DAV
Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherung I

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 23. Mai 2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 15 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Teil I – Tarifierung [80 Punkte]

Aufgabe 1 (Grundlegendes und Daten) [16 Punkte]

(a) *Grundlegendes*: Das Aktuariat nimmt eine wesentliche Position in den Unternehmensprozessen ein und arbeitet regelmäßig mit unterschiedlichen anderen Abteilungen zusammen. Benennen Sie sieben Schnittstellen, mit denen ein Aktuariat in Berührung kommt. (7 Punkte)

(b) *Grundlegendes*: In die Berechnung der Tarifprämien eines Erstversicherungsvertrags fließen neben der Vorhersage des Tarifmodells auch die variablen Kosten sowie die Fixkosten ein. Nennen Sie vier weitere Faktoren, die bei der Festlegung der Tarifprämie berücksichtigt werden sollten. (4 Punkte)

(c) *Datenbeschaffung*: Nennen Sie drei interne und zwei externe Datenquellen, die für die Entwicklung und Preisgestaltung von Versicherungsprodukten relevant sind. (5 Punkte)

Aufgabe 2 (Feature Engineering) [27 Punkte]

(a) *Clusteranalyse*: Nennen Sie eine bedeutende hierarchische Clustermethode und erläutern Sie diese anhand von mindestens vier charakteristischen Eigenschaften. (5 Punkte)

(b) *Clusteranalyse*: Verifizieren Sie die folgende Aufteilung der Gesamtvarianz in die Varianz innerhalb der Cluster und die Varianz zwischen den Clustern:

$$\sigma^2 = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 = \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}\sum_{x_i\in C_r}(x_i-\bar{x}_r)^2 + \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g} n_r(\bar{x}_r-\bar{x})^2.$$

Hinweis: Hierbei sei $x_i \in \mathbb{R}$ mit $i \in \{1,\dots,n\}$. Des Weiteren sei g die Anzahl der Cluster C_r mit $r \in \{1,\dots,g\}$. Die Gesamtanzahl der Elemente sei n, während die Anzahl der Elemente im Cluster C_r als n_r definiert sei. Weiter sei $\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$ der Gesamtmittelwert und $\bar{x}_r = \frac{1}{n_r}\sum_{x_i\in C_r} x_i$ der Mittelwert des Clusters C_r. (10 Punkte)

(c) *Gewichtungsverfahren*: Skizzieren Sie das Hauptziel der Anwendung eines Gewichtungsverfahrens.
Ein interner Unternehmensbericht über einen neuen Vertriebskanal behauptet, dass die Schadenshäufigkeit dieses Jahr im Vergleich zum Vorjahr um 9% gesunken ist. Was wäre das Erste, das Sie überprüfen sollten? (4 Punkte)

Siehe nächste Seite für die Fortsetzung der Aufgabe 2

(d) *Gewichtungsverfahren*: Kalkulieren Sie den gewichteten Schadenbedarf in der *Kraftfahrt-Haftpflichtversicherung* durch die Gewichtung mit dem individuellen Bestand. Wie fällt der Vergleich für Sie zwischen dem Versicherungsunternehmen und dem Markt aus (mit kurzer Begründung)?
Hinweis: Überlegen Sie, aus welcher Quelle (Markt oder VU) Sie den Schadenbedarf beziehen und aus welcher Quelle Sie die Gewichtungen übernehmen. (5 Punkte)

Versicherungsunternehmen		
Fahrzeugart	Jahreseinheiten	Schadenbedarf
Pkw	110	220
Lkw bis 3,5t	40	420
Anhänger (Werk & Güter)	30	40
Lkw über 3,5t (Werk & Güter)	20	1250
Gesamt	200	336

Markt		
Fahrzeugart	Jahreseinheiten	Schadenbedarf
Pkw	2150	240
Lkw bis 3,5t	850	450
Anhänger (Werk & Güter)	700	45
Lkw über 3,5t (Werk & Güter)	300	1100
Gesamt	4000	315

Siehe nächste Seite für die Fortsetzung der Aufgabe 2

(e) *Erfahrungstarifierung*: In der Tarifempfehlung *UT 2025* des GDV sind für PKW in der KH-Versicherung folgende Schadenbedarfsindizes in Abhängigkeit der Vorjahresschäden sowie für das Statistikjahr gegeben (Ausschnitt bis SF 15):

KH-Versicherung – Pkw 2020-2022: Detaillierte Rückstufungsstatistik

S/SF-Stufe im Vorjahr	Schadenbedarfsindizes der Risiken im Statistikjahr mit genau ... Schäden im Vorjahr			Schadenbedarfsindex der S/SF-Stufe im Statistikjahr	
	0 Schäden	1 Schaden	2 Schäden	Index	Ausprägung
M	3,7373	5,6673	8,9132	4,0824	M
0	2,7946	4,2378	6,6649	3,0527	0
SF 1/2	2,1718	3,2934	5,1796	2,3724	SF 1/2
SF 1	1,8183	2,7573	4,3366	1,9862	SF 1
SF 2	1,6800	2,5476	4,0067	1,8183	SF 2
SF 3	1,5641	2,3719	3,7304	1,6800	SF 3
SF 4	1,4657	2,2225	3,4955	1,5641	SF 4
SF 5	1,3809	2,0940	3,2934	1,4657	SF 5
SF 6	1,3072	1,9823	3,1176	1,3809	SF 6
SF 7	1,2425	1,8842	2,9634	1,3072	SF 7
SF 8	1,1853	1,7975	2,8269	1,2425	SF 8
SF 9	1,1344	1,7202	2,7054	1,1853	SF 9
SF 10	1,0887	1,6509	2,5964	1,1344	SF 10
SF 11	1,0475	1,5884	2,4981	1,0887	SF 11
SF 12	1,0101	1,5318	2,4091	1,0475	SF 12
SF 13	0,9761	1,4802	2,3280	1,0101	SF 13
SF 14	0,9450	1,4331	2,2539	0,9761	SF 14
SF 15	0,9165	1,3898	2,1858	0,9450	SF 15

Begründen Sie, in welche *SF-Stufe* ein KH-Risiko aus SF 10 im Falle *eines* Schadens demnach zurückgestuft wird. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (Regression) [37 Punkte]

(a) Im *Generalisierten Linearen Modell (GLM)* wird gefordert, dass die Verteilung der Responsevariablen y_i einem Mitglied der *exponentiellen Familie* folgt, d.h. es gilt

$$y_i|\theta_i \overset{iid}{\sim} f(y_i;\theta_i,\phi,w_i) = \exp\left\{\frac{y_i\theta_i - b(\theta_i)}{\phi}w_i + c(y_i;\phi,w_i)\right\}.$$

Im Folgenden nehmen wir für das Exposure vereinfachend $w_i \equiv 1$ an.

(i) Zeigen Sie, dass die Poisson-Verteilung mit der (diskreten) Dichte

$$f(y_i;\lambda_i,\phi) = \frac{\lambda_i^{y_i}}{y_i!}\exp(-\lambda_i)$$

zur *exponentiellen Familie* gehört. Geben Sie dabei explizit θ_i, $b(\theta_i)$, ϕ und $c(y_i;\phi)$ an. (7 Punkte)

(ii) Leiten Sie für die Poisson-Verteilung aus den Bestimmungen zur Funktion $b(.)$ sowie ϕ Erwartungswert $E(y_i) = \mu_i$, Varianz $\mathrm{Var}(y_i)$, die natürliche (kanonische) Link-Funktion und die zugehörige Responsefunktion im GLM-Kontext her. (12 Punkte)

Siehe nächste Seite für die Fortsetzung der Aufgabe 3

(b) *Marginalsummenverfahren und GLM*: Wir gehen vereinfacht davon aus, zwei (diskrete) Tarifmerkmale x_1 und x_2 mit Ausprägungen $x_{1,k} \in \{1, \ldots, K\}$ und $x_{2,l} \in \{1, \ldots, L\}$ vorliegen zu haben.

Die *Beobachtungen* liegen in Form einer $K \times L$—Kontingenztafel vor:

		x_2		
x_1		1	...	L
	1	$w_{11}y_{11}$	...	$w_{1L}y_{1L}$
	...	...	...	...
	K	$w_{K1}y_{K1}$	...	$w_{KL}y_{KL}$

wobei w_{kl} ein Volumenmaß und y_{kl} den Schadenbedarf in der Tarifzelle (k, l) darstellt.

Mit der Annahme $y_{kl} \sim Po(\lambda_{kl})$ und der Parametrisierung $\lambda_{kl} = \beta_{kl} = \beta_0 \beta_{k\cdot} \beta_{\cdot l}$ und $\beta_0 \equiv 1$ gilt für die (diskrete) Dichte

$$f(y_{kl}) = \frac{(w_{kl}\beta_{k\cdot}\beta_{\cdot l})^{w_{kl}y_{kl}}}{(w_{kl}y_{kl})!} \exp(-w_{kl}\beta_{k\cdot}\beta_{\cdot l}).$$

Die zugehörige *log-Likelihood* stellt sich wie folgt dar:

$$l = \sum_{k=1}^{K} \sum_{l=1}^{L} \log\left[f(y_{kl})\right].$$

Leiten Sie daraus die Schätzgleichungen (Marginalsummengleichungen) der Parameter $\beta_{k\cdot}$ und $\beta_{\cdot l}$ her. (9 Punkte)

Siehe nächste Seite für die Fortsetzung der Aufgabe 3

(c) *Generalisierte Regression*: Die ersten zehn Einträge eines Datensatzes präsentieren sich folgendermaßen:

ZeilenNr	Jahreseinheiten	Motorleistung	Region	Schaden-anzahl	Schaden-aufwand
1	0.59	111	b	0	0
2	0.72	96	a	0	0
3	0.53	94	c	0	0
4	1.00	112	a	1	461
5	0.94	116	b	0	0
6	0.86	129	c	1	390
7	1.00	49	c	1	15
8	0.55	109	b	0	0
9	0.58	106	a	1	413
10	1.00	144	b	0	0
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

In der Zukunft wird erwogen, ein Gamma-GLM mit Log-Linkfunktion zur Vorhersage des Schadendurchschnitts zu verwenden. Um dieses GLM zu erstellen, benötigt man den Gewichtungsvektor **w**, den Beobachtungsvektor **y** sowie die Designmatrix **X**. Bestimmen Sie bitte die ersten 4 Zeilen der Vektoren **w**, **y** sowie der Designmatrix **X**.
Bei der Erstellung der Designmatrix **X** führen Sie ein Dummy-Encoding für die Variable „Region“ durch und verwenden dabei die Kategorie „a“ als Referenz.
Hinweis: Es ist nicht notwendig, die Spalte für die Motorleistung (angegeben in kW) im Vorfeld zu skalieren oder zu normalisieren. (5 Punkte)

Siehe nächste Seite für die Fortsetzung der Aufgabe 3

(d) *Generalisierte Regression*: Ein GLM-Fit des Modells aus Teilaufgabe 3 (c) im Softwarepaket R ergibt folgenden Output:

```
Call:
glm(formula = y ~ Motorleistung + Region, family = Gamma(link = log),
    data = datenSD_2025, weights = w)

Coefficients:
               Estimate Std. Error t value Pr(>|t|)
(Intercept)    5.0601     0.0384654  131.55   <2e-16 ***
Motorleistung  0.0128     0.0003394   37.67   <2e-16 ***
Region b      -0.2096     0.0200316  -10.46   <2e-16 ***
Region c      -0.4135     0.0208952  -19.79   <2e-16 ***
---
Signif. codes:  0 ‘***’ 0.001 ‘**’ 0.01 ‘*’ 0.05 ‘.’ 0.1 ‘ ’ 1

(Dispersion parameter for Gamma family taken to be 0.24943)

    Null deviance: 1019.74  on 2909  degrees of freedom
Residual deviance:  561.38  on 2906  degrees of freedom
AIC: 46571

Number of Fisher Scoring iterations: 5
```

Berechnen Sie damit die Modellprognose des *Schadendurchschnitts* für die Datensätze (`Motorleistung=85, Region=c`) sowie (`Motorleistung=250, Region=a`). (4 Punkte)

Teil II – Rückversicherung [100 Punkte]

Aufgabe 4 (Cat Burning Cost) [25 Punkte]

(a) Skizzieren Sie, wie die Prämienvolumina bei einem XL pro Risiko bzw. bei einem Naturgefahren-Cat XL in die Burning Cost-Rechnung einfließen. Begründen Sie, warum man für die beiden Vertragsarten unterschiedlich vorgeht. (5 Punkte)

(b) Für einen Naturgefahren-Cat XL 5.000 xs 5.000 liegen Prämien für den Zeitraum 2019–2024, Prämien-Schätzungen für 2025 und 2026 sowie geeignete Indexreihen für Prämien und Schäden vor:

Jahr	Prämie	Prämienindex	Schadenindex
2019	100.000	100	100
2020	120.000	101	103
2021	140.000	102	106
2022	170.000	106	115
2023	200.000	110	122
2024	220.000	116	125
2025	240.000	120	128
2026	250.000	122	130

Im Beobachtungszeitraum 2019–2024 sind folgende Schadenereignisse bekannt:

Schaden Nr.	Anfalljahr	Schadenhöhe
1	2019	5.000
2	2022	4.000
3	2023	7.000
4	2024	6.500

Berechnen Sie den Cat Burning Cost BC^{Cat} für den Beobachtungszeitraum 2019–2024 und das Quotierungsjahr $q = 2026$. (20 Punkte)

Aufgabe 5 (Haftpflicht-Exposurequotierung) [40 Punkte]

(a) In der Haftpflichtversicherung wird häufig die sogenannte Zuschlagsquotierung verwendet.

- Erläutern Sie die grundlegende Modellannahme.
- Gegeben sei ein Risiko mit einer Prämie von $s_0 > 0$ für eine Deckungssumme von $v_0 > 0$. Leiten Sie unter der Annahme eines Zuschlagssatzes von $z \in (0,1)$ die zugehörige stetige Prämienfunktion $S_z(v)$ her (d.h. die Prämie in Abhängigkeit von der Deckungssumme).

(6 Punkte)

(b) Gegeben sei eine Prämienfunktion $S\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $S^{-1}(0) = \{0\}$. Erläutern Sie, was es bedeutet, S durch ein kollektives Modell darzustellen. Nennen Sie Kriterien, anhand derer man entscheiden kann, ob die Prämienfunktion S durch ein kollektives Modell darstellbar ist. (5 Punkte)

(c) Entscheiden Sie, ob folgende Prämienfunktionen durch kollektive Modelle darstellbar sind:

- $S_a(v) := v + 1 - \exp(-v)$
- $S_b(v) := \sqrt{1+v} - 1$
- $S_c(v) := \exp(v) - v - 1$

(mit Begründung) (9 Punkte)

Ein Erstversicherer (EV) zeichnet folgende Beteiligung an einem gelayerten Programm für ein Risiko:

Layer Nr. i	Haftung c_i (für 100%)	Priorität d_i (für 100%)	Anteil σ_i des EV	Prämie p_i für den Anteil des EV
1	10.000	0	50%	200
2	10.000	10.000	20%	10
3	10.000	20.000	50%	10

Wir betrachten nun einen XL pro Risiko 8.000 xs 2.000, in den der EV das Risiko einbringt.

(d) Bestimmen Sie die Haftungsabschnitte, die der Rückversicherungslayer am Originalrisiko deckt (siehe Hinweis auf der nächsten Seite). [10 Punkte]

(e) Führen Sie eine Zuschlagsquotierung für den XL durch. Verwenden Sie hierbei eine Schadenquote von 50% und einen Zuschlagssatz von 20%. [10 Punkte]

Hinweis: Falls Sie die Teilaufgabe (d) nicht lösen können, dann rechnen Sie in (e) mit den folgenden (falschen) Haftungsabschnitten des Rückversicherers am Originalrisiko weiter:

Layer Nr. i	Haftung c_i^{RV} des RV	Priorität d_i^{RV} des RV
1	5.000	5.000
2	10.000	10.000
3	5.000	20.000

Aufgabe 6 (Anpassung eines kollektiven Modells) [15 Punkte]

Zur Tarifierung eines pro Risiko-XLs 8.000 xs 2.000 für das Anfalljahr 2026 wurde für den Beobachtungszeitraum 2018 bis 2024 ein Burning Cost von 8% berechnet. Hierbei wurden folgende (indexierte) Schäden > 2.000 verwendet:

Schadennummer	Anfalljahr	Schadenhöhe
1	2019	2.500
2	2020	6.000
3	2020	4.000
4	2022	3.500

Für das Quotierungsjahr 2026 wird ein GNPI von 20.000 prognostiziert. Die Summe der revalorisierten GNPIs für den Beobachtungszeitraum 2018–2024 beträgt 100.000.

Auf Basis dieser Burning Cost-Rechnung sollen kollektive Modelle zur Tarifierung des XLs angepasst werden, wobei für die Schadenzahl eine Poisson-Verteilung und für die Schadenhöhe eine Pareto-Verteilung verwendet werden soll. Dem Pricing-Aktuar ist bekannt, dass für das gedeckte Segment üblicherweise ein Pareto-Alpha von 2,0 passt.

(a) Berechnen Sie den Maximum Likelihood (ML) Schätzer für das Pareto-Alpha. *[3 Punkte]*

(b) Verwenden Sie alle drei Ansätze aus dem Skript, um jeweils ein kollektives Modell anzupassen. Nehmen Sie hierbei für die Ansätze 2 und 3 an, dass der Burning Cost ein vernünftiger Schätzer für den erwarteten Schaden im bestrichenen Layer ist. Zur Schätzung des Pareto-Alphas aus den Daten soll der ML-Schätzer verwendet werden. *[9 Punkte]*

(c) Welchen Ansatz würden Sie bei dieser Datenlage wählen (mit *kurzer* Begründung)? *[3 Punkte]*

Hinweise:

- Falls Sie den ML-Schätzer in (a) nicht berechnen können, dann rechnen Sie in (b) mit dem (falschen) Ergebnis $\widehat{\alpha}^{\mathrm{ML}} = 1{,}5$ weiter.
- Für $D \geq t$ und $X \sim \mathrm{Pareto}(t, \alpha)$ gilt

$$\mathrm{E}(\min(C, \max(X-D), 0)) = \begin{cases} \frac{t^\alpha}{1-\alpha}\left((C+D)^{1-\alpha} - D^{1-\alpha}\right), & \text{falls } \alpha \neq 1 \\ t \cdot (\ln(C+D) - \ln(D)), & \text{falls } \alpha = 1. \end{cases}$$

Aufgabe 7 (Verschiedenes) [10 Punkte]

(a) Wir betrachten einen Summenexzedenten mit Maximum 1.000 und zwei Maxima. Bei einem Risiko mit einer Versicherungssumme von 5.000 entsteht ein Schaden von 200. Welchen Anteil an dem Schaden trägt der Rückversicherungsvertrag? *[3 Punkte]*

(b) Was versteht man unter fakultativer Rückversicherung? *[2 Punkte]*

(c) Für einen XL 4.000 xs 1.000 wird eine Upfront-Prämie von 1.600 und eine bezahlte Wiederauffüllung zu 100% p.r.c. vereinbart. Der erwartete Schaden des Rückversicherers sei 1.000 und die Wahrscheinlichkeit für eine xs-Schadenlast > 4.000 sei positiv. Ist dann die erwartete Wiederauffüllungsprämie

- gleich $1.000/4.000 \cdot 1.600 = 400$,
- kleiner als 400 oder
- größer als 400?

Begründen Sie Ihre Antwort! *[5 Punkte]*

Aufgabe 8 (Pareto-Optimalität) [10 Punkte]

(a) Definieren Sie den Begriff der Pareto-Optimalität im Varianzmodell. (2 Punkte)

(b) Welche oBdA-Annahme wird im Skript zur Untersuchung der Pareto-Optimalität im Varianzmodell verwendet? (2 Punkte)

(c) Welche der folgenden Verträge sind im Varianzmodell Pareto-optimal?

- Pro-Risiko XL
- Quote mit Fixprovision
- Summenexzedent mit Fixprovision
- Quote mit Gewinnanteil

Begründen Sie Ihre Antwort! (6 Punkte)

Hinweis: Es dürfen ohne weitere Erklärungen die Bezeichnungen aus dem Skript verwendet werden (also beispielsweise $\hat{N}_\tau$ für die Nettoprämie des Rückversicherers bei dem RV-Vertrag τ).

Mitglieder der Prüfungskommission:

Alexej Brauer
Dr. Florian Leitenstorfer
Marc Linde
Dr. Ulrich Riegel
Dr. Gerhard Quarg

Lösungshinweise

Zu Aufgabe 1:

Zu (a): Das Aktuariat nimmt eine wesentliche Position in den Unternehmensprozessen ein und interagiert unter anderem regelmäßig mit folgenden anderen Abteilungen:

- Produktgeber / Portfolio Management
- Schadenbearbeitung / Reservierung
- Risikomanagement / (Financial) Controlling
- Rechnungslegung
- Rückversicherung
- IT / Data-Office
- Versicherungsmathematische Funktion (VMF)
- Vertrieb / Marketing
- Juristische Abteilung
- Kunden / Marktbeobachtung
- Interne Revision

Zu (b): Zusätzlich zur Modellprämie sowie den typischen fixen und variablen Kosten sollten auch die folgenden Faktoren in die Prämienberechnung einfließen:

- Schadenregulierungskosten SRK (direkte und indirekte)
- Gewinnzuschlag
- Rabattzuschläge für segmentabhängig gewährte Nachlässe
- SF-Index in der Kraftfahrtversicherung
- Trends (z.B. Inflation)
- Abschlag für Kapitalerträge aus Kapitalanlagen
- Risikokapitalkosten
- Rückversicherungskosten

Zu (c): Interne Quellen sollten nach Möglichkeit zeitnah innerhalb des Konzerns zugänglich sein. Versicherungsunternehmen (VU) generieren oder erheben diese eigenständig. Dagegen lassen sich externe Datenquellen nur mit der Beteiligung von Dritten ermitteln oder verwenden und sind möglicherweise ausschließlich käuflich zu erwerben. Es wird empfohlen, eine Kosten-Nutzen-Analyse durchzuführen. Mögliche Beispiele für Quellen könnten sein:

Interne Datenquellen:

- Versichertes Objekt:
  z.B. Infos zu KFZ, Gebäude
- Kosten Informationen:
  z.B. Provision, Schadenregulierung
- Kunden Informationen:
  z.B. Adresse, weitere Versicherungen
- Vertrieb Informationen:
  z.B. Kanal, Ort, Geschäftsstelle
- Schaden Informationen:
  z.B. Höhe, Zeitpunkt, Schadenart
- etc.

Externe Datenquellen:

- Geografische Daten:
  z.B. ZÜRS, Hagelzonierung
- GDV:
  z.B. Regio, KFZ-Typklassen
- Prämiendaten:
  z.B. NAFI bei KFZ
- NatCat:
  z.B. externe Modelle
- Marktdaten:
  z.B. Datenpools wie GDV
- etc.

Zu Aufgabe 2:

Zu (a): Ein Beispiel für ein hierarchisches Verfahren wäre hier z.B. das **Ward** Verfahren.

- Dabei handelt es sich um eine agglomerative Methode, bei der zu Beginn jedes Objekt für sich ein separates Cluster darstellt.
- In jedem Schritt werden dann sukzessiv ähnliche Teilgruppen zusammengeführt.
- Das Verfahren von Ward basiert auf der Streuungszerlegung.
- Mithilfe jeder Fusion wird angestrebt, die Heterogenität (also Varianz innerhalb der Cluster) so gering wie möglich wachsen zu lassen.
- Bei einer vorgegebenen Anzahl von Klassen wird dadurch die Varianz innerhalb der Cluster (within) minimiert, während die Varianz zwischen den Clustern (between) maximiert wird.
- Man kann auch eine geeignete Klassenanzahl über den Informationsverlust festlegen.

Zu (b): Eine mögliche Verifikation könnte wie folgt gestaltet sein:

$$
\begin{aligned}
\sigma^2 &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}\sum_{x_i\in C_r}(x_i-\bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}\sum_{x_i\in C_r}(\mathbf{x}_i-\bar{x}_r+\bar{x}_r-\bar{x})^2 \\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}\sum_{x_i\in C_r}\left[(x_i-\bar{x}_r)^2+(\bar{x}_r-\bar{x})^2+2(x_i-\bar{x}_r)(\bar{x}_r-\bar{x})\right] \\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}\sum_{x_i\in C_r}(x_i-\bar{x}_r)^2+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}n_r(\bar{x}_r-\bar{x})^2+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}\sum_{x_i\in C_r}2(x_i-\bar{x}_r)(\bar{x}_r-\bar{x}) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}\sum_{x_i\in C_r}(x_i-\bar{x}_r)^2+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}n_r(\bar{x}_r-\bar{x})^2+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}2(\bar{x}_r-\bar{x})\sum_{x_i\in C_r}(x_i-\bar{x}_r) \\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}\sum_{x_i\in C_r}(x_i-\bar{x}_r)^2+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}n_r(\bar{x}_r-\bar{x})^2+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}2(\bar{x}_r-\bar{x})\underbrace{\left[\sum_{x_i\in C_r}x_i-\sum_{x_i\in C_r}\bar{x}_r\right]}_{=0} \\
&= \frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}\sum_{x_i\in C_r}(x_i-\bar{x}_r)^2+\frac{1}{n}\sum_{r=1}^{g}n_r(\bar{x}_r-\bar{x})^2
\end{aligned}
$$

Zu (c): Eine Methode der Gewichtung ermöglicht den Vergleich einer Kennzahl, etwa der Schadensfrequenz, zwischen verschiedenen Beständen, wie zum Beispiel über unterschiedliche Jahre hinweg. Dabei werden Einflüsse, die durch variierende Bestandsverteilungen entstehen, eliminiert.

Ein solcher Unterschied in der Schadenhäufigkeit könnte durch differierende Bestandsverteilungen in den beiden Jahren verursacht werden, weshalb dies überprüft werden sollte.

Zu (d): Der gewichtete Schadenbedarf (SB: Markt) mit individuellem Bestand (JE: VU) ist hier:

$$\frac{240\cdot 110+450\cdot 40+45\cdot 30+1100\cdot 20}{110+40+30+20}=\mathbf{339}.$$

Infolgedessen liegt das VU mit einem Schadenbedarf von 336 unter dem vergleichbaren Schadenbedarf des Marktes. Die Schadenbedarfe sind vergleichbar, da sie mithilfe derselben Bestandsverteilung ermittelt wurden.

Zu (e): Nach der UT 2025 wird gefordert, dass aufgrund Vorjahresschäden zurückgestufte Risiken in einer *SF-Klasse* landen mit der gleichen Schadenerwartung wie Risiken, die aufgrund schadenfreiem Verlauf in diese aufsteigen. Die Rückstufung erfolgt in jene *SF-Klasse*, die im Statistikjahr den (absolut) kleinsten Abstand zum SB-Index mit Schaden aufweist.

In unserem Fall hat das Risiko SF 10 mit *einem* Schaden laut der Tabelle einen SB-Index $= 1,6509$. Es wird also in SF 3 zurückgestuft, da hier die absolute Diskrepanz im SB-Index mit Vorjahresschaden und Statistikjahr $|1,6509 - 1,6800| = 0,0291$ minimal ist.

Zu Aufgabe 3:

Zu (a.i): Es gilt:

$$f(y_i; \lambda_i, \phi) = \frac{\lambda_i^{y_i}}{y_i!} \exp(-\lambda_i) = \exp\left\{y_i \log \lambda_i - \lambda_i - \log(y_i!)\right\}.$$

Mit $\theta_i = \log(\lambda_i)$, $b(\theta_i) = \exp(\theta_i)$, $\phi = 1$ und $c(y_i; \phi) = -\log(y_i!)$ ist bewiesen, dass die Poisson-Verteilung mit der angegebenen Parametrisierung zur exponentiellen Familie gehört.

Zu (a.ii): Für Erwartungswert und Varianz gilt in diesem Setting

$$E(y_i) = \mu_i = b'(\theta_i) \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(y_i) = \phi b''(\theta_i).$$

Dann folgt mit $b'(\theta_i) = \exp(\theta_i)$, $b''(\theta_i) = \exp(\theta_i)$ und $\phi = 1$

$$E(y_i) = \mu_i = \exp(\theta_i) \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(y_i) = \exp(\theta_i).$$

Einsetzen von $\theta_i = \log(\lambda_i)$ resultiert in

$$E(y_i) = \mu_i = \lambda_i \quad \text{und} \quad \mathrm{Var}(y_i) = \lambda_i.$$

Für den *natürlichen Link* gilt $\theta_i = \eta_i$, also

$$\theta_i = \log(\mu_i) = \log(\lambda_i) = g(\lambda_i) = \eta_i.$$

Also ist die natürliche Link-Funktion gegeben durch $g(.) = \log(.)$ (*log*-Link), die Response-Funktion durch $h(.) = g^{-1}(.) = \exp(.)$.

Zu (b):

Konkret sieht die *log-Likelihood* in diesem Fall wie folgt aus:

$$l = \sum_{k=1}^{K}\sum_{l=1}^{L}[\, w_{kl}y_{kl}\log(w_{kl}\beta_{k\cdot}\beta_{\cdot l}) - w_{kl}\beta_{k\cdot}\beta_{\cdot l} - \log(w_{kl}y_{kl}!)].$$

Ableitung nach $\beta_{k\cdot}$ und $\beta_{\cdot l}$ und Nullsetzen liefert die *Schätzgleichungen*

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_{k\cdot}} = \sum_{l=1}^{L}\left(\frac{w_{kl}y_{kl}}{\beta_{k\cdot}} - w_{kl}\beta_{\cdot l}\right) = 0 \quad \text{bzw.} \quad \frac{\partial l}{\partial \beta_{\cdot l}} = \sum_{k=1}^{K}\left(\frac{w_{kl}y_{kl}}{\beta_{\cdot l}} - w_{kl}\beta_{k\cdot}\right) = 0,$$

$$\sum_{l=1}^{L} w_{kl}y_{kl} = \beta_{k\cdot}\sum_{l=1}^{L} w_{kl}\beta_{\cdot l},$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{K} w_{kl}y_{kl} = \beta_{\cdot l}\sum_{k=1}^{K} w_{kl}\beta_{k\cdot}.$$

Zu (c): Da hier erwogen wird, ein Gamma-GLM zur Vorhersage des Schadendurchschnitts zu verwenden, sollte man nur die Zeilen verwenden, mit einer Schadenanzahl größer 0. Damit ergibt sich für die ersten vier Zeilen der Vektoren **w**, **y** und die Designmatrix **X**:

$$\mathbf{w} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{y} = \begin{bmatrix} 461 \\ 390 \\ 15 \\ 413 \\ \vdots \end{bmatrix}; \qquad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} 1 & 112 & 0 & 0 \\ 1 & 129 & 0 & 1 \\ 1 & 49 & 0 & 1 \\ 1 & 106 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Zu (d): Im Gamma-GLM mit *log*-Link gilt für die Prognose (multiplikatives Modell)

$$\hat{\mu}_i = \exp(\hat{\eta}_i) = \exp(\hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_1 + \cdots + \hat{\beta}_j x_j) = \exp(\hat{\beta}_0)\exp(\hat{\beta}_1 x_1)\cdots\exp(\hat{\beta}_j x_j).$$

Die *Schadendurchschnitts*-Prognosen der Datensätze liefern daher die folgenden Ergebnisse. Für (`Motorleistung=85, Region=c`):

$$\hat{\mu}_1 = \exp(5.0601 + 0.0128\cdot 85 - 0.2096\cdot 0 - 0.4135\cdot 1) = 309.39,$$

sowie für (`Motorleistung=250, Region=a`):

$$\hat{\mu}_2 = \exp(5.0601 + 0.0128\cdot 250 - 0.2096\cdot 0 - 0.4135\cdot 0) = 3866.48.$$

Man beachte hierbei, dass `Region=a` die Referenzkategorie darstellt.

Zu Aufgabe 4:

Zu (a): Bei einem XL pro Risiko nimmt man an, dass die erwartete Anzahl von Schäden mit dem (revalorisierten) Prämienvolumen skaliert. Die Verteilung der Schadenhöhen wird als unabhängig von der Größe des Portefeuilles angenommen (bis auf Inflation). Daher werden die Schäden nur mit dem Schadenindex indexiert. Die Summe der indexierten xs-Schäden wird dann durch die Summe der (revalorisierten) Prämienvolumina des Beobachtungszeitraumes geteilt. Bei einem Naturgefahren-Cat XL ist hingegen die Anzahl der Naturereignisse nicht von der Größe des Portefeuilles abhängig. Die Höhe des Schadens aus einem Ereignis skaliert näherungsweise mit der Größe des Portefeuilles. Daher werden die Schäden nicht nur mit dem Schadenindex indexiert, sondern auch noch mit dem Portefeuillewachstum vom jeweiligen Anfalljahr ins Quotierungsjahr skaliert. Das Portefeuillewachstum wird hierbei durch den Faktor

(Prämie im Quotierungsjahr) / (revalorisierte Prämie im jeweiligen Anfalljahr)

gemessen. Die Summe der as if-xs-Schäden wird dann durch das Produkt

(Anzahl Jahre im Beobachtungszeitraum) * (Prämie im Quotierungsjahr)

geteilt.

Zu (b): Es bezeichne P_i die Prämie, I_i^P den Prämienindex und I_i^S den Schadenindex im Jahr i. Die folgende Tabelle zeigt die revalorisierten Prämien

$$\bar{P}_i := P_i \cdot \frac{I_q^P}{I_i^P}$$

und die as-if Bereinigungsfaktoren

$$f_i := \frac{P_q}{\bar{P}_i} \cdot \frac{I_q^S}{I_i^S}.$$

Jahr	revalorisierte Prämie	Bereinigungsfaktor
2019	122.000	2,66
2020	144.950	2,18
2021	167.451	1,83
2022	195.660	1,44
2023	221.818	1,20
2024	231.379	1,12
2025	244.000	1,04
2026	250.000	1,00

Bezeichnet a_i den i-ten Schaden und $J(i)$ dessen Anfalljahr, dann berechnet sich der zugehörige as-if Schaden $\bar{a}_i$ als

$$\bar{a}_i := f_{J(i)} \cdot a_i$$

und der as-if xs-Schaden $\bar{x}_i$ als

$$\bar{x}_i := \min(5.000;\, \max(0;\, \bar{a}_i - 5.000)).$$

Wir erhalten folgende as-if Schäden:

i	Jahr $J(i)$	Schaden a_i	f_i	as-if Schaden $\bar{a}_i$	as-if xs-Schaden $\bar{x}_i$
1	2019	5.000	2,66	13.300	5.000
2	2022	4.000	1,44	5.760	760
3	2023	7.000	1,20	8.400	3.400
4	2024	6.500	1,12	7.280	2.280

Da sich der Beobachtungszeitraum über 6 Jahre erstreckt erhalten wir folgenden as-if Cat Burning Cost:

$$\mathrm{BC}^{\mathrm{Cat}} := \frac{\bar{x}_1 + \bar{x}_2 + \bar{x}_3 + \bar{x}_4}{6 \cdot P_q} = \frac{11.440}{6 \cdot 250.000} = 0{,}76\%.$$

Zu Aufgabe 5:

Zu (a): Grundlegende Annahme bei der Zuschlagsquotierung: Eine Verdoppelung der Deckungssumme kostet immer den gleichen prozentualen Zuschlag (= Zuschlagssatz) auf die Prämie.

Aus dieser Annahme folgt

$$S_z(2^n v_0) = (1+z)^n s_0$$

für $n \in \mathbb{Z}$. Setzt man in diese Formel $n = \log_2(v/v_0)$ ein, so erhält man die stetige Fortsetzung

$$S_z(v) = (1+z)^{\log_2(v/v_0)} s_0 = (v/v_0)^{\log_2(1+z)} s_0.$$

Zu (b): Eine Prämienfunktion S wird durch das kollektive Modell $\sum_{i=1}^{N} X_i$ dargestellt, wenn

$$S(v) = E\left(\sum_{i=1}^{N} \min(X_i, v)\right) = E(N)E(\min(X, v))$$

für alle $v \geq 0$ gilt (wobei X wie die X_i verteilt ist). Laut Skript gilt folgender

Satz: Eine Prämienfunktion $S\colon [0,\infty) \to [0,\infty)$ mit $S^{-1}(0) = \{0\}$ lässt sich genau dann durch ein kollektives Modell darstellen, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

(a) S ist konkav

(b) $\lim_{v\to 0} \frac{S(v)}{v} < \infty$ (d.h. S ist bei 0 rechtsseitig differenzierbar)

(c) $\lim_{v\to\infty} S'(v) = 0$ (wobei S' die rechtsseitige Ableitung von S bezeichnet)

Zu (c):

- S_a ist wegen $\lim_{v\to\infty} S'_a(v) = 1$ nicht als kollektives Modell darstellbar.
- S_b ist als kollektives Modell darstellbar (konkav, bei $v = 0$ rechtsseitig differenzierbar und $\lim_{v\to\infty} S'_b(v) = 0$.
- S_c ist nicht konkav und daher nicht als kollektives Modell darstellbar.

Zu (d): Es sei $C := 8.000$ und $D := 2.000$. Im ersten Schritt berechnen wir den Haftungsabschnitt c_i^{RV} xs d_i^{RV}, den der Rückversicherungslayer C xs D am Originallayer c_i xs d_i deckt. Hierzu berechnen wir zuerst die kumulierte Haftung der ersten i Originallayer

$$h_i := \sum_{\nu=1}^{i} \sigma_\nu c_\nu.$$

Falls $D \geq h_i$ oder $C + D \leq h_{i-1}$, so setzen wir $c_i^{\text{RV}} := 0$ und $d_i^{\text{RV}} := 0$. Ansonsten ist

$$c_i^{\text{RV}} = \frac{[\min(C + D, h_i) - \max(D, h_{i-1})]^+}{\sigma_i} \quad \text{und} \quad d_i^{\text{RV}} = d_i + \frac{[D - h_{i-1}]^+}{\sigma_i}.$$

Mit diesen Formeln erhalten wir

Layer Nr. i	Kumulierte Haftung h_i des EV	Haftung c_i^{RV} des RV	Priorität d_i^{RV} des RV
1	5.000	6.000	4.000
2	7.000	10.000	10.000
3	12.000	6.000	20.000

Zu (e): Sei $\zeta := \log_2(1 + 20\%) \approx 0{,}263$. Der Anteil π_i des Rückversicherers am Schadenbedarf des i-ten Originallayers berechnet sich als

$$\pi_i = \frac{(c_i^{\text{RV}} + d_i^{\text{RV}})^\zeta - (d_i^{\text{RV}})^\zeta}{(c_i + d_i)^\zeta - (d_i)^\zeta}.$$

Mit $s_i := 50\% \cdot p_i$ erhält man den erwarteten Schaden $\hat{s}_i$ des Rückversicherers aus dem dem i-ten Originallayer mittels $\hat{s}_i = \pi_i \cdot s_i$.

Layer Nr. i	Schadenbedarf s_i des EV	Anteil π_i des RV am erw. Schaden	Erw. Schaden $\hat{s}_i$ des RV
1	100	21,41%	21,41
2	5	100,00%	5,00
3	5	63,48%	3,17
Summe			29,58

Die Zuschlagsquotierung liefert also einen Schadenbedarf von 29,58 für den RV-Layer.

Zu Aufgabe 6:

Zu (a): Für den ML-Schäter gilt

$$\widehat{\alpha}^{\mathrm{ML}} = \frac{4}{\ln(2{,}5/2) + \ln(6/2) + \ln(4/2) + \ln(3{,}5/2)} \approx 1{,}55.$$

Zu (b): Mit allen drei Ansätzen werden kollektive Modelle mit Schadenzahlverteilung $\mathrm{Poi}(\widehat{\lambda})$ und Schadenhöhenverteilung $\mathrm{Pareto}(2.000, \widehat{\alpha})$ angepasst.

Ansatz 1 verwendet $\widehat{\alpha} := \widehat{\alpha}^{\mathrm{ML}} = 1{,}55$ und

$$\widehat{\lambda} := \frac{20.000}{100.000} \cdot 4 = 0{,}8$$

Ansatz 2 verwendet ebenfalls $\widehat{\alpha} := \widehat{\alpha}^{\mathrm{ML}} = 1{,}55$. Der geschätzte erwartete Schaden für den bestrichenen Layer 4.000 xs 2.000 ist $8\% \cdot 20.000$. Bezeichnet X eine Pareto(2.000, 1,55)-verteilte Zufallsvariable, so erhalten wir als Schätzer für die erwartete Schadenzahl

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda} := \frac{8\% \cdot 20.000}{\mathrm{E}(\min(4.000, (X-2.000)^+)} &= \frac{8\% \cdot 20.000}{\frac{2.000^{1{,}55}}{1-1{,}55} \cdot \left(6.000^{1-1{,}55} - 2.000^{1-1{,}55}\right)} \\ &\approx \frac{1.600}{1.649} \approx 0{,}97.\end{aligned}$$

Ansatz 3 verwendet $\widehat{\alpha} := 2{,}0$. Bezeichnet Y eine Pareto(2.000, 2)-verteilte Zufallsvariable, so erhalten wir als Schätzer für die erwartete Schadenzahl

$$\begin{aligned}\widehat{\lambda} := \frac{8\% \cdot 20.000}{\mathrm{E}(\min(4.000, (Y-2.000)^+)} &= \frac{8\% \cdot 20.000}{\frac{2.000^{2}}{1-2} \cdot \left(6.000^{1-2} - 2.000^{1-2}\right)} \\ &\approx \frac{1.600}{1.333} \approx 1{,}2\end{aligned}$$

Die drei Ansätze liefern also folgende Parameter:

	$\widehat{\lambda}$	$\widehat{\alpha}$
Ansatz 1	0,80	1,55
Ansatz 2	0,97	1,55
Ansatz 3	1,20	2,00

Zu (c): Man sollte Ansatz 3 verwenden, da der ML-Schätzer unter Verwendung von nur vier Schäden sehr unsicher ist.

Zu Aufgabe 7:

Zu (a): Der Rückversicherer beteiligt sich an diesem Risiko $2.000/5.000 = 40\%$ und zahlt somit $40\% \cdot 200 = 80$ bei dem Schaden.

Zu (b): Bei fakultativer Rückversicherung handelt es sich um die fallbezogene Überwälzung von Risiken. Der Zedent bietet dem RV die Beteiligung an einem Einzelrisiko an. Der RV kann bei jedem Risiko entscheiden, ob er sich beteiligt.

Zu (c): Bezeichnet X den xs-Schaden im XL, so gilt für die Wiederauffüllungprämie

$$P^{WA} = \min(1; X/4.000) \cdot 1.600$$

Wegen $\mathrm{P}(X > 4.000) > 0$ folgt

$$\mathrm{E}(P^{WA}) < \mathrm{E}(X/4.000 \cdot 1.600) = \mathrm{E}(X)/4.000 \cdot 1.600 = 1.000/4.000 \cdot 1.600 = 400.$$

Zu Aufgabe 8: Ohne weitere Erklärungen können für einen RV-Vertrag τ folgende Bezeichnungen verwendet werden:

- $S = \tilde{S}_\tau + \hat{S}_\tau$: Aufteilung des Jahresschadens auf Erst- und Rückversicherer
- $P = \tilde{P}_\tau + \hat{P}_\tau$: Aufteilung der Prämie auf Erst- und Rückversicherer
- $\tilde{N}_\tau = \tilde{P}_\tau + \hat{E}_\tau$: Nettoprämie des EV nach Rückversicherung
- $\hat{N}_\tau = \hat{P}_\tau - \hat{E}_\tau$: Nettoprämie des RV (d.h. RV-Prämie nach Abzug von ext. Kosten)

Zu (a): Ein RV-Vertrag heißt im Varianzmodell Pareto-optimal, wenn für alle RV-Verträge θ gilt

$$\begin{aligned} &\mathrm{Var}(\tilde{S}_\theta) < \mathrm{Var}(\tilde{S}_\tau) \;\Rightarrow\; \mathrm{Var}(\hat{S}_\theta) > \mathrm{Var}(\hat{S}_\tau) \quad \text{und} \\ &\mathrm{Var}(\hat{S}_\theta) < \mathrm{Var}(\hat{S}_\tau) \;\Rightarrow\; \mathrm{Var}(\tilde{S}_\theta) > \mathrm{Var}(\tilde{S}_\tau). \end{aligned}$$

Zu (b): Im Skript wird oBdA angenommen, dass die Nettoprämien nicht zufallsabhängig sind, d.h. $\tilde{N}_\tau = \mathrm{E}(\tilde{N}_\tau)$ und $\hat{N}_\tau = \mathrm{E}(\hat{N}_\tau)$. Falls es variable Prämien- oder Provisionsregelungen gibt, so werden diese hierzu in $\hat{S}_\tau$ anstatt in $\hat{P}_\tau$ bzw $\hat{E}_\tau$ berücksichtigt.

Zu (c): Gemäß eines Satzes im Skript gibt es (unter der oBdA-Annahme) zu einem Pareto-optimalen Vertrag τ stets Parameter $a > 0$ und b, so dass fast sicher gilt

$$\tilde{S}_\tau = aS + b. \qquad (*)$$

Daher sind der pro-Risiko XL und der Summenexzedent offenbar nicht Pareto-optimal. Bei der Quote mit Gewinnanteil wird der variable Gewinnanteil zur Verwendung der oBdA-Annahme in die Schadenvariable geschoben. Nach dieser Modifikation ist $(*)$ nicht mehr erfüllt. Daher ist die Quote mit Gewinnanteil ebenfalls nicht Pareto-optimal. Die Quote mit Fixprovision hingegen ist Pareto-optimal.