktgleichgewichtsmodell der Kapitalmarkttheorie (siehe auch Seite 22). Den Ausgangspunkt für das Einperiodenmodell (Zeitpunkte: $t = 0, 1$) bilden dabei die Prämissen der Portfoliotheorie mit sicherer Anlage (Fall $r_0 < \mu_0$). Ergänzend dazu werden die folgenden Prämissen getroffen:

- Am Markt gebe es m Investoren mit Wertpapierbudgets $V_i > 0$ ($i = 1, \ldots, m$) und Gesamtbudget $V = V_1 + \ldots + V_m$.
- Alle Investoren handeln nach dem Konzept der Erwartungswert-Varianz-Effizienz.
- Es bestehen homogene Erwartungen der Investoren am Kapitalmarkt hinsichtlich der Erwartungswerte, Varianzen und Kovarianzen der Aktienkursrenditen, d. h. alle Investoren schätzen r_0, $\mathrm{E}[R_i]$, $\mathrm{Var}(R_i)$ und $\mathrm{Cov}(R_i, R_j)$ identisch ein (gleiche Effizienzlinie für alle Investoren).

- Annahme eines **Marktgleichgewichts** in $t = 0$: Die Preise in $t = 0$ (äquivalent: erwartete Einperioden-Renditen) pendeln sich auf der Basis der Kenntnis der unsicheren Rückflüsse in $t = 1$ so ein, dass der Markt geräumt ist (Angebot = Nachfrage).

In diesem Modellrahmen erwirbt jeder Investor ein EV-effizientes Portfolio P_i, welches nach dem **Two Fund Theorem** zu einem Anteil λ_i seines Budgets aus dem Tangentialportfolio und zu $1-\lambda_i$ aus der risikolosen Anlage besteht. Mit $\boldsymbol{\lambda} := (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m)^T$, $\mathbf{V} = (V_1, \ldots, V_m)^T$ und $\mathbf{x}_T := (x_T^1, \ldots, x_T^n)^T)$ als Notation für den Investmentvektor des Tangentialportfolios ist das **Nachfrageportfolio** des Marktes gegeben durch

$$(\boldsymbol{\lambda}^T\ \mathbf{V})\mathbf{x}_T.$$

Das **Angebotsportfolio** des Marktes besteht aus allen Finanztiteln des Marktes, die in $t = 0$ zu Marktwerten bewertet sind. Das sogenannte **Marktportfolio** entspricht dem zugrunde gelegten Aktien-Gesamtmarkt in einer Portfoliostruktur, d. h. jede Aktie geht mit ihrem relativen Anteil in das Marktportfolio ein.

Definition 5.9 (Marktportfolio)**.** *Das Marktportfolio M ist das Portfolio, in dem jedes Finanzprodukt mit seinem relativen Anteil P_i/P am Gesamtmarktwert $P := P_1 + \ldots + P_n$ als Gewicht eingeht, also*

$$\mathbf{x}_M = (P_1/P, \ldots, P_n/P).$$

Die Rendite des Marktportfolios wird mit R_M bezeichnet.

Das Angebotsportfolio des Marktes ist in absoluten Größen gegeben durch $P\mathbf{x}_M$, und die Bedingung für ein **Marktgleichgewicht** lautet folglich:

$$(\boldsymbol{\lambda}^T\ \mathbf{V})\mathbf{x}_T = P\mathbf{x}_M$$

Hierbei ist zu beachten, dass das Nachfrageportfolio aus der Investition von $\boldsymbol{\lambda}^T\ \mathbf{V} = \sum \lambda_i V_i$ Geldeinheiten in das Tangentialportfolio T, das Angebotsportfolio aus einer von P Geldeinheiten in das Marktportfolio M besteht. Dies jedoch bedeutet, dass sich die Vektoren $\mathbf{x}_T$ und $\mathbf{x}_M$ nur um eine Skalierung unterscheiden können. Da beide jedoch Investmentvektoren sind, muss sogar $\mathbf{x}_T = \mathbf{x}_M$ und damit $P = \sum \lambda_i V_i$ gelten.

Zusammengefasst: Im Kapitalmarktgleichgewicht ist das Tangentialportfolio T identisch mit dem „Marktportfolio“ M. Nach den Ergebnissen von Abschnitt 5.4.1 sowie $T = M$ ergeben sich folgende Kernresultate des CAPM.

Charakterisierung optimaler Portfolios. Die Menge aller optimalen Portfolios (**Kapitalmarktlinie, Capital Market Line**) ist gegeben durch:

$$\mathrm{E}[R] = r_0 + \frac{\mathrm{E}[R_M] - r_0}{\sigma(R_M)}\sigma(R)$$

Im Kapitalmarkt-Gleichgewicht gilt für die optimalen Portfolios ein linearer Zusammenhang: für einen höheren erwarteten Ertrag muss ein proportional höheres Risiko in Kauf genommen werden. Alle optimalen Portfolios sind im rein riskanten Teil identisch mit dem Marktportfolio.

Dies motiviert eine Index-Strategie (passives Portfolio-Management), bei der ein repräsentativer Aktien-Index als Repräsentant des Marktportfolios repliziert wird.

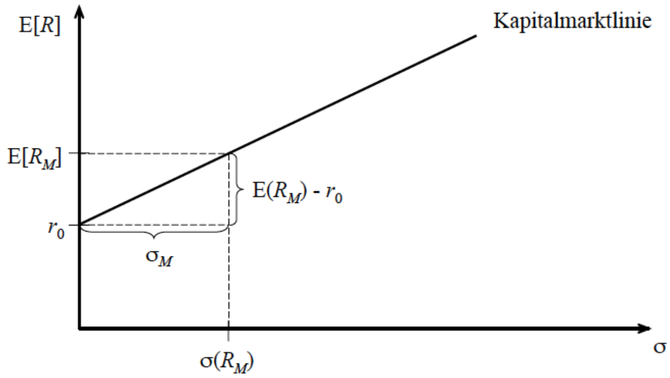

Abbildung 3: Kapitalmarktlinie

Charakterisierung beliebiger Portfolios. Für ein beliebiges Portfolio gilt (**Wertpapiermarktlinie, Security Market Line**)

$$\mathrm{E}[R] = r_0 + \beta_R(\mathrm{E}[R_M] - r_0) \tag{5.51}$$

mit $\beta_R := \mathrm{Cov}(R, R_M)/\mathrm{Var}(R_M)$ (**Beta-Faktor**).

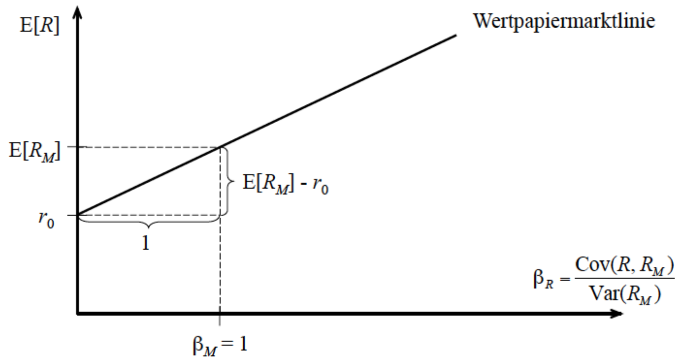

Abbildung 4: Wertpapiermarktlinie

Beta ist zugleich die Sensitivität in einem linearen Modell (Marktmodell bzw. Indexmodell) der Form $R = \alpha + \beta R_M + \epsilon$. Dies (und entsprechende Modellverallgemeinerungen) bildet den Ansatz für eine empirische Spezifikation des CAPM.

Bemerkung 5.10 (Systematisches Risiko)**.** *Für einen Marktindex aus den einzelnen Finanztiteln der Form*

$$R_{MI} = \sum_{i=1}^{n} x_i R_i$$

gilt

$$\sigma(R_{MI}) = \sum_{i=1}^{n} x_i \rho(R_i, R_{MI}) \sigma(R_i),$$

d. h. die Rendite-Standardabweichung der Einzelaktien geht in die Rendite-Standardabweichung des Marktindex-Portfolios nur anteilig ein. Genauer besteht die Zerlegung

$$\sigma(R_i) = \rho(R_i, R_{MI})\sigma(R_i) + [1 - \rho(R_i, R_{MI})]\sigma(R_i).$$

Die erste Komponente $\rho(R_i, R_{MI})\sigma(R_i)$ heißt ***systematisches Risiko*** *des Titels i (bezüglich der vorgegebenen Indexgröße), die zweite Komponente $[1 - \rho(R_i, R_{MI})]\sigma(R_i)$* ***nichtsystematisches Risiko****. Im Marktindex-Portfolio wird also das nichtsystematische Risiko „wegdiversifiziert“.*

Der Beta-Faktor des i-ten Finanztitels besitzt die Darstellung

$$\beta(R_i) = \frac{\mathrm{Cov}(R_i, R_{MI})}{\sigma^2(R_{MI})} = \frac{\rho(R_i, R_{MI})\sigma(R_i)}{\sigma(R_{MI})},$$

d. h. $\beta(R_i)$ setzt das systematisches Risiko der Aktie i in Relation zum Marktrisiko.

Das Aktien-Beta ist der zentrale preisbestimmende Faktor, da nur das systematische Risiko vom Markt bewertet wird und in die Preise eingeht.

Die Renditegleichung (5.51) besitzt die alternative Darstellung

$$\mathrm{E}[R] - r_0 = \beta_R(\mathrm{E}[R_M] - r_0).$$

Die Größe $\mathrm{E}[R] - r_0$ wird als **Risikoprämie** des zugrunde liegenden Portfolios bezeichnet. Sie ist die im Kapitalmarktgleichgewicht von den Investoren geforderte **„Überrendite“**, d. h. eine über die Rendite der sicheren Anlage hinausgehende Rendite, die für das Eingehen einer risikobehafteten Investition in eine Einzel-Aktie bzw. ein Aktien-Portfolio gefordert wird. Hierbei besteht der Zusammenhang:

Risikoprämie der Einzel-Aktie (bzw. des Aktien-Portfolios)
= **Beta-Faktor x Risikoprämie des Markt-Portfolios**

Gleichgewichtspreise. Bezeichnet V den zufälligen Periodenendwert eines Portfolios aus betrachteten Finanztiteln, so gilt gemäß (5.51) für den markträumenden Gleichgewichtspreis dieses Portfolios zum Periodenbeginn:

$$P = \frac{\mathrm{E}[V]}{1 + \mathrm{E}[R]} = \frac{\mathrm{E}[V]}{1 + r_0 + \beta_R(\mathrm{E}[R_M] - r_0)}.$$

Dabei bezeichnen R_M die Rendite des Marktportfolios (Approximation durch repräsentativen Aktienindex) und $\beta_R = \mathrm{Cov}(R, R_M)/\mathrm{Var}(R_M)$ den Beta-Faktor. Die Preisgleichung des CAPM erlaubt die Fundierung eines risikoadjustierten Diskontierungsfaktors.

Kritikpunkte und Erweiterungen des CAPM. Da das CAPM auf dem Markowitz-Ansatz basiert, übertragen sich die in Abschnitt 5.2.4 diskutierten Kritikpunkte auf das CAPM. Der zentrale Kritikpunkt am CAPM ist jedoch, dass der Beta-Faktor „den“ zentralen preisbestimmenden Faktor darstellt. Die Kritik an der empirischen Validität des CAPM führte zu Weiterentwicklungen des CAPM sowohl auf theoretischer Ebene als auch auf empirischer Ebene.

Auf theoretischer Ebene ist neben einer Fülle von Erweiterungen des CAPM-Basismodells (E-LPM-CAPM, Intertemporal CAPM, Consumption CAPM, etc.) die Entwicklung der **Arbitrage-Pricing-Theorie** (APT) durch Ross[31] zu erwähnen. Zentrales Ziel der APT ist es dabei, die folgende Gleichung entweder exakt oder aber zumindest asymptotisch (für „sehr große“ Wertpapiermärkte) abzuleiten:

$$\mathrm{E}[R_i] = \lambda_0 + b_{i1}\lambda_1 + \ldots + b_{im}\lambda_m.$$

Dabei entspricht λ_0 der Verzinsung der risikolosen Anlage, wenn diese am Markt vorhanden ist. Die Größen λ_j können als Risikoprämien hinsichtlich des j-ten Faktors interpretiert werden. Die APT weist eine „Multi-Beta-Struktur“ auf. Die zentrale Herausforderung ist dabei die Identifikation der preisbestimmenden Faktoren und sowie der Anzahl, die für die Preisfindung benötigt werden.

Auf empirischer Ebene erfolgten Weiterentwicklungen wie z. B. das Fama/French-Dreifaktor-Modell oder das Carhart-Vierfaktor-Modell. Diese weisen eine bessere empirische Erklärungskraft als das CAPM auf, aber ohne dessen theoretische Fundierung zu besitzen.

[31] Ross, S. A.: *The arbitrage theory of capital asset pricing*. J. Econom. Theory, 13(3), 1976.

Lernergebnisse (C2)

Die Studierenden können die Erweiterung des Markowitz-Modells um eine sichere Anlage beschreiben. Sie sind mit der Herleitung des effizienten Rands vertraut und können diesen beschreiben. Die Studierenden können das Tangentialportfolio definieren und interpretieren sowie dessen Bedeutung im Kontext des „Two Fund Theorem“ benennen. Sie können die Kernresultate der Portfoliotheorie mit sicherer Anlage in einfachen Fallstudien anwenden.

Die Studierenden kennen die Prämissen und die Zielsetzung des CAPM. Sie sind mit den Kernergebnissen „Kapitalmarktlinie“, „Wertpapiermarktlinie“ und der Beschreibung von Gleichgewichtspreisen vertraut und können diese Ergebnisse in Fallstudien anwenden.

Die Studierenden können Kritikpunkte und Erweiterungen des CAPM benennen.

Index