DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik II

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 18. Oktober 2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 15 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie es nach Möglichkeit, die Lösungen der einzelnen Aufgabenteile unzusammenhängend auf verschiedene Seiten zu streuen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Modellierung [70 Punkte]

Aufgabe 1 (Modellierung des Prämienrisikos) [35 Punkte]

Der Sachversicherer „Haus & Hof“ betreibt in Deutschland die zwei Sparten „Wohngebäude-Sturm“ und „Kraftfahrt-Haftpflicht“ und verfügt über ein genehmigtes internes Unternehmensmodell zur SCR-Berechnung unter Solvency II. Durch mehrere schadenträchtige Sturmereignisse in der jüngeren Vergangenheit ist insbesondere die Sparte „Wohngebäude-Sturm“ in den Fokus des Vorstands gerückt und soll nun eingehender analysiert werden. Sie werden mit der Vorbereitung einer Vorstandsunterlage beauftragt, die zwei wesentliche Ergebnisse beinhalten soll:

- Höhe des ultimativen Prämienrisikos der Sparte „Wohngebäude-Sturm“ für das Anfalljahr 2025 per 31.12.2024, gemessen als 3-fache Standardabweichung der Prämienrisikoverteilung
- Empfohlene Maßnahmen zur Verbesserung der risikoadjustierten Profitabilität in „Wohngebäude-Sturm“ (gemessen als versicherungstechnischer *RoRaC*)

Hierzu stehen Ihnen die folgenden Informationen zur Verfügung:

- Der Wohngebäudebestand von „Haus & Hof“ besteht ausschließlich aus privaten Einfamilienhäusern und weist historisch bedingt eine starke Konzentration in Norddeutschland auf.
- „Haus & Hof“ erwartet für das Anfalljahr 2025 eine verdiente Prämie in „Wohngebäude-Sturm“ in Höhe von 500 Mio. €, sowie zugehörige Kosten für Schadenregulierung und Versicherungsbetrieb in Höhe von 200 Mio. €.
- Der Gesamtschadenaufwand der Sparte „Wohngebäude-Sturm“ für 2025 wird getrennt nach Basis- und Katastrophenschäden modelliert.
- *Katastrophenschäden:* Zur Modellierung der Katastrophenschäden für 2025 liegt Ihnen folgende OEP- und AEP-Kurve für Sturmereignisse vor, die aus dem Lauf eines exposure-basierten Modells mit dem aktuellen Wohngebäudebestand von „Haus & Hof“ erzeugt worden sind:

Wiederkehrperiode / Jährigkeit	OEP-Kurve Sturmereignisse (in Mio. €)	AEP-Kurve Sturmereignisse (in Mio. €)
2	5	10
5	55	60
20	175	200
100	450	500
400	1.400	1.500

- *Basisschäden:* Zur Modellierung der Basisschadenlast für 2025 wird eine Normalverteilung angenommen. Die zugehörigen Verteilungsparameter sollen anhand der unternehmenseigenen Schadenerfahrung geschätzt werden. Hierzu liegt Ihnen die folgende Zeitreihe der Ultimateschäden (nach as-if Transformation) aus den Jahren 2019 - 2023 vor:

Anfalljahr	Gesamtschaden (in Mio. €)	davon Katastrophenschäden
2019	120	30
2020	115	10
2021	250	130
2022	140	45
2023	500	410

- *Aggregation:* Zur Berechnung der Simulationswerte für die Basis- und Katastrophenschadenlast und Aggregation zur Gesamtschadenlast dienen jeweils die folgenden vier Realisierungen der beiden Zufallsgrößen U_{CAT} und $\Phi^{-1}(U_{Basis})$, die im internen Modell vorsimuliert wurden. Hierbei handelt es sich um:

  - U_{CAT}: Gleichverteilte Zufallsgröße auf dem Einheitsintervall $(0, 1)$.
  - $\Phi^{-1}(U_{Basis})$: Transformation der auf dem Einheitsintervall $(0, 1)$ gleichverteilten Zufallsvariablen U_{Basis} mittels Φ^{-1}, der Inversen der Gauß'schen Phi-Funktion Φ.

Simulationspfad M	$U_{CAT}^{(M)}$	$\Phi^{-1}\left(U_{Basis}^{(M)}\right)$
1	0,214	-0,813
2	0,992	0,502
3	0,811	1,931
4	0,957	-1,620

Hinweis: Die zwischen den Basis- und Katastrophenschäden bestehenden Abhängigkeiten sind bei der Simulation der Zufallsgrößen U_{CAT} und U_{Basis} bereits berücksichtigt worden.

Aufgaben:

(a) *[3 Punkte]* Wie ist das ultimative Prämienrisiko definiert? Was ist die maßgebliche Größe zur Risikomessung?

(b) *[4 Punkte]* Nehmen Sie Stellung zur Verteilungswahl für die Basisschäden und nennen Sie vier Argumente, die aus Ihrer Sicht für oder gegen die Normalverteilungsannahme sprechen.

(c) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie anhand der vorliegenden historischen Schadendaten die Verteilungsparameter für die Basisschäden und erzeugen Sie aus den angegebenen Realisierungen U_{Basis} die Basisschadenlast für 2025 pro Simulationspfad.
Hinweis: Bitte runden Sie Verteilungsparameter auf 2 Nachkommastellen, monetäre Größen wiederum auf ganzzahlige Mio. €-Beträge.

(d) *[4 Punkte]* Wie sind OEP- und AEP-Kurve allgemein definiert?

(e) *[6 Punkte]* Erzeugen Sie anhand des vorliegenden Outputs aus dem exposurebasierten Sturmmodell und der angegebenen Realisierungen U_{CAT} die Katastrophenschadenlast für 2025 pro Simulationspfad!
Hinweis: Sie dürfen für die Katastrophenschadenverteilung analog zum Seminar eine Treppenfunktion unterstellen, es ist insbesondere keine Interpolation zwischen den Stützstellen des Output-Tableaus notwendig.

(f) *[4 Punkte]* Berechnen Sie unter Verwendung der Ergebnisse aus den Aufgabenteilen (c) und (e) die Simulationen der ultimativen Prämienrisikoverteilung und bestimmen Sie den Risikokapitalbedarf per 31.12.2024!
Hinweis: Verwenden Sie gemäß der Basisinformationen als Risikomaß das 3-fache der empirischen Standardabweichung, wie sie sich aus den Simulationen der maßgeblichen Risikoverteilung ergibt.

(g) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie anhand der Ergebnisse aus Aufgabenteil (f) den versicherungstechnischen *RoRaC* der Sparte „Wohngebäude-Sturm“.
Hinweis: Der RoRaC ermittelt sich als Quotient von mittlerem Ergebnis und Risikokapitalbedarf.

(h) *[6 Punkte]* Schlagen Sie dem Vorstand zwei Maßnahmen vor, mit denen sich der versicherungstechnische *RoRaC* der Sparte „Wohngebäude-Sturm“ möglicherweise verbessern ließe. Begründen Sie die Maßnahmen jeweils und beleuchten Sie zudem, welche Implikationen diese Maßnahmen für das interne Unternehmensmodell haben könnten.

Aufgabe 2 (Modellansätze für Katastrophenschäden) [20 Punkte]

Im Prämienrisiko der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ wird der Gesamtschadenaufwand derzeit getrennt nach Basis- und Großschäden modelliert.

Die Aktuare von „Haus & Hof“ erwägen, ergänzend zu Basis- und Großschäden eine zusätzliche dritte Schadenkategorie im internen Unternehmensmodell einzuführen, mit der *katastrophale Haftpflicht-Kumule* explizit abgebildet werden sollen.

Aufgrund der unzureichenden Datenlage wurde entschieden, die zugehörigen Modellparameter szenariobasiert durch Experten aus verschiedenen Unternehmensbereichen bestimmen zu lassen. Im Rahmen mehrerer Workshops wurden die drei folgenden relevanten Kumulszenarien identifiziert und das zugehörige Schadenausmaß geschätzt (alle geldwerten Größen sind in der Einheit Mio. € angegeben und verstehen sich Brutto vor Rückversicherung).

Ereignis-beschreibung	Mittlere Anzahl an jährlichen Ereigniseintritten	Erwarteter Schadenaufwand (bei Ereigniseintritt)	Standardabw. Schadenaufwand (bei Ereigniseintritt)
PkW verursacht Tunnelbrand	1%	80	40
LKW verursacht Brückeneinsturz	2%	60	20
Kollision eines LKW mit ICE	5%	40	20

Ihnen wird nun die Aufgabe übertragen, auf Basis dieser Ergebnisse einen Modellansatz für *katastrophale Kumulschäden* in der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ zur Simulation im internen Unternehmensmodell zu entwickeln.

Aufgaben:

(a) *[4 Punkte]* Nennen Sie jeweils zwei mögliche Vorteile und Herausforderungen, die bei der angedachten expliziten Modellierung von *katastrophalen Kumulschäden* in der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ ggü. der bisherigen impliziten Modellierung bestehen.

(b) *[3 Punkte]* Nennen Sie mindestens drei Module des stochastischen Unternehmensmodells von „Haus & Hof“, die bei einer separaten Modellierung von *katastrophalen Kumulschäden* in der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ ggf. angepasst werden müssen. Begründen Sie Ihre Antworten jeweils. Gehen Sie davon aus, dass das Modell von „Haus & Hof“ der im Seminar skizzierten idealtypischen Struktur von DFA-Modellen im Schaden-Unfallbereich folgt.

(c) *[5 Punkte]* Spezifizieren Sie ausgehend von den obigen Szenarioschätzungen ein geeignetes stochastisches Modell für *katastrophale Kumulschäden* in der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“, das als Grundlage zur Simulation von Kumulschäden im internen Modell dienen kann.

(d) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie ausgehend von dem in Aufgabenteil (c) spezifizierten Modellrahmen, wie die einzelnen Schritte zur Simulation der *katastrophalen Kumulschäden* im internen Modell und die Zusammenführung mit der bestehenden Basis- und Großschadenmodellierung aussehen würden.

(e) *[5 Punkte]* Das Controlling möchte von Ihnen wissen, welches Cat-Loading im Rahmen der Schadenplanung für die Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ angesetzt werden könnte. Ermitteln Sie auf Basis des in (c) spezifizierten Modellrahmens analytisch Erwartungswert und Variationskoeffizient des Jahresgesamtschadens für *katastrophale Kumulschäden*.

Aufgabe 3 (Reserverisiko und Limitsystem) [15 Punkte]

„Haus & Hof“ bindet sein internes Unternehmensmodell in diverse Prozesse innerhalb und außerhalb des Risikomanagements ein und kommt damit einer wesentlichen aufsichtsrechtlichen Anforderung, dem „Verwendungstest“, nach.

Die Ergebnisse aus der Modellierung des ultimativen Reserverisikos werden u.a. vom Rechnungswesen genutzt, um die Auskömmlichkeit der Schadenrückstellungen nach lokaler deutscher Rechnungslegung (HGB) mithilfe eines *Limitsystems* zu überwachen.

Im Rahmen dieses Limitsystems werden die in den HGB-Rückstellungen enthaltenen stillen Reserven („Puffer“, Differenz zwischen den HGB-Schadenrückstellungen und den nominalen Best-Estimate Schadenrückstellungen, jeweils Brutto vor Rückversicherung) verschiedenen Quantilen der ultimativen Reserverisikoverteilung aus dem internen Modell gemäß folgender Ampelsystematik gegenübergestellt.

- Puffer $\geq$ 95% Quantil der Reserverisikoverteilung: grün (komfortabel)
- 75% Quantil $\leq$ Puffer $<$ 95% Quantil: gelb (auskömmlich)
- Puffer $<$ 75% Quantil: rot (unzureichend)

Aufgaben:

(a) *[3 Punkte]* Wie lautet die Definition des ultimativen Reserverisikos? Was ist die maßgebliche Größe zur Risikomessung?

(b) *[9 Punkte]* In der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ stehen per 31.12.2024 den HGB-Schadenrückstellungen in Höhe von 600 Mio. € Best-Estimate Schadenrückstellungen in Höhe von 500 Mio. € gegenüber. Der Variationskoeffizient der Reserveverteilung wurde nach den Mack’schen Formeln für das Chain-Ladder-Modell berechnet und beträgt 15%.

   (i) Berechnen Sie unter der Annahme einer Logarithmischen Normalverteilung für die Reserveverteilung die Schwellenwerte des oben spezifizierten Limitsystems. *[7 Punkte]*
   Hinweis: Bitte runden Sie Verteilungsparameter auf 2 Nachkommastellen, monetäre Größen wiederum auf ganzzahlige Mio. €-Beträge.

   (ii) Beurteilen Sie die Auskömmlichkeit der HGB-Schadenrückstellungen per 31.12.2024 gemäß Limitsystem. Legen die Ergebnisse einen Handlungsbedarf nahe? *[2 Punkte]*

Hinweise: Eine Zufallsgröße X heißt lognormalverteilt mit den Parametern μ und σ, wenn $\ln X$ normalverteilt ist mit den Parametern μ und σ. Die Verteilungsfunktion F_X von X lautet

$$F_X(z) = \Phi\left(\frac{\ln(z)-\mu}{\sigma}\right),\ z > 0.$$

Hierbei repräsentiert die Funktion Φ erneut die Gauß'sche Phi-Funktion.
Ferner existieren sämtliche Momente von X und besitzen die Darstellung:

$$\mathbb{E}[X^n] = \exp\left(n \cdot \mu + \frac{n^2 \cdot \sigma^2}{2}\right),\ n \in \mathbb{N}.$$

Für die Inverse Φ^{-1} der Gauß'schen Phi-Funktion Φ gilt:
$\Phi^{-1}(0{,}75) = 0{,}67$ *und* $\Phi^{-1}(0{,}95) = 1{,}64$.

(c) *[3 Punkte]* Ihr Vorstand äußert die Idee, dass das Unternehmen einen Puffer in Höhe des 99,5%-Quantils der ultimativen Reserverisikoverteilung in jeder Sparte anstreben sollte, um damit dem Solvenzkapitalbedarf (SCR) für das Reserverisiko zu entsprechen. Was antworten Sie ihm?

Teil II – Reservierung [110 Punkte]

Aufgabe 4 (Reserveprozess und Reservebericht) [22 Punkte]

(a) *[5 Punkte]* Aktuarielle Bewertungen von Schadenreserven können zu verschiedenen Zwecken durchgeführt werden. Geben Sie fünf in der Praxis vorkommende unterschiedliche Zielsetzungen an.

(b) *[4 Punkte]* Benennen Sie die Stationen des Reserveprozesses und ihre jeweilige Einordnung im Prozessablauf.

Hinweis: Die Angabe weiterer Bestandteile der Stationen ist nicht verlangt.

(c) *[13 Punkte]* Betrachten Sie die folgenden Aussagen (A) bis (H), welche sich auf den Reserveprozess zur Bestimmung der Rückstellungen für bilanzielle Zwecke beziehen. Geben Sie jeweils an, ob die Aussage wahr oder falsch ist. Stellen Sie dabei jede falsche Aussage in naheliegender Weise richtig.

(A) Der zugehörige Reservebericht ist zwar unter HGB keine explizite gesetzliche Anforderung, aber unter Solvency II.

(B) Die Prozessbeschreibung legt die Durchführung des Reserveprozesses fest. Sie kann aber je nach Notwendigkeit auch im laufenden Reserveprozess geändert bzw. angepasst werden. Eine entsprechende Entscheidung ist zu dokumentieren.

(C) Die Einrichtung eines Reservekomitees unter Federführung des Reservierungsaktuariats mit Vertretern aus den Bereichen Risikomanagement, Finanzen, Versicherungsmathematische Funktion, Schaden, Sparte, Rechnungswesen, Controlling und Rückversicherung ist nicht zwingend vorgeschrieben, kann aber eine sinnvolle Möglichkeit für die feste Verankerung des Reserveprozesses im Unternehmen sein.

(D) Ein formaler Beschluss über die Höhe der Rückstellungen (z.B. Vorstandsentscheidung) ist als fester Bestandteil des Reserveprozesses sinnvoll, aber die abschließende Entscheidung liegt bei der Versicherungsmathematischen Funktion.

(E) Zur Vermeidung von Interessenskonflikten sollten dem Vorstand vor dem Einreichen der Entscheidungsvorlage weder Zwischenergebnisse noch Indikationen über sich aus der Reservebewertung ergebende Reserveerhöhungen oder -absenkungen zur Verfügung gestellt werden.

(F) Der Reservebericht dient in der Regel verschiedenen Zielgruppen als Informationsquelle und sollte sich daher nicht auf ein Rechnungslegungssystem beschränken. Beispielhaft ist Solvency II für die Versicherungsmathematische Funktion, IFRS für den Vorstand oder HGB für die Steuerabteilung relevant. Bei Unterschieden zwischen den Rechnungslegungssystemen ist dabei auf eine klare Darstellung zu achten.

(G) Der Reserveaktuar ist im Rahmen des Reservebewertungsprozesses nicht für die Qualitätssicherung der Daten verantwortlich, da diese Aufgabe Teil der Prozesse der Rechnungslegung ist.

(H) Ist bei der Durchführung der unabhängigen Validierung, wie sie durch Solvency II gefordert wird, aufgrund der Fülle der anfallenden Aufgaben eine personelle Trennung nicht möglich, so genügt eine zeitliche Trennung. Berechnung und Validierung können in diesem Fall zwar von einer Person, aber in unterschiedlichen Zeiträumen durchgeführt werden.

Aufgabe 5 (Rechnungslegung) [22 Punkte]

(a) *[12 Punkte]* Geben Sie die fünf wesentlichen Elemente des Building Block Approach unter IFRS17 an und beschreiben Sie kurz ihre Rolle im Bewertungsmodell. Erklären Sie in diesem Zusammenhang die Begriffe Imparitätsprinzip und Realisationsprinzip.

(b) *[10 Punkte]* Betrachten Sie die folgenden Aussagen (A) bis (J) im Kontext eines deutschen Versicherungsunternehmens. Geben Sie jeweils an, auf welches der Rechnungslegungssysteme IFRS17, HGB oder Solvency II die Aussage am ehesten zutrifft. Begründungen sind nicht erforderlich.

(A) Die Grundsätze ordnungsmäßiger Buchführung bilden die Basis für die Anforderungen an die Datenqualität.

(B) Es gibt keine versicherungstechnische Rückstellung, die explizit zur Deckung von Unsicherheiten bei der Schadenregulierung bereits eingetretener Schäden vorgesehen ist.

(C) Bei den versicherungstechnischen Rückstellungen werden anteilige Kosten der allgemeinen Verwaltung berücksichtigt.

(D) Die Rechte und Pflichten aus Versicherungsverträgen sind ab Beginn der Risikoperiode bzw. Fälligkeit des ersten Beitrags (frühester Zeitpunkt) anzusetzen. Im Falle einer Verlustsituation gilt dies bereits bereits ab Vertragsschluss.

(E) Die Unternehmen müssen auf Anfrage der Aufsicht in der Lage sein, die Angemessenheit ihrer Daten nachzuweisen.

(F) Bei diesem Rechnungslegungssystem stehen die Informationsvermittlung und die Ausschüttungsbemessung im Mittelpunkt.

(G) Der Schwerpunkt des Rechnungslegungssystems liegt auf der Bestimmung der Eigenmittel in ihrer Rolle als Verlustdeckungspotenzial.

(H) Die Bewertung der Schadenrückstellung erfolgt vorsichtig.

(I) Die Risikomarge dient zur Deckung der Unsicherheiten, denen sich das Versicherungsunternehmen bei der Erfüllung des Versicherungsvertrags gegenübersieht.

(J) Bei der Bestimmung der versicherungstechnischen Rückstellungen müssen unabhängig von der Profitabilitätssituation auch Schäden berücksichtigt werden, die noch nicht eingetreten sind, sofern die entsprechenden Versicherungsverträge zum Bilanzstichtag bestanden haben.

Aufgabe 6 (Schwankungsrückstellung) [17 Punkte]

Gehen Sie bei den folgenden Aufgaben davon aus, dass der vorgegebene Versicherungszweig aus dem Bereich der Schaden- und Unfallversicherung die Voraussetzungen zur Bildung einer Schwankungsrückstellung unter HGB erfüllt und nicht aus dem Bereich der Hagel-, der Kredit- und Kautions-, sowie der Vertrauensschadenversicherung stammt. Nehmen Sie außerdem vereinfachend an, dass kein Sicherheitszuschlag existiert, so dass die Regelungen zur Verminderung von Sollbetrag und Überschaden nicht greifen.

Die folgende Tabelle zeigt für die Geschäftsjahre $i = 1, \ldots, 15$ des Beobachtungszeitraums die verdienten Beiträge P_i, die zugehörigen Schadenquoten q_i sowie deren Quadrate q_i^2 (Geldbeträge sind in Mio. € angegeben). Zur Vereinfachung von Rechnungen sind in der letzten Zeile noch die jeweiligen Summen angegeben.

Geschäftsjahr i	P_i	q_i	q_i^2
1	96	53,1%	0,282
2	98	66,3%	0,440
3	97	62,9%	0,395
4	96	53,1%	0,282
5	99	50,5%	0,255
6	102	58,8%	0,346
7	105	65,7%	0,432
8	109	56,9%	0,324
9	107	62,6%	0,392
10	108	65,7%	0,432
11	112	57,1%	0,327
12	116	65,5%	0,429
13	119	52,1%	0,271
14	122	59,0%	0,348
15	121	57,9%	0,335
Summe $\sum_{i=1}^{15}$	1607	887,4%	5,291

Die Schwankungsrückstellung des letzten Bilanzjahres war $SR_{15} = 24{,}5$. Im Bilanzjahr $i = 16$ betragen die verdienten Beiträge $P_{16} = 124$. Aufgrund eines katastrophalen Schadenereignisses und eines unzureichenden Rückversicherungsschutzes beträgt die Schadenquote im Bilanzjahr $q_{16} = 175{,}0\%$.

(a) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die durchschnittliche Schadenquote $\bar{q}$ des Beobachtungszeitraums, die zugehörige Standardabweichung $\bar{\sigma}$ und den Sollbetrag SB_{16} des Bilanzjahres 16.

Hinweis: Falls Ihnen die Berechnung der Standardabweichung nicht gelingt, so rechnen Sie mit dem (falschen) Ersatzergebnis $\bar{\sigma} = 7{,}0\%$ weiter.

(b) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die Schwankungsrückstellung SR_{16} des Bilanzjahres 16 sowie die resultierende Schadenquote nach Schwankung q_{16}^{nS}.

Der Vorstand möchte von Ihnen wissen, welche Auswirkungen das katastrophale Jahr 16 auf die Ergebnisse zukünftiger Bilanzjahre haben wird. Gehen Sie davon aus, dass das Katastrophenereignis ein außergewöhnlich seltenes Ereignis war und dass die zukünftigen Jahre „normal“ sein werden, das heißt, sich bzgl. mittlerer Schadenquote und Standardabweichung ähnlich wie die Jahre $1, \dots, 15$ verhalten werden. Nehmen Sie weiter an, dass das Prämienvolumen konstant bei 124 bleiben wird.

(c) *[3 Punkte]* Berechnen Sie die Schadenquote nach Schwankung q_{17}^{nS}, mit der Vorstand im Normalfall rechnen muss.

Hinweis: Verwenden Sie ohne Rechnung, dass die durchschnittliche Schadenquote im Beobachtungszeitraum der Jahre $2, \dots, 16$ bei 67,3% und die entsprechende Standardabweichung bei 30,2% liegt.

(d) *[7 Punkte]* Betrachten Sie die Bilanzjahre im gesamten Zeitraum, bis das Katastrophenjahr 16 aus dem Beobachtungszeitraum herausgefallen ist. Wie wird sich die durchschnittliche Schadenquote, die Standardabweichung, der Sollbetrag und die Schadenquote nach Schwankung im Normalfall entwickeln?

Aufgabe 7 (Chain-Ladder Modell und Kalenderjahreseffekte) [22 Punkte]

Für ein gegebenes Geschäftssegment bezeichne $C_{i,k}$ den kumulativen Schadenstand des Anfalljahres $i = 1, \dots, n$ zum Abwicklungsjahr $k = 1, \dots, u$. Zudem bezeichne

$$\mathcal{D}_j = \sigma\{C_{i,k} \mid i + k - 1 \leq j\} \quad \text{für} \quad j = 1, \dots, n + u - 1$$

die Bedingung (σ-Algebra) aller Schadenstände im oder vor dem Kalenderjahr j.

(a) *[3 Punkte]* Geben Sie die Modellannahmen des Chain-Ladder Modells (CL) nach Mack an. Verwenden Sie die üblichen Bezeichnungen f_k und σ_k^2.

Weiter sei für jedes Kalenderjahr $j = 1, \dots, n + u - 1$ eine Zufallsvariable K_j mit $\mathrm{E}(K_j) = 0$ und $\mathrm{Var}(K_j) = 1$ gegeben. Betrachten Sie dazu das K-CL-Modell, dass aus den Modellannahmen (K1), (K2) und (K3) besteht:

(K1) Für jedes Kalenderjahr $j = 2, \dots, n + u - 1$ seien K_j und $\mathcal{D}_{j-1}$ stochastisch unabhängig. Außerdem gelte für zwei Anfalljahre $i, l \leq j$

$$\mathrm{Cov}\left(C_{i,j-i+1}, C_{l,j-l+1} \mid \mathcal{D}_{j-1}, K_j\right) = 0.$$

(K2) Es gibt Parameter $f_k > 0$ und $\rho_k > 0$, so dass für $1 \leq i \leq n$ und $2 \leq k \leq u$

$$\mathrm{E}\left(C_{i,k} \mid \mathcal{D}_{i+k-2}, K_{i+k-1}\right) = \left(f_k + \rho_k \cdot K_{i+k-1}\right) \cdot C_{i,k-1}$$

gilt.

(K3) Es gibt Parameter $\sigma_k > 0$, so dass für $1 \leq i \leq n$ und $2 \leq k \leq u$

$$\mathrm{Var}\left(C_{i,k} \mid \mathcal{D}_{i+k-2}, K_{i+k-1}\right) = \left(\sigma_k^2 - \rho_k^2 \cdot C_{i,k-1}\right) \cdot C_{i,k-1}$$

gilt.

(b) *[11 Punkte]* Nehmen Sie an, dass die Modellannahmen (K1), (K2) und (K3) des K-CL-Modells gelten. Zeigen Sie, dass dann die CL-Modellannahmen zu Erwartungswert und Varianz mit den Parametern f_k und σ_k erfüllt sind und dass die Unabhängigkeitsbedingung der CL-Modellannahmen nicht erfüllt ist.

(c) *[6 Punkte]* Interpretieren Sie die drei Modellannahmen des K-CL-Modells im Zusammenhang mit dem CL-Modell. Beschreiben Sie insbesondere die Bedeutung der Zufallsvariablen K_j und der Parameter ρ_k.

(d) *[2 Punkte]* Bewerten Sie die Annahme, dass K_j und $\mathcal{D}_{j-1}$ stochastisch unabhängig sind im Zusammenhang mit dem Themenbereich Inflation.

Aufgabe 8 (Bedingter mittlerer quadratischer Prognosefehler) [27 Punkte]

Der bedingte mittlere quadratische Prognosefehler eines Schätzers $\widehat{X}$ für eine Zufallsvariable X unter der Bedingung $\mathcal{Z}$ ist durch

$$\mathrm{mse}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X}) := \mathrm{E}\left((X-\widehat{X})^2 \mid \mathcal{Z}\right)$$

gegeben.

(a) *[7 Punkte]* Leiten Sie durch eine nachvollziehbare Rechnung die Darstellung

$$\mathrm{mse}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X}) = \mathrm{Var}^{\mathcal{Z}}(X) + (\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X) - \mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X}))^2 + \mathrm{Var}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X}) - 2\,\mathrm{Cov}^{\mathcal{Z}}(X,\widehat{X})$$

her und bezeichnen Sie die vier Summanden mit den jeweiligen Fachbegriffen.

In der Schadenreservebewertung im Chain-Ladder Fall wird für den CL-Schätzer $\widehat{C}_{i,n}$ des Schadenstandes $C_{i,n}$ des Anfalljahres i nach n Abwicklungsjahren der bedingte mittlere quadratische Prognosefehler

$$\mathrm{mse}^{\mathcal{A}_i}(\widehat{C}_{i,n})$$

verwendet, wobei mit den üblichen Bezeichnungen $\mathcal{A}_i = \sigma\{C_{i,1},\dots,C_{i,n-i+1}\}$ die Bedingung (σ-Algebra) aller beobachteten Schadenstände des Anfalljahres i ist. Ohne Bedingung (also $\mathcal{Z} = \{\emptyset,\Omega\}$) ergäbe sich

$$\mathrm{mse}(\widehat{C}_{i,n}) = \mathrm{E}\left((C_{i,n}-\widehat{C}_{i,n})^2\right)$$

und mit der Bedingung $\mathcal{D} = \sigma\{C_{i,k} \mid i+k-1 \le n\}$ aller beobachteter Schadenstände ergäbe sich

$$\mathrm{mse}^{\mathcal{D}}(\widehat{C}_{i,n}).$$

(b) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $\mathrm{Var}^{\mathcal{Z}}(C_{i,n})$ für jeden der drei Fälle $\mathcal{Z} = \{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{A}_i$ und $\mathcal{Z} = \mathcal{D}$ im Zusammenhang mit der CL-Reservebewertung.

(c) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $(\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(C_{i,n}) - \mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{C}_{i,n}))^2$ für jeden der drei Fälle $\mathcal{Z} = \{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{A}_i$ und $\mathcal{Z} = \mathcal{D}$ im Zusammenhang mit der CL-Reservebewertung.

(d) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $\mathrm{Var}^{\mathcal{Z}}(\widehat{C}_{i,n})$ für jeden der drei Fälle $\mathcal{Z} = \{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{A}_i$ und $\mathcal{Z} = \mathcal{D}$ im Zusammenhang mit der CL-Reservebewertung.

(e) *[4 Punkte]* Erläutern Sie die Bedeutung des Terms $-2\,\mathrm{Cov}^{\mathcal{Z}}(C_{i,n},\widehat{C}_{i,n})$ für jeden der drei Fälle $\mathcal{Z} = \{\emptyset,\Omega\}$, $\mathcal{Z} = \mathcal{A}_i$ und $\mathcal{Z} = \mathcal{D}$ im Zusammenhang mit der CL-Reservebewertung.

(f) *[4 Punkte]* Erklären Sie, warum im CL-Fall der bedingte mittlere quadratische Prognosefehlers $\mathrm{mse}^{\mathcal{A}_i}(\widehat{R}_i)$ verwendet wird und nicht $\mathrm{mse}(\widehat{R}_i)$ oder $\mathrm{mse}^{\mathcal{D}}(\widehat{R}_i)$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 (Modellierung des Prämienrisikos) [35 Punkte]

(a) *[3 Punkte]* Das Prämienrisiko beschreibt das Risiko, dass die Prämien des zukünftigen Neugeschäftsjahres nicht ausreichen, um alle in diesem Zeitraum anfallenden Schäden und Kosten bis zur vollständigen Abwicklung zu decken. Die maßgebliche Ergebnisgröße zur Messung des Prämienrisikos ist das *(ultimative) Anfalljahresergebnis des Neugeschäftsjahres*, das als Differenz zwischen der verdienten Prämie und der Summe aus Kosten und Schadenzahlungen bis zur vollständigen Abwicklung definiert ist.

(b) *[4 Punkte]* Zur Verteilungswahl für die Basisschadenlast lassen sich folgende Überlegungen anstellen (es sollten mindestens zwei der nachstehenden Punkte ausfgeführt werden):

- Basisschäden zeichnen sich durch eine vglw. hohe Schadenfrequenz bei gleichzeitig geringer Einzelschadenhöhe aus. Aufgrund der im Vergleich zu den Katastrophenschäden deutlichen geringeren Volatilität und des damit untergeordneten Beitrags zum Gesamtrisiko der Sparte „Wohngebäude-Sturm“, sollte die Verteilungswahl für die Basisschäden keine wesentlichen Einfluss haben und sich ein vereinfachter Modellierungsansatz rechtfertigen lassen.

- Die Basisschadenlast lässt sich im Allgemeinen hinreichend gut durch Erwartungswert und Standardabweichung charakterisieren. Die Normalverteilung als zweiparametrige Verteilung erlaubt eine direkte Übersetzung dieser Kenngrößen in die Verteilungsparameter.

- Bei der Normalverteilung handelt es sich um eine gut kommunizierbare und darstellbare Verteilung, die im Allgemeinen auch Nicht-Aktuaren im Unternehmen bekannt sein dürfte.

- Die Normalverteilung besitzt eine positive Wahrscheinlichkeit für negative Werte. Aufgrund der geringen Volatilität der Basisschäden im Verhältnis zum Erwartungswert sollte diese Wahrscheinlichkeit jedoch äußerst gering sein und es damit in keinem Simulationspfad zu negativen Schäden kommen (um diesen eher theoretischen Fall komplett auszuschließen, ließe sich ohne wesentliche Modifikation der Verteilung eine Begrenzung der Simulationen nach unten durch Kappung oder Stutzung vornehmen).

- Die Normalverteilung ist symmetrisch und daher nicht geeignet, eine etwaige (Rechts-)Schiefe in der Gesamtschadenverteilung abzubilden (die bspw. aus kleinen Sturmereignissen unterhalb der Ereignisschadenschwelle und damit einer starken Schwankung der zugrundeliegenden Schadenanzahlen zusätzlich zur Schwankung der Einzelschäden resultieren könn-

te). In einem solchen Fall sollte auf rechtsschiefe, zweiparametrige Verteilungen wie die Logarithmische Normalverteilung oder die Gammaverteilung zurückgegriffen werden.

- Da wir zudem davon ausgehen können, dass größere Kumulereignisse in der Katastrophenschadenverteilung erfasst sind, für die der Ausgleich im Kollektiv verletzt ist, sollte die Unabhängigkeitsannahme für die verbliebenen Basisschäden näherungsweise zutreffen. Bei einer hohen Anzahl gleichförmiger und unabhängiger Zufallsgrößen stellt die Normalverteilung nach dem zentralen Grenzwertsatz die Grenzverteilung der Summenvariable dar.

(c) *[6 Punkte]* Um eine Doppelmodellierung von Katastrophenschäden zu vermeiden, ist die historische Gesamtschadenlast s_i in jedem Anfalljahr $i \in \{2019, \dots, 2023\}$ zunächst um die Katastrophenschadenlast $s_{CAT,i}$ zu reduzieren. Durch Differenzbildung $s_i - s_{CAT,i}$ erhalten wir die Zeitreihe der historischen Basisschadenlast $s_{Basis,i}$.

Anfalljahr	Basisschadenlast $s_{Basis,i}$
2019	90 = 120 -30
2020	105 = 115 - 10
2021	120 = 250 - 130
2022	95 = 140 - 45
2023	90 = 500 - 410

Die Parameter μ und σ einer Normalverteilung entsprechen Erwartungswert und Standardabweichung und werden im Folgenden mittels Momentenmethode über Mittelwert und empirische Standardabweichung der Zeitreihe geschätzt. Wir erhalten bei Rundung auf zwei Nachkommastellen:

$$\hat{\mu} = \hat{\mathbb{E}}[S_{Basis}] = \frac{1}{n} \sum_{i=2019}^{2023} s_{Basis,i} = \frac{1}{5} \cdot (90 + 105 + 120 + 95 + 90) = 100$$

$$\begin{aligned}
\hat{\sigma} = \hat{\sigma}[S_{Basis}] &= \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=2019}^{2023} (s_{Basis,i} - \hat{\mu})} \\
&= \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \left((-10)^2 + 5^2 + 20^2 + (-5)^2 + (-10)^2\right)} \\
&= \sqrt{162{,}5} \\
&\approx 12{,}75.
\end{aligned}$$

Ein Hinweis: die Parameterschätzung lässt sich alternativ auch mit der Maximum-Likelihood-Methode vornehmen. Beide Methoden unterscheiden sich lediglich in Bezug auf die Standardabweichung durch die fehlende Bias-Korrektur beim Maximum-Likelhood-Schätzer.

Die Basisschadenlast berechnet sich pfadweise unter Verwendung der Inversionsmethode und der in den Basisinformationen angebenenen Realisierungen.

$$S_{Basis}^{(M)} = \hat{\mu} + \hat{\sigma} \cdot \Phi^{-1}\left(U_{Basis}^{(M)}\right)$$

Bei Rundung auf ganzzahlige Mio. €-Beträge ergibt sich:

Simulationspfad M	$S_{Basis}^{(M)}$
1	90
2	106
3	125
4	79

(d) *[4 Punkte]* Bezeichne N die zufällige Anzahl an Katastrophenschäden in einem Jahr und $X_1, \ldots, X_N$ die zugehörigen Ereignisschadenhöhen. Wird mit F_S die Verteilungsfunktion der Summenvariable $S = \sum_{i=1}^{N} X_i$ bezeichnet und mit F_S^{-1} die entsprechende verallgemeinerte Inverse, so ergibt sich die AEP-Kurve (AEP = Aggregate Loss Exceeding Probability) als Funktionsgraph der Funktion $AEP : (1, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$AEP(T) := F_S^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right).$$

Die *AEP-Kurve* beschreibt somit die Verteilung des *Jahresgesamtschadens*, der durch die betrachtete Naturkatastrophe verursacht wird, und gibt an, wie hoch der Jahresgesamtschaden erwartungsgemäß sein wird, der im statistischen Mittel alle T Jahre auftritt. Hierbei wird T als *Wiederkehrperiode* oder auch *Jährlichkeit* bezeichnet.

Die OEP-Kurve (OEP = *Occurrence Exceeding Probability*) bezieht sich wiederum auf die Verteilung des *maximalen Ereignisschadens* $M_N := \max\{X_1, \ldots, X_N\}$ *eines Jahres* und ist definiert als Funktionsgraph von $OEP : (1, \infty) \to \mathbb{R}_0^+$ mit

$$OEP(T) := F_{M_N}^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right).$$

Hierbei bezeichnet F_{M_N} analog die Verteilungsfunktion von M_N sowie $F_{M_N}^{-1}$ die entsprechende verallgemeinerte Inverse.

(e) *[6 Punkte]* Zur Simulation des Jahresschadenlast S_{CAT} aus Katastrophenschäden ist die verallgemeinerte Inverse $F^{-1}_{S_{CAT}}$ pfadweise auf die Realisierungen $U^{(M)}_{S_{CAT}} = U^{(M)}_{CAT}$ anzuwenden. Um $F^{-1}_{S_{CAT}}$ zu bestimmen, sind aus den aufgeführten Wiederkehrperioden $t_j, 1, .., 5$ zunächst die Quantilniveaus $q(t_j) = 1 - 1/t_j$ zu berechnen:

t_j	$q(t_j)$
2	$0{,}50 = 1 - 1/2$
5	$0{,}80 = 1 - 1/5$
20	$0{,}95 = 1 - 1/20$
100	$0{,}99 = 1 - 1/100$
400	$0{,}9975 = 1 - 1/400$

Wir verzichten gemäß Hinweis aus der Aufgabenstellung auf eine Interpolation zwischen den Stützstellen der Verteilungsfunktion und unterstellen vereinfacht eine Treppenfunktion, die zwischen den Stützstellen konstant verläuft (was im vorliegenden Fall angesichts weniger Stützstellen und großer Abstände allerdings nicht für die praktische Anwendung zu empfehlen wäre) - wir setzen also:

$F^{-1}_{S_{CAT}}(q)$	q
0	$q < 0{,}50$
10	$0{,}50 \leq q < 0{,}80$
60	$0{,}80 \leq q < 0{,}95$
200	$0{,}95 \leq q < 0{,}99$
500	$0{,}99 \leq q < 0{,}9975$
1.500	$0{,}9975 \leq q$

Die zugehörigen Realisierungen $S^{(M)}_{CAT}$ der jährlichen Sturmschäden S_{CAT} ergeben sich mittels $F_{S^{-1}_{CAT}}\left(U^{(M)}_{S_{CAT}}\right)$.

Simulationspfad M	$S_{CAT}^{(M)}$
1	0
2	500
3	60
4	200

(f) *[4 Punkte]* Das *ultimative Anfalljahresergebnis* T_{2025} *des Jahres 2025* zur Messung des *ultimativen Prämienrisikos* besitzt die Darstellung:

$$T_{2025} = P_{2025} - E_{2025} - U_{2025}$$

mit P_{2025} und E_{2025} als Prämien bzw. Kosten des Anfalljahres 2025 sowie

$$U_{2025} = S = S_{Basis} + S_{CAT}$$

als entsprechender *Ultimateschaden*, der sich zusammensetzt aus der Basisschadenlast S_{Basis} und der Kastrophenschadenlast S_{CAT}.

Wir addieren somit zunächst pfadweise die Simulationen von Basis- und Katastrophenschadenlast zur Gesamtschadenlast:

Simulationspfad M	$S^{(M)} = S_{Basis}^{(M)} + S_{CAT}^{(M)}$
1	90 = 90 + 0
2	606 = 106 + 500
3	185 = 125 + 60
4	279 = 79 + 200

Anschliessend lassen sich pfadweise die simulierten Anfalljahresergebnisse (T_{2025}) ermitteln:

Simulationspfad M	$T_{2025}^{(M)} = P_{2025} - E_{2025} - U_{2025}^{(M)}$
1	$210 = 500 - 200 - 90$
2	$-306 = 500 - 200 - 606$
3	$115 = 500 - 200 - 185$
4	$21 = 500 - 200 - 279$

Aus den Simulationen des Anfalljahresergebnisses, maßgeblich für die Bemessung des Prämienrisikos, erhalten wir einen Mittelwert von

$$\widehat{\mathbb{E}}[T_{2025}] = \frac{1}{4} \cdot (210 - 306 + 115 + 21) = \frac{40}{4} = 10\,[\text{Mio. €}]$$

und bestimmen das Risikokapital gemäß der Definition des Risikomaßes wie folgt:

$$\begin{aligned} RK_{\text{Prämie}} &= 3 \cdot \widehat{\sigma}[T_{2025}] \\ &= 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left((210-10)^2 + (-306-10)^2 + (115-10)^2 + (21-10)^2\right)} \\ &= 3 \cdot \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \left(200^2 + (-316)^2 + 105^2 + 11^2\right)} \\ &\approx 3 \cdot 224 \\ &= 672\,[\text{Mio. €}] \end{aligned}$$

(g) *[2 Punkte]* Die Sparte „Wohngebäude-Sturm“ weist für das Anfalljahr 2025 einen versicherungstechnischen RoRaC von lediglich 1,5% auf: einem mittleren Anfalljahresergebnis von 10 Mio. € als Mittelwert der Simulationen aus Aufgabenteil (f) steht ein Risikokapitalbedarf von 672 Mio. € gegenüber.

(h) *[6 Punkte]* Mögliche Maßnahmen zur Verbesserung des *RoRaC* können entweder auf den Zähler (Erwartete Profitabilität), den Nenner (Risiko) oder beide Größen gleichzeitig abzielen. Insbesondere der Steuerung des Neugeschäfts und dem Umgang mit dem Katastrophenrisiko kommt hierbei eine besondere Bedeutung zu.

- *Prämienanpassunge*n, speziell -erhöhungen, im Neugeschäft. Diese haben einen positiven Effekt auf die Profitabilität, verhalten sich aber in Bezug auf das Risiko neutral (das verwendete Risikomaß ist invariant gegenüber Verschiebungen der Ergebnisverteilung). Da die Prämie als fixer Parameter in das Modell eingeht, sind keine Anpassungen am internen Modell notwendig.
- *Ausweitung des Geschäftsgebietes* bzw. *Verbesserung der geographischen Diversifikation im Neugeschäft* durch Stärkung der Marketing- und Vertriebsaktivitäten in weniger Sturm-exponierten Regionen Deutschlands (wie bspw. Süddeutschland). Eine solche Maßnahme würde das relative Risiko senken, die Standardabweichung würde weniger stark steigen als die Bestandsgröße und somit die Prämie (bei Annahme einer weitestgehend einheitlichen Prämie im Bestand). Da die Bestandsausweitung bereits im exposure-basierten Modell verarbeitet wird und im internen Modell lediglich eine Resimulation vorgenommen wird, erscheint keine Anpassung am internen Modell notwendig.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2 (Modellierung von Katastrophenschäden) [20 Punkte]

(a) *[4 Punkte]* Beispiele für Vorteile und Herausforderungen einer expliziten Modellierung katastrophaler Kumulschäden:

- Vorteil: Bei der angestrebten expliziten Modellierung liegt eine dezidierte Wahrscheinlichkeitsverteilung der Kumulschäden vor, bei der impliziten Modellierung werden die Kumulschäden hingegen gemeinsam mit den Basis- und/oder Großschäden der Sparte modelliert. Ein wesentlicher Nachteil einer impliziten Modellierung besteht also darin, dass Kumulereignisse in der gemeinsamen Wahrscheinlichkeitsverteilung untergehen und sich nicht mehr trennen lassen.

- Vorteil: Durch explizite Modellierung ist eine präzisere Modellierung sowohl der Großschäden als auch der katastrophalen Kumulschäden Brutto vor Rückversicherung möglich, die pauschale implizite Modellierung katastrophaler Kumulschäden in den Großschäden erfordert im Allgemeinen eine hinreichend konservative Extrapolation, d.h. Auswahl einer entsprechend gefährlichen Verteilung (Bsp: Pareto), und könnte zu einer Überschätzung der mittelschweren Großschäden führen.

- Vorteil: Durch die explizite Modellierung ist zudem eine präzisere Abbildung der Rückversicherungsentlastung möglich, was wiederum eine verlässlichere Bestimmung der Risikominderung durch Rückversicherung erlaubt und darüber hinaus auch eine angemessenere Beurteilung von Effektivität (sowie ggf. auch Effizienz) des Risikotransfers an den Rückversicherer ermöglicht.

- Herausforderung: Zur Vermeidung einer Doppelmodellierung sind bei expliziter Modellierung katastrophaler Kumulschäden bereits aufgetretene Kumulereignisse aus der Datengrundlage zur Kalibrierung der Basis- und Großschäden herauszunehmen. Dies erfordert eine entsprechende vorgelagerte Identifikation und Trennung solcher Ereignisse in den Schadensystemen des Unternehmens.

- Herausforderung: Höhere Modellkomplexität, zusätzliche Annahmen zu Abhängigkeiten und Aggregation müssen in das Modell fließen. Es ist ein höherer Aufwand zur Modellkalibrierung notwendig und nicht ausschließlich statistisches Know-How ausreichend. Auch die mittels Expertenschätzungen hergeleiteten Szenarioparameter sind unsicherheitsbehaftet und müssen entsprechend validiert werden (evtl. sogar mit entsprechenden Unsicherheitsloadings versehen werden). Eine solche Validierung sollte je

nach Verfügbarkeit und Qualität insbesondere anhand von Unternehmensdaten und/oder Marktdaten zu historischen Kumulereignissen in der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ erfolgen.

- Herausforderung: Ggf. stellt die Einführung einer neuen Schadenkategorie in das interne Unternehmensmodell eine genehmigungspflichtige Modelländerung durch die lokale Aufsichtsbehörde dar. Dies ist wiederum abhängig von der Materialität der Änderung sowie den Regelgungen in der unternehmensspezifischen „Modelländerungsrichtlinie“.

(b) *[3 Punkte]* Es lassen sich folgende Auswirkungen der Änderung des Modellierungsansatzes durch Einführung einer weiteren Schadenkategorie und Wechsel von einer impliziten auf eine explizite Modellierung für *katastrophale Kumulschäden* in der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ nennen:

- Bruttomodell: die *Segmentierungs- und Aggregationslogik* in der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ muss angepasst werden, da dort nun drei Schadenkategorien vorliegen. Außerdem wären *Abhängigkeiten* zwischen Basis- und Großschäden und den *katastrophalen Kumulschäden* zu definieren und zu schätzen.

- Das *Rückversicherungsmodell* wäre dahingehend anzupassen, dass neben den Basis- und Großschäden auch die Simulation der *katastrophalen Kumulschäden* aus dem Bruttomodell das Rückversicherungsprogramm durchlaufen. Die entsprechenden RV-Rückflüsse aus diesem Vertrag würden die Netto-Schadenbelastung pfadweise weiter mindern, und wären damit in den Verteilungen der Nettoschäden und des Netto-Anfalljahresergebnisses zu berücksichtigen. Sollte es wiederum RV-Verträge geben, die dezidiert *katastrophale Kumulschäden* decken und aufgrund der bisherigen impliziten Modellierung dieser Schäden nicht im Modell abgebildet werden konnten, sind diese entsprechend im RV-Modell zu implementieren.

- Im *Abwicklungsmodell* wäre unter Umständen ein entsprechendes Auszahlungsmuster für die Abwicklung zukünftiger *katastrophaler Kumulschäden* vorzuhalten, sofern das Reservierungs- und Abwicklungsverhalten dieser Schäden von den Basis- und Großschäden deutlich abweicht und das Muster hinreichend verlässlich bestimmt / geschätzt werden kann.

(c) *[5 Punkte]* Der aufgeführte Output der Szenarioschätzungen weist eine starke Ähnlichkeit zu den Event Loss Tables (ELTs) exposure-basierter Modelle im Naturgefahrenbereich auf. Aus diesem Grund bietet sich folgender Modellansatz an:

- Jedes der drei Einzelszenarien ($i = 1, 2, 3$) wird als kollektives Modell aufgefasst:

- Die Ereignisanzahl N_i werde durch eine Poisson(λ_i)-Verteilung beschrieben mit $E[N_i] = \lambda_i$ (Frequenz, mittlere Anzahl an jährlichen Ereigniseintritten)
- Die individuellen Ereignishöhen $X_{i,j}, j \in 1, \ldots, N_i$ innerhalb eines Szenarios i sind unabhängig und identisch verteilt mit Mittelwert $\mathbb{E}[X_{i,j}] = \mu_i$ und Standardabweichung $\sigma[X_{i,j}] = \sigma_i$ (Standardabweichung Ereignisschaden bei Ereigniseintritt)
- Ereignishöhen $X_{i,j}$ und Ereignisanzahl N_i sind stochastisch unabhängig
- Für jedes Einzelereignis $1 \leq j \leq N_i$ werde der Ereignisschadenaufwand durch eine *Logarithmische Normalverteilung* beschrieben. Die Verwendung der *Normalverteilung* wäre hingegen weniger sinnvoll, da sie beidseitig unbeschränkt ist und damit negative Werte erzeugen könnte. Gegen die Verwendung der *Betaverteilung* spricht wiederum, dass die Angabe über das vom Szenario betroffene Exposure nicht vorliegt (ggf. ließe sich zusätzlich erwähnen, dass KH-Policen in Deutschland mittlerweile ein Deckungslimit bei 100 Mio. € aufweisen und nur noch Altverträge über Ilimite-Deckungen verfügen, womit ggf. eine Kappung der Ereignisschäden bei der Obergrenze von 100 Mio. € angebracht wäre).
- Die Einzelszenarien $i, 1 \leq i \leq 3$ sind stochastisch unabhängig

(d) *[3 Punkte]* In Anlehnung an die Re-Simulation aus einer ELT lauten die einzelnen Simulationsschritte für den vorliegenden Szenario-Output wie folgt:

(1) Simulation der jährlichen Ereignisschadenanzahl aus einer Poisson-Verteilung mit Gesamtfrequenz λ (als Summe der Einzelfrequenzen λ_i)

(2) Zufälliges, mit den Einzelfrequenzen gewichtetes Ziehen der Event-ID $(1, 2, 3)$ gemäß simulierter Ereignisschadenanzahl aus Schritt (1)

(3) Umrechnung des szenariospezifischen Erwartungswerts und Standardabweichung in die Parameter einer Logarithmischen Normalverteilung und Simulation des Schadenaufwands aus der spezifizierten Lognormalverteilung per Einzelereignis

(4) Pfadweise Aggregation der Kumulschäden mit den Basis- und Großschäden

(e) *[5 Punkte]* Nach den Formeln von Wald ergibt sich für jedes einzelne Schadenszenario $i \in \{1, 2, 3\}$

- Erwarteter Jahresgesamtschaden S_i per Einzelszenario: $\mathbb{E}[S_i] = \lambda_i \cdot \mu_i$
- Varianz des Jahresgesamtschadens per Einzelszenario: $\mathbb{V}[S_i] = \lambda_i \cdot (\mu_i^2 + \sigma_i^2)$

EVENT ID	$\mathbb{E}[S_i]$	$\mathbb{V}[S_i]$
1	0,8	80
2	1,2	80
3	2,0	100

Der Jahresgesamtschaden aller Szenarien ist gegeben durch:

$$S_{KH,CAT} = \sum_{i=1}^{n} S_i.$$

Erwartungswert und Varianz des Jahresschadens $S_{KH,CAT}$ aller Szenarien ergeben sich jeweils über Summation der Einzelerwartungswerte bzw. Einzelvarianzen (letzteres aufgrund der Unabhängigkeit der einzelnen Szenarien).

Somit erhalten wir zusammengenommen:

- Erwarteter Jahresgesamtschaden: $\mathbb{E}[S_{KH,CAT}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[S_i]$
- Varianz des Jahresgesamtschadens: $\mathbb{V}[S_{KH,CAT}] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{V}[S_i]$

Insgesamt ist $\mathbb{E}[S_{KH,CAT}] = 4$ und $\mathbb{V}[S_{KH,CAT}] = 260$ bzw. $\sigma[S_{KH,CAT}] \approx 16$ und damit $\text{Vko}[S_{KH,CAT}] \approx 4$.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 (Reserverisiko und Limitsystem) [15 Punkte]

(a) *[3 Punkte]* Das *ultimative Reserverisiko* bezeichnet das Risiko, dass die Best-Estimate Rückstellungen für bereits angefallene Schäden nicht ausreichen, um die zugehörigen Zahlungen bis zur vollständigen Abwicklung zu decken. Die zur Messung des ultimativen Reserverisikos maßgebliche Größe ist die Differenz zwischen den zukünftigen Zahlungen für bereits angefallene Schäden bis zur vollständigen Abwicklung ($R = R_{PY}$) und dem besten Schätzwert der Schadenrückstellungen ($\hat{R} = \hat{R}_{PY}$), d.h. $R - \hat{R}$.

(b) *[9 Punkte]*

(i) *[7 Punkte]* Für die Logarithmische Normalverteilung mit den beiden Parametern μ und σ gilt unter Verwendung der Hinweise aus der Aufgabenstellung:

- Erwartungswert: $\mathbb{E}[R] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$
- Varianz:

$$\begin{aligned}\mathbb{V}[R] = \mathbb{E}[R^2] - \mathbb{E}[R]^2 &= \exp\left\{2\mu + 2\sigma^2\right\} - \exp\left\{2\mu + \sigma^2\right\} \\ &= \left(\exp\left\{\sigma^2\right\} - 1\right) \cdot \exp\left\{2\mu + \sigma^2\right\} \\ &= \left(\exp\left\{\sigma^2\right\} - 1\right) \cdot \mathbb{E}[R]^2\end{aligned}$$

Nach Umstellung ergibt sich folgende Darstellung der Parameter in Abhängigkeit von Erwartungswert und Varianz:

$$\sigma = \sqrt{\ln\left(\mathbb{V}[R]/\mathbb{E}[R]^2 + 1\right)} = \sqrt{\ln\left(\text{Vko}[R]^2 + 1\right)}, \quad \mu = \ln\left(\mathbb{E}[R]\right) - \sigma^2/2.$$

Mit $\mathbb{E}[R] = \hat{R} = 500$ und $\text{Vko}[R] = 0{,}15$ erhalten wir bei Rundung auf zwei Nachkommastellen $\sigma = 0{,}15$ und $\mu = 6{,}20$.

Damit lassen sich die Schwellenwerte zu den Quantilniveaus $q \in \{0{,}75,\ 0{,}95\}$ berechnen mittels

$$F_R^{-1}(q) - \hat{R}_{PY} = \exp\left\{\mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(q)\right\} - \hat{R}_{PY}$$

Bei Rundung auf ganzzahlige Mio. €-Beträge ergibt sich:

q	Schwellenwert / erforderlicher Puffer
0,75	$45 = 545 - 500$
0,95	$130 = 630 - 500$

Somit gilt per 31.12.2024:

- Puffer $\geq$ 130 Mio. €: grün (komfortabel)
- 45 Mio. € $\leq$ Puffer $<$ 130 Mio. €: gelb (auskömmlich)
- Puffer $<$ 45 Mio. €: rot (unzureichend)

(ii) *[2 Punkte]* Der Puffer in den HGB-Schadenrückstellungen beträgt 100 = 600 - 500 Mio. € und liegt somit laut Limitsystem immer noch im auskömmlichen Bereich („gelb“). Zur Wiederherstellung einer komfortablen Bedeckung („grün“) müssten die HGB-Schadenrückstellungen allerdings um mindestens 30 Mio. € gestärkt werden. Da die Ampelfarbe „gelb“ als Vorwarnung zu interpretieren ist, sollte hierzu eine entsprechende Vorstandsinformation erfolgen, dem sich ggf. auch ein Vorstandsbeschluss zur Reservestärkung anschliessen könnte.

(c) *[3 Punkte]* Sie entgegnen Ihrem Vorstand Folgendes (es sollten mindestens zwei Punkte genannt werden):

- Der zur Berechnung des Solvenzkapitalbedarfs (SCR) maßgebliche Risikohorizont ist die einjährige Kalenderjahressicht, nicht die ultimative Anfalljahressicht, wie sie dem Limitsystem zugrundeliegt.
- In der einjährigen Risikosicht wird die Unsicherheit über die weitere Abwicklung und die Auswirkungen auf die ökonomischen Eigenmittel lediglich über die kommenden 12 Monate einbezogen (= ökonomisches Abwicklungsergebnis des nächsten Kalenderjahres), in der ultimativen Sicht hingegen über den gesamten Abwicklungszeitraum.
- Im Allgemeinen ist davon auszugehen, dass das ultimative Reserverisiko gerade in langabwickelnden Sparten wie „Kraftfahrt-Haftpflicht“ (deutlich) größer als das einjährige Reserverisiko ist und somit das 99,5%-Quantil der ultimativen Reserverisikoverteilung das SCR überschätzt.
- Das SCR pro Risikomodul wird aus der Gewinn- bzw. Verlustverteilung der maßgeblichen Risikogröße auf Unternehmensebene bestimmt, somit ergeben sich bei der Aggregation der Reserverisikoverteilungen aller Einzelsparten Diversifikationseffekte. Es ist daher davon auszugehen, dass die Summe der spartenweise berechneten Puffer auf Unternehmensebene einem höheren Quantilniveau als 99,5% auf Einzelspartenebene entspricht.
- In Bezug auf die Höhe des Puffers und das avisierte Sicherheitsniveau geben Sie zu bedenken, dass selbst unter HGB die Rückstellungen, wenn auch konservativ, nicht dazu gedacht sind, alle Extremfälle abzudecken,

da es dafür auch Positionen wie Schwankungsrückstellung oder Eigenmittel gibt. Die mit einem höheren Sicherheitsniveau verbundenen Reservestärkungen unter HGB könnten über das Ziel hinausschießen und angesichts des ohnehin angespannten Geschäftsumfelds in der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ die HGB-Ergebnisse durch negative Abwicklungsergebnisse und hohe Reserven für Geschäftsjahresschäden zusätzlich belasten.

Lösungshinweise zu Aufgabe 4 (Reserveprozess und Reservebericht) [22 Punkte]

(a) *[5 Punkte]* In der Praxis vorkommende Zielsetzungen sind:

- Bestimmung der Rückstellungen für bilanzielle Zwecke (Überprüfung bzw. Plausibilisierung der HGB-Reserven, Ermittlung der versicherungstechnischen Rückstellungen nach Solvency II, Ermittlung der Schadenrückstellungen nach IFRS, US-GAAP oder anderen Standards)
- Unternehmensanalyse durch Rating-Agentur
- Shareholder-Value Betrachtung bzw. Unternehmensbewertung für einen Kauf bzw. Verkauf
- Preisfindung bei retrospektiver Rückversicherung, Portfolioübertragung, Ablöseverhandlungen
- Ermittlung angemessener Tarifprämien bei versicherungstechnischen Tarifierungsansätzen
- Beurteilung der in der Bilanz ausgewiesenen Schadenrückstellungen für Risikomanagement, Planungsprozess, Asset Liability Management

(b) *[4 Punkte]* Die Stationen im Reserveprozess sind: (1) Daten, (2) Reserveberechnung, (3) Unabhängige Validierung, (4) Offizielle Festlegung, (5) Weiterverwendung, (D) Prozessdokumentation.

Dabei ist die Einordnung im Ablauf durch die Nummerierung (1) bis (5) gegeben. Die Prozessdokumentation lässt sich nicht in den Ablauf einordnen, sondern gehört zum gesamten Prozess.

(c) *[13 Punkte]* Einige der Aussagen lassen sich auf mehrere Arten sinnvoll und naheliegend richtig stellen. In der Lösung ist jeweils eine Möglichkeit angegeben.

(A) Die Aussage ist falsch. Der Reservebericht ist keine explizite gesetzliche Anforderung unter HGB und auch nicht unter Solvency II.

(B) Die Aussage ist wahr.

(C) Die Aussage ist wahr.

(D) Die Aussage ist falsch. Die abschließende Entscheidung liegt in der Verantwortung des Managements.

(E) Die Aussage ist falsch. Es ist wichtig alle relevanten Schnittstellen, insbesondere den Vorstand, möglichst früh über absehbare Entwicklungen zu informieren. Natürlich ist der vorläufige Charakter der Ergebnisse ein wichtiger Aspekt bei der Kommunikation.

(F) Die Aussage ist wahr.

(G) Die Aussage ist falsch. Im Rahmen des Reservebewertungsprozesses erfolgen Prozessschritte, die nicht Teil der Prozesse der Rechnungslegung sind. Hier obliegt die Qualitätssicherung der Daten dem Reserveaktuar.

(H) Die Aussage ist falsch. Eine Validierung durch dieselbe Person, welche die Berechnungen durchgeführt hat, kann in der Regel nicht als unabhängig angesehen werden. Das Problem der Aufgabenfülle muss auf andere Weise gelöst werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 5 (Rechnungslegung) [22 Punkte]

(a) *[12 Punkte]* Die wesentlichen Elemente des Building Block Approach unter IFRS17 sind:

- Die erwarteten Zahlungsströme. Diese bilden die Basis der Bewertung.
- Die Diskontierung. Diese bildet den ökonomischen Zeitwert der Zahlungsströme mit einem laufzeit-, währungs- und liquiditätskongruenten Zins ab.
- Die Risikomarge (Risk Adjustment). Sie dient zur Deckung der Unsicherheiten, denen sich das Versicherungsunternehmen bei der Erfüllung des Versicherungsvertrags gegenübersieht.
- Die Servicemarge (Contractual Service Margin, CSM). Sie dient zur Neutralisierung von Gewinnen bei Vertragsabschluss (siehe Realisationsprinzip).
- Die Drohverlustrückstellung (Loss Component, LC). Sie sorgt dafür, dass (absehbare) Verluste, die bis zum Bilanzstichtag „entstanden“ sind, berücksichtigt werden (siehe Imparitätsprinzip).

Das Imparitätsprinzip besagt, dass - im Unterschied zu Gewinnen - alle absehbaren Verluste aus Verträgen, die zum Stichtag des Abschlusses zu berücksichtigen sind, abgebildet werden müssen, auch wenn die zugrundeliegenden Schadenereignisse noch in der Zukunft liegen, also noch nicht realisiert sind. Gewinne und Verluste werden also nicht gleich behandelt.

Das Realisationsprinzip hingegen besagt, dass Gewinne aus diesen Verträgen im Jahresabschluss nur dann berücksichtigt werden dürfen, wenn sie am Abschlussstichtag auch bereits realisiert sind.

(b) *[10 Punkte]* Die zutreffenden Antworten sind

(A) HGB

(B) HGB

(C) Solvency II

(D) IFRS17

(E) Solvency II

(F) HGB

(G) Solvency II

(H) HGB

(I) IFRS17

(J) Solvency II.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6 (Schwankungsrückstellung) [17 Punkte]

Auf eine Unterscheidung zwischen = und ≈ bei Rundungen wurde in der Lösung zwecks besserer Lesbarkeit verzichtet.

(a) *[4 Punkte]* Es gilt

$$\bar{q} = \frac{1}{15}\sum_{i=1}^{15} q_i = \frac{887{,}4\%}{15} = 59{,}2\%$$

und

$$\begin{aligned}
\bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}\left(q_i - \bar{q}\right)^2 \\
&= \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{15}\left(q_i^2 - 2q_i\bar{q} + \bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{15} q_i^2 - 2\bar{q}\sum_{i=1}^{15} q_i + 15\bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(\sum_{i=1}^{15} q_i^2 - 15\bar{q}^2\right) \\
&= \frac{1}{14}\left(5{,}291 - 15\cdot(59{,}2\%)^2\right) \\
&= (5{,}4\%)^2,
\end{aligned}$$

womit sich $\bar{\sigma} = 5{,}4\%$ ergibt. Aufgrund der Vorgaben zu Versicherungszweig und Sicherheitszuschlag berechnet sich der Sollbetrag des Bilanzjahres 16 zu

$$SB_{16} = 4{,}5 \cdot \bar{\sigma} \cdot P_{16} = 30{,}1.$$

(b) *[3 Punkte]* Die erfolgsunabhängige Zuführung in Höhe von

$$3{,}5\% \cdot SB_{16} = 3{,}5\% \cdot 30{,}1 = 1{,}1$$

spielt keine Rolle, da sich aufgrund der katastrophalen Schadenquote im Geschäftsjahr von $q_{16} = 175{,}0\%$ ein Überschaden B von

$$-B = -(\bar{q} - q_{16}) \cdot P_{16} = -(59{,}2\% - 175{,}0\%) \cdot 124 = 143{,}6$$

ergibt, der für einen Ausgleich durch die Rückstellung $SR_{15} = 24{,}5$ viel zu hoch ist. Die Schwankungsrückstellung wird daher vollständig geleert: $SR_{16} = 0$. Für die Schadenquote nach Schwankung q_{16}^{nS} ergibt sich damit

$$q_{16}^{nS} = q_{16} + \frac{SR_{16} - SR_{15}}{P} = 175{,}0\% + \frac{0 - 24{,}5}{124} = 155{,}2\%.$$

(c) *[3 Punkte]* Im Jahr 17 beträgt der Sollbetrag

$$SB_{17} = 4{,}5 \cdot \bar{\sigma} \cdot P_{17} = 4{,}5 \cdot 30{,}2\% \cdot 124 = 168{,}5,$$

womit die erfolgsunabhängige Zuführung bei

$$3{,}5\% \cdot SB_{17} = 5{,}9$$

liegt. Eine nach Angabe „normale“ Schadenquote stellt einen Unterschaden dar, der in die Schwankungsrückstellung eingebracht und damit ausgeglichen wird. Für diesen „Normalfall“ beträgt die Schadenquote nach Schwankung

$$q_{17}^{nS} = 67{,}3\% + \frac{3{,}5\% \cdot SB_{17}}{P_{17}} = 67{,}3\% + \frac{5{,}9}{124} = 72{,}1\%.$$

Zusatzbemerkung: Die Bandbreite der Schadenquoten, für die dies Schadenquote nach Schwankung zutrifft, geht von $q_{17} = 0\%$ bis $q_{17} = 72{,}1\%$.

(d) *[7 Punkte]* Die durchschnittliche Schadenquote, die Standardabweichung und der Sollbetrag werden sich bis zum Bilanzjahr 31 nicht wesentlich ändern, da die Jahre, die aus dem Beobachtungszeitraum herausfallen, durch Jahre mit ähnlichen Schadenquoten und gleicher Volatilität ersetzt werden.

Im Jahr 32 wird die durchschnittliche Schadenquote dann wieder auf ca. 59%, die Standardabweichung auf knapp über 5% und der Sollbetrag auf ca. 30 fallen.

Die Schadenquote nach Schwankung wird bei 72% bleiben, so lange, bis die Schwankungsrückstellung den Sollbetrag erreicht hat. Bei einer jährlichen Zuführung von durchschnittlich ca.

$$(72{,}1\% - 59{,}2\%) \cdot 124 \approx 16,$$

wird dieser Zustand (ungefähr) im Bilanzjahr 27 erreicht. Bis zum Bilanzjahr 31, wird die Schadenquote nach Schwankung dann im Normalfall der Geschäftsjahresschadenquote entsprechen und daher im Schnitt bei ca. 59% liegen.

Im Bilanzjahr 32 wird der schrumpfende Sollbetrag eine Auflösung an Schwankungsrückstellung in der Größenordnung von 138 bedingen, was zu einer negativen Schadenquote nach Schwankung von ca. -52% führen wird.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7 (Chain-Ladder Modell und Kalenderjahreseffekte) [22 Punkte]

(a) *[3 Punkte]* Die Modellannahmen des CL-Modells lauten:

(CL1) Die Anfalljahre $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,u}\}$, $1 \le i \le n$ sind unabhängig.

(CL2) Es gibt Parameter $f_k > 0$, so dass für $1 \le i \le n$ und $2 \le k \le u$

$$\mathrm{E}(C_{i,k} \,|\, \mathcal{A}_{i,k-1}) = f_k \cdot C_{i,k-1}$$

gilt. Die Parameter f_k werden Abwicklungsfaktoren genannt.

(CL3) Es gibt Parameter $\sigma_k > 0$, so dass für $1 \le i \le n$ und $2 \le k \le u$

$$\mathrm{Var}(C_{i,k} \,|\, \mathcal{A}_{i,k-1}) = \sigma_k^2 \cdot C_{i,k-1}$$

gilt. Die σ_k^2 werden auch Varianzparameter genannt.

Dabei ist wie üblich $\mathcal{A}_{i,k-1} = \sigma\{C_{i,1}, \dots, C_{i,k-1}\}$.

(b) *[11 Punkte]* Aus (K2) folgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}(C_{i,k} \,|\, \mathcal{A}_{i,k-1}) &= \mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k-1}}\Big(\mathrm{E}\big(C_{i,k} \,|\, \mathcal{D}_{i+k-2}, K_{i+k-1}\big)\Big) \\
&= \mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k-1}}\Big(\big(f_k + \rho_k \cdot K_{i+k-1}\big) \cdot C_{i,k-1}\Big) \\
&= \big(f_k + \rho_k \cdot \mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k-1}}(K_{i+k-1})\big) \cdot C_{i,k-1} \\
&= f_k \cdot C_{i,k-1},
\end{aligned}$$

da $\mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k-1}}(K_{i+k-1}) = \mathrm{E}(K_{i+k-1}) = 0$ ist wegen der Unabhängigkeit von K_{i+k-1} und $\mathcal{A}_{i,k-1} \subset \mathcal{D}_{i+k-2}$. Damit ist (CL2) erfüllt.

Aus (K3) und (K2) folgt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}(C_{i,k} \,|\, \mathcal{A}_{i,k-1}) \\
= \;& \mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k-1}}\Big(\mathrm{Var}\big(C_{i,k} \,|\, \mathcal{D}_{i+k-2}, K_{i+k-1}\big)\Big) + \mathrm{Var}^{\mathcal{A}_{i,k-1}}\Big(\mathrm{E}\big(C_{i,k} \,|\, \mathcal{D}_{i+k-2}, K_{i+k-1}\big)\Big) \\
= \;& \mathrm{E}^{\mathcal{A}_{i,k-1}}\Big(\big(\sigma_k^2 - \rho_k^2 \cdot C_{i,k-1}\big) \cdot C_{i,k-1}\Big) + \mathrm{Var}^{\mathcal{A}_{i,k-1}}\Big(\big(f_k + \rho_k \cdot K_{i+k-1}\big) \cdot C_{i,k-1}\Big) \\
= \;& \big(\sigma_k^2 - \rho_k^2 \cdot C_{i,k-1}\big) \cdot C_{i,k-1} + \rho_k^2 \cdot \mathrm{Var}^{\mathcal{A}_{i,k-1}}\big(K_{i+k-1}\big) \cdot C_{i,k-1}^2 \\
= \;& \sigma_k^2 \cdot C_{i,k-1},
\end{aligned}$$

da $\mathrm{Var}^{\mathcal{A}_{i,k-1}}(K_{i+k-1}) = \mathrm{Var}(K_{i+k-1}) = 1$ ist, wieder wegen der Unabhängigkeit von K_{i+k-1} und $\mathcal{A}_{i,k-1} \subset \mathcal{D}_{i+k-2}$. Damit ist (CL3) erfüllt.

Wäre (CL1) erfüllt, so würde für zwei Anfalljahre $i < l$ und ein Kalenderjahr $j \ge l$

$$\mathrm{Cov}\big(C_{i,j-i+1}, C_{l,j-l+1} \,|\, \mathcal{D}_{j-1}\big) = 0$$

gelten. Wegen (K1) und (K2) gilt aber

$$\begin{aligned}
& \mathrm{Cov}\left(C_{i,j-i+1}, C_{l,j-l+1} \,|\, \mathcal{D}_{j-1}\right) \\
= \; & \mathrm{E}^{\mathcal{D}_{j-1}}\Big(\mathrm{Cov}\left(C_{i,j-i+1}, C_{l,j-l+1} \,|\, \mathcal{D}_{j-1}, K_j\right)\Big) + \\
& \qquad \mathrm{Cov}^{\mathcal{D}_{j-1}}\Big(\mathrm{E}\left(C_{i,j-i+1} \,|\, \mathcal{D}_{j-1}, K_j\right), \mathrm{E}\left(C_{l,j-l+1} \,|\, \mathcal{D}_{j-1}, K_j\right)\Big) \\
= \; & 0 + \mathrm{Cov}^{\mathcal{D}_{j-1}}\Big(\left(f_{j-i+1} + \rho_{j-i+1} \cdot K_j\right) \cdot C_{i,j-i}, \left(f_{j-l+1} + \rho_{j-l+1} \cdot K_j\right) \cdot C_{i,j-l}\Big) \\
= \; & \rho_{j-i+1} \cdot \rho_{j-l+1} \cdot \mathrm{Cov}^{\mathcal{D}_{j-1}}\left(K_j, K_j\right) \cdot C_{i,j-i} \cdot C_{i,j-l} \\
= \; & \rho_{j-i+1} \cdot \rho_{j-l+1} \cdot C_{i,j-i} \cdot C_{i,j-l} > 0,
\end{aligned}$$

da $\mathrm{Cov}^{\mathcal{D}_{j-1}}\left(K_j, K_j\right) = \mathrm{Var}^{\mathcal{D}_{j-1}}\left(K_j\right) = \mathrm{Var}(K_{i+k-1}) = 1$ ist.

(c) *[6 Punkte]* Die Zufallsvariable K_j beschreibt den Eintritt eines Kalenderjahreseffekts im Kalenderjahr j. $K_j = 0$ bedeutet, dass kein Kalenderjahreseffekt auftritt, $K_j > 0$ bzw. $K_j < 0$ bedingen Kalenderjahreseffekte mit über- bzw. unterduchschnittlichen Abwicklungsfaktoren. K_j is normiert und für alle Anfalljahre gleich und so dient der Parameter ρ_k als Skalierungsgröße im Abwicklungsjahr k um den unterschiedlichen Abwicklungsstadien Rechnung zu tragen.

Durch (K2) wird der CL-Erwartungswert des Abwicklungsfaktors f_k um $\rho_k \cdot K_{i+k-1}$ korrigiert und so der Kalenderjahreseffekt erzeugt. Gemittelt über die möglichen Realisierungen von K_{i+k-1} gilt (CL2) mit dem Faktor f_k.

(K3) besagt, dass unter der Annahme, dass K_{i+k-1} bekannt ist, die Varianz um $\rho_k^2 \cdot C_{i,k-1}^2$ geringer ist, als wenn nicht. Dieser Wert ist nötig, damit im Durchschnitt über die Realisierungen von K_{k+i-1} die CL-Annahme (CL3) gilt.

Der erste Teil von (K1) besagt, dass Kalenderjahreseffekte im Kalenderjahr j unabhängig von den Schadenentwicklungen in den vorangehenden Kalenderjahren eintreten. Die Kovarianzaussage ist erheblich schwächer, als die Unabhängigkeitsannahme (CL1). Sie besagt lediglich, dass unter der Kenntnis von K_j, die Schadenentwicklung in diesem Kalenderjahr in verschiedenen Anfalljahren (bedingt) unkorreliert ist.

(d) *[2 Punkte]* Inflationäre Effekte sind Kalenderjahreseffekte, die sich typischerweise über mehrere Kalenderjahre hinweg realisieren. Wegen der Unabhängigkeit von K_j zur vergangenen Schadenabwicklung ist das K-CL-Modell nicht in der Lage, solche Effekte abzubilden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 8 (Bedingter mittlerer quadratischer Prognosefehler) [27 Punkte]

(a) *[7 Punkte]* Die Umformung

$$\mathrm{mse}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X}) = \mathrm{E}^{\mathcal{Z}}\left((X-\widehat{X})^2\right) = \mathrm{E}^{\mathcal{Z}}\left(\left(X-\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X)+\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X)-\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X})+\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X})-\widehat{X}\right)^2\right)$$

liefert durch ausquadrieren die Terme

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}\left(\left(X-\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X)\right)^2\right) &= \mathrm{Var}^{\mathcal{Z}}(X)\\
\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}\left(\left(\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X)-\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X})\right)^2\right) &= \left(\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X)-\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X})\right)^2\\
\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}\left(\left(\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X})-\widehat{X}\right)^2\right) &= \mathrm{Var}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X})\\
\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}\left(2\cdot\left(X-\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X)\right)\cdot\left(\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X)-\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X})\right)\right) &= 0\\
\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}\left(2\cdot\left(X-\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X)\right)\cdot\left(\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X})-\widehat{X}\right)\right) &= -2\cdot\mathrm{Cov}^{\mathcal{Z}}(X,\widehat{X})\\
\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}\left(2\cdot\left(\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X)-\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X})\right)\cdot\left(\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X})-\widehat{X}\right)\right) &= 0
\end{aligned}$$

und damit die Darstellung

$$\mathrm{mse}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X}) = \mathrm{Var}^{\mathcal{Z}}(X) + (\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(X)-\mathrm{E}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X}))^2 + \mathrm{Var}^{\mathcal{Z}}(\widehat{X}) - 2\,\mathrm{Cov}^{\mathcal{Z}}(X,\widehat{X})$$

als Summe von Zufallsfehler, quadriertem Bias, Schätzfehler und Kovarianzterm.

(b) *[4 Punkte]* Der Zufallsfehler beschreibt die zufälligen Schwankungen des Schadenstands $C_{i,n}$. Wegen der Unabhängigkeitsbedingung (CL1) des CL-Modells ist dabei

$$\mathrm{Var}^{\mathcal{A}_i}(C_{i,n}) = \mathrm{Var}^{\mathcal{D}}(C_{i,n}).$$

Dieser Term beschreibt die Schwankung in zukünftigen Kalenderjahren und ist daher für die CL-Reservebewertung die relevante Größe. Im unbedingten Fall kann der Zufallsfehler $\mathrm{Var}(C_{i,n})$ erheblich höher ausfallen, da er die Schwankung der gesamten Abwicklung abbildet.

(c) *[4 Punkte]* In den Fällen $\mathcal{Z} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{Z} = \mathcal{A}_i$ verschwindet der quadrierte Bias, da der CL-Schätzer $\widehat{C}_{i,n}$ (bedingt) erwartungstreu ist. Im Fall $\mathcal{Z} = \mathcal{D}$ hingegen ist

$$\mathrm{E}^{\mathcal{D}}(\widehat{C}_{i,n}) = \widehat{C}_{i,n},$$

da der Schätzer sich aus den Beobachtungen berechnet, d.h. der Schätzer wird als gegeben betrachtet. Da aus dem gleichen Grund zudem

$$\mathrm{Var}^{\mathcal{D}}(\widehat{C}_{i,n}) = 0 \quad \text{und} \quad -2\,\mathrm{Cov}^{\mathcal{D}}(C_{i,n},\widehat{C}_{i,n}) = 0$$

gilt, reflektiert der quadrierte Bias den gesamten Prognosefehler außerhalb der zufälligen zukünftigen Abwicklung.

(d) *[4 Punkte]* Siehe oben für den Fall $\mathcal{Z} = \mathcal{D}$. In den Fällen $\mathcal{Z} = \{\emptyset, \Omega\}$ und $\mathcal{Z} = \mathcal{A}_i$ beschreibt der Schätzfehler die zufällige Schwankung des Schätzers, einmal unbedingt für seine gesamte Abwicklung und einmal nur für denjenigen Teil der Abwicklung des Schätzers, welcher für die Schätzung der zukünftigen Abwicklung von $C_{i,n}$ (also nach dem aktuellen Kalenderjahr) relevant ist. Wie beim Zufallsfehler gilt, dass nur dieser Teil für die CL-Reservebewertung von Bedeutung ist und dass im unbedingten Fall der Schätzfehler $\mathrm{Var}(\widehat{C}_{i,n})$ erheblich höher ausfallen kann, da er die Schwankung der gesamten Abwicklung abbildet.

(e) *[4 Punkte]* In den Fällen $\mathcal{Z} = \mathcal{A}_i$ und $\mathcal{Z} = \mathcal{D}$ verschwindet der Kovarianzterm, da der Schadenstand $C_{i,n}$ und der CL-Schätzer $\widehat{C}_{i,n}$ jeweils bedingt unkorreliert sind. Im Fall $\mathcal{Z} = \{\emptyset, \Omega\}$ hingegen, sind der Schadenstand $C_{i,n}$ und der CL-Schätzer $\widehat{C}_{i,n}$ über den aktuellen Stand der Diagonale positiv korreliert, da $C_{i,n-i+1}$ in beiden enthalten ist. Diese Korrelation ist aber für die CL-Reservebewertung irrelevant.

(f) *[4 Punkte]* Wie in den obigen Ausführungen gesehen, ist der unbedingte quadratische Prognosefehler, den $\mathrm{mse}(\widehat{C}_{i,n})$ beschreibt, nicht für die CL-Reservebewertung geeignet, da er die bisher beobachtete Abwicklung des Anfalljahres i ignoriert.

Der quadratische Prognosefehler $\mathrm{mse}^{\mathcal{D}}(\widehat{C}_{i,n})$ wäre die bevorzugte Fehlergröße, da alle Beobachtungen berücksichtigt würden und damit im quadratischen Bias auch erfasst würde, ob der Schätzer zufällig gut oder zufällig schlecht ist. Diese Fehlergröße kann aber aus den vorhandenen Daten nicht geschätzt werden.

Um eine Schätzung zur Hand zu haben, wird über beobachtete Realisierungen gemittelt, das heißt, sie werden als zufällig und nicht als beobachtet betrachtet. Dies wird durch die kleinere Bedingung $\mathcal{Z} = \mathcal{A}_i$ erreicht, in der alles als beobachtet gilt, was die zukünftige Abwicklung des Anfalljahres i beeinflusst und alles als zufällig gilt, was in den für die Zukunft relevanten Teil des Schätzers eingeht.

Zusatzbemerkung: Die Ausführung im letzten Absatz legt die Bedingung $\mathcal{A}_i$ nicht eindeutig fest. Ebenso könnte

$$\mathcal{B}_{n-i+1} = \sigma\{C_{i,k} \,|\, i + k - 1 \leq n, k \leq n - i + 1\}$$

oder auch nur $\sigma\{C_{i,n-i+1}\}$ verwendet werden.