DAV
Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

Schriftliche Prüfung im Fach

Schadenversicherung I

gemäß Prüfungsordnung 6
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 29. Mai 2026

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 12 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.
- Alle Antworten sind in deutscher Sprache zu erstellen (fremdsprachige Fachbegriffe ausgenommen).

Mitglieder der Prüfungskommission:

Alexej Brauer
Dr. Florian Leitenstorfer
Marc Linde
Dr. Ulrich Riegel
Dr. Gerhard Quarg

Teil I – Tarifierung [80 Punkte]

Aufgabe 1. *[Grundlegendes und Daten] [17 Punkte]*

(a) *Grundlegendes [12 Punkte]*:

(i) *[5 Punkte]* Erklären Sie kurz die Begriffe technische Prämie und kommerzielle Prämie und nennen Sie drei mögliche Gründe dafür, dass die technische Prämie sich von der kommerziellen Prämie unterscheidet.

(ii) *[7 Punkte]* Aktuare bewegen sich in einem komplexen Umfeld, in dem verschiedene Faktoren berücksichtigt werden müssen. Benennen Sie drei interne und vier externe Rahmenbedingungen, die bei der Tarifentwicklung relevant sind.

(b) *Datenbeschaffung [5 Punkte]*: Im Rahmen der Datenaufbereitung für die Tarifentwicklung werden Schäden üblicherweise in drei Kategorien unterteilt: Basisschäden, Großschäden und NatCat-Schäden. Definieren Sie kurz diese drei Begriffe und erläutern Sie das wesentliche Unterscheidungsmerkmal zwischen Basisschäden und NatCat-Schäden im Hinblick auf die Datenbeschaffung.

Aufgabe 2. *[Feature Engineering und Credibility] [25 Punkte]*

(a) *Clusteranalyse [4 Punkte]*: Nennen Sie vier wesentliche Ziele der Klassenbildung.

(b) *Gewichtungsverfahren [14 Punkte]*:

(i) *[7 Punkte]* Für zwei Tarifmerkmale x_1 mit Ausprägungen $k \in \{1, \dots, K\}$ und x_2 mit Ausprägungen $l \in \{1, \dots, L\}$ bezeichne $SB^M_{k,l}$ den Schadenbedarf und $w^M_{k,l}$ das Gewicht (Jahreseinheiten) des Marktes für die Tarifmerkmalskombination $(x_1, x_2) = (k, l)$. Analog bezeichne $SB^{VU}_{k,l}$ den Schadenbedarf und $w^{VU}_{k,l}$ das Gewicht eines Versicherungsunternehmens (VU) für diese Tarifmerkmalskombination.

Formulieren Sie für den oben beschriebenen zweidimensionalen Fall die beiden Gewichtungsverfahren:

- Gewichtung mit dem individuellen Bestand und
- Gewichtung mit dem Gesamtbestand.

Geben Sie die entsprechenden Formeln an und benennen Sie die dabei verglichenen Kennzahlen (insbesondere den Gesamt-Schadenbedarf des VU SB^{VU} bzw. des Marktes SB^M und die jeweils gewichteten Schadenbedarfe).

(ii) *[7 Punkte]* Es seien die in der folgenden Tabelle dargestellten Bestandsverteilungen und zugehörigen Kraftfahrzeug-Haftpflicht Schadenbedarfe für ein Versicherungsunternehmen (VU) und den Markt gegeben.

Versicherungsunternehmen		
Fahrzeugart	Jahreseinheiten	Schadenbedarf
Busse	10	10000
Lkw über 3,5t (Werk & Güter)	140	700
Zugmaschinen (Werk & Güter)	500	1455
Landw. Zugmaschinen	350	190
Gesamt	1000	992

Markt		
Fahrzeugart	Jahreseinheiten	Schadenbedarf
Busse	1500	1600
Lkw über 3,5t (Werk & Güter)	3000	800
Zugmaschinen (Werk & Güter)	9000	1500
Landw. Zugmaschinen	6500	200
Gesamt	20000	980

Ermitteln Sie den gewichteten Schadenbedarf des VU unter Verwendung der Gewichtung nach dem Gesamtbestand. Wie fällt der Vergleich für Sie zwischen dem Versicherungsunternehmen und dem Markt aus. Diskutieren Sie das daraus resultierende Ergebnis und leiten Sie daraus Schlussfolgerungen für die Eignung dieses Verfahrens ab.

(c) *Credibility-Verfahren [7 Punkte]*: Es sei $E(Y)$ die Schadenerwartung des Kollektivs, $\overline{Y}_i$ die beobachtete mittlere Schadenerwartung des Risikos i und

$$z_i = \frac{w_{i,\bullet}}{w_{i,\bullet} + \frac{\sigma^2}{\tau^2}}$$

der Credibility-Faktor des Risikos i. Schreiben Sie die Credibility-Prämie im Bühlmann-Straub-Modell auf und interpretieren Sie kurz die Terme $w_{i,\bullet}$, σ^2 und τ^2 im Credibility-Faktor. Wann fällt bei der Credibility-Prämie die Schadenerwartung des Kollektivs $E(Y)$ stärker ins Gewicht?

Aufgabe 3. *[Regression] [38 Punkte]*

(a) *[GLM] [20 Punkte]*

Im *Generalisierten Linearen Modell (GLM)* wird gefordert, dass die Verteilung der Responsevariablen y_i einem Mitglied der *Exponential Dispersion Family (EDF) (häufig auch nur exponentielle Familie bezeichnet)* folgt, d.h. es gilt

$$y_i|\theta_i \overset{iid}{\sim} f(y_i;\theta_i,\phi,w_i) = \exp\left\{\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{\phi}w_i + c(y_i;\phi,w_i)\right\}.$$

Im Folgenden nehmen wir für das Exposure vereinfachend $w_i \equiv 1$ an.

(i) *[8 Punkte]* Die (diskrete) Dichte der *Bernoulliverteilung* (Binomialverteilung mit $n = 1$) ist gegeben durch

$$f(y_i|\pi_i,\phi) = \pi_i^{y_i}(1-\pi_i)^{1-y_i},$$

wobei $y_i \in \{0,1\}$. Zeigen Sie, dass die *Binomialverteilung* zur *exponentiellen Familie* gehört. Geben Sie dabei explizit θ_i, $b(\theta_i)$, ϕ und $c(y_i;\phi)$ an.

(ii) *[12 Punkte]* Leiten Sie für die *Bernoulliverteilung* aus den Bestimmungen zur Funktion $b(.)$ sowie ϕ Erwartungswert $E(y_i) = \mu_i$, Varianz $\mathrm{Var}(y_i)$ sowie die natürliche (kanonische) Link-Funktion im GLM-Kontext her.

(b) *Fallstudie Beitragsanpassung [18 Punkte]*:

Bei der *Bamberg-Rosenheimer Versicherungs-AG (BRV)* liegen im Aktuariat historische Daten zum Stornoverhalten in der Kraftfahrtversicherung vor. Für n Policen wurde dabei als dichotome Responsevariable `storno` $\in \{0,1\}$, wobei 1 die Stornierung der Police bedeutet, erhoben mit den Einflussgrößen bap (Anpassungssätze als Skalar), zws (Zahlungsweise), sowie `vertriebsweg`. Ein `summary` der Daten im Softwarepaket R ergibt folgendes Bild:

```
     storno           bap             vertriebsweg                  zws
 Min.   :0.000   Min.   :0.0002473   AO    :87045   01_jährlich       :79828
 1st Qu.:0.000   1st Qu.:0.0491827   Direkt:36143   02_halbjährlich   :21528
 Median :0.000   Median :0.0825104   Makler:21812   04_vierteljährlich:14547
 Mean   :0.136   Mean   :0.0925768                  12_monatlich      :29097
 3rd Qu.:0.000   3rd Qu.:0.1274564
 Max.   :1.000   Max.   :0.2499904
```

(i) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie mit Hilfe der Informationen des `summary` die *Anzahl n der Policen*, die Stornorate in diesem Datensatz, sowie die *durchschnittliche Höhe* der bap.

(ii) *[2 Punkte]* Wie würden Sie die Verteilung der Anpassungshöhe bap charakterisieren? Handelt es sich eher um eine linkssteile (=rechtsschiefe), symmetrische oder rechtssteile (=linksschiefe) Verteilung? Begründen Sie ihre Antwort kurz.

Die Aktuare der *BRV* entscheiden sich für Modellierung des `storno` mit einem *logistischen generalisierten linearen Modell (GLM)*, wobei die stetige Einflussvariable bap mit einem Polynom zweiten Grades parametrisiert wird. Der Output aus R resultiert wie folgt:

```
Call:
glm(formula = storno ~ bap + I(bap^2) + vertriebsweg + zws, family = binomial(link = logit),
    data = data_storno)

Coefficients:
                      Estimate Std. Error z value Pr(>|z|)
(Intercept)            -4.03       0.03610 -111.69   <2e-16 ***
bap                    17.87       0.58097   30.76   <2e-16 ***
I(bap^2)              -23.30       2.23837  -10.41   <2e-16 ***
vertriebswegDirekt      1.02       0.01805   56.98   <2e-16 ***
vertriebswegMakler      0.77       0.02201   35.19   <2e-16 ***
zws02_halbjährlich      0.34       0.02287   15.22   <2e-16 ***
zws04_vierteljährlich   0.43       0.02616   16.68   <2e-16 ***
zws12_monatlich         0.36       0.02046   17.67   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for binomial family taken to be 1)

    Null deviance: 115314  on 144999  degrees of freedom
Residual deviance: 103490  on 144992  degrees of freedom
AIC: 103506

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

(iii) *[7 Punkte]* Berechnen Sie mit Hilfe des obigen Modell-Outputs *Prognosen* für die Stornowahrscheinlichkeit der Police des Kunden Ferdinand Weitel, unter der Annahme dass eine *halbjährliche* Zahlungsweise (`zws`) vereinbart ist, sowie für den `vertriebsweg` die Ausprägung A0 vorliegt, für eine BAP-Höhe von 0%, 10% und 20%.
Hinweis: Die Response-Funktion im logistischen GLM ist gegeben durch $h(\eta) = \frac{1}{1+\exp(-\eta)}$, Rundung auf 2 Nachkommastellen.

(iv) *[5 Punkte]* Im Aktuariat wird für die Police des Herrn Weitel eine *Projektion des Beitrags (BE)* von 700 EUR für das Folgejahr ermittelt (ohne weitere Maßnahmen), sowie eine *technische Prämie (TP)* von 755 EUR. Berechnen Sie mit Hilfe der Resultate aus der Teilaufgabe *(iii)* den erwarteten Profit für diese Police unter Annahme einer BAP-Höhe von 0%, 10% und 20%. Wir gehen dabei von der vereinfachten Annahme aus, dass diese Police

(im Falle der akzeptierten BAP) das ganze Folgejahr läuft und zum 01.01. beginnt, sowie keine weiteren Änderungen daran vorgenommen werden.
Hinweis: Rundung auf 2 Nachkommastellen. Falls Sie Teilaufgabe *(iii)* nicht lösen konnten, nehmen sie folgende Stornowahrscheinlichkeiten an:
$P(\text{Storno}|\text{BAP} = 0\%) = 0,03$,
$P(\text{Storno}|\text{BAP} = 10\%) = 0,10$,
$P(\text{Storno}|\text{BAP} = 20\%) = 0,25$.

Teil II – Rückversicherung [100 Punkte]

Aufgabe 4. *[Rückversicherungsprogramm] [37 Punkte]*

Ein Erstversicherer hat für sein Sach-Portefeuille folgende Rückversicherungsverträge abgeschlossen:

- Summenexzedent:
  - Maximum 1.000, Anzahl der Maxima: 9
  - Provision: 5%
  - Gewinnanteil: 50% nach 4% Verwaltungskosten
  - Verlustvortrag bis Tilgung, aktueller Verlustvortrag: 50
- Schadenexzedent 800 xs 200 pro Risiko auf den Summenexzedenten-Selbstbehalt:
  - eine bezahlte Wiederauffüllung zu 100% prc
  - Upfront-Prämie: 2% des GNPI
- Ereignisschaden-Stop Loss 3.000 xs 1.000 auf den Selbstbehalt von Summenexzedent und Schadenexzedent pro Risiko:
  - Ereignisschadengrenze: 500
  - Prämie: 2% des GNPI

Nach einem Jahr, das durch die Stürme Cäsar und Dora betroffen ist, stellt sich die Schadensituation wie folgt dar:

Band Nr.	Bandgrenzen von	bis	mittlere VS	Anzahl Risiken	Prämie	Schaden gesamt	davon Schaden aus Cäsar	Dora
1	0	500	250	8.000	10.000	7.200	800	400
2	500	1000	750	4.000	16.000	12.000	400	600
3	1000	1500	1.250	960	8.000	7.200	1.000	200
4	1500	3000	2.000	232	4.000	3.200	120	280
5	3000	7500	5.000	40	2.000	1.600	100	100
Summe				13.232	40.000	31.200	2.420	1.580

Hierin enthalten sind folgende Einzelschäden > 200:

Datum	VS	Schadenhöhe	Bemerkung
14.02.	1.250	750	Cäsar
11.05.	5.000	1.200	Feuer
02.08.	750	500	Dora
07.12.	1.250	750	Feuer

Neben Cäsar und Dora sind keine weiteren Kumulschäden eingetreten.

(a) *[10 Punkte]* Erläutern Sie, weshalb ein solches Rückversicherungsprogramm zum Schutz eines Sach-Portefeuilles zweckmäßig ist. Gehen Sie hierbei auf die risikotechnische Funktion der einzelnen Verträge innerhalb des Programms ein.
Halten Sie ein solches Programm auch bei einem Haftpflicht-Portefeuille für sinnvoll? Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) *[27 Punkte]* Berechnen Sie für alle drei Verträge Prämien, Schäden und externe Kosten des Rückversicherers. Wie hoch ist das technische Ergebnis des Rückversicherers für das gesamte Rückversicherungsprogramm?

Aufgabe 5. *[Stabilisierungsklausel] [20 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Erläutern Sie den Unterschied zwischen einer APK10 und einer SIC30.

(b) *[16 Punkte]* Wir betrachten nun einen Schadenexzedenten 6.000 xs 4.000 für das Anfalljahr 2021. Es sei eine APK10 mit Indexbasis 2020 vereinbart. Zur Stabilisierung wird hierbei folgender Index verwendet:

I_{2020}	I_{2021}	I_{2022}	I_{2023}	I_{2024}	I_{2025}
100	105	109	113	118	121

Berechnen Sie für folgenden Schaden aus 2021 die stabilisierten Deckungen sowie kumulierte Schadenzahlungen und Reserven im XL für die Jahre 2021 bis 2025:

	2021	2022	2023	2024	2025
Kumulierte Zahlungen	2.000	4.000	6.000	7.000	12.000
Reserve	7.000	5.000	4.000	4.000	0
Schadenaufwand	9.000	9.000	10.000	11.000	12.000

Aufgabe 6. *[Feuer-Exposurequotierung] [28 Punkte]*

Wir betrachten ein Feuer-Risiko mit Gesamtversicherungssumme $v = 100.000$. Ein Erstversicherer (EV) zeichnet folgende Beteiligungen an einem gelayerten Programm für dieses Risiko:

Layer Nr. i	Haftung c_i (für 100%)	Priorität d_i (für 100%)	Anteil σ_i des EV	Prämie p_i für den Anteil des EV
1	20.000	10.000	40%	80
2	30.000	30.000	50%	50
3	40.000	60.000	20%	15

Wir betrachten nun einen XL pro Risiko 20.000 xs 10.000, in den der EV das Risiko einbringt.

(a) *[10 Punkte]* Bestimmen Sie die Haftungsabschnitte c_i^{RV} xs d_i^{RV}, die der Rückversicherungslayer am Originalrisiko deckt.

(b) *[18 Punkte]* Führen Sie eine Feuer-Exposurequotierung für den XL durch. Verwenden Sie hierbei eine Schadenquote von 70% und die Exposurekurve

$$G(x) = \log_2(1 + x), \quad x \in [0, 1].$$

Hierbei können Sie wie folgt vorgehen:

- Nehmen Sie an, dass Sie die Prämie p_{total} für das komplette Risiko (also für 100% des Risikos mit Versicherungssumme v und einer Priorität von null) kennen.
- Verwenden Sie p_{total} und die Versicherungssumme v um Feuer-Exposurequotierungen für die Layer c_i xs d_i sowie die Layer c_i^{RV} xs d_i^{RV} durchzuführen und berechnen Sie die Verhältnisse

$$\pi_i := \frac{\text{Ergebnis für } c_i^{\text{RV}} \text{ xs } d_i^{\text{RV}}}{\text{Ergebnis für } c_i \text{ xs } d_i}$$

  (hier kürzt sich p_{total} raus).
- Das Verhältnis π_i gibt an, welchen prozentualen Anteil der RV am erwarteten Schaden des EV im Layer c_i xs d_i trägt.

Aufgabe 7. *[Finanzrückversicherung] [15 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Geben Sie die drei Kriterien an, durch die FinRe in §167 VAG definiert wird.

(b) *[4 Punkte]* Es seien $\hat{P}_{disc}, \hat{E}_{disc}, \hat{S}_{disc}$ die diskontierten Prämien, externen Kosten und Schäden des Rückversicherers. Geben Sie zwei verschiedene Definitionen des Expected Reinsurer's Deficit (ERD) an.

(c) *[5 Punkte]* Nennen Sie fünf Beispiele für Vertragsstrukturen, die potentiell auf FinRe hindeuten könnten.

Lösungshinweise

Aufgabe 1. *[Grundlegendes und Daten] [17 Punkte]*

Zu (a) (i) [5 Punkte]: Die präziseste, aktuariell korrekteste Prämie gemäß dem Äquivalenzprinzip wird als *technische Prämie* bezeichnet und unterscheidet sich von der tatsächlichen *kommerziellen Prämie*, die der Versicherungsnehmer entrichten muss. Differenzen zwischen der technischen und der kommerziellen Prämie können zum Beispiel auf folgende Gründe zurückzuführen sein:

- Regulatorische Vorgaben: Im Allgemeinen werden bei der Ermittlung der technischen Prämie alle relevanten Informationen berücksichtigt. Im Unterschied dazu könnte die kommerzielle Prämie ungenauer sein, da sie nur auf gesetzlich zulässigen Risikofaktoren (z. B. Ausschluss des Merkmals Geschlecht) beruht.
- IT: IT-technische Begrenzungen können ebenfalls dazu führen, dass bestimmte Faktoren am Point of Sale nicht zur Verfügung stehen und somit in der kommerziellen Prämie nicht berücksichtigt werden können.
- Wirtschaftlichkeit: Des Weiteren können wirtschaftliche Überlegungen dazu führen, vom technischen Preis abzuweichen, etwa um bei den Neukundenpreisen das Preisniveau des Marktes zu berücksichtigen.

Zu (a) (ii) [7 Punkte]: Mögliche Antworten wären unter anderem:

- Interne Rahmenbedingungen:
  - Unternehmensstrategie: Zielgruppenorientierung der Produkte/Preise
  - Unternehmensstrategie: Kombiprodukte (z. B. privates Wohngebäude, Hausrat, Haftpflicht)
  - Statistisch: Verfügbarkeit und Format der Daten
  - Statistisch: Angaben der Kunden (unklare Merkmale)
  - Statistisch: IT-Infrastruktur, Software
  - Produkte: Vertragsbedingungen, Tarifgenerationen, Nachfrage
  - Produkte: Akzeptanz, Verständlichkeit
- Externe Rahmenbedingungen:
  - Politisch: Gesetzgebung, EU-Erweiterung (erleichterter Zugang zu neuen Märkten)
  - Politisch: Corporate Social Responsibility

- Politisch: Sanktionen/Embargos
- Wirtschaftlich: Konjunktur (Neuwagenverkauf, Benzinpreise mit Einfluss auf Fahrleistung, Bautätigkeit)
- Wirtschaftlich: Versicherungszyklen, Wettbewerb
- Wirtschaftlich: Auswirkungen von Wirtschaftskrisen, Zinsniveau, Inflation
- Juristisch: Merkmale für Tarifierung (VAG, VVG, AGG), Datenschutz (EU-DSGVO)
- Juristisch: Kfz-PflVersG, Wettbewerbsrecht, Antikorruptionsgesetze, Geldwäsche/Terrorismusfinanzierung
- Juristisch: BaFin-Aufsicht (Solvency II), Vers. Steuer
- Kunde: Kundengruppen-Segmente (Internetaffinität, Wechselbereitschaft, Preisorientierung und/oder Leistungsorientierung)
- Kunde: Einstellung zum Risiko und zur Versicherung
- Kunde: Einstellung zum Datenschutz (z. B. bei Telematik)
- Institutionen: EIOPA & BaFin, Kartellbehörden
- Institutionen: GDV, Statistisches Bundesamt
- Äußere Einflüsse: Naturkatastrophen, Pandemien, Wettertrends, Klimawandel
- Äußere Einflüsse: Technologische Entwicklungen (Kfz-Technik, eCall, Telematik, Sicherheitstechnik, Materialien beim Hausbau)

Zu (b) [5 Punkte]: Eine mögliche Antwort wäre:

- **Basisschäden:** Schäden unterhalb eines definierten Schwellenwerts, die regelmäßig auftreten und ein relativ stabiles Muster zeigen. Sie lassen sich in der Regel gut mit internen Schadendaten modellieren.
- **Großschäden:** Schäden oberhalb eines definierten Schwellenwerts mit hohem Einzelschaden und geringer Häufigkeit. Sie können bei ausreichend langer Datenhistorie noch auf Basis interner Daten modelliert werden, erfordern aber besondere Beachtung.
- **NatCat-Schäden:** Schäden aus Naturkatastrophen (Extremereignisse), die typischerweise selten auftreten und sich mit internen Daten allein nicht adäquat modellieren lassen.

Das wesentliche Unterscheidungsmerkmal zwischen Basis- und NatCat-Schäden in der Datenbeschaffung: Basisschäden können überwiegend aus internen historischen Bestands- und Schadendaten gewonnen und modelliert werden, während NatCat-Schäden in der Regel eine Ergänzung durch externe Daten und Spezialmodelle (z. B. NatCat-Modelle von Rückversicherern) erfordern, da die internen Daten nicht hinreichend repräsentativ sind.

Aufgabe 2. *[Feature Engineering und Credibility] [25 Punkte]*

Zu (a) [4 Punkte]: Beispiele für die Ziele der Klassenbildung wären:

- Gruppierung eines Tarifmerkmals (z. B. Regionalklassen) in möglichst homogene und klar getrennte Klassen
- Interne Homogenität: möglichst ähnliche Risiken innerhalb der Klassen
- Externe Heterogenität: Maximierung der Varianz bzw. Information zwischen den Klassen (Trennschärfe)
- Zeitliche Stabilität: weniger Umstufungen bei dynamischen Zuordnungen
- Verständlichkeit: deutliche Prämienunterschiede rechtfertigen die Klasseneinteilung
- Praktikabilität: Übersichtlichkeit durch Parameterreduktion in der Kalkulation (fördert zudem die Stabilität)

Zu (b) (i) [7 Punkte]: Der Schadenbedarf des Versicherungsunternehmens und des Marktes entsprechen:

$$SB^{VU} = \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} SB^{VU}_{k,l} \cdot w^{VU}_{k,l}}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} w^{VU}_{k,l}} \qquad \text{bzw.} \qquad SB^{M} = \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} SB^{M}_{k,l} \cdot w^{M}_{k,l}}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} w^{M}_{k,l}}.$$

Bei der Gewichtung mit dem individuellen Bestand werden die Kennzahlen (hier Schadenbedarfe) aus einer externen Datenquelle (hier Marktdaten) $SB^{M}_{k,l}$ verwendet und mit den beobachteten Bestandsgewichten $w^{VU}_{k,l}$ des jeweiligen Versicherungsunternehmens kombiniert. Die Formel für die Gewichtung mit dem individuellen Bestand lautet somit:

$$SB^{indiv}_{gew} = \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} SB^{M}_{k,l} \cdot w^{VU}_{k,l}}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} w^{VU}_{k,l}}.$$

Anschließend wird der Schadenbedarf des Versicherungsunternehmens SB^{VU} mit dem gewichteten Schadenbedarf SB^{indiv}_{gew} verglichen.

Die Gewichtung mit dem Gesamtbestand hingegen nutzt die bestandsindividuellen Kennzahlen $SB_{k,l}^{VU}$ des Versicherungsunternehmens und kombiniert diese mit den Gewichten (Jahreseinheiten) $w_{k,l}^{M}$ aus der externen Datenquelle. Die Formel für die Gewichtung mit dem Gesamtbestand lautet somit:

$$SB_{gew}^{gesamt} = \frac{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} SB_{k,l}^{VU} \cdot w_{k,l}^{M}}{\sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L} w_{k,l}^{M}}.$$

Anschließend wird der Schadenbedarf des Marktes SB^{M} mit dem gewichteten Schadenbedarf SB_{gew}^{gesamt} verglichen.

Zu (b) (ii) [7 Punkte]: Der Schadenbedarf des VU unter Verwendung der Gewichtung nach dem Gesamtbestand beträgt:

$$SB_{gew}^{gesamt} = \frac{10000 \cdot 1500 + 700 \cdot 3000 + 1455 \cdot 9000 + 190 \cdot 6500}{1500 + 3000 + 9000 + 6500} = 1571,5.$$

Das Ergebnis zeigt, dass der gewichtete Schadenbedarf des VU ($SB_{gew}^{gesamt} = 1571,5$) deutlich über dem Schadenbedarf des Marktes ($SB^{M} = 980$) liegt. Zu beachten ist dabei, dass der sehr hohe Schadenbedarf für Busse ($SB_{1}^{VU} = 10.000$) im VU bei nur wenigen Jahreseinheiten ($w_{1}^{VU} = 10$), etwa infolge eines Großschadens, das Ergebnis stark beeinflusst, weil dieser hohe Schadenbedarf mit dem hohen Gewicht des Marktes für Busse ($w_{1}^{M} = 1500$) multipliziert wird. Dies verdeutlicht eine Schwäche der Gewichtung mit dem Gesamtbestand: Diese Methode ist nicht robust gegenüber Ausreißern.

Zu (c) [7 Punkte]: Die Credibility-Prämie im Bühlmann-Straub-Modell ist definiert als:

$$Cred_i = z_i \cdot \overline{Y}_i + (1 - z_i) \cdot E(Y),$$

Interpretationen:

- $w_{i,\bullet}$ kann als Menge an Informationen zum Risiko i interpretiert werden (Summe der Gewichte).
- $\sigma^2 = E(\sigma^2(\Theta))$ kann als erwartete Varianz des individuellen Risikos i interpretiert werden.
- $\tau^2 = Var(\mu(\Theta))$ kann als Varianz zwischen den individuellen Risiken $i \in 1, \ldots, N$ interpretiert werden.

Bei der Credibility-Prämie $Cred_i$ fällt die die Schadenerwartung des Kollektivs $E(Y)$ stärker ins Gewicht, wenn:

- wenig Informationen zum Risiko i vorliegen ($w_{i,\bullet}$ ist klein).

- die durchschnittliche Unsicherheit innerhalb der Risiken groß ist (σ^2 ist groß).
- sich die Risiken im Kollektiv sich wenig unterscheiden (τ^2 ist klein).

Aufgabe 3. *[Regression] [38 Punkte]*

zu a (i) [8 Punkte]

Es gilt:

$$\begin{aligned} f(y_i;\pi_i,\phi) &= \exp\{\log[f(y_i;\pi_i,\phi)]\} \\ &= \exp\{(y_i\log(\pi_i) - y_i\log(1-\pi_i) + \log(1-\pi_i)\} \\ &= \exp\left\{y_i\log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) + \log(1-\pi_i)\right\}. \end{aligned}$$

Mit $\theta_i = \log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$, $\pi_i = \frac{\exp(\theta_i)}{1+\exp(\theta_i)}$ und damit $\log(1-\pi_i) = -\log(1+\exp(\theta_i))$ erhalten wir $b(\theta_i) = \log\{1+\exp(\theta_i)\}$. Ferner ist $\phi = 1$ und $c(y_i;\phi) = 0$; somit ist bewiesen, dass die Bernoulliverteilung mit der angegebenen Parametrisierung zur exponentiellen Familie gehört.

zu a (ii) [12 Punkte]

Für Erwartungswert und Varianz gilt in diesem Setting

$$E(y_i) = \mu_i = b'(\theta_i) \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(y_i) = \phi b''(\theta_i).$$

Dann folgt mit $b'(\theta_i) = \frac{\exp(\theta_i)}{1+\exp(\theta_i)}$, $b''(\theta_i) = \frac{\exp(\theta_i)}{[1+\exp(\theta_i)]^2}$ (Quotientenregel) und $\phi = 1$

$$E(y_i) = \mu_i = \frac{\exp(\theta_i)}{1+\exp(\theta_i)} \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(y_i) = \frac{\exp(\theta_i)}{[1+\exp(\theta_i)]^2}.$$

Einsetzen von $\theta_i = \log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right)$ resultiert in

$$E(y_i) = \mu_i = \pi_i \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(y_i) = \pi_i(1-\pi_i).$$

Für den *natürlichen Link* gilt $\theta_i = \eta_i$, also

$$\theta_i = \log\left(\frac{\pi_i}{1-\pi_i}\right) = g(\pi_i) = \eta_i.$$

Also ist die natürliche Link-Funktion gegeben durch $g(.) = \log\left(\frac{.}{1-.}\right)$ (Logit-Link).

zu b (i) [4 Punkte]

Die Anzahl n der Policen kann man z.B. über die diskrete Kovariable `vertriebsweg` ermitteln:

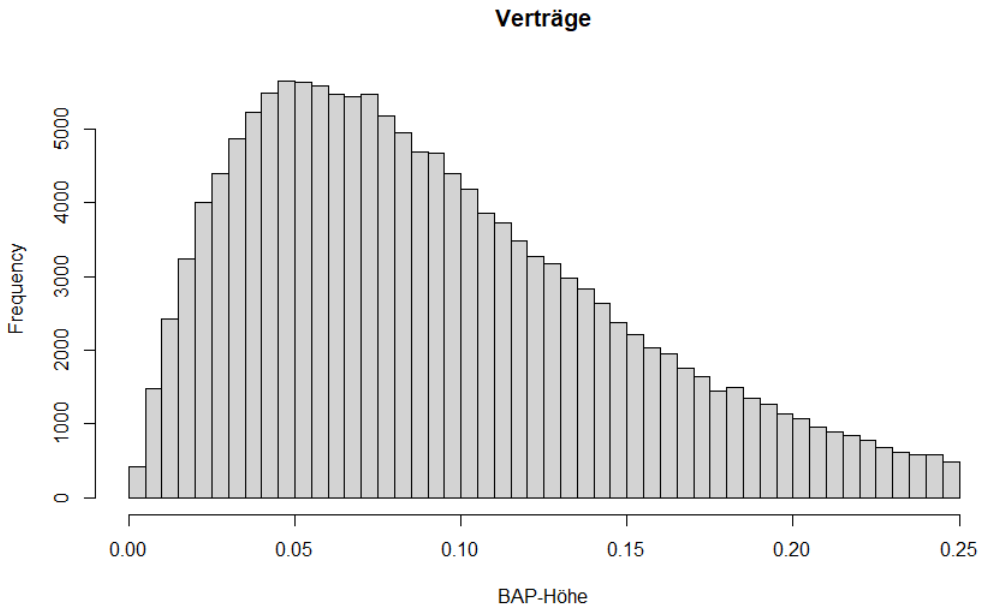
$$n = 87.045(\mathrm{Anzahl}_{\mathrm{AO}}) + 36.143(\mathrm{Anzahl}_{\mathrm{Direkt}}) + 21.812(\mathrm{Anzahl}_{\mathrm{Makler}}) = 145.000.$$

Hinweis: aus den Freiheitsgraden des folgenden `glm`-Outputs ist es auch ersichtlich.

Die Stornorate ist aus dem Mittelwert `mean` der abhängigen Variable `storno` erkennbar und beträge $13,6\%$.
Die durchschnittliche Anpassungshöhe ist aus dem Mittelwert `mean` der Kovariable `bap` ablesbar und beträgt $9,26\%$.

zu b (ii) [2 Punkte]

Da aus dem `summary` ersichtlich ist, dass der Median der Variable `bap` mit $8,25\%$ erkennbar kleiner als der Mittelwert $9,26\%$ ist, weisen die vorliegenden Daten auf eine *linkssteile (=rechtsschiefe)* Verteilung der Anpassungshöhe hin. Ebenso kann man argumentieren, dass der (absolute) Abstand des 1. Quartils zum Median mit ca. $3,3$ %-Punkten geringer ist als zum 3. Quartil mit ca. $4,5$ %-Punkten, was ebenso ein Zeichen für eine linkssteile (rechtsschiefe) Verteilung ist.
Graphisch dargestellt (Histogramm) sieht die Verteilung wie folgt aus:



zu b (iii) [7 Punkte]

Zu berechnen sind zunächst die linearen Prädiktoren für die drei BAP-Szenarien für den Vertrag des Herrn Weitel. Dabei sind die beiden kategorialen Einflussvariablen Dummy-codiert. Für `vertriebsweg` befindet sich der Vertrag in der Referenz-Kategorie, also ist der Beitrag zu η gleich 0. Für die zws haben wir den zur *halbjährlichen Zahlungsweise* gehörigen Beitrag von $0,34$. Also gilt:

$$\eta_{\text{BAK=0\%}} = -4,03(\mathit{Intercept}) + 0,34 = -3,69,$$

$$\eta_{\text{BAK=10\%}} = -4,03 + 17,87 * 0,1 - 23,30 * 0,1^2 + 0,34 = -2,136,$$
$$\eta_{\text{BAK=20\%}} = -4,03 + 17,87 * 0,2 - 23,30 * 0,2^2 + 0,34 = -1,048.$$

Mit der Response-Funktion $h(\eta) = \frac{1}{1+\exp(-\eta)}$ folgt:

$$P(\text{Storno}|\text{BAK} = 0\%) = \frac{1}{1+\exp(3,69)} = 0,0244 \approx 0,02,$$
$$P(\text{Storno}|\text{BAK} = 10\%) = \frac{1}{1+\exp(2,136)} = 0,106 \approx 0,11,$$
$$P(\text{Storno}|\text{BAK} = 20\%) = \frac{1}{1+\exp(1,048)} = 0,260 \approx 0,26.$$

zu b(iv) [5 Punkte]

Der erwartete Profit für die Police des Herrn Weitel ergibt sich allgemein wie folgt:

$$E(\text{Profit}|\text{BAK} = x\%) = P(\text{Retention}|\text{BAK} = x\%)(\text{BE}(1+x\%) - \text{TP}),$$

wobei $P(\text{Retention}|\text{BAK} = x\%) = 1 - P(\text{Storno}|\text{BAK} = x\%)$.

Mit den Resultaten (auf 2 Nachkommastellen gerundet) aus Teilaufgabe *(iii)* folgt also:

$$E(\text{Profit}|\text{BAK} = 0\%) = (1-0,02)(700-755) = -53,90\text{EUR},$$
$$E(\text{Profit}|\text{BAK} = 10\%) = (1-0,11)(700*1,1-755) = 13,35\text{EUR},$$
$$E(\text{Profit}|\text{BAK} = 20\%) = (1-0,26)(700*1,2-755) = 62,90\text{EUR}.$$

Bemerkung: mit den Vorgaben aus der Angabe erhält man folgende Resultate:

$$E(\text{Profit}|\text{BAK} = 0\%) = (1-0,03)(700-755) = -53,35\text{EUR},$$
$$E(\text{Profit}|\text{BAK} = 10\%) = (1-0,10)(700*1,1-755) = 13,50\text{EUR},$$
$$E(\text{Profit}|\text{BAK} = 20\%) = (1-0,25)(700*1,2-755) = 63,75\text{EUR}.$$

Aufgabe 4. *[Rückversicherungsprogramm] [37 Punkte]*

Zu (a): Charakteristisch für die Sachversicherung sind

- inhomogene Versicherungssummen
- hohes Groß- und Totalschadenpotential (Feuer)

- hohes Kumulschadenpotential (Naturgefahren)

Häufig ist hierbei die Annahme plausibel, dass die Schadengrade (d.h. Schadenhöhe in % der Versicherungssumme) aller Risiken näherungsweise identisch verteilt sind. Summenexzedenten sind in der Sachversicherung üblich, da sie unter dieser Annahme das Portefeuille homogenisieren (idealerweise hat man im Selbstbehalt des Summenexzedenten lauter ähnliche Risiken).

Der XL pro Risiko dient dem Schutz vor Großschäden, der Ereignisschaden-Stop Loss dem Schutz vor

- einzelnen größeren Kumulschäden (> 1.000) und
- einer Häufung von kleineren Kumulschäden (> 500).

In den Haftpflichtbranchen ist ein solches Rückversicherungsprogramm in der Regel nicht zielführend. Häufig ist die Annahme plausibel, dass alle Risiken ähnliche Schadenhöhenverteilungen haben, die durch unterschiedliche Versicherungssummen nach oben abgeschnitten werden. Unter dieser Annahme würde ein Summenexzedent eine Inhomogenisierung der Risiken im Selbstbehalt bewirken. Daher sind Summenexzedenten in den Haftpflichtbranchen eher unüblich.

Zu (b): Der Selbstbehalt des Summenexzedenten stellt sich wie folgt dar:

Band Nr.	mittlere VS	Anzahl Risiken	Prämie	Schaden gesamt	davon Schaden aus Cäsar	Dora
1	250	8.000	10.000	7.200	800	400
2	750	4.000	16.000	12.000	400	600
3	1.000	960	6.400	5.760	800	160
4	1.000	232	2.000	1.600	60	140
5	1.000	40	400	320	20	20
Summe		13.232	34.800	26.880	2.080	1.320

Für die Abgabe des Summenexzedenten erhält man:

Band Nr.	mittlere VS	Anzahl Risiken	Prämie	Schaden gesamt	davon Schaden aus Cäsar	Dora
1	0	8.000	0	0	0	0
2	0	4.000	0	0	0	0
3	250	960	1.600	1.440	200	40
4	1.000	232	2.000	1.600	60	140
5	4.000	40	1.600	1.280	80	80
Summe		13.232	5.200	4.320	340	260

Die Provision beläuft sich auf $5\% \cdot 5.200 = 260$, der Gewinn nach Verwaltungskosten und Verlustvortrag auf $5.200 - 4.320 - 5\% \cdot 5.200 - 4\% \cdot 5.200 - 50 = 362$. Es ergibt sich ein Gewinnanteil von $50\% \cdot 362 = 181$. Die externen Kosten des Rückversicherers belaufen sich somit auf $260 + 181 = 441$ (Provision + Gewinnanteil). Wir erhalten ein technisches Ergebnis von

$$5.200 - 4.320 - 441 = 439.$$

Das GNPI für die nichtproportionalen Verträge ist gleich der Selbstbehaltsprämie des Summenexzedenten, d.h. 34.800.

Die RV-Prämie für den XL pro Risiko beläuft sich also auf $2\% \cdot 34.800 = 696$. Externe Kosten fallen beim XL pro Risiko nicht an. Einzelschäden im Summenexzedenten-Selbstbehalt (SX-SB) und Erstattung im XL pro Risiko:

Datum	VS im SX-SB	Schadenhöhe im SX-SB	Erstattung im XL pro Risiko	Bemerkung
14.02.	1.000	600	400	Cäsar
11.05.	1.000	240	40	Feuer
02.08.	750	500	300	Dora
07.12.	1.000	600	400	Feuer
Summe		1.940	1.140	

Der Rückversicherer erhält eine Wiederauffüllungsprämie von

$$\min\left(1; \frac{1.140}{800}\right) \cdot 100\% \cdot 696 = 696.$$

Man erhält ein technisches Ergebnis von

$$696 + 696 - 1.140 = 252$$

für diesen Vertrag.

Selbstbehaltsschäden der Stürme nach Summenexzedent und XL Pro Risiko:

	Schaden im SX-SB	Erstattung im XL pro Risiko	SB-Schaden nach SX und XL pro Risiko	größer als 500
Cäsar	2.080	400	1.680	ja
Dora	1.320	300	1.020	ja
Summe			2.700	

Die Erstattung im Ereignisschaden-Stop Loss beträgt also

$$\min(3.000, (2.700 - 1.000)^+) = 1.700.$$

Die Rückversicherungsprämie für den Ereignisschaden-Stop Loss beläuft sich auf $2\% \cdot 34.800 = 696$. Das technische Ergebnis des Rückversicherers in diesem Vertrag ist somit $696 - 1.700 = -1.004$.

Für das gesamte Rückversicherungsprogramm erhalten wir ein technisches Ergebnis von $439 + 252 - 1.004 = -313$.

Aufgabe 5. *[Stabilisierungsklausel] [20 Punkte]*

Zu (a): Bei der APK10 beginnt man mit der Stabilisierung der Deckung, sobald der Stabilisierungsindex im Vergleich zum Basisindex um mindestens 10% gewachsen ist. Die Schadenzahlungen und Reserven werden dann vom aktuellen Index auf den Basisindex bereinigt. Bei der SIC30 beginnt man mit der Stabilisierung erst dann, wenn der Stabilisierungsindex im Vergleich zum Basisindex um mindestens 30% gewachsen ist. Die Inflationbereinigung findet dann auf $1{,}3 \cdot$ Basisindex statt.

zu (b): Seien $C := 6.000$ und $D := 4.000$. Es bezeichne z_i die inkrementelle Zahlung im Jahr i und r_i die Reserve am Ende des Jahres i, also

i	2021	2022	2023	2024	2025
z_i	2.000	2.000	2.000	1.000	5.000
r_i	7.000	5.000	4.000	4.000	0

Mit

$$f_i := \begin{cases} 1 & \text{falls } \frac{I_i}{I_{2020}} < 1{,}1 \\ \frac{I_{2020}}{I_i} & \text{falls } \frac{I_i}{I_{2020}} \geq 1{,}1 \end{cases} \quad \text{und} \quad F_i := \frac{z_{2021} + \cdots + z_i + r_i}{f_{2021} z_{2021} + \cdots + f_i z_i + f_i r_i}$$

sind dann $C_i^{\text{stab}} := F_i C$ die stabilisierte Haftung und $D_i^{\text{stab}} := F_i D$ die stabilisierte Priorität im Jahr i. Einsetzen liefert

i	2021	2022	2023	2024	2025
f_i	1,000	1,000	0,885	0,847	0,826
F_i	1,000	1,000	1,074	1,099	1,117
C_i^{stab}	6.000	6.000	6.444	6.594	6.702
D_i^{stab}	4.000	4.000	4.296	4.396	4.468

Bringt man kumulierte Zahlungen und Schadenaufwand des Jahres i in die Deckung C_i^{stab} xs D_i^{stab} ein, so erhält man folgende Zahlen für den XL:

	2021	2022	2023	2024	2025
Kumulierte xs-Zahlungen	0	0	1.704	2.604	6.702
xs-Reserve	5.000	5.000	4.000	3.990	0
xs-Schadenaufwand	5.000	5.000	5.704	6.594	6.702

Aufgabe 6. *[Feuer-Exposurequotierung] [28 Punkte]*

(a) Es sei $C := 20.000$ und $D := 10.000$. Im ersten Schritt berechnen wir den Haftungsabschnitt c_i^{RV} xs d_i^{RV}, den der Rückversicherungslayer C xs D am Originallayer c_i xs d_i deckt. Hierzu berechnen wir zuerst die kumulierte Haftung der ersten i Originallayer

$$h_i := \sum_{\nu=1}^{i} \sigma_\nu c_\nu.$$

Falls $D \geq h_i$ oder $C + D \leq h_{i-1}$, so setzen wir $c_i^{\text{RV}} := 0$ und $d_i^{\text{RV}} := 0$. Ansonsten ist

$$c_i^{\text{RV}} = \frac{[\min(C + D, h_i) - \max(D, h_{i-1})]^+}{\sigma_i} \quad \text{und} \quad d_i^{\text{RV}} = d_i + \frac{[D - h_{i-1}]^+}{\sigma_i}.$$

Mit diesen Formeln erhalten wir

Layer Nr. i	Kumulierte Haftung h_i des EV	Haftung c_i^{RV} des RV	Priorität d_i^{RV} des RV
1	8.000	0	0
2	23.000	26.000	34.000
3	31.000	35.000	60.000

(b) Der Anteil π_i des Rückversicherers am Schadenbedarf des i-ten Originallayers berechnet sich als

$$\pi_i = \frac{G\left(\frac{c_i^{\text{RV}} + d_i^{\text{RV}}}{\nu}\right) - G\left(\frac{d_i^{\text{RV}}}{\nu}\right)}{G\left(\frac{c_i + d_i}{\nu}\right) - G\left(\frac{d_i}{\nu}\right)}.$$

Mit $s_i := 70\% \cdot p_i$ erhält man den erwarteten Schaden $\hat{s}_i$ des Rückversicherers aus dem dem i-ten Originallayer mittels $\hat{s}_i = \pi_i \cdot s_i$.

Layer Nr. i	Schadenbedarf s_i des EV	Anteil π_i des RV am erw. Schaden	Erw. Schaden $\hat{s}_i$ des RV
1	56,0	0,0%	0,0
2	35,0	85,4%	29,9
3	10,5	88,7%	9,3
Summe			39,2

Die Exposurequotierung liefert also einen Schadenbedarf von 39,2 für den RV-Layer.

Aufgabe 7. *[Finanzrückversicherung] [15 Punkte]*

Zu (a): In §167 VAG wird FinRe durch drei Kriterien definiert:

- Begrenzter (aber hinreichender) Risikotransfer.
- Verzinsungsfaktoren werden ausdrücklich und in erheblichem Umfang berücksichtigt.
- Durch vertragliche Bestimmungen wird sichergestellt, dass die wirtschaftlichen Ergebnisse zwischen den Vertragsparteien über die Gesamtlaufzeit ausgeglichen werden, um einen gezielten Risikotransfer zu ermöglichen.

Zu (b): Mögliche Definitionen:

- International wird der ERD meist definiert als

$$\text{ERD} := \text{E}\left(\min\left(\frac{\hat{P}_{disc} - \hat{E}_{disc} - \hat{S}_{disc}}{\hat{P}_{disc}}, 0\right)\right).$$

- Die BaFin verwendet in ihrer Auslegungsentscheidung die Formel

$$\text{ERD} := \frac{\text{E}(\min(\hat{P}_{disc} - \hat{E}_{disc} - \hat{S}_{disc}, 0))}{\text{E}(\hat{P}_{disc})}.$$

Zu (c): Potentielle Beispiele für FinRe:

- Proportionaler Vertrag mit marktunüblichen, starken Haftungseinschränkungen
- Aufbau eines verzinslichen Fonds, mit dem die zukünftigen Schadenzahlungen finanziert werden
- Vertrag mit hoher Prämie und 100% Gewinnanteil
- Breite Staffel mit Steigung 100% bei einer Quote
- Rückwirkender Vertragsabschlusszeitpunkt mit geringer risikoexponierter Restlaufzeit
- Mehrjahresverträge mit zusätzlichen verlaufsabhängigen Gestaltungsmerkmalen, z. B. verlaufsabhängige Priorität und/oder Haftung
- Der Risikotransfer des Vertrages wird explizit durch einen anderen Vertrag beeinflusst