DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik I

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 24. Mai 2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Klausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 12 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen (außer es ist in der Aufgabe explizit nicht verlangt). Bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Marc Linde, Dr. Gerhard Quarg,
Dr. Ulrich Riegel, Axel Wolfstein

Teil I – Tarifierung [80 Punkte]

Aufgabe 1 (Erfahrungstarifierung) [26 Punkte]

(a) Bestimmen Sie aus der beigefügten Schadenanzahlverteilung N Schätzwerte für Erwartungswert und Varianz (je auf 5 Stellen gerundet).

Schadenanzahl	Anzahl Risiken
0	105.565
1	12.707
2	1.498
3	203
4	28
Gesamt	120.001

Begründen Sie, ob Poisson-Verteilung oder Negativ-Binomial-Verteilung hier adäquat sind. *[8 Punkte]*

(b) Erläutern Sie die Struktur des Negativ-Binomial-Modells, stellen Sie dies formelmäßig dar und leiten Sie für die negativ-binomial-verteilte Schadenzahl N die Formeln für $\mathrm{P}(N = n)$ und ihren Erwartungswert auf Basis dieser Modellstruktur für den 1-Jahres-Zeithorizont her.

Erläutern Sie, welches Ziel die Substitution bei der Integration zur Bestimmung der Varianz hat im Sinn der Struktur des Integranden und welche Regel dann angewendet werden kann.

Hinweise: Verwenden Sie für die Gamma-Verteilung die Parametrisierung

$$f(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}$$

und beachten Sie, dass für die Gamma-Funktion gilt

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1} e^{-t}\, dt \quad \text{mit} \quad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) \quad \text{und} \quad \Gamma(n+1) = n!$$

$(n = 1, 2, 3, \ldots)$.

Es gilt $\mathrm{E}(N) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(N|Y))$ und $\mathrm{Var}(N) = \mathrm{E}(\mathrm{Var}(N|Y)) + \mathrm{Var}(\mathrm{E}(N|Y))$.

[12 Punkte]

(c) Bei der Erfahrungstarifierung sind der a-priori- und der a-posteriori-Erwartungswert wesentliche Größen. Im Negativ-Binomial-Modell ist der a-priori-Erwartungswert der Zufallsvariable Schadenanzahl N

$$\mathrm{E}(N) = \frac{\alpha}{\beta}$$

und der a-posteriori-Erwartungswert

$$\mathrm{E}(\Lambda|N=n) = \frac{\alpha+n}{\beta+t},$$

wobei Λ die zum Poisson-Parameter gehörige Zufallsvariable und n die beobachtete Schadenanzahl der vergangenen t Jahre ist.

Erläutern Sie die Bedeutung dieser Größen hinsichtlich Aussage und Verwendung. *[6 Punkte]*

Aufgabe 2 (GLM und ML-Schätzung) [28 Punkte]

(a) Gegeben sei die Zähldichte einer negativ-binomial-verteilten Zufallsvariable N

$$\mathsf{P}(N = y) = \frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(y+1)} \left(\frac{\alpha/\mu}{1+\alpha/\mu}\right)^{\alpha} \left(\frac{1}{1+\alpha/\mu}\right)^{y}$$

Zeigen Sie, dass diese Negativ-Binomial-Verteilung zur Exponentialfamilie gehört.

Hinweis: Verwenden Sie als allgemeine Darstellung für die Dichte einer Verteilung aus der Exponentialfamilie folgende Formel

$$f(y;\vartheta,\phi) = C(y,\phi) \cdot \exp\left(\frac{y\vartheta - b(\vartheta)}{\phi}\right)$$

und führen Sie zunächst eine geeignete Transformation der obigen Zähldichte durch. *[12 Punkte]*

(b) Der Erwartungswert einer Verteilung aus der Exponentialfamilie lässt sich anhand eines Terms aus der allgemeinen Darstellung bestimmen. Welcher Term ist das? Berechnen Sie damit den Erwartungswert der Negativ-Binomial-Verteilung.

Hinweis: Das Ergebnis ist einer der beiden Parameter der Negativ-Binomial-Verteilung.

Bestimmen Sie weiterhin die kanonische Link-Funktion $g(\mu)$ der Negativ-Binomial-Verteilung.

Hinweis: Die Link-Funktion ist allgemein identisch mit einem Parameter; welchem? Dieser wiederum ist im Fall der kanonischen Link-Funktion identisch mit einem weiteren Parameter (vgl. (a)). *[8 Punkte]*

(c) Leiten Sie die Maximum-Likelihood-Schätzer für den Parameter μ der Negativ-Binomial-Verteilung aus der Log-Likelihood-Funktion her.

Hinweis: Die Likelihood-Funktion ist das Produkt der Dichten (vgl. (a)) an den Stellen y_i.

Beschreiben Sie qualitativ den Lösungsweg zur Bestimmung des Maximum-Likelihood-Schätzers für den Parameter α. *[8 Punkte]*

Aufgabe 3 (Einführung eines Selbstbehalts in den Tarif) [26 Punkte]

(a) Nehmen Sie an, Sie wollen bei einem Produkt zusätzlich und alternativ einen Selbstbehalt einführen (d.h. der Kunde kann zwischen den Varianten mit bzw. ohne Selbstbehalt wählen). Durch den Selbstbehalt verringert sich die Schadenlast und somit ist das Ziel, durch eine niedrigere Prämie dem Kunden eine ausreichende Deckung zu einem attraktiven Preis anzubieten.

Betrachten Sie die folgende Prioritätenstatistik (Priorität x ist die Summe aus allen Schäden kleiner als x plus von jedem Schaden größer oder gleich x genau der Wert x) und berechnen Sie daraus die maximal mögliche (Annahme: für jeden Schaden gilt der Selbstbehalt) Schadenaufwandsreduktion (in %) durch Einführung eines Selbstbehalts von 100EUR, 500EUR oder 1.000EUR.

Berechnen Sie zunächst in der folgenden Tabelle die fehlende Priorität.

Begründen Sie mit Blick auf die obige Zielsetzung, dass von den drei Selbstbehaltsvarianten nur 500EUR sinnvoll ist.

Größenklasse	Schadenanzahl	Schadenaufwand	Priorität
Bis einschl. 100€	2.500	150.000	1.800.000
Über 100 bis einschl. 500€	3.500	1.250.000	7.900.000
Über 500 bis einschl. 1.000€	6.000	5.000.000	
Über 1.000€	7.000	14.000.000	20.400.000
Gesamt	19.000	20.400.000	20.400.000

[8 Punkte]

(b) Nehmen Sie an, dass der zugrundeliegende Bestand sich aus zwei Risikogruppen (hier vereinfacht als in sich völlig homogen angenommen) mit nachfolgenden Kenngrößen zusammensetzt.

Hinweis: SH = Schadenhäufigkeit, SD = Schadendurchschnitt,
SB = Schadenbedarf

Risikogruppe 1:

Risikenanzahl	Schadenanzahl	Schadenaufwand	SH	SD	SB
50.000	12.000	8.600.000	24%	717	172

Risikogruppe 2:

Risikenanzahl	Schadenanzahl	Schadenaufwand	SH	SD	SB
50.000	7.000	11.800.000	14%	1686	236

Was ist der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Risikogruppen?

Die exakte Schadenbedarfsreduktion bei Einführung eines Selbstbehalts hängt von den jeweiligen Prioritätenstatistiken ab. Aber welche Verteilung auf Schadengrößenklassen je Risikogruppe würden Sie bei diesen Kenngrößen annehmen (bitte qualitativ benennen) und folglich welcher Effekt (bitte qualitativ

bewerten) auf die sich für den gesamten Bestand realisierende Schadenbedarfsreduktion durch Einführung des Selbstbehalts ist zu erwarten, wenn die Wahl des Selbstbehalts über- oder unterdurchschnittlich (im Verhältnis zum jeweiligen Bestandsanteil) in den Risikogruppen erfolgt?

Hinweis: Die maximal mögliche Schadenaufwandsreduktion ist auch die maximal mögliche Schadenbedarfsreduktion. *[8 Punkte]*

(c) Nehmen Sie weiter an, dass für die beiden Risikogruppen folgende Prioritätenstatistiken gelten.

Risikogruppe 1:

Größenklasse	Schadenanzahl	Schadenaufwand	Priorität
Bis einschl. 100€	2.000	100.000	1.100.000
Über 100 bis einschl. 500€	2.000	700.000	4.800.000
Über 500 bis einschl. 1.000€	4.000	3.000.000	7.800.000
Über 1.000€	4.000	4.800.000	8.600.000
Gesamt	12.000	8.600.000	8.600.000

Risikogruppe 2:

Größenklasse	Schadenanzahl	Schadenaufwand	Priorität
Bis einschl. 100€	500	50.000	700.000
Über 100 bis einschl. 500€	1.500	500.000	3.050.000
Über 500 bis einschl. 1.000€	2.000	1.850.000	5.400.000
Über 1.000€	3.000	9.400.000	11.800.000
Gesamt	7.000	11.800.000	11.800.000

Berechnen Sie daraus die für jede Risikogruppe maximale Schadenaufwands- bzw. Schadenbedarfsreduktion, wenn Sie annehmen, dass der Selbstbehalt von 500EUR in 100% der Fälle bei einer Risikogruppe gewählt wird.

Welchen Schluss können Sie aus diesen Ergebnissen und demjenigen aus der gesamten Prioritätenstatistik ziehen? Welche gewählten Anteile der Selbstbehaltsvariante je Risikogruppe würden auf die insgesamt ermittelte Schadenbedarfsreduktion führen? Welche Empfehlung geben Sie für die Schadenbedarfsreduktion bei Einführung des Selbstbehalts, die dann auch in die Prämie für die Selbstbehaltsvariante eingerechnet wird? *[10 Punkte]*

Teil II – Rückversicherung [100 Punkte]

Aufgabe 4 (Burning Cost in Longtail-Sparten) [40 Punkte]

Zur Tarifierung eines Kraftfahrt-Haftpflicht-XLs für das Anfalljahr 2025 soll eine Burning Cost-Rechnung für den Beobachtungszeitraum 2021–2023 durchgeführt werden. Der XL deckt 9.000 xs 1.000 und ist mit einer APK10 ausgestattet, wobei zur Stabilisierung der Lohn- und Gehaltsindex verwendet wird. Das Basisjahr für die Stabilisierungsklausel des zu tarifierenden Vertrages ist 2024.

		Prämienindex		Lohn- und Gehaltsindex	
Jahr	GNPI	Indexwert	Steigerung	Indexwert	Steigerung
2021	100.000	100,0		100,0	
2022	110.000	102,0	2,0%	106,0	6,0%
2023	120.000	107,1	5,0%	115,0	8,5%
2024	130.000	114,6	7,0%	119,0	3,5%
2025	140.000	119,2	4,0%	122,0	2,5%
2026				127,0	4,1%
2027				133,0	4,7%

(a) Berechnen Sie die revalorisierten Prämien für die Jahre 2021–2023. *[3 Punkte]*

(b) Berechnen Sie den Schadenindex I_i^S für die Jahre $i = 2021, \ldots, 2027$ unter der Annahme einer Superimposed Inflation von 3%. *[5 Punkte]*

(c) Für einen Großschaden aus 2021 bezeichne für $i \in \{1, 2, 3\}$

- z_i die Zahlung im Kalenderjahr $2021 + i - 1$,
- a_i den Schadenaufwand am Ende des Kalenderjahres $2021 + i - 1$ und
- $r_i := a_i - \sum_{k=1}^{i} z_k$ die Reserve am Ende des Kalenderjahres $2021 + i - 1$.

Geben Sie die Formeln für die Berechnung der Zahlungen $\bar{z}_i$, Aufwände $\bar{a}_i$ und Reserven $\bar{r}_i$ des as-if-Schadens im Quotierungsjahr 2025 an. Verwenden Sie hierbei die Kalenderjahres-Indexierung. *[4 Punkte]*

(d) Führen Sie die Kalenderjahres-Indexierung in das Quotierungsjahr 2025 explizit an folgendem Schaden durch:

		Abwicklungsjahr		
Anfalljahr		1	2	3
2021	Kumulierte Zahlungen	0	200	400
	Aufwand	500	600	600

[8 Punkte]

(e) Nach der Indexierung seien folgende as-if-Schäden gegeben, die die Priorität übersteigen:

			Abwicklungsjahr		
Schaden Nr.	**Anfalljahr**		1	2	3
1	2021	Kumulierte Zahlungen	500	1.000	2.000
		Aufwand	1.500	2.000	2.500
2	2022	Kumulierte Zahlungen	0	500	
		Aufwand	2.000	2.000	
3	2022	Kumulierte Zahlungen	1.000	2.000	
		Aufwand	3.000	3.500	
4	2023	Kumulierte Zahlungen	1.500		
		Aufwand	2.500		

Berechnen Sie das Abwicklungsdreieck der indexierten und stabilisierten xs-Schadenaufwände. *[9 Punkte]*

(f) Berechnen Sie den indexierten Burning Cost für den Beobachtungszeitraum 2021–2023. *[3 Punkte]*

(g) Verwenden Sie das Chain Ladder-Verfahren und einen Tail-Faktor von 1,5 um den IBNR-indexierten Burning Cost für den Beobachtungszeitraum 2021–2023 zu berechnen. *[8 Punkte]*

Aufgabe 5 (Schadenzahlverteilungen) [14 Punkte]

(a) Definieren Sie die Begriffe *Dispersion* und *Contagion*. *[4 Punkte]*

(b) Es sei $\sum_{n=1}^{N} X_n$ ein kollektives Modell. Für die Schadenzahl N gelte $\mathrm{E}(N) = 2$ und $\mathrm{Var}(N) = 4$. Die Schadenhöhen X_n seien Pareto(1.000, 2)-verteilt, d.h.

$$\mathrm{P}(X_n \leq x) = 1 - \left(\frac{1.000}{x}\right)^2$$

für $x \geq 1.000$. Es bezeichne $\hat{N}$ die Anzahl der Schäden, die größer als 2.000 sind. Bestimmen Sie die Dispersion $D(\hat{N})$. *[6 Punkte]*

(c) Einem Rückversicherer (RV) wird eine Beteiligung an einem Schadenexzedenten angeboten. Um zu bewerten, ob die angebotene RV-Prämie auskömmlich ist, quotiert der RV mit zwei alternativen kollektiven Modellen, die im Folgenden verglichen werden sollen. Die Modelle verwenden die gleiche Schadenhöhenverteilung und die gleiche erwartete Anzahl an Schäden. Im ersten Modell wird jedoch mit einer Poisson-Verteilung modelliert, im zweiten mit einer Negativen Binomialverteilung. Geben Sie für folgende Strukturen *ohne Begründung* an, ob das NegBin-Modell das gleiche, ein höheres oder ein niedrigeres erwartetes technisches Ergebnis für den RV liefert:

(i) XL mit einer freien Wiederauffüllung

(ii) XL mit unbeschränkten freien Wiederauffüllungen

(iii) XL mit unbeschränkten bezahlten Wiederauffüllungen

(iv) XL mit AAD und ohne AAL

[4 Punkte]

Aufgabe 6 (Lokale Pareto-Alphas) [30 Punkte]

(a) Die Verteilungsfunktion F einer Zufallsgröße $X > 0$ sei an der Stelle $x > 0$ differenzierbar, und es gelte $F(x) < 1$. Geben Sie die Formel für das lokale Pareto-Alpha bei x an. *[2 Punkte]*

(b) Die Verteilungsfunktion der Burr-Verteilung mit den Parametern $\lambda, k, c > 0$ ist für $x \geq 0$ gegeben durch

$$F(x) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^c\right]^{-k}.$$

Berechnen Sie das lokale Pareto-Alpha $\alpha(x)$ bei x. *[4 Punkte]*

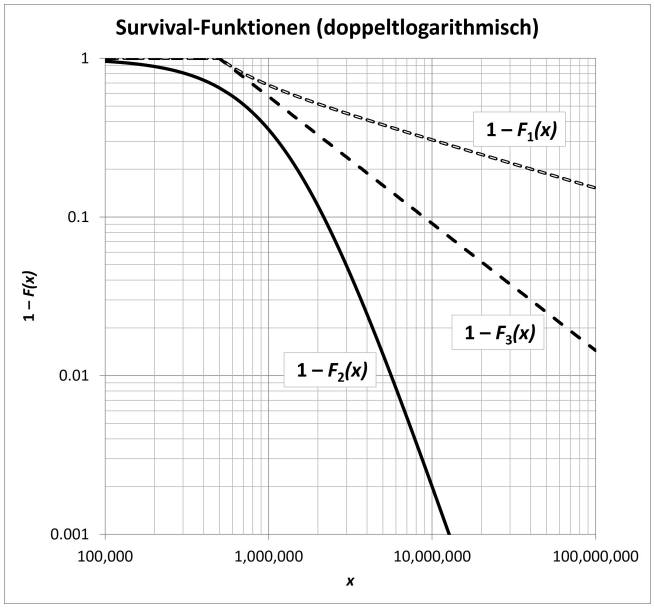
Zwischenergebnis:

$$\alpha(x) = \frac{ck\left(\frac{x}{\lambda}\right)^c}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^c}$$

(c) Berechnen Sie $\lim_{x\to\infty} \alpha(x)$. *[1 Punkt]*

(d) Beschreiben Sie die geometrische Bedeutung des lokalen Pareto-Alphas $\alpha(x)$ einer Verteilung F an der Stelle $x > 0$. *[2 Punkte]*

(e) Die folgende Graphik enthält drei Survival-Funktionen in doppeltlogarithmischer Darstellung:



Ordnen Sie F_1, F_2 und F_3 folgenden Verteilungen zu (mit kurzer Begründung):

- Pareto-Verteilung
- Verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit $\alpha_{\text{initial}} > \alpha_{\text{tail}}$
- Burr-Verteilung mit $c = 1{,}5$ und $k = 2$. *[6 Punkte]*

(f) Wir betrachten nun drei kollektive Modelle

$$\sum_{n=1}^{N^{(i)}} X_n^{(i)} \quad \text{mit} \quad X_n^{(i)} \sim F_i,$$

$i \in \{1, 2, 3\}$. Wir nehmen an, das alle drei Modelle den gleichen erwarteten Schaden im Layer 4 Mio xs 1 Mio haben. Wie verhalten sich die erwarteten Schäden der drei Modelle im Layer 5 Mio xs 5 Mio zueinander? Begründen Sie Ihre Antwort! *[6 Punkte]*

Es sei nun $G\colon [0, \infty) \to [0, 1]$ eine zweifach rechtsseitig differenzierbare Feuer-Exposurekurve. Dann ist das *lokale Pareto-Alpha* $\alpha_G(x)$ *von G an der Stelle x* definiert als das lokale Pareto-Alpha der zugrunde liegenden Schadengradverteilung an der Stelle x, falls dieses existiert.

(g) Welche Bedingung muss G an der Stelle x erfüllen, damit $\alpha(x)$ definiert ist? *[2 Punkte]*

(h) Geben Sie eine Formel für das lokale Pareto-Alpha $\alpha_G(x)$ von G an der Stelle x an. *[4 Punkte]*

(i) Berechnen Sie $\alpha(x)$ für die Exposurekurve

$$G\colon [0, \infty) \to [0, 1], \quad x \mapsto \begin{cases} \log_2(x+1) & \text{für } x \leq 1 \\ 1 & \text{für } x > 1. \end{cases}$$

[3 Punkte]

Aufgabe 7 (Diverse Themen) [16 Punkte]

(a) Nennen Sie ein Beispiel für staatliche Rückversicherung (Staatsgarantie).
[2 Punkte]

(b) Erklären Sie, was man unter einer Rückversicherungs-Captive versteht.
[2 Punkte]

(c) Begründen Sie, weshalb die Rückversicherungsprämie bei einer Quote nicht Gegenstand der Verhandlung zwischen Erst- und Rückversicherer ist.
[2 Punkte]

(d) Erklären Sie den Unterschied zwischen einem Zeichnungsjahres- und einem Anfalljahresvertrag. *[4 Punkte]*

(e) Wir betrachten einen XL pro Risiko 4.000 xs 2.000 mit einem AAL von 20.000. Es sei eine Gleitprämie mit Untergrenze 3%, Obergrenze 6% und Loadingfaktor 100/80 vereinbart. Das GNPI beträgt 100.000. Am Ende des dritten Abwicklungsjahres hat man folgende Großschäden, die den XL belasten:

Schaden Nr.	kumulierte Zahlung	Aufwand
1	3.000	5.500
2	1.500	3.500

Berechnen Sie die Rückversicherungsprämie zum Ende des dritten Abwicklungsjahres. *[6 Punkte]*

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 1: Zu (a): Für den Schätzwert zum Erwartungswert $\mathrm{E}(N)$ gilt:

$$\mathrm{E}(N) = \frac{1}{\text{Gesamtzahl Risiken}} \sum_{i=0}^{4} \text{Schadenzahl}_i \cdot \text{Risikenanzahl}_i = 0{,}13687$$

Damit folgt für den Schätzwert der Varianz:

$$\mathrm{Var}(N) = \frac{1}{\text{Gesamtzahl Risiken}} \sum_{i=0}^{4} \text{Risikenanzahl}_i \cdot (i - \mathrm{E}(N))^2 = 0{,}15605$$

Im Falle der Poisson-Verteilung gilt $\mathrm{E}(N) = \mathrm{Var}(N)$. Dies ist hier nicht der Fall, daher ist die Annahme einer Poisson-Verteilung nicht adäquat. Im Fall der Negativ-Binomial-Verteilung ist $\mathrm{E}(N) < \mathrm{Var}(N)$, so dass diese Verteilung hier zugrunde liegen könnte.

Zu (b): Im Negativ-Binomial-Modell wird angenommen, dass das Einzelrisiko einer Poisson-Verteilung genügt. Der Poisson-Parameter wiederum folgt einer Gammaverteilung als Strukturfunktion.

Damit gilt für die bedingte Zufallsvariable Schadenzahl N:

$$\mathrm{P}(N = n|\lambda) = \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Somit ergibt sich für die unbedingte Zufallsvariable N mit der Dichte der Gammaverteilung und Verwendung der Darstellung der Gamma-Funktion:

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(N = n) &= \int_0^\infty \mathrm{P}(N = n|\lambda) f(\lambda)\, d\lambda = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \lambda^{n+\alpha-1} e^{-(\beta+1)\lambda}\, d\lambda \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty \left(\frac{x}{\beta+1}\right)^{n+\alpha-1} e^{-x} \frac{dx}{\beta+1} \\
&= \frac{\Gamma(n+\alpha)}{\Gamma(n+1)\Gamma(\alpha)} \left(\frac{\beta}{\beta+1}\right)^\alpha \left(\frac{1}{\beta+1}\right)^n
\end{aligned}$$

Hierbei wurde die Substitution $x = (\beta+1)\lambda$ verwendet. Für den Erwartungswert der Negativ-Binomial-Verteilung gilt mit dem Poisson-Parameter λ und der zugehörigen Zufallsvariable Λ:

$$\mathrm{E}(N) = \mathrm{E}(\mathrm{E}(N|\Lambda)) = \mathrm{E}(\Lambda) = \int_0^\infty \lambda f(\lambda)\, d\lambda = \frac{\alpha}{\beta}$$

Hierbei wird jeweils analog zur Bestimmung der unbedingten Wahrscheinlichkeiten die Substitutionsregel und die Darstellung der Gamma-Funktion verwendet. Daher ist bei der Bestimmung der Varianz auch in die Struktur mit $\exp(-t)$ zu bringen und dann der funktionale Zusammenhang zwischen $z+1$ und z bei der Gamma-Funktion anzuwenden.

Zu (c): A priori, d.h. ohne Kenntnis einer Schadenerfahrung kann jedem Risiko nur der allgemeine Erwartungswert bzgl. der Schadenanzahl E(N) zugeordnet werden.

A posteriori, d.h. nach Kenntnis der Schadenerfahrung kann diese berücksichtigt werden. Damit ergibt sich für schadenfreie Risiken eine geringere erwartete Schadenanzahl, für schadenbehaftete Risiken eine tendenziell höhere erwartete Schadenanzahl als der a-priori-Erwartungswert.

Der Quotient a-posteriori-Erwartungswert/a-priori-Erwartungswert liefert dann die Beitragssätze des zugehörigen Bonus/Malus-Systems.

Zu Aufgabe 2: Zu (a): Die Logarithmierung der Dichte der Negativ-Binomial-Verteilung ergibt:

$$\log f(y;\vartheta,\phi) = \log\frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(y+1)} + \alpha\log\frac{\alpha/\mu}{1+\alpha/\mu} + y\log\frac{1}{1+\alpha/\mu}$$

Somit ist zunächst

$$\vartheta = \log\frac{1}{1+\alpha/\mu} \Leftrightarrow e^{\vartheta} = \frac{1}{1+\alpha/\mu} \Leftrightarrow \alpha/\mu = e^{-\vartheta} - 1$$

Und damit ergibt sich zusammen mit der allgemeinen Darstellung aus dem Hinweis

$$-b(\vartheta) = \alpha\log\frac{\alpha/\mu}{1+\alpha/\mu} \Leftrightarrow b(\vartheta) = -\alpha\log(1-e^{\vartheta})$$

und $\phi = 1$ sowie

$$C(y,\phi) = \frac{\Gamma(y+\alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(y+1)}$$

Insgesamt ist somit die Dichte der Negativ-Binomial-Verteilung als Spezialfall der Dichte einer Verteilung der Exponentialfamilie darstellbar und also dieser Familie zugehörig.

Zu (b): Der Erwartungswert lässt sich bestimmen aus der Ableitung der Funktion $b(\vartheta)$, die sich im Fall der Negativ-Binomialverteilung ergibt zu (vgl. (a))

$$b'(\vartheta) = -\alpha\frac{-e^{\vartheta}}{1-e^{\vartheta}} = \alpha(e^{-\vartheta}-1)^{-1} = \alpha\frac{\mu}{\alpha} = \mu$$

Des Weiteren gilt im Fall der kanonischen Link-Funktion gerade $\vartheta = \eta$, wobei letzterer der lineare Prädiktor ist. Damit folgt:

$$g(\mu) = \eta = \vartheta = \log\frac{1}{1+\alpha/\mu}$$

Zu (c): Die log-Likelihood lautet:

$$\log L = \sum_{i=1}^{n} \left(\log \frac{\Gamma(y_i + \alpha)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(y_i + 1)} + \alpha \log \frac{\alpha/\mu}{1 + \alpha/\mu} + y_i \log \frac{1}{1 + \alpha/\mu} \right)$$

Ableitung nach μ ergibt

$$\frac{\partial \log L}{\partial \mu} = \sum_{i=1}^{n} \left(-\alpha \frac{1/\alpha}{\mu/\alpha + 1} - \frac{1}{1 + \alpha/\mu} \frac{-\alpha}{\mu^2} y_i \right)$$

Nullsetzen führt auf

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} y_i = \mu$$

Für die Bestimmung des Maximum-Likelihood-Schätzers für α ist die Log-Likelihood nach α abzuleiten und diese Ableitung dann gleich null zu setzen.

Zu Aufgabe 3: Zu (a): Die fehlende Priorität ergibt sich zu

$$150.000 + 1.250.000 + 5.000.000 + 7.000 \cdot 1.000 = 13.400.000$$

Die maximal mögliche Schadenaufwandsreduktion ergibt sich für Selbstbehalt 100EUR zu 8,8%, für Selbstbehalt 500EUR zu 38,7% und für Selbstbehalt 1.000EUR zu 65,7%. Bei 100EUR ist die Reduktion der Schadenlast zu gering, als dass dies zu einem klaren Beitragsunterschied zur Variante ohne Selbstbehalt führen könnte. Bei 1.000EUR bleibt in der gegebenen Risikosituation zu viel Schadenlast beim Kunden, so dass aus dessen Sicht diese Variante nicht ausreichend Deckung bieten dürfte. Bei 500EUR stehen Reduktion der Schadenlast und Beitragsunterschied in einem ausgewogeneren Verhältnis.

Zu (b): Der wesentliche Unterschied zwischen den beiden Risikogruppen liegt in der jeweils gegenläufigen Relevanz von SH und SD. Dies lässt im Prinzip in der ersten Risikogruppe eher mehr, aber kleinere Schäden und in der zweiten Risikogruppe eher weniger, aber größere Schäden annehmen. Durch diese unterschiedlichen Schadenkenngrößen ist eine entsprechend unterschiedliche Schadenbedarfsreduktion insgesamt zu erwarten: Erfolgt die Wahl des Selbstbehalt über-/unterdurchschnittlich in der ersten Risikogruppe, ist eine höhere/geringere Schadenbedarfsreduktion erwartbar, wohingegen eine über-/unterdurchschnittliche Wahl des Selbstbehalts in der zweiten Risikogruppe eine niedrigere/größere Schadenbedarfsreduktion erwarten lässt.

Zu (c): Bei Risikogruppe 1 ergibt sich die maximal mögliche Schadenbedarfsreduktion zu 55,8%, bei Risikogruppe 2 zu 25,8%. Die insgesamt sich realisierende Schadenbedarfsreduktion hängt deutlich davon ab, welche Risikogruppe vermehrt

den Selbstbehalt wählt. Daher kann es zur Fehltarifierung führen, wenn die Schadenbedarfsreduktion einfach auf der Prioritätenstatistik für gesamt basiert. Im Vorwege ist nicht genau bekannt, welche Kunden den Selbstbehalt wählen. Vor diesem Hintergrund sollte die Schadenbedarfsreduktion eher niedriger und entsprechend vorsichtig definiert werden. Wenn in jeder Risikogruppe derselbe Anteil sich für die Selbstbehaltsvariante entscheidet, ergibt sich die Schadenbedarfsreduktion insgesamt.

Zu Aufgabe 4 (BC in Longtail-Sparten):

(a) Bezeichnet P_i das GNPI des Jahres i und I_i^P den Prämienindex, so gilt für die revalorisierten Prämien $\bar{P}_i$

$$\bar{P}_i := \frac{I^P_{2025}}{I^P_i} \cdot P_i.$$

Mit dieser Formel erhält man

Jahr	Revalorisierte Prämien
2021	119.200
2022	128.549
2023	133.557
2024	135.218
2025	140.000

(b) Die jährliche Steigerung des Schadenindex I_i^S ist 3 Prozentpunkte höher als die jährliche Steigerung des Lohn- und Gehaltsindex. Somit:

Jahr	L&G-Index	Steigerung L&G-Index	Steigerung Schadenindex	Schadenindex
2021	100,0			100,0
2022	106,0	6,0%	9,0%	109,0
2023	115,0	8,5%	11,5%	121,5
2024	119,0	3,5%	6,5%	129,4
2025	122,0	2,5%	5,5%	136,5
2026	127,0	4,1%	7,1%	146,2
2027	133,0	4,7%	7,7%	157,5

(c) Die Formeln lauten:

$$\bar{z}_i := \frac{I^s_{2025+i-1}}{I^s_{2021+i-1}} \cdot z_i, \quad \bar{r}_i := \frac{I^s_{2025+i-1}}{I^s_{2021+i-1}} \cdot r_i, \quad \bar{\alpha}_i = \left(\sum_{k=1}^{i} \bar{z}_k\right) + \bar{r}_i.$$

(d) Für den Schaden haben wir folgende inkrementelle Zahlungen und Reserven:

Anfalljahr		Abwicklungsjahr 1	2	3
2021	Inkrementelle Zahlungen	0	200	200
	Reserven	500	400	200

Anwendung der Formel liefert folgenden as-if-Schaden:

		Abwicklungsjahr		
Anfalljahr		1	2	3
2021	Inkrementelle Zahlungen	0	268	259
	Kumulierte Zahlungen	0	268	528
	Reserven	683	537	259
	Aufwand	683	805	787

(e) Da der Lohn- und Gehaltsindex von 2024 bis 2026 um weniger als 10% steigt, spielt die Stabilisierungsklausel erst im dritten Abwicklungsjahr eine Rolle. Der Bereinigungsfaktor für das dritte Abwicklungsjahr ist

$$f_{2027} = \frac{119{,}0}{133{,}0} = 0{,}895.$$

Die stabilisierte Priorität im dritten Abwicklungsjahr des as-if Schadens aus 2021 ist daher

$$\frac{500 + 500 + 1.000 + 500}{500 + 500 + 0{,}895 \cdot (1.000 + 500)} \cdot 1000 = 1067.$$

Wir erhalten das indexierte und stabilisierte xs-Dreieck

	Abwicklungsjahr		
Anfalljahr	1	2	3
2021	500	1.000	1.433
2022	3.000	3.500	
2023	1.500		

(f) Indexierter Burning Cost:

$$\mathrm{BC}^{\mathrm{ind}} = \frac{1.433 + 3.500 + 1.500}{119.200 + 128.549 + 133.557} \approx 1{,}69\%$$

(g) Chain Ladder-Rechnung

	Abwicklungsjahr		
Anfalljahr	1	2	3
2021	500	1.000	1.433
2022	3.000	3.500	*5.014*
2023	1.500	*1.929*	*2.763*

IBNR-indexierter Burning Cost:

$$\mathrm{BC}^{\mathrm{ind}}_{\mathrm{IBNR}} = \frac{1.433 + 5.014 + 2.763}{119.200 + 128.549 + 133.557} \cdot 1{,}5 \approx 3{,}62\%$$

Zu Aufgabe 5 (Schadenzahlverteilungen)

(a) Für eine Schadenzahl N mit $\mathrm{E}(N) > 0$ heißt

$$D(N) := \frac{\mathrm{Var}(N)}{\mathrm{E}(N)}$$

die *Dispersion von N* und

$$c(N) := \frac{D(N)-1}{\mathrm{E}(N)}$$

die *Contagion von N*.

(b) Die Contagion ist in einem kollektiven Modell nicht vom Threshold abhängig, d.h. es gilt

$$\frac{D(\hat{N})-1}{\mathrm{E}(\hat{N})} = c(\hat{N}) = c(N) = \frac{D(N)-1}{\mathrm{E}(N)} = \frac{4/2-1}{2} = \frac{1}{2}$$

und somit unter Verwendung von $\mathrm{E}(\hat{N}) = \mathrm{E}(N) \cdot \mathrm{P}(X_n > 2.000) = 2 \cdot 0{,}25 = 0{,}5$

$$D(\hat{N}) = \frac{1}{2} \cdot \mathrm{E}(\hat{N}) + 1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 1 = 1{,}25.$$

(c) Das erwartete technische Ergebnis des Rückversicherers ist mit dem NegBin-Modell

(i) höher

(ii) gleich

(iii) gleich

(iv) niedriger

Zu Aufgabe 6 (Lokale Pareto-Alphas)

(a) Die Formel für das lokale Pareto-Alpha bei x lautet

$$\frac{xF'(x)}{1-F(x)}.$$

(b) Es gilt

$$F'(x) = k \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^c\right]^{-k-1} \cdot c \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^{c-1} \cdot \frac{1}{\lambda}$$

und somit

$$\alpha(x) = \frac{xF'(x)}{1-F(x)} = \frac{ck \cdot \left[1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^c\right]^{-k-1} \cdot \left(\frac{x}{\lambda}\right)^c}{\left[1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^c\right]^{-k}} = \frac{ck\left(\frac{x}{\lambda}\right)^c}{1 + \left(\frac{x}{\lambda}\right)^c}.$$

(c) Mit (b) folgt

$$\lim_{x\to\infty} \alpha(x) = \lim_{x\to\infty} ck \cdot \frac{\left(\frac{x}{\lambda}\right)^c}{1+\left(\frac{x}{\lambda}\right)^c} = ck.$$

(d) Das lokale Pareto-Alpha $\alpha(x)$ entspricht der negativen Steigung der Survivalfunktion $1-F$ in doppeltlogarithmischer Darstellung an der Stelle x.

(e) Der Betrag der Steigung von $1-F_1$ ist (in doppeltlogarithmischer Darstellung) abnehmend. Daher handelt es sich um die verallgemeinerte Pareto-Verteilung mit $\alpha_{\text{initial}} > \alpha_{\text{tail}}$. F_2 ist die Burrverteilung, da der Betrag der Steigung von $1-F_2$ (in doppeltlogarithmischer Darstellung) für $x \to \infty$ gegen $ck = 3$ geht. Bei F_3 handelt es sich schließlich um die Pareto-Verteilung, da der Graph der Survivalfunktion auf doppeltlogarithmischem Papier eine Halbgerade ist.

(f) Es sei e_i der erwartete Schaden von Modell i im Layer 5 Mio xs 5 Mio. Dann gilt

$$e_1 > e_3 > e_2.$$

Begründung: Bezeichnet $\alpha_i(x)$ das lokale Pareto-Alpha von F_i bei x, so gilt gemäß der Graphik offenbar

$$\alpha_1(x) < \alpha_3(x) < \alpha_2(x)$$

für alle $x \in [1\,\text{Mio}, 10\,\text{Mio}]$.

(g) Es sei F_G die Verteilungsfunktion der G zugrunde liegenden Schadengradverteilung. Dann gilt

$$F_G(x) = 1 - \frac{G'(x)}{G'(0)},$$

wobei G' die rechtsseitige Ableitung von G bezeichnet. $\alpha(x)$ ist definiert, wenn $F_G(x) < 1$, d.h. wenn $G'(x) > 0$ (oder äquivalent $G(x) < 1$).

(h) Für x mit $G'(x) > 0$ gilt

$$\alpha(x) = x \cdot \frac{F_G'(x)}{1-F_G(x)} = x \cdot \frac{-G''(x)/G'(0)}{G'(x)/G'(0)} = -x \cdot \frac{G''(x)}{G'(x)}.$$

(i) Es gilt für $0 < x < 1$

$$G'(x) = \frac{1}{(x+1)\ln(2)} \quad \text{und} \quad G''(x) = -\frac{1}{(x+1)^2\ln(2)}$$

und somit

$$\alpha(x) = -x \cdot \frac{G''(x)}{G'(x)} = \frac{x}{x+1}.$$

Für $x \geq 1$ ist $\alpha(x)$ nicht definiert.

Zu Aufgabe 7 (Diverse Themen)

(a) Der Spezialversicherer EXTREMUS bietet für Terrorschäden eine Jahreskapazität von 9 Mrd. EUR. Davon wird die Tranche 5,98 Mrd. xs 2,52 Mrd. durch eine Staatsgarantie „rückversichert“.

(b) Unter einer Rückversicherungs-Captive versteht man eine RV-Gesellschaft, die von einem Versicherungskonzern gegründet wird. Aufgabe ist die Übernahme von Risiken der Versicherungskonzerngesellschaften, aber auch Bündelung von RV zur Weitergabe an den externen RV-Markt.

(c) Bei einer Quote steht die RV-Prämie durch die Quotenabgabe fest. Verhandelt wird die Höhe der Provision.

(d) Bei einem RV-Vertrag auf Zeichnungsjahresbasis sind alle Schäden aus Originalpolicen gedeckt, die während der Laufzeit des RV-Vertrages neu abgeschlossen oder erneuert werden. Bei einem RV-Vertrag auf Anfalljahresbasis sind alle Schäden gedeckt, die während der Laufzeit des RV-Vertrages anfallen.

(e) Zum Ende des dritten Abwicklungsjahres beträgt der xs-Schadenaufwand

$$3500 + 1500 = 5.000 = 5\% \cdot 100.000 = 5\% \cdot \text{GNPI}.$$

Die Rückversicherungsprämie beträgt daher

$$\min(6\%, \max(3\%, 100/80 \cdot 5\%)) = 6\% \cdot \text{GNPI} = 6.000.$$