

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Schadenversicherungsmathematik II

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 24. Oktober 2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 16 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie es nach Möglichkeit, die Lösungen der einzelnen Aufgabenteile unzusammenhängend auf verschiedene Seiten zu streuen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Alexej Brauer, Dr. Florian Leitenstorfer, Marc Linde
Dr. Gerhard Quarg, Dr. Ulrich Riegel

Teil I – Modellierung [70 Punkte]

Aufgabe 1 (Interne Modelle in der Schadenversicherung) [17 Punkte]

- (a) [10 Punkte] Nennen und beschreiben Sie die wesentlichen Komponenten und Sub-Komponenten eines typischen internen Unternehmensmodells eines Mehrspartenversicherers im Schaden-/Unfallbereich.
- (b) [7=3+2+2 Punkte] Beleuchten Sie die Auswirkungen der nachstehenden strategischen und/oder operativen Entscheidungen auf die in Aufgabenteil (a) erläuterten Komponenten des typischen internen Unternehmensmodells: welche Komponenten können betroffen sein und in welcher Weise?
 - (i) Sofortige Einstellung des Neugeschäfts in der Sparte „Kraftfahrtversicherung“
 - (ii) Umstellung der Rückversicherungsstruktur in der Sparte „Feuer- und Sachversicherung“: Summenexzedenten werden durch eine Kombination aus Quote und Einzelschadenexzedenten ersetzt.
 - (iii) Änderung der Metrik zur risikoadjustierten Erfolgsmessung im internen Modell von RoRaC zu EVA.

Aufgabe 2.1 (Modellierung des Prämienrisikos) [18 Punkte]

Basisinformationen:

- „Haus & Hof“ trennt zur Modellierung des Prämienrisikos in der Sparte „Kraftfahrthaftpflicht“ zwischen Basis- und Großschäden.
- Zur Modellkalibrierung für die Jahresendrechnung 2024 wurden historische Basis- und Großschäden sowie Plandaten zu Bestand und Kosten jeweils mit dem Stand per Oktober 2024 einbezogen.
- Basisschäden unter der Großschadengrenze von $\tau = 1$ [Mio. €] werden gesamthaft als Basisschadenlast anhand einer Normalverteilung modelliert.
- Für die Großschäden wird ein kollektives Modell mit einer *Poissonverteilung Poi(λ)* für die jährliche Anzahl an Großschäden sowie einer *verschobenen Burrverteilung Burr($\alpha, \theta, \gamma, \tau$)* für die Höhe der Großschäden unterstellt.
 - Als Untergrenze wird die Großschadengrenze $\tau = 1$ angesetzt.
 - Jährliche Frequenz an Großschäden: $\hat{\lambda} = 2,5$
 - Geschätzte Parameter der $Burr(\alpha, \theta, \gamma, \tau)$: $\hat{\alpha} = 0,75$, $\hat{\theta} = 3$, $\hat{\gamma} = 2$.
- Unmittelbar vor der Jahresendberechnung per 31.12.2024 weist die Controlling-Abteilung auf die folgenden Entwicklungen hin, die sich im November und Dezember 2024 ereignet haben:
 - (E1) Die erfreulich hohe Anzahl an Neuabschlüssen deutet darauf hin, dass der erwartete Bestand (in Jahreseinheiten) in 2025 voraussichtlich 10% über Plan liegen wird. Zusätzlich konnte die Durchschnittsprämie durch gezielte Beitragssanpassungen um weitere 5% ggü. dem ursprünglichen Plan gesteigert werden.
 - (E2) Der Vorstand hat in seiner letzten Vorstandssitzung 2024 ein Kostensenkungsprogramm für 2025 ff. beschlossen, wodurch die Betriebskosten dauerhaft um 5% gesenkt werden sollen.
 - (E3) Im Dezember hat sich eine schwere Kollision zwischen einem PKW und einer vollbesetzten Straßenbahn ereignet. Der geschätzte Schadenaufwand (Brutto vor Rückversicherung) beläuft sich auf 80 Mio. € und ist vollständig durch „Haus & Hof“ zu tragen. Die Experten von „Haus & Hof“ schätzen die Wiederkehrperiode eines solchen Großschadens anhand von Marktdaten auf 50 Jahre.

Sie müssen nun kurzfristig entscheiden, in welchem Umfang durch diese Entwicklungen Anpassungsbedarf an den Modellverteilungen und -parametern des Prämienrisikos besteht, und möglicherweise Risikokapitalzahlen betroffen sind.

Aufgaben:

(a) [3 Punkte] Wie ist das ultimative Prämienrisiko definiert? Was ist die maßgebliche Größe zur Risikomessung?

(b) [4 Punkte] Analysieren Sie eine der beiden Entwicklungen

- Zunahme von Bestand und Durchschnittsprämie (siehe (E1))
- geplante Kostensenkungen (siehe (E2))

hinsichtlich ihres Einflusses auf die angegebenen Modellverteilungen und -parameter im Prämienrisiko: würden Sie die von Ihnen gewählte Entwicklung in den Jahresendberechnungen berücksichtigen - und wenn ja, welche Auswirkungen würden Sie in Bezug auf das Risikokapital erwarten?

(c) [11=7+4 Punkte] Welchen Einfluss hat der Großschaden (siehe (E3)) auf die angegebenen Modellverteilungen und -parameter im Prämienrisiko? Gehen Sie zur Beantwortung wie folgt vor:

- (i) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der OEP-Kurve für Großschäden in der Sparte „Kraftfahrthaftpflicht“ unter den angegebenen Verteilungen und Parametern.
- (ii) Bestimmen Sie die Höhe des maximalen jährlichen Großschadens zu den Wiederkehrperioden 50 und 200 Jahren, wie er sich unter der vorgesehene Kalibrierung des internen Modells zum 31.12.2024 ergeben würde, und vergleichen diese Werte mit der Höhe des tatsächlich eingetretenen Großschadens. Legen die Ergebnisse eine Neukalibrierung der Modellverteilungen und Neubestimmung der Modellparameter nahe?

Hinweis: Die Verteilungsfunktion der verschobenen Burrverteilung Burr($\alpha, \theta, \gamma, \tau$) mit Formparametern $\alpha > 0, \gamma > 0$ sowie Skalenparameter $\theta > 0$ und „Threshold“ τ (= Großschadenuntergrenze) lautet:

$$F(x | \alpha, \theta, \gamma, \tau) = 1 - \left[1 + \left(\frac{x - \tau}{\theta} \right)^\gamma \right]^{-\alpha}, \quad x > \tau$$

Aufgabe 2.2 (Modellierungsansätze für Katastrophenschäden)
[19 Punkte]

Basisinformationen:

- Das Prämienrisiko im genehmigten internen Modell von „Haus & Hof“ umfasst auch das Risiko aus Katastrophenschäden.
- Derzeit werden im Katastrophenrisiko lediglich die Naturgefahren Sturm, Hagel, Überschwemmung und Erdbeben explizit modelliert, und zwar mittels exposure-basierter Modelle. Alle weiteren Gefahren werden aus Gründen der Immateriellität und eingeschränkten Datenverfügbarkeit in der Sparte „Sonstige Elementar“ zusammengefasst und damit lediglich implizit im internen Modell erfasst.
- Seit Beginn des Jahres ist erstmalig ein exposure-basiertes Modell eines etablierten externen Modellanbieters für *Waldbrandrisiken* in Deutschland auf dem Markt verfügbar, welches dem im Seminar behandelten idealtypischen Aufbau exposure-basierter Modelle folgt.
- Der Vorstand möchte von Ihnen wissen, ob die Verwendung dieses Modells eine abweichende Materialitätseinschätzung für die Gefahr *Waldbrand* nahelegen würde.
- Zur Beantwortung dieser Fragestellung liegt Ihnen der folgende Output in Form einer Event Loss Table (ELT) analog zu den im Seminar behandelten Formaten vor, der auf einem Lauf mit dem Wohngebäudebestand des Unternehmens basiert. Hierbei sind monetäre Größen stets Brutto vor Rückversicherung und in der Einheit Mio. € angegeben:

EVENT ID	RATE	PERSPV VALUE	STDDEV	EXPVALUE
4711	0,5%	200	50	1.000
4712	2,0%	50	30	250
4713	10,0%	10	5	100

Aufgaben:

- (a) [8 Punkte] Die Einträge der vorliegenden Event Loss Table lassen sich als Parameter eines statistischen Modells auffassen. Beschreiben Sie den Modellrahmen, benennen Sie die wesentlichen Annahmen und berechnen Sie auf dieser Basis den Erwartungswert und die Standardabweichung des Jahresgesamtschadens aus Waldbrandschäden.
- (b) [7 Punkte] Die Aktuare von „Haus & Hof“ erproben den folgenden vereinfachten Ansatz zur Abschätzung des Katastrophenschadenpotentials aus Waldbrandschäden. Bestimmen Sie anhand der in Aufgabenteil (a) analytisch ermittelten Größen, Erwartungswert und Standardabweichung des Jahresgesamtschadens, das für die Materialitätsabschätzung maßgebliche 99,5%-Quantil der Jahresgesamtschadenverteilung, indem Sie für den Jahresgesamtschaden eine *Logarithmische Normalverteilung* unterstellen.

Hinweise:

- *Hinweise: Eine Zufallsgröße X heißt lognormalverteilt mit den Parametern μ und σ , wenn $\ln X$ normalverteilt ist mit den Parametern μ und σ . Die Verteilungsfunktion F_X von X lautet*

$$F_X(z | \mu, \sigma) = \Phi\left(\frac{\ln(z) - \mu}{\sigma}\right), z > 0.$$

Hierbei repräsentiert die Funktion Φ die Gauss'sche Phi-Funktion.

Ferner existieren sämtliche Momente von X und besitzen die Darstellung:

$$\mathbb{E}[X^n] = \exp\left(n \cdot \mu + \frac{n^2 \cdot \sigma^2}{2}\right), n \in \mathbb{N}.$$

Für die Inverse Φ^{-1} der Gauß'schen Phi-Funktion Φ gilt:

$$\Phi^{-1}(0,995) = 2,58.$$

- *Sollten Sie Aufgabenteil (a) nicht gelöst haben, gehen Sie bitte von folgenden Werten für Erwartungswert $\mathbb{E}[S]$ und Standardabweichung $\sigma[S]$ des Jahresgesamtschadens S aus: $\mathbb{E}[S] = 3$, $\sigma[S] = 17$.*

- (c) [4 Punkte] Vergleichen Sie den in (b) vorgestellten vereinfachten Modellierungsansatz mit dem im Seminar behandelten Ansatz zur Re-Simulation von Ereignisschäden aus ELTs. Stellt der vereinfachte Ansatz im Falle der vorliegenden ELT eine sinnvolle Alternative dar? Gehen Sie bei Ihrer Beurteilung insbesondere auf die Eignung zur Approximation der „wahren“ Gesamtschadenverteilung aus dem externen Modell sowie hinsichtlich der Abbildung der Risikominderung aus etwaiger Rückversicherung ein.

Aufgabe 3 (Modellierung - Reserverisiko) [16 Punkte]

Basisinformationen:

- Im internen Unternehmensmodell von „Haus & Hof“ wird neben dem Prämien- und Katastrophenrisiko auch das Reserverisiko abgebildet.
- Das Abwicklungsdiagramm der kumulierten Zahlungen $C_{i,k}$ für angefallene, aber noch nicht abgewickelte Schadensfälle in der Sparte „Wohngebäude“ umfasst die Anfalljahre 2022 - 2024 und besitzt zum Stichtag 31.12.2024 die Gestalt:

Anfalljahr i / Abwicklungsjahr k	1	2	3
2022	10	20	30
2023	20	30	
2024	30		

- Von den Reservierungsaktuaren wurden zum Stichtag 31.12.2024 bereits folgende Best-Estimates $\hat{R}_i^{(2024)}$ der nominalen Bedarfsreserven für die drei Anfalljahre $i \in \{2022, 2023, 2024\}$ ermittelt:

Anfalljahr i	$\hat{R}_i^{(2024)}$
2022	0
2023	20
2024	50

- Die Quantifizierung des ultimativen und einjährigen Reserverisikos in der Sparte „Wohngebäude“ wird mithilfe des internen Simulationsmodells auf Basis von 1.000 Simulationen vorgenommen, wobei sich der Begriff Risiko in diesem Kontext durchgehend auf den Eintritt eines aus Unternehmenssicht negativen Ereignisses bezieht.
- Diskontierung wird sowohl bei der Ermittlung der Best Estimates wie auch bei der Risikomessung vernachlässigt.

- Im internen Modell ergaben sich in den drei für die Risikomessung maßgeblichen, schlechtesten Simulationspfaden die folgenden Realisierungen der *ultimativen Schadenaufwände* U_i für die Anfalljahre 2022 - 2024:

Simulation M	${}^{(M)}U_i$ per Anfalljahr i		
	2022	2023	2024
225	30	59	94
613	30	58	95
712	30	56	100

- Für die *neugeschätzten Ultimates* $\widehat{U}_i^{(2025)}$ am Ende des Kalenderjahres 2025 ergaben sich folgende Realisierungen in den drei für die Risikomessung maßgeblichen, schlechtesten Simulationspfaden:

Simulation M	${}^{(M)}\widehat{U}_i^{(2025)}$ per Anfalljahr i		
	2022	2023	2024
399	30	55	91
613	30	54	88
712	30	55	93

Aufgaben:

- [4 Punkte] Erläutern Sie den Unterschied zwischen der ultimativen und einjährigen Risikosicht im Reserverisiko. Nennen Sie zusätzlich jeweils einen Einsatzbereich für Ergebnisse aus der ultimativen und einjährigen Risikosicht.
- [12 Punkte] Bestimmen Sie aus den vorliegenden Simulationen das Reserverisiko in der ultimativen und der einjährigen Risikosicht für die Sparte „Wohngebäude“, jeweils als Tail-Value-at-Risk zum Niveau 99,8%.

Teil II – Reservierung [110 Punkte]

Aufgabe 4 (Reserveprozess und Rechnungslegung) [24 Punkte]

Der Reservebericht der letzten Prozessdurchführung kann als eine wichtige Grundlage für die Durchführung des Reserveprozesses dienen, reicht aber als alleinige Informationsquelle für die aktuelle Prozessdurchführung nicht aus.

- (a) [9 Punkte] Benennen Sie drei weitere Informationsquellen, die Sie für die Reservierung sinnvollerweise hinzuziehen sollten. Beschreiben Sie jeweils explizit
- die Informationsquelle,
 - die Art der Information und
 - warum Sie diese Information benötigen.

Bei der Bestimmung der Prämienrückstellungen unter Solvency II gibt es zahlreiche Punkte zu beachten.

- (b) [3 Punkte] Erläutern Sie allgemein, welche Verträge bei der Berechnung der Prämienrückstellungen unter Solvency II zu berücksichtigen sind.
- (c) [3 Punkte] Geben Sie bei den folgenden drei Beispielen jeweils an, ob die Versicherungsverträge für die Prämienrückstellungen unter Solvency II zu berücksichtigen sind (Bilanzstichtag 31.12.2024, keine Begründung erforderlich).
- (A) Ein nicht gekündigter Vertrag, zu dem die Kündigungsfrist am 31.12.2024 verstrichen war und welcher sich damit automatisch zum 01.01.2025 um ein weiteres Jahr verlängert hat.
- (B) Ein Vertrag, der am 07.01.2025 abgeschlossen wurde, allerdings auf den 01.01.2025 (Beginn des Versicherungsschutzes) rückdatiert wurde.
- (C) Ein Vertrag, der am 27.12.2024 abgeschlossen wurde mit Beginn des Versicherungsschutzes am 01.02.2025 und welcher erst am 27.01.2025 im Bestandssystem angelegt wurde.
- (d) [3 Punkte] Betrachten Sie einen proportionalen Rückversicherungsvertrag (eine Quote). Ist der resultierende Zahlungsstrom, der in den Prämienrückstellungen des Versicherungsunternehmens zum Ansatz kommt, stets gleich dem Zahlungsstrom, der in den Prämienrückstellungen des Rückversicherers zum Ansatz kommt? Begründen Sie Ihre Antwort.

Betrachten Sie die folgenden Aussagen (A) bis (F) im Kontext eines deutschen Versicherungsunternehmens. Geben Sie jeweils an, auf welches der Rechnungslegungssysteme IFRS17, HGB oder Solvency II die Aussage am ehesten zutrifft. Begründungen sind nicht erforderlich.

(e) [6 Punkte] Die Aussagen lauten:

- (A)** Bei den versicherungstechnischen Rückstellungen werden zwar Schadenregulierungskosten, nicht aber Kosten der allgemeinen Verwaltung oder der Verwaltung der Kapitalanlagen berücksichtigt.
- (B)** Der Schwerpunkt des Rechnungslegungssystems liegt auf der Vermittlung entscheidungsnützlicher Informationen bzgl. Vermögens-, Finanz- und Ertragslage des Versicherungsunternehmens.
- (C)** Die Risikomarge stellt sicher, dass der Wert der versicherungstechnischen Rückstellungen dem Betrag entspricht, den die Versicherungsunternehmen fordern würden, um die Versicherungsverpflichtungen übernehmen und erfüllen zu können.
- (D)** Bei der Anwendung des Proportionalitätsprinzips ist die unternehmensindividuelle Situation zu betrachten.
- (E)** Es gibt keine eigenständige Definition von Versicherungsverträgen, es werden aber Anforderungen an den Risikotransfer von Rückversicherungsverträgen gestellt.
- (F)** Die Unternehmen müssen auf Anfrage der Aufsicht in der Lage sein, die Angemessenheit ihrer Daten nachzuweisen.

Aufgabe 5 (Schwankungsrückstellung) [29 Punkte]

Die Schadenerfahrung in einem Versicherungszweig aus dem Kraftfahrtbereich eines Versicherungsunternehmens wurde im Beobachtungszeitraum durch mehreren Besonderheiten beeinflusst. Das verminderte Verkehrsaufkommen während der Covid-19 Pandemie führte zu sehr niedrigen Schadenquoten im Jahr 2020. Im Jahr 2021 hoben sich der Covid-19 Effekt und die erhöhten Schäden durch Tief Bernd weitgehend auf, bevor die Schadenquoten in den Jahren 2022 und 2023 aufgrund der stark gestiegenen Kosten beispielsweise für Ersatzteile ein neues Niveau erreichten. Erst im Jahr 2024 führten entsprechende Preissteigerungen wieder zu einer niedrigeren Schadenquote.

Die folgende Tabelle zeigt für die Geschäftsjahre $i = 2010, \dots, 2024$ des Beobachtungszeitraums die verdienten Beiträge P_i , die zugehörigen Schadenquoten q_i sowie deren Quadrate q_i^2 (Geldbeträge sind in Mio. € angegeben). Zur Vereinfachung von Rechnungen sind in der letzten Zeile noch die jeweiligen Summen angegeben.

Geschäftsjahr i	P_i	q_i	q_i^2
2010	79	77,2%	0,596
2011	81	86,4%	0,747
2012	84	85,7%	0,735
2013	83	75,9%	0,576
2014	85	77,6%	0,603
2015	87	70,1%	0,492
2016	88	86,4%	0,746
2017	89	77,5%	0,601
2018	91	86,8%	0,754
2019	93	76,3%	0,583
2020	93	50,0%	0,250
2021	96	74,0%	0,547
2022	97	99,5%	0,990
2023	99	99,0%	0,980
2024	125	80,8%	0,653
Summe $\sum_{i=2010}^{2024}$	1370	1203,3%	9,851

Die Schwankungsrückstellung des letzten Bilanzjahres war $SR_{2024} = 2,3$. Für das Bilanzjahr $i = 2025$ werden die verdienten Beiträge auf $P_{2025} = 125$ geschätzt.

Gehen Sie davon aus, dass kein Sicherheitszuschlag existiert, so dass die Regelungen zur Verminderung von Sollbetrag und Überschaden nicht greifen.

- (a) [6 Punkte] Berechnen Sie die durchschnittliche Schadenquote \bar{q} des Beobachtungszeitraums, die zugehörige Standardabweichung σ und den aufgrund der Prämienabschätzung erwarteten Sollbetrag SB_{2025} des Bilanzjahres 2025.
- (b) [12 Punkte] Stellen Sie die Abhängigkeit der Schadenquote nach Schwankung q_{2025}^{nS} (y-Achse) von der Schadenquote q_{2025} des Geschäftsjahrs (x-Achse) im Bereich $q_{2025} = 0\%$ bis $q_{2025} = 100\%$ graphisch dar. Hinweis: Alle wichtigen Punkte des Graphen sind zu berechnen und alle wesentlichen Elemente der graphischen Darstellung müssen beschriftet werden.

Im Bilanzjahr 2020 mit Beobachtungszeitraum 2005, ..., 2019 betrug die durchschnittliche Schadenquote 80,0%, die Standardabweichung 6,0% und der Sollbetrag dementsprechend $SB_{2020} = 25,1$.

- (c) [8 Punkte] Schätzen Sie ab, wie sich die durchschnittliche Schadenquote, die Standardabweichung sowie der Sollbetrag über die Zeit von 2020 bis 2025 entwickelt haben.

Hinweis: Eine exakte Berechnung ist weder verlangt, noch mit den gemachten Angaben möglich.

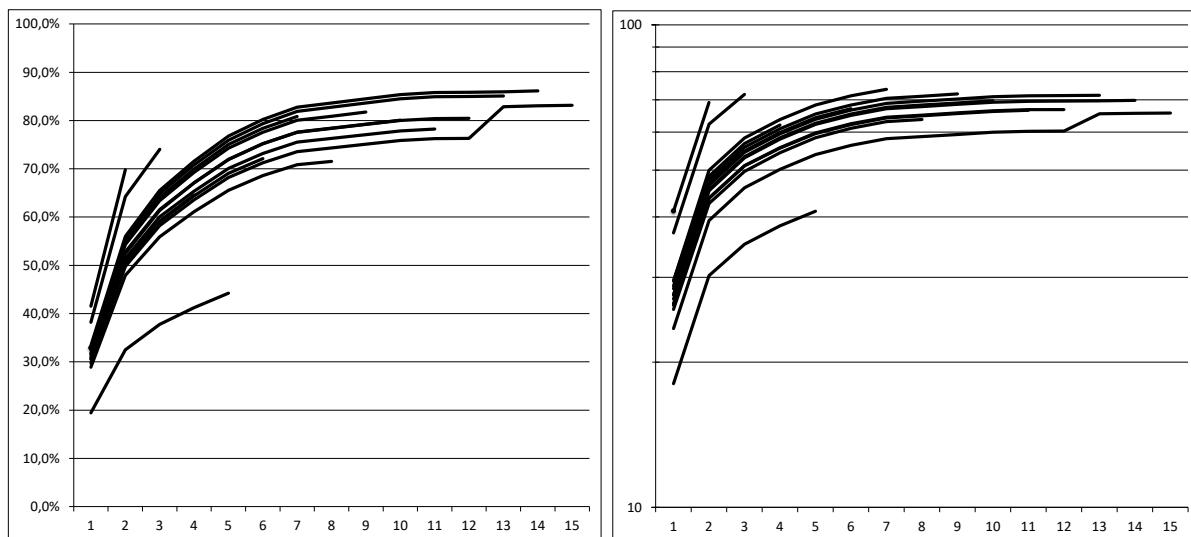
- (d) [3 Punkte] Wie groß war die Schwankungsrückstellung SR_{2020} ? Begründen Sie Ihre Aussage.

Aufgabe 6 (Modellannahmen und Modellauswahl) [28 Punkte]

Für die Reserveberechnung eines Geschäftssegments im Kraftfahrtbereich sind die Prämievolumina für die Anfalljahre 2010 bis 2024 gegeben, sowie die historische Abwicklung der Zahlungen als kumulierte Schadenquotendreiecke:

Prämie in € Mio.		Schadenquote in %														
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
79	2010	29,7	49,8	58,2	63,6	68,2	71,3	73,5	74,3	75,1	75,9	76,2	76,3	82,8	83,0	83,1
81	2011	33,4	56,0	65,5	71,6	76,8	80,2	82,8	83,6	84,5	85,4	85,8	85,9	86,0	86,1	
84	2012	32,8	55,4	64,8	70,8	75,9	79,3	81,9	82,8	83,6	84,5	84,9	85,0	85,1		
83	2013	31,6	52,8	61,5	67,1	71,9	75,2	77,6	78,4	79,2	80,0	80,4	80,5			
85	2014	31,1	51,4	60,1	65,4	70,1	73,1	75,5	76,3	77,1	77,9	78,3				
87	2015	31,7	52,4	61,3	67,1	71,9	75,2	77,6	78,4	79,2	80,1					
88	2016	32,7	54,3	63,4	69,2	74,3	77,6	78,4	80,1	80,9	81,7					
89	2017	28,9	47,9	55,9	61,1	65,6	68,6	70,8								
91	2018	32,4	54,9	64,1	69,9	75,0	78,4	80,8								
93	2019	30,5	50,7	58,9	64,4	69,0	72,1									
93	2020	19,4	32,5	37,8	41,3	44,2										
96	2021	30,7	50,6	59,2	64,6											
97	2022	38,2	64,2	74,1												
99	2023	41,5	69,8													
125	2024	32,9														

Für die Analyse und die Modellauswahl zwischen ILR-Modell und CL-Modell stehen zudem die folgenden beiden Abbildungen zur Verfügung. Sie zeigen links die zum Dreieck gehörende kumulative Schadenquotengrafik und rechts die logarithmisch skalierten Zahlungsstände in Mio. €.



Die unmittelbare Auswirkung des verminderten Verkehrsaufkommens auf das Anfalljahr 2020 während der Covid-19 Pandemie ist in beiden Grafiken gut zu erkennen. Ebenso deutlich treten die Folgen der hohen Inflation durch stark gestiegenen Reparaturkosten, hauptsächlich für Ersatzteile, in den Anfalljahren 2022 und 2023 zu Tage. Erst für das Anfalljahr 2024 wurden daraus resultierende, notwendige Preissteigerungen bei den Kfz-Policen durchgeführt.

- (a) [3 Punkte] Welche der beiden folgenden Aussagen trifft eher zu? Begründen Sie Ihre Auswahl.
- (A)** Die Preissteigerungen bei den Kfz-Policen für das Anfalljahr 2024 gingen mit einem hohen Verlust an Geschäftsvolumen durch Kündigungen der Policennehmer einher.
- (B)** Trotz deutlicher Preissteigerungen wurde kaum Geschäftsvolumen verloren. Im wesentlichen konnten Kündigungen durch Neugeschäft kompensiert werden.
- (b) [8 Punkte] Beschreiben Sie allgemein die Anwendung des Parallelenkriteriums sowie dessen theoretische Hintergründe. Wenden Sie das Kriterium auf das dargestellte Abwicklungsdiagramm an, um zwischen dem ILR-Modell und dem CL-Modell eine Auswahl zu treffen und begründen Sie Ihre Entscheidung. Gehen Sie dabei explizit auf das Covid-19-Jahr 2020 und die Inflationsjahre 2022 und 2023 ein.
- (c) [6 Punkte] Die nach dem CL-Modell geschätzten Residuen $\widehat{\text{Res}}^{CL}(C_{2020,k})$ des Anfalljahres 2020 betragen für die Abwicklungsjahre $k = 2, \dots, 5$

$$0,22, -0,64, 0,40 \text{ und } -1,31.$$

Berechnen Sie die entsprechenden Residuen $\widehat{\text{Res}}^{ILR}(S_{2020,k})$ für $k = 2, \dots, 5$, welche nach dem ILR-Modell geschätzt werden. Verwenden Sie die folgende Tabelle für geschätzte Zuwachsquoten \widehat{m}_k und Varianzparameter \widehat{s}_k .

k	2	3	4	5
\widehat{m}_k	21,3%	8,6%	5,4%	4,7%
\widehat{s}_k	0,336	0,109	0,065	0,059

Interpretieren Sie die Werte der Residuen (CL und ILR) im Zusammenhang mit Covid-19.

Im Anfalljahr 2010 stieg die Schadenquote im Abwicklungsjahr 13 aufgrund einer Gerichtsentscheidung in einem Sprung von 76,3% auf 82,8% an.

- (d) [3 Punkte] Erläutern Sie, ob dieser Anstieg im Widerspruch zu den Modellannahmen des unter (b) gewählten Modells (ILR oder CL) steht oder nicht.
- (e) [5 Punkte] Geben Sie eine Näherung für das entsprechende geschätzte Residuum ab. Eine exakte Berechnung ist nicht gefordert. Ordnen Sie Ihr Ergebnis im Zusammenhang mit der Fragestellung ein, inwieweit Residuen für die Identifikation von Ausreißern geeignet sind.
- (f) [3 Punkte] Erläutern Sie kurz, wie Sie mit dem beobachteten starken Anstieg im Rahmen der Berechnung der Endschadenprognose umgehen würden.

Aufgabe 7 (Ein Modell für Zahlungen und Schadenaufwände) [29 Punkte]

Für ein gegebenes Geschäftssegment wird das Chain-Ladder Verfahren sowohl auf das Dreieck der Zahlungen als auch auf das Dreieck der Schadenaufwände angewendet. Es besteht das Problem, dass sich die Schätzungen der Endschadenstände auf Basis der beiden Datentypen erheblich unterscheiden.

(a) [5 Punkte] Erläutern Sie die wichtigsten möglichen Ursachen für das Problem.

Wie üblich bezeichne $C_{i,k}$ den kumulativen Zahlungsstand und $D_{i,k}$ die Schadenaufwände des Anfalljahres $i = 1, \dots, n$ zum Abwicklungsjahr $k = 1, \dots, u$. Mit

$$S_{i,k} = C_{i,k} - C_{i,k-1} \quad \text{und} \quad T_{i,k} = D_{i,k} - D_{i,k-1}$$

seien die entsprechenden Zuwächse bezeichnet und mit $R_{i,k} = D_{i,k} - C_{i,k}$ der entsprechende (Einzelfall-)Reservestand. Zudem bezeichne

$$\mathcal{A}_{i,k} = \sigma\{C_{i,1}, \dots, C_{i,k}, D_{i,1}, \dots, D_{i,k}\}$$

die Bedingung (σ -Algebra) aller Zahlungen und Schadenaufwände des Anfalljahres i bis zum Abwicklungsjahr k . Zur Lösung des Eingangs beschriebenen Problems wird folgendes Modell (CD-Modell) vorgeschlagen:

(CD1) Die Anfalljahre $\{C_{i,1}, \dots, C_{i,u}, D_{i,1}, \dots, D_{i,u}\}$, $1 \leq i \leq n$ sind unabhängig.

(CD2) Es gibt Parameter $\mu_k > 0$ und $\rho_k > -1$, so dass für $1 \leq i \leq n$ und $2 \leq k \leq u$

$$E(S_{i,k} | \mathcal{A}_{i,k-1}) = \mu_k \cdot R_{i,k-1} \quad \text{und} \quad E(T_{i,k} | \mathcal{A}_{i,k-1}) = \rho_k \cdot D_{i,k-1}$$

gilt. Die Parameter μ_k werden Auszahlungsfaktoren genannt.

(CD3) Es gibt Parameter $\sigma_k > 0$ und $\tau_k > 0$, so dass für $1 \leq i \leq n$ und $2 \leq k \leq u$

$$\text{Var}(S_{i,k} | \mathcal{A}_{i,k-1}) = \sigma_k^2 \cdot R_{i,k-1} \quad \text{und} \quad \text{Var}(T_{i,k} | \mathcal{A}_{i,k-1}) = \tau_k^2 \cdot D_{i,k-1}.$$

(b) [3 Punkte] Erläutern Sie die Motivation für den Begriff Auszahlungsfaktor.

(c) [4 Punkte] Beschreiben Sie eine Grafik, die geeignet ist, die Modellvoraussetzung (CD2) für $S_{i,k}$

$$E(S_{i,k} | \mathcal{A}_{i,k-1}) = \mu_k \cdot R_{i,k-1}$$

für das Abwicklungsjahr k zu überprüfen. Begründen Sie Ihre Angaben.

(d) [6 Punkte] Geben Sie für $2 \leq k \leq n$ Schätzer $\hat{\mu}_k$ und $\hat{\rho}_k$ für μ_k und ρ_k an, die erwartungstreu und varianzminimierend sind. Begründen Sie, dass die geforderten Eigenschaften vorliegen.

Mittels $\hat{\mu}_k$ und $\hat{\rho}_k$ können nun aufgrund (CD2) Schätzer für die zukünftigen Stände $C_{i,k}$ und $D_{i,k}$ angegeben werden. Für die erste Diagonale in der Zukunft, also für $k = n - i + 2$, lauten die Schätzer der Zuwächse

$$\hat{S}_{i,k} = \hat{\mu}_k \cdot R_{i,k-1} \quad \text{und} \quad \hat{T}_{i,k} = \hat{\rho}_k \cdot D_{i,k-1}$$

und damit

$$\hat{C}_{i,k} = \hat{S}_{i,k} + C_{i,k-1}, \quad \hat{D}_{i,k} = \hat{T}_{i,k} + D_{i,k-1}, \quad \text{und} \quad \hat{R}_{i,k} = \hat{D}_{i,k} - \hat{C}_{i,k}.$$

Für alle weiteren Diagonalen, also $k > n - i + 2$, ergibt sich dementsprechend

$$\hat{S}_{i,k} = \hat{\mu}_k \cdot \hat{R}_{i,k-1} \quad \text{und} \quad \hat{T}_{i,k} = \hat{\rho}_k \cdot \hat{D}_{i,k-1}$$

sowie

$$\hat{C}_{i,k} = \hat{S}_{i,k} + \hat{C}_{i,k-1}, \quad \hat{D}_{i,k} = \hat{T}_{i,k} + \hat{D}_{i,k-1}, \quad \text{und} \quad \hat{R}_{i,k} = \hat{D}_{i,k} - \hat{C}_{i,k}.$$

- (e) [7 Punkte] Erläutern Sie, wie das CD-Modell das Problem unterschiedlicher Schätzungen für Zahlungen und Schadenaufwände lösen soll. Stellen Sie Vergleiche zu separaten CL-Rechnungen und zum MCL-Verfahren her.
- (f) [4 Punkte] Bewerten Sie, ob das CD-Modell durch Einbeziehung beider Datentypen (Zahlungen und Schadenaufwände) zu einer Verbesserung der Prognosequalität für den Endschadenstand und/oder für den zukünftigen Zahlungsstrom führt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 1 (Modellierung - Interne Modelle in der Schadenversicherung) [17 Punkte]

Aufgaben:

(a) [10 Punkte] Nennen und beschreiben Sie die wesentlichen Komponenten und Sub-Komponenten eines typischen internen Unternehmensmodells eines Mehrspartenversicherers im Schaden-/Unfallbereich.

- *Versicherungstechnisches Modell (auch: Passiv-Modell)*: Modellierung der versicherungstechnischen Risiken und passivseitigen Cash-Flows eines Kompositversicherers.
 - *Brutto-Modell*: Modellierung aller relevanten Größen des kommenden Neugeschäftsjahres zur Messung des ultimativen Prämienrisikos Brutto vor Rückversicherung:
 - * Bruttoschäden (Basisschäden, Großschäden, Katastrophenschäden)
 - * Prämien und Kosten (GuV- und Bilanzdaten sowie Annahmen zur Bestandsentwicklung)
 - *Reserverisiko*: Stochastische Abwicklung der Schadenreserven für vergangene Anfalljahre und Messung des ultimativen Reserverisikos.
 - *Abwicklungsmodell*: Erzeugung der Schaden-Cashflows für bereits angefallene Schäden und Neuschäden, Ausgangspunkt für Überleitung von ultimativem Risikohorizont in die Kalenderjahressicht / einjährige Risikosicht.
 - *Rückversicherungsmodell*: Abbildung der wichtigsten RV-Verträge und Berechnung der Nettogrößen auf Basis der simulierten Bruttogrößen aus dem Brutto-Modell.
- *Nicht-versicherungstechnisches Modell (auch: Aktiv-Modell)*: Modellierung der Kapitalanlagerisiken und aktivseitigen Cash-Flows eines Kompositversichereres.
 - *Kapitalmarkt-Modell*: Generiert Kapitalmarktszenarien, erzeugt durch einen ökonomischen Szenariogenerator (Economic Scenario Generator, ESG).
 - *Investment-Modell*: Entwicklung der Buch- und Marktwerte des Portfolios auf Basis der Kapitalmarktpfade aus dem Kapitalmarkt-Modell.
- *Management-Modell*: Zusammenführen der aktiv- und passivseitigen Cash Flows. Managementregeln für Aktiv- und Passivseite sowie deren Interaktion.

- *Auswertungs-Modell:* Generierung der Ausgaben und Kenngrößen wie z.B. Ruinwahrscheinlichkeiten, Risikokapital, GuV- und Bilanzposten pro Simulationspfad, risikoadjustierte Kennzahlen wie RoRaC, EVA, etc...
- (b) Beleuchten Sie die Auswirkungen der nachstehenden strategischen und/oder operativen Entscheidungen auf die in Aufgabenteil (a) erläuterten Komponenten des typischen internen Unternehmensmodells: welche Komponenten können betroffen sein und in welcher Weise?
- (i) [3 Punkte] Sofortige Einstellung des Neugeschäfts in der Sparte „Kraftfahrtversicherung“
- Die Beantwortung der Fragestellung hängt von den (zu treffenden) Annahmen zur weiteren Bestandsentwicklung ab - wird unterstellt, dass im Neugeschäftsjahr kein Bestand mehr vorhanden ist, sind sämtliche Teilmodelle des versicherungstechnischen Modells betroffen: Anpassungen am Bruttomodell, da keine Neuschäden mehr eintreten, RV-Modell, da für alle zukünftigen Anfalljahre kein RV-Schutz mehr notwendig ist. Im Abwicklungsmodell werden lediglich für die bestehenden Schadenreserven (Altschäden) Abwicklungsmuster benötigt, allerdings nicht mehr für die Abwicklung der Neuschäden.
 - Wird hingegen davon ausgegangen, dass noch ein Restbestand vorhanden ist, der sich über die kommenden Jahren sukzessive abwickelt („Run-Off“), sind lediglich die Parameter im Bruttomodell (Bestand und Kosten) und ggf. RV-Modell anzupassen, falls infolge des Bestandsrückgangs der RV-Schutz adjustiert wird.
 - Betroffen sein können in beiden Szenarien das Management- und Investmentmodell, da der rückläufige Bestand den versicherungstechnischen Cashflow beeinflusst und das Anlagevolumen mindern wird, was wiederum Auswirkungen auf ALM und SAA hat.
- (ii) [2 Punkte] Umstellung der Rückversicherungsstruktur in der Sparte „Feuer- und Sachversicherung“: Summenexzedenten werden durch eine Kombination aus Quote und Einzelschadenexzedenten ersetzt.
- Bruttomodell: Einzelgroßschäden sind zu modellieren, um die Entlastung durch den Einzelschadenexzedenten adäquat abbilden zu können.
 - Rückversicherungsmodell: Implementierung der neuen RV-Struktur, die Bruttogrößen müssen zunächst Quote, dann XL durchlaufen.
- (iii) [2 Punkte] Änderung der Metrik zur risikoadjustierten Erfolgsmessung im internen Modell von RoRaC zu EVA.



- Auswertungsmodell: Implementierung der neuen Metrik, Ausschalten der alten Metrik
- Falls die (unterjährige) Steuerung von Versicherungstechnik und Kapitalanlage im Unternehmen anhand von risikoadjustierten Performancekennzahlen erfolgt, können auch vorgelagerte Modelle wie Managementmodell, Investmentmodell oder Bruttomodell betroffen sein.
- RV-Modell: Berücksichtigung der neuen Metrik, falls für das technische Pricing relevant oder aber Beurteilung der Wertschöpfung auf Ebene des einzelnen Rückversicherungsvertrags erfolgt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2.1 (Modellierung des Prämienrisikos) [18 Punkte]

(a) [3 Punkte] Wie ist das ultimative Prämienrisiko definiert? Was ist die maßgebliche Größe zur Risikomessung?

- Das Prämienrisiko beschreibt das Risiko, dass die Prämien des zukünftigen Neugeschäftsjahres nicht ausreichen, um alle in diesem Zeitraum anfallenden Schäden und Kosten bis zur vollständigen Abwicklung zu decken.
- Die maßgebliche Ergebnisgröße zur Messung des Prämienrisikos ist das (*ultimative*) *Anfalljahresergebnis des Neugeschäftsjahres*, das als Differenz zwischen der verdienten Prämie und der Summe aus Kosten und Schadenzahlungen bis zur vollständigen Abwicklung definiert ist.

(b) [4 Punkte] Analysieren Sie eine der beiden Entwicklungen

- Zunahme von Bestand und Durchschnittsprämie (siehe (E1))
- geplante Kostensenkungen (siehe (E2))

hinsichtlich ihres Einflusses auf die angegebenen Modellverteilungen und -parameter im Prämienrisiko: würden Sie die von Ihnen gewählte Entwicklung in den Jahresendberechnungen berücksichtigen - und wenn ja, welche Auswirkungen würden Sie in Bezug auf das Risikokapital erwarten?

- (E1): Zunahme von Bestand und Durchschnittsprämie
 - Die angegebenen Größenordnungen von 5% bzw. 10% Abweichung bei Durchschnittsprämie bzw. Bestandszuwachs ggü. dem ursprünglichen Plan erscheinen auf jeden Fall materiell, eine Berücksichtigung im Modell daher angezeigt. Zudem lassen sich Bestandsparameter im Allgemeinen unkompliziert im Modell anpassen, und es ist insbesondere keine komplettene Neukalibrierung des Prämienrisikos notwendig.
 - Analyse der drei Komponenten des Anfalljahresergebnisses, die maßgeblich für das Prämienrisiko sind: ein größerer Bestand (bei „Kraftfahrt-Haftpflicht“ im Allgemeinen Jahreseinheiten) erhöht die Prämien und die Kosten im Modell durch Verwendung fixer Durchschnittsprämien bzw. Kostensätze (ggf. Differenzierung nach Schadenregulierungs-, Verwaltungs- und Abschlusskosten) gleichmäßig in jedem Simulationspfad - setzen wir im Folgenden voraus, dass der überplanmäßig dazugekommene Bestand qualitativ gleiche Risiken aufweist und vergleichbar mit dem aktuell vorhandenen Bestand ist, gilt dies aufgrund der gleichbleibenden Frequenz auch für die erwartete Anzahl an Basis- und Großschäden, welche sich wiederum in der Regel linear in den erwarteten Jahresgesamtschaden übersetzt.

- Da der Parameter μ der Normalverteilung dem Erwartungswert der Basischadenlast entspricht, würde sich der Parameter μ entsprechend um 10% erhöhen. Basischäden werden gemeinhin als unabhängig bzw. nicht vollständig korreliert angenommen, so dass sich ein Ausgleichseffekt durch das größere Kollektiv und damit ein Rückgang der relativen Schwankung (Variationskoeffizient) zeigen sollte. Da der Parameter σ der Normalverteilung der Standardabweichung der Basischadenlast entspricht, wird sich der Zuwachs von σ sicherlich unterhalb von 10% bewegen. Auf die Einzelgroßschäden hat der größere Bestand wiederum keinen Einfluss.
 - Die Auswirkungen auf das Risikokapital für das Prämienrisiko (in Bezug auf Höhe und Richtung) hängen wiederum von der aktuellen Auskömmlichkeit des Geschäfts ab. Sofern das Anfalljahresergebnis vor der Risikomessung noch zentriert wird, wird der bestandsbedingte Anstieg der Schäden eine Erhöhung des Risikokapitals nach sich ziehen.
 - Die Prämie wird in der Regel als deterministische Größe im Modell abgebildet. Die Erhöhung der Durchschnittsprämie bewirkt somit eine Parallelverschiebung des Anfalljahresergebnisses in positive Richtung, was einen Rückgang des Prämienrisikos in Höhe der absoluten Prämienänderung bedeutet. Wird das Anfalljahresergebnis vor der Risikomessung hingegen noch zentriert, hat der Prämienanstieg keinen Einfluss auf das Risikokapital, da dieser keinen Beitrag zur Schwankung leistet.
- (E2): geplante Kostensenkungen
 - Die angegebene Größenordnung von 10% Abweichung bei den Kosten erscheint auf jeden Fall materiell, eine Berücksichtigung im Modell daher angezeigt. Zudem ist die Anpassung der Kostenparameter (ggf. Differenzierung nach Schadenregulierungs-, Verwaltungs- und Abschlusskosten) relativ unkompliziert umzusetzen, und es ist insbesondere keine komplette Neukalibrierung des Modells notwendig.
 - Die Kosten werden in der Regel als deterministische Größe im Modell abgebildet und leisten damit keinen Beitrag zur Schwankung des Anfalljahresergebnisses. Zudem sind die beiden anderen Komponenten des Anfalljahresergebnisses, Prämien und Schäden, von der Kostensenkung nicht betroffen. Daher führt diese Maßnahme zu einer Parallelverschiebung des Anfalljahresergebnisses in positive Richtung und damit zu einem Rückgang im Risiko.
 - Bei Zentrierung des Anfalljahresergebnisses vor der Risikomessung

hat die Änderung der Kosten wiederum keinen Einfluss auf das Risikokapital.

(c) [11=7+4 Punkte] Welchen Einfluss hat der Großschaden (siehe (E3)) auf die angegebenen Modellverteilungen und -parameter im Prämienrisiko? Gehen Sie hierzu wie folgt vor:

(i) Bestimmen Sie die Funktionsvorschrift der OEP-Kurve für Großschäden in der Sparte „Kraftfahrt-Haftpflicht“ unter den angegebenen Verteilungen und Parametern.

- In einem kollektiven Modell mit Poisson(λ)-verteilter Schadenanzahl N und unabhängig und identisch nach X verteilten Zufallsvariablen X_1, \dots, X_N besitzt die Verteilungsfunktion der Maximumsvariable $M_N = \max \{X_1, \dots, X_N\}$ die Gestalt:

$$F_{M_N}(z) = \exp \{-\lambda \cdot (1 - F_X(z))\}.$$

- Die Voraussetzungen zur Anwendung dieser Formel sind im vorliegenden Fall gemäß der Basisinformationen erfüllt. Somit gilt für die Darstellung der verallgemeinerten Inversen $F_{M_N}^{-1}$ von F_{M_N} in Abhängigkeit der verallgemeinerten Inversen F_X^{-1} von F_X :

$$F_{M_N}^{-1}(q) = F_X^{-1}\left(1 + \frac{\ln q}{\lambda}\right).$$

Dieser Ausdruck ist offensichtlich nur für $1 + \ln q / \lambda > 0$ oder äquivalent $q > \exp \{-\lambda\}$ definiert. Im vorliegenden Fall ist die Inverse $F_{M_N}^{-1}$ somit lediglich für $q > \exp \{-2,5\} \approx 0,082$ und damit $T = 1/(1 - q) > 1,089$ wohldefiniert.

- Da die Einzelereignisse gemäß Voraussetzung einer $Burr(\alpha, \theta, \gamma, \tau)$ -Verteilung genügen, besitzt die Inverse von F_X die folgende Gestalt:

$$F_X^{-1}(u | \alpha, \theta, \gamma, \tau) = \theta \cdot \sqrt[\gamma]{(1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1} + \tau, \quad 0 < u < 1.$$

Dies gilt wegen

$$\begin{aligned} u &= 1 - \left[1 + \left(\frac{x-\tau}{\theta} \right)^\gamma \right]^{-\alpha} \\ \Leftrightarrow (1-u)^{-1/\alpha} &= 1 + \left(\frac{x-\tau}{\theta} \right)^\gamma \\ \Leftrightarrow \sqrt[\gamma]{(1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1} &= \frac{x-\tau}{\theta} \\ \Leftrightarrow \theta \cdot \sqrt[\gamma]{(1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1} + \tau &= x \end{aligned}$$

Somit erhalten wir für die Funktionsvorschrift der OEP-Kurve:

$$\begin{aligned} OEP(T) &= F_{M_N}^{-1}\left(1 - \frac{1}{T}\right) \\ &= \theta \cdot \sqrt{\left(-\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)}{\lambda}\right)^{-\frac{1}{\alpha}}} - 1 + \tau \quad \text{für } T > 1,089, \text{ sonst } 0. \end{aligned}$$

bzw. unter Verwendung der geschätzten Parameter:

$$OEP(T) = 3 \cdot \sqrt{\left(-\frac{\ln\left(1 - \frac{1}{T}\right)}{2,5}\right)^{-\frac{4}{3}}} - 1 + 1, \quad T > 1,089$$

- (ii) Bestimmen Sie die Höhe des maximalen jährlichen Großschadens zu den Wiederkehrperioden 50 und 200 Jahren, wie er sich unter der vorgesehenen Kalibrierung des internen Modells zum 31.12.2024 ergeben würde, und vergleichen diese Werte mit der Höhe des tatsächlich eingetretenen Großschadens. Legen die Ergebnisse eine Neukalibrierung der Modellverteilungen und Neubestimmung der Modellparameter nahe?

- Die Werte der OEP-Kurve zu den Wiederkehrperioden $t_1 = 50$ und $t_2 = 200$ ergeben sich erneut durch Transformation in die entsprechenden Quantilniveaus $q_1 = 0,98$ sowie $q_2 = 0,995$ vermöge $q_i = 1 - 1/t_i$ und Auswertung von

$$OEP(t_i) = 3 \cdot \sqrt{\left(-\frac{\ln q_i}{2,5}\right)^{-\frac{4}{3}}} - 1 + 1.$$

- Für $t_1 = 50$ ergibt sich ein maximaler jährlicher Ereignisschaden von ca. 75 Mio. €, für $t_2 = 200$ wiederum ca. 190 Mio. € (bzw. 100 Mio. €, da KH-Policen in Deutschland mittlerweile ein Deckungslimit bei 100 Mio. € aufweisen und nur noch Altverträge über Illimite-Deckungen verfügen, womit ggf. eine Kappung der Großschäden bei der Obergrenze von 100 Mio. € angebracht wäre)
- Die theoretische Wiederkehrperiode, die dem Schadenereignis durch das Modell zugeordnet wird (ca. 50 Jahre), befindet sich damit im Rahmen der Experteneinschätzungen, so dass eine unmittelbare Anpassung an den Verteilungen und Parametern der Grofschadenmodellierung nicht zwingend erforderlich scheint.

Lösungshinweise zu Aufgabe 2.2 (Modellierungsansätze für Katastrophenschäden) [19 Punkte]

(a) [8 Punkte] Die Einträge der vorliegenden Event Loss Table lassen sich als Parameter eines statistischen Modells auffassen. Beschreiben Sie den Modellrahmen, benennen Sie die wesentlichen Annahmen und berechnen Sie auf dieser Basis den Erwartungswert und die Standardabweichung des Jahresgesamtschadens aus Waldbrandschäden.

- Zum Modellrahmen und den wesentlichen Annahmen: Die Einzelszenarien $i, i \in \{4711, 4712, 4713\}$ (siehe Spalte EVENT ID) sind unabhängig und bilden jeweils ein kollektives Modell, d.h. für den Jahresgesamtschaden pro Einzelszenario i gilt:

$$S_i = \sum_{j=1}^{N_i} X_{ij}$$

mit $Poi(\lambda_i)$ -verteilter Ereignisanzahl N_i sowie unabhängig und identisch verteilten Ereignisschadenhöhen $X_{ij}, j \in \{1, \dots, N_i\}$ mit

- mittlerer Anzahl an Ereigniseintritten λ_i (= RATE)
- Erwartungswert $\mathbb{E}[X_{ij}]$ (= PERSPVALUE)
- Standardabweichung $\sigma[X_{ij}]$ (= STDDEV)
- Beta(α_i, β_i)-verteilten Schadengraden X_{ij}/\max_i , wobei \max_i die von Szenario i betroffenen versicherten Werte (= EXPVALUE) darstellen
(Hinweis: diese Annahme wird für die nachfolgenden analytischen Berechnungen nicht benötigt und ist daher nicht zwingend aufzuführen.)

- Hierbei sind auch die N_i und X_{ij} jeweils unabhängig
- Der szenarioübergreifende Jahresgesamtschaden S besitzt somit die Darstellung:

$$S = \sum_{i \in \{4711, 4712, 4713\}} S_i.$$

- Unter den oben angeführten Modellannahmen lassen sich die beiden Formeln nach Wald zur Bestimmung von Erwartungswert und Varianz von S_i anwenden:

$$\mathbb{E}[S_i] = \lambda_i \cdot \mathbb{E}[X_{ij}],$$

$$\mathbb{V}[S_i] = \lambda_i \cdot (\mathbb{E}[X_{ij}]^2 + \sigma^2[X_{ij}]).$$

- Erwartungswert und Varianz des szenario-übergreifenden Jahresschadens S ermitteln sich durch Summation der einzelnen Erwartungswerte und Varianzen aller Szenarien, letzteres aufgrund der Unabhängigkeitsannahme:

$$\mathbb{E}[S] = \sum_{i \in \{4711, 4712, 4713\}} \mathbb{E}[S_i], \quad \mathbb{V}[S] = \sum_{i \in \{4711, 4712, 4713\}} \mathbb{V}[S_i].$$

- Damit ergibt sich für den Erwartungswert:

$$\mathbb{E}[S] = 0,5\% \cdot 200 + 2,0\% \cdot 50 + 10,0\% \cdot 10 = 1 + 1 + 1 = 3$$

sowie die Varianz

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[S] &= 0,5\% \cdot (200^2 + 50^2) + 2,0\% \cdot (50^2 + 30^2) + 10,0\% \cdot (10^2 + 5^2) \\ &= 212,5 + 68 + 12,5 = 293. \end{aligned}$$

- Für die Standardabweichung $\sigma[S]$ erhalten wir

$$\sigma[S] = \sqrt{\mathbb{V}[S]} = 17,12 \approx 17.$$

(b) [7 Punkte] Die Aktuare von „Haus & Hof“ erproben den folgenden vereinfachten Ansatz zur Abschätzung des Katastrophenschadenpotentials aus Waldbrandschäden. Bestimmen Sie anhand der in Aufgabenteil (a) analytisch ermittelten Größen, Erwartungswert und Standardabweichung des Jahresgesamtshadens, das für die Materialitätsabschätzung maßgebliche 99,5%-Quantil der Jahresgesamtschadenverteilung, indem Sie für den Jahresgesamtschaden eine *Logarithmische Normalverteilung* unterstellen.

- Für die Logarithmische Normalverteilung mit den beiden Parametern μ und σ gilt:

– Erwartungswert: $\mathbb{E}[S] = \exp\left\{\mu + \frac{\sigma^2}{2}\right\}$

– Varianz:

$$\begin{aligned} \mathbb{V}[S] &= \mathbb{E}[S^2] - \mathbb{E}[S]^2 = \exp\{2\mu + 2\sigma^2\} - \exp\{2\mu + \sigma^2\} \\ &= (\exp\{\sigma^2\} - 1) \cdot \exp\{2\mu + \sigma^2\} \\ &= (\exp\{\sigma^2\} - 1) \cdot \mathbb{E}[S]^2 \end{aligned}$$

Nach Umstellung ergibt sich folgende Darstellung der Parameter in Abhängigkeit von Erwartungswert und Varianz:

$$\sigma = \sqrt{\ln(\mathbb{V}[S]/\mathbb{E}[S]^2 + 1)}, \quad \mu = \ln(\mathbb{E}[S]) - \sigma^2/2.$$

- Durch Einsetzen der Ergebnisse aus Aufgabenteil (b) erhalten wir:

$$\sigma = 1,87, \mu = -0,65$$

- Für das Quantil q_p der Lognormalverteilung zum Niveau $0 < p < 1$ gilt:

$$q_p = \exp \{ \mu + \sigma \cdot \Phi^{-1}(p) \}.$$

- Mit den obigen Parametern ergibt sich für das zur Materialitätsabschätzung maßgebliche 0,995-Quantil $Q_{0,995}$ bei Rundung auf volle Beträge:

$$Q_{0,995} = 65.$$

(c) [4 Punkte] Vergleichen Sie den in (b) vorgestellten vereinfachten Modellierungsansatz mit dem im Seminar behandelten Ansatz zur Re-Simulation von Ereignisschäden aus ELTs. Stellt der vereinfachte Ansatz im Falle der vorliegenden ELT eine sinnvolle Alternative dar? Gehen Sie bei Ihrer Beurteilung insbesondere auf die Eignung zur Approximation der „wahren“ Gesamtschadenverteilung aus dem externen Modell sowie hinsichtlich der Abbildung der Risikominderung aus etwaiger Rückversicherung ein.

- Zur Beantwortung der Fragestellung sollten neben den Schwierigkeiten bei der Abbildung der Risikominderung aus etwaiger Rückversicherung mindestens eine weitere der nachfolgenden Limitationen genannt und näher erläutert werden.
- Zunächst ist festzuhalten, dass Erwartungswert und Standardabweichung des szenario-übergreifenden Jahresgesamtschadens aus der Aggregation der ELT-Parameter pro Einzelszenario hervorgehen und damit verdichtete Größen darstellen. Dieser Schritt ist daher bereits mit einem Informationsverlust ggü. einer Modellierung auf Ebene der Einzelszenarien bzw. einzelnen Ereignisschäden verbunden.
- Der aus der Aggregation resultierende Informationsverlust wiegt bei Katastrophenschäden umso schwerer, da sich ihr selteses Auftreten (Jahresfrequenz der vorliegenden ELT beträgt lediglich 0,125) in Kombination mit der hohen Schadenhöhe bei Eintritt der einzelnen Szenarien in einer entsprechenden Schiefe des Jahresgesamtschadens auf szenario-übergreifender Ebene niederschlägt.
- Erwartungswert und Standardabweichung enthalten im Allgemeinen zu wenige Informationen über den Verlauf der Jahresgesamtschadenverteilung von Katastrophenschäden, insbesondere am ökonomisch relevanten rechten Verteilungsende.

- Die Lognormalverteilung ist eine stetige Verteilung mit zwei Parametern und nimmt Werte auf der gesamten positiven reellen Achse an. Im vorliegenden Fall weist die „wahre“ Katastrophenschadenverteilung allerdings eine sehr starke Konzentration im Nullpunkt ($\exp \{-0,125\} \approx 88\%$) auf. Die Lognormalverteilung vermag diese Charakteristik nicht korrekt wiederzugeben.
- Zusammengenommen besteht daher die Gefahr, dass die Approximation mit der Lognormalverteilung zu grob ist und speziell das Schadenpotential am rechten Verteilungsende und damit das Katastrophenrisiko nicht adäquat erfasst werden.
- Das Verfahren zur Re-Simulation aus einer Event Loss Table beinhaltet die Modellierung von Einzelereignissen gemäß kollektivem Modell und nutzt dazu die in der ELT vorliegenden Informationen auf Einzelszenariobasis. Dieser Ansatz versetzt die Modellierer in die Lage, bei entsprechend hoher Simulationsanzahl die „wahre“ Katastrophenschadenverteilung des externen Modells nahezu exakt zu reproduzieren.
- Hinsichtlich der Abbildung etwaiger Risikominderung aus Rückversicherung: beim vereinfachten Ansatz liegen ausschließlich Jahresschäden vor, somit lassen sich bspw. Quoten und Stop-Loss-Verträge auf Jahresschadenbasis exakt abbilden. Im Gegensatz dazu liegen aus dem Re-Simulationsverfahren Einzelereignisse vor, wodurch sich einzelereignisbasierte RV-Verträge wie Kumulschadenexzedenten exakt im Modell abbilden lassen, während dies im vereinfachten Vorgehen nur approximativ möglich ist.
- Zusammengenommen sollte dem Re-Simulationsansatz der Vorzug gegeben werden.

Lösungshinweise zu Aufgabe 3 (Reserverisiko) [16 Punkte]

(a) [4 Punkte] Erläutern Sie den Unterschied zwischen der ultimativen und einjährigen Risikosicht im Reserverisiko. Nennen Sie zusätzlich jeweils einen Einsatzbereich für Ergebnisse aus der ultimativen und einjährigen Risikosicht.

- In der einjährigen Risikosicht im Reserverisiko wird die Unsicherheit über die weitere Abwicklung bereits angefallener Schäden und ihre Auswirkungen auf die ökonomischen Eigenmittel lediglich über die kommenden 12 Monate einbezogen (= ökonomisches Abwicklungsergebnis des nächsten Kalenderjahres), in der ultimativen Sicht hingegen über den gesamten Abwicklungszeitraum (= Abweichung der zukünftigen Zahlungen / Bedarfsreserve vom Best-Estimate der Schadenzahlungen).
- Als mögliche Einsatzbereiche für die *ultimative Risikosicht* im Reserverisiko lassen sich nennen:
 - Ableitung von Konfidenzniveaus für die Best-Estimate Schätzung der Schadenzahlungen, Best-/Worst-Case-Analysen für die weitere Schadenabwicklung
 - Beurteilung der Auskömmlichkeit der Schadenzahlungen unter HGB durch Gegenüberstellung mit den Reserverisikoverteilungen
- Die *einjährige Risikosicht* ist die maßgebliche Risikosicht zur Bestimmung des aufsichtsrechtlichen Risikokapitalbedarfs unter Solvency II, dementsprechend sind mögliche Einsatzbereiche:
 - Berechnung der Solvenzkapitalanforderung (SCR) gemäß Säule I bzw. Gesamtsolvabilitätsbedarf (GSB) für interne ökonomische Sicht im ORSA gemäß Säule II
 - Actual vs. Expected-Analysen für Schadenzahlungen
 - Inputgrößen für Limitsysteme, insbesondere Risikotragfähigkeitslimite, die auf SCR oder GSB basieren

(b) [12 Punkte] Bestimmen Sie aus den vorliegenden Simulationen das Reserverisiko in der ultimativen und der einjährigen Risikosicht für die Sparte „Wohngebäude“, jeweils als Tail-Value-at-Risk zum Niveau 99,8%.

- Der Ultimateschätzer $\widehat{U}_i^{(2024)}$ eines Anfalljahres i ermittelt sich als Summe von Best-Estimate $\widehat{R}_i^{(2024)}$ und dem jeweiligen Diagonalstand des Schadenzahlungsdreiecks:

Anfalljahr i	$\hat{U}_i^{(2024)}$
2022	30
2023	50
2024	80

- Die für das ultimative Reserverisiko maßgebliche Verlustgröße ist die Differenz Δ_i zwischen dem tatsächlichen Ultimate U_i und dem zum Stichtag 31.12.2024 geschätzten Ultimate $\hat{U}_i^{(2024)}$. Zur Berechnung der Verteilung dieser Verlustgröße werden die Differenzen Δ_i pro Einzelsimulation und Anfalljahr ermittelt und anschließend zum Gesamtverlust Δ durch Addition der Δ_i über alle Anfalljahre aggregiert:

Simulation M	$(^M)\Delta_i := (^M)U_i - \hat{U}_i^{(2024)}$ per Anfalljahr i			$(^M)\Delta := \sum_i (^M)\Delta_i$
	2022	2023	2024	
225	0	9	14	23
	0	8	15	
712	0	6	20	26

- Im vorliegenden Fall ist der Schätzer für den *Tail-Value-at-Risk* zum Niveau 99,8% gegeben durch

$$TVaR_{0,998}(\Delta) = \frac{\sum_{M=1}^{1000} (^M)\Delta \cdot \mathbb{I}_{[(^M)\Delta \geq VaR_{0,998}(\Delta)]}}{\mathbb{I}_{[(^M)\Delta \geq VaR_{0,998}(\Delta)]}}.$$

wobei $VaR_{0,998}(\Delta)$ als Value-at-Risk zum Niveau 99,8% wegen $\lfloor 0,998 \cdot 1.000 \rfloor = 2$ dem zweithöchsten Verlust entspricht.

Mit $VaR_{0,998}(\Delta) = 23$ ergibt sich

$$TVaR_{0,998}(\Delta) = \frac{23 + 23 + 26}{3} = \frac{72}{3} = 24.$$

- Die für das einjährige Reserverisiko maßgebliche Verlustgröße ist das negative ökonomische Abwicklungsergebnis $-\widehat{CDR}^{(2024 \rightarrow 2025)}$ mit

$$\widehat{CDR}^{(2024 \rightarrow 2025)} = \sum_{i=2022}^{2024} \widehat{CDR}_i^{(2024 \rightarrow 2025)} \text{ und } \widehat{CDR}_i^{(2024 \rightarrow 2025)} = \widehat{U}_i^{(2024)} - \widehat{U}_i^{(2025)}$$



Simulation M	$-(^M)\widehat{CDR}_i = (^M)\widehat{U}_i^{(2025)} - \widehat{U}_i^{(2024)}$			$-(^M)\widehat{CDR}$
	2022	2023	2024	
399	0	5	11	16
613	0	4	8	12
712	0	5	13	18

- Wegen $VaR_{0,998}(-\widehat{CDR}^{(2024 \rightarrow 2025)}) = 16$ erhalten wir

$$TVaR_{0,998}(-\widehat{CDR}^{(2024 \rightarrow 2025)}) = \frac{16 + 18}{2} = 17.$$

**Lösungshinweise zu Aufgabe 4 (Reserveprozess und Rechnungslegung)
[24 Punkte]**

(a) [9 Punkte] Mögliche Informationsquellen sind:

- Prozessbeschreibung: Hier werden zum Beispiel Zuständigkeiten und Verantwortlichkeiten oder auch unternehmensinterne Richtlinien zur Entscheidungsfindung dokumentiert. Die Prozessbeschreibung ist die Basis für die Durchführung des Prozesses.
- Schadenabteilung: Informationen über aktuelle Schadentrends. Beispielsweise können neue Schadenbilder oder sich ändernde Trends die Aussagekraft historischer Daten für Prognosen in die Zukunft beeinflussen oder sogar zunichte machen.
- Bestandsführungssysteme: Informationen über Änderungen beim aktuellen Bestand zum Beispiel im Vergleich zum Vorjahr. Auch hier gilt, dass Änderungen des Bestands die Aussagekraft historischer Daten für Prognosen für das im Geschäftsjahr neu gezeichnete Geschäft beeinflussen oder sogar zunichte machen können.
- Schadensystem: Die Schadendreiecke inklusive der Daten des aktuellen Kalenderjahres stellen die Basis der Reserveberechnungen dar.
- Schaden- oder Rechtsabteilung: Aussagen zu relevanten laufenden Gerichtsverfahren könnten die Interpretation der gebuchten Einzelfallreserven stark beeinflussen.
- Tarifierungsabteilung: Informationen über etwaige Anpassungen bei den Tarifen. Beispielsweise würden Preisadjustierungen über die a-priori Schätzer des B/F-Verfahrens sich unmittelbar auf die Einschätzung des im Geschäftsjahr neu gezeichneten Geschäfts durchschlagen.
- Externe Informationsquellen: Marktdaten, beispielsweise des GDV können zum „Benchmarking“ herangezogen werden. Inflationsindizes oder Zinsstrukturkurven von offiziellen Stellen sind an verschiedenen Stellen des Reserveprozesses notwendig.
- Risikomanagement: Informationen, für welche Portefeuilles im Risikomanagement aufgrund jüngster Entwicklungen erhöhte Unsicherheiten gesehen werden. Die entsprechenden Segmente bedürfen im Reservierungsprozess einer erhöhten Aufmerksamkeit um die Risiken adäquat zu berücksichtigen.

Bemerkung: In der Aufgabe waren drei Informationsquellen gefordert.

- (b) [3 Punkte] Bei der Berechnung der Prämienrückstellung unter Solvency II sind sämtliche Zahlungsströme für alle am bzw. vor dem Bilanzstichtag abgeschlossenen Versicherungsverträge zu berücksichtigen, die auch nach dem Bilanzstichtag noch ganz oder teilweise Versicherungsschutz gewähren oder auch beginnen. Entscheidend ist, ob der Tag, an dem das Versicherungsunternehmen Vertragspartner geworden ist bzw. der Tag, an dem der Versicherungsschutz beginnt, sofern dieser früher liegt, auf bzw. vor den Bilanzstichtag fällt.
- (c) [3 Punkte] Die Verträge aus (A) und (C) sind zu berücksichtigen, der Vertrag aus (B) nicht.
- (d) [3 Punkte] Die Aussage ist falsch, da die einforderbaren Beträge aus RV im Rahmen der Grenzen der Versicherungsverträge zu berechnen sind, auf die sich die Rückversicherung bezieht. Beim Rückversicherer hingegen sind die Vertragsgrenzen des Rückversicherungsvertrags entscheidend.
- (e) [6 Punkte] Die zutreffenden Antworten sind
- (A)** HGB
(B) IFRS
(C) Solvency II
(D) Solvency II
(E) HGB
(F) Solvency II

Lösungshinweise zu Aufgabe 5 (Schwankungsrückstellung) [29 Punkte]

Auf eine Unterscheidung zwischen $=$ und \approx bei Rundungen wurde in der Lösung zwecks besserer Lesbarkeit verzichtet.

- (a) [6 Punkte] Für die Schadenquote gilt $\bar{q} = \frac{1}{15} \sum_{i=1}^{15} q_i = \frac{1203,3\%}{15} = 80,2\%$ und für die Standardabweichung

$$\begin{aligned}\bar{\sigma}^2 &= \frac{1}{14} \left(\sum_{i=1}^{15} q_i^2 - 15 \bar{q}^2 \right) \\ &= \frac{1}{14} \left(9,851 - 15 \cdot (80,2\%)^2 \right) = (12,0\%)^2,\end{aligned}$$

womit sich $\bar{\sigma} = 12,0\%$ ergibt. Aufgrund der Vorgaben zu Versicherungszweig und Sicherheitszuschlag berechnet sich der Sollbetrag des Bilanzjahrs 2025 zu

$$SB_{2025} = 4,5 \cdot \bar{\sigma} \cdot P_{2025} = 67,5.$$

- (b) [12 Punkte] Die erfolgsunabhängige Zuführung beträgt

$$3,5\% \cdot SB_{2025} = 2,4.$$

Bei einer Geschäftsjahresschadenquote von $q_{2025} = \bar{q}$ ergibt sich damit eine Schadenquote nach Schwankung von

$$q_{2025}^{ns} = \bar{q} + \frac{3,5\% \cdot SB_{2025}}{P_{2025}} = 80,2\% + 1,9\% = 82,1\%.$$

Bei einer höheren bzw. niedrigeren Schadenquote q_{2025} im Geschäftsjahr läge ein Über- bzw. ein Unterschaden vor, der durch eine Entnahme bzw. eine Zuführung zur Schwankungsdeckung ausgeglichen würde, solange die Schwankungsdeckung nicht leer ($SR_{2025} = 0$) bzw. voll ($SR_{2025} = SB_{2025}$) wäre. Damit ergibt sich

$$q_{2025}^{\max} = \bar{q} + \frac{SR_{2024} + 3,5\% \cdot SB_{2025}}{P_{2025}} = 84,0\%$$

und

$$q_{2025}^{\min} = \bar{q} - \frac{SB_{2025} - (SR_{2024} + 3,5\% \cdot SB_{2025})}{P_{2025}} = 30,0\%.$$

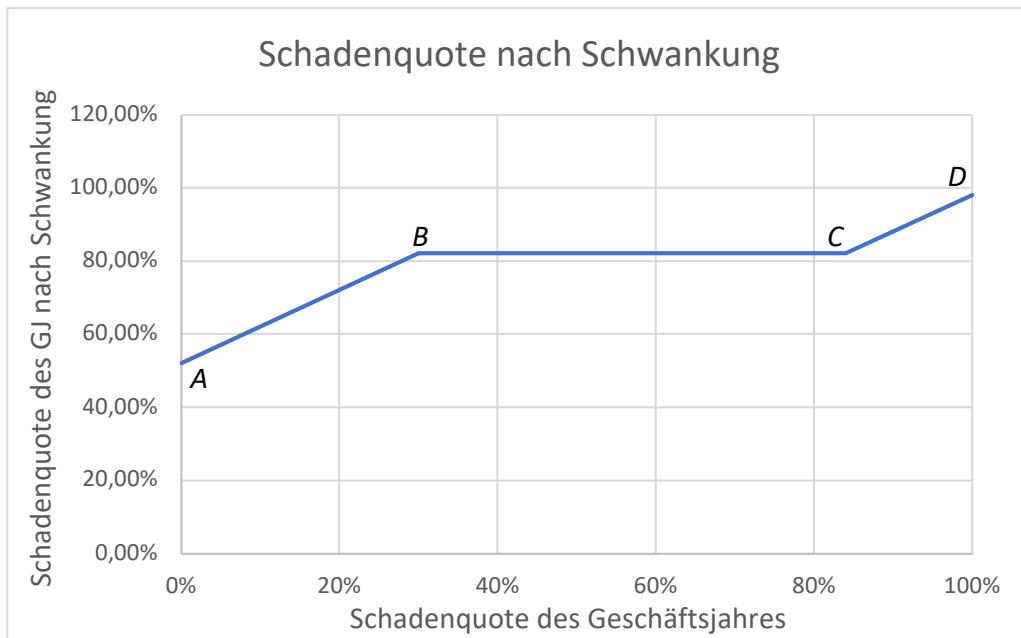
Außerhalb dieser Grenzen überträgt sich jede Änderung von q_{2025} direkt auf q_{2025}^{ns} . Für $q_{2025} = 0,0\%$ ergibt sich daher

$$q_{2025}^{ns} = 82,1\% - 30,0\% = 52,1\%$$

und für $q_{2025} = 100\%$ folgt

$$q_{2025}^{ns} = 82,1\% + (100,0\% - 84,0\%) = 98,1\%.$$

Damit ergibt sich folgende graphische Darstellung:



Die eingezeichneten Punkte sind durch $A = (0,0\%; 52,1\%)$, $B = (q_{2025}^{\min}; 82,1\%)$, $C = (q_{2025}^{\max}; 82,1\%)$ und $D = (100,0\%; 98,1\%)$ gegeben.

- (c) [8 Punkte] Die Schadenquote des Jahres 2020 lag ca. 30% unter dem Durchschnitt der Vorjahre, das Jahr 2021 war nur knapp unterdurchschnittlich. Die Jahre 2022 und 2023 lagen ca. 20% über dem Durchschnitt, 2024 war wieder nahe am Durchschnitt. Damit dürfte die durchschnittliche Schadenquote im Bilanzjahr 2021 um ca. $30\%/15 = 2\%$ auf ca. 78% gesunken sein. In 2022 war die Bewegung stabil bzw. leicht abwärts, in 2023 und 2024 jeweils um einen guten 1%-Punkt nach oben ($20\%/15 \approx 1,3\%$) um in 2025 nahezu unverändert die berechneten 80,2% zu erreichen.

Die Standardabweichung wächst im betrachteten Zeitraum von 6% auf 12% an, und zwar im wesentlichen in drei Schritten in 2021, 2023 und 2024, weil in diesen Jahren die aufgeführten deutlichen Schwankungen der Geschäftsjahrschadenquoten erstmals im jeweiligen Beobachtungszeitraum berücksichtigt werden.

Der Sollbetrag verdoppelt sich im genannten Zeitraum aufgrund der Verdopplung der Standardabweichung und erhöht sich zusätzlich aufgrund des Prämienwachstums um den Faktor $125/93 \approx 1,3$. Die Zunahme von 25,1 auf 67,5 erfolgt entsprechend der Anstiege von Prämievolumen und Standardabweichung, am stärksten ausgeprägt in den Jahren 2021, 2023 und 2024.

- (d) [3 Punkte] Da im Bilanzjahr 2020 ein Unterschaden von ungefähr $30\% \cdot 93 = 27,9$ vorliegt, ist klar, dass unabhängig vom Anfangsstand SR_{2019} der Sollbetrag SB_{2020} aufgefüllt wird und damit $SR_{2020} = SB_{2020} = 25,1$ gilt.

Lösungshinweise zu Aufgabe 6 (Modellannahmen und Modellauswahl) [28 Punkte]

(a) [3 Punkte] Im Anfalljahr 2024 ist das Prämievolumen deutlich angestiegen (von 99 Mio. € in 2023 auf 125 Mio. €), das Schadenvolumen nach einem Abwicklungsjahr ist mit $125 \cdot 32,9\% = 41,1$ weitgehend unverändert zum Vorjahreswert $99 \cdot 41,5\% = 41,1$ geblieben. Dies widerspricht einem deutlichen Verlust an Geschäftsvolumen und passt hingegen zu Aussage (B).

(b) [8 Punkte] Für das Parallelenkriterium sind zwei Fälle zu betrachten:

Im ILR-Fall gilt für ein festes Abwicklungsjahr k : $\frac{C_{ik}}{\nu_i} - \frac{C_{i,k-1}}{\nu_i} = \frac{S_{ik}}{\nu_i} \approx m_k$, das heißt, die Steigungen der Anfalljahre in der (kumulativen) Schadenquotengrafik (linke Abbildung) sollten annähernd (bis auf zufällige Schwankungen) parallel sein.

Im CL-Fall gilt hingegen $\ln \frac{C_{ik}}{\nu_i} - \ln \frac{C_{i,k-1}}{\nu_i} = \ln C_{ik} - \ln C_{i,k-1} = \ln \frac{C_{ik}}{C_{i,k-1}} \approx \ln(f_k)$, das heißt, die Steigungen der Anfalljahre in der (kumulativen) Schadenquotengrafik mit logarithmisch skalierten y-Achse (nicht abgebildet) oder auch in der entsprechenden Schadenbetragssgrafik mit logarithmisch skalierten y-Achse (rechte Abbildung) sollten annähernd (bis auf zufällige Schwankungen) parallel sein.

Falls eine der beiden Grafiken die Parallelität besser zeigt, als die andere, so kann dieses Kriterium zur Auswahl benutzt werden.

Im vorliegenden Fall ist die Parallelität bis auf zufällige Schwankungen und den sprunghaften Anstieg im Abwicklungsjahr 13 (der das eher glatte Bild in beiden Grafiken stört) in der rechten Grafik klar vorhanden, nicht aber in der linken Grafik. Dies gilt insbesondere für die Jahre 2020 und die Jahre 2022, 2023. Im Covid-19-Jahr liegen, soweit grafisch einschätzbar, eher durchschnittliche Abwicklungs faktoren vor, aber durchgehend sehr niedrige Zuwachsquoten. In den Inflationsjahren 2022 und 2023 liegen ebenfalls eher durchschnittliche Abwicklungs faktoren vor, aber durchgehend sehr hohe Zuwachsquoten. In den drei Jahren ist also eine deutliche Abhängigkeit der Zuwachsquoten von der Höhe der Schadenquoten zu beobachten, was dem ILR-Modell widerspricht. Daher fällt die Wahl auf das CL-Modell.

(c) [6 Punkte] Die Residuen nach dem ILR-Modell berechnen sich nach der Formel

$$\widehat{\text{Res}}^{ILR}(S_{i,k}) = \frac{\frac{S_{i,k}}{\nu_i} - \widehat{m}_k}{\widehat{S}_k} \cdot \sqrt{\nu_i}$$

Mit den aus dem Abwicklungsdreieck berechneten Werten $S_{2020,k}/\nu_{2020}$ für $k = 2, \dots, 5$ von 13,1%, 5,3%, 3,5% und 2,9% ergeben sich die geschätzten Residuen

$$-2,35, \quad -2,92, \quad -2,82 \quad \text{und} \quad -2,94.$$

Das verminderte Verkehrsaufkommen aufgrund der Pandemie führte zu weniger Schäden bei gleichbleibender Prämie. Das Abwicklungsverhalten der Schäden wurde durch Covid-19 nicht (sichtbar) beeinflusst, da die CL-Residuen ein normales zufälliges Verhalten zeigen. Die Schadenquoten und Zuwachsquoten sind dagegen deutlich gesunken, was sich in den durchgehend deutlich negativen ILR-Residuen zeigt.

- (d) [3 Punkte] Dieser Anstieg steht nicht im Widerspruch zu den Annahmen des CL-Modells. Das Modell macht keine Aussage über die Wahrscheinlichkeitsverteilung der Abwicklungsfaktoren. Verteilungen, die hohe Faktoren mit geringer Wahrscheinlichkeit zulassen, würden zu seltenen Sprüngen in der Abwicklung führen. Bemerkung: Die entsprechende Aussage gilt natürlich auch für das ILR-Modell.
- (e) [5 Punkte] Aufgrund der Summenformel für Residuenquadrate ist die Summe der drei geschätzten Residuenquadrate im Abwicklungsjahr 13 genau 2. Da alle drei Anfalljahre ein ähnliches Volumen nach 12 Jahren haben und die Anfalljahre 2011 und 2012 im Vergleich zu 2010 niedrige, aber sehr ähnliche Abwicklungsfaktoren aufweisen, wird das Residuum für 2010 positiv und vom Betrag her ca. doppelt so groß sein, wie die negativen Residuen der anderen beiden Jahre. Diese Überlegung ergibt eine Schätzung von $2/\sqrt{3} \approx 1,15$.

Bemerkung: Die Aussage, dass das Residuum des Sprungs vom Betrag her das größte der drei Residuen sein muss, und die Summenformel führen zu einem Wert zwischen 0,8 und 1,4. Diese Abschätzung reicht für die Lösung der Aufgabe aus.

Aufgrund der Summenformel für Residuenquadrate sind die Residuen in höheren Abwicklungsjahren sehr klein, selbst wenn wie hier ein aus grafischer Sicht deutlicher Ausreißer vorliegt. Daher sind Residuen in höheren Abwicklungsjahren nur sehr bedingt zur Identifikation von Ausreißern geeignet.

- (f) [3 Punkte] Der beobachtete starke Anstieg verzerrt als Ausreißer das beobachtete Abwicklungsverhalten und sollte nicht ohne Anpassung in die CL-Schätzung eingehen. Für eine Korrektur gibt es zahlreiche Möglichkeiten. Beispiele sind:
- Ein Ausschluss aus der Schätzung ohne weitere Anpassung, wenn man davon ausgehen kann, dass eine Wiederholung ausgeschlossen ist.
 - Kein Ausschluss bei der Berechnung des mittleren Abwicklungsfaktors, aber eine Glättung über eine Abwicklungsfunktion, wie sich auch für Tail-Berechnungen verwendet wird.
 - Eine Umlage des starken Anstiegs auf mehrere Anfalljahre und Abwicklungsjahre, die sich an der Wahrscheinlichkeit eines solchen Ereignisses (Zahl der offenen Gerichtsverfahren etc.) orientieren könnte.

Lösungshinweise zu Aufgabe 7 (Ein Modell für Zahlungen und Schadenaufwände) [29 Punkte]

- (a) [5 Punkte] Es sind zahlreiche Ursachen denkbar. So besteht die Möglichkeit, dass das CL-Modell nicht zum Dreieck der Zahlungen und/oder nicht zum Dreieck der Schadenaufwände passt. Es könnte ein nicht erfasster Nachlauf/Tail auf Seiten der Zahlungen vorliegen oder nicht berücksichtigte Rückgänge auf Seiten der Schadenaufwände.

Selbst wenn dies nicht der Fall ist, so werden die Zahlungsprognosen in einigen Anfalljahren über den Aufwandsprognosen liegen und in anderen darunter, da bei separaten CL-Rechnungen für Zahlungen und Aufwände das Verhältnis von aktueller Auszahlungsquote zur entsprechenden durchschnittlichen Auszahlungsquote bei der Prognose erhalten bleibt. Über- bzw. unterdurchschnittliche Auszahlungsquote werden also bei separaten CL-Prognosen nicht ausgeglichen, sondern bleiben erhalten.

- (b) [3 Punkte] Der Parameter μ_k gibt die erwartete Zahlung im Abwicklungsjahr k als Anteil der Einzelfallreserven zu Beginn des Abwicklungsjahres an. Damit ist die Vorstellung verbunden, dass der Zahlungszuwachs durch Auszahlung eines Anteils der bestehenden Einzelfallreserven erfolgt, welcher unabhängig vom Anfalljahr ist.
- (c) [4 Punkte] Eine Möglichkeit besteht darin, die beobachteten Werte $S_{i,k}$ für $i = 1, \dots, n-k+1$ auf der y-Achse gegen die Werte $R_{i,k-1}$ auf der x-Achse aufzutragen. Unter der Modellvoraussetzung (CD2) sollten die Punkte zufällig um eine Ursprungsgerade mit Steigung μ_k streuen.
- (d) [6 Punkte] Die Formeln für die Schätzer lauten

$$\hat{\mu}_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{R_{i,k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} R_{j,k-1}} \cdot \frac{S_{i,k}}{R_{i,k-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} S_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} R_{i,k-1}}$$

und

$$\hat{\rho}_k = \sum_{i=1}^{n-k+1} \frac{D_{i,k-1}}{\sum_{j=1}^{n-k+1} D_{j,k-1}} \cdot \frac{T_{i,k}}{D_{i,k-1}} = \frac{\sum_{i=1}^{n-k+1} T_{i,k}}{\sum_{i=1}^{n-k+1} D_{i,k-1}}.$$

Die $\frac{S_{i,k}}{R_{i,k-1}}$ bzw. $\frac{T_{i,k}}{D_{i,k-1}}$ sind nach (CD2) erwartungstreue Schätzer für μ_k bzw. ρ_k . Die Struktur der Formeln lässt unmittelbar erkennen, dass $\hat{\mu}_k$ bzw. $\hat{\rho}_k$ gewichtete Mittelwerte dieser Schätzer sind und dass die Gewichte nach (CD3) umgekehrt proportional zu deren bedingter Varianz gewählt wurden. Daraus folgen die geforderten Eigenschaften der Erwartungstreue und der Varianzminimierung.

- (e) [7 Punkte] Die Prognose der Zahlungszuwächse hängt direkt proportional von der Höhe der Einzelfallreserven, also von der Differenz zwischen Schadenaufwänden und Zahlungen ab. Auf diese Weise sollen über- oder unterdurchschnittliche Auszahlungsquoten ausgeglichen werden. Ein etwaiger Ausgleich erfolgt aber nur auf der Zahlungsseite. Bei den Schadenaufwänden wird eine normale CL-Rechnung durchgeführt.

Im Unterschied dazu ignorieren separate CL-Rechnungen systematische Zusammenhänge zwischen dem Zahlungs- und dem Schadenaufwandsdreieck und können vom Durchschnitt abweichende Auszahlungsquoten nicht ausgleichen (vgl. auch Teilaufgabe (a)).

Beim MCL-Verfahren erfolgt dieser Ausgleich sowohl auf der Zahlungs-, als auch auf der Schadenaufwandsseite. Der jeweilige Anteil wird über die entsprechenden Korrelationsparameter aus der vorhandenen Historie ermittelt.

- (f) [4 Punkte] Da die Prognose auf der Schadenaufwandsseite nicht verändert wird, wird für den Endschadenstand auch keine Verbesserung der Prognosequalität erreicht. Ob die Schätzgenauigkeit für den Zahlungsstrom durch die einseitige Korrektur verbessert wird, hängt von den Eigenschaften des gegebenen Geschäftssegments ab. Eine etwaige Konsistenz von geschätztem Zahlungsstrom und Endschadenstand ist aber auf jeden Fall als Vorteil zu betrachten.