DAV
Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

Schriftliche Prüfung im Fach

Investment und Finanzmathematik II

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 24. Oktober 2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 26 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Carolin Apfel, Dr. Mario Hörig,
Prof. Dr. Thomas Knispel, Dr. Marcus Scheffer,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

Aufgabe 1. *[Hedging mit Zinsfutures und internationale Investments] [20 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* (Hedging mit Zinsfutures)

Ein Portfoliomanager hält eine Position mit 100 Mio. EUR Nominal in Deutschen Bundesanleihen (DBR) und möchte diese komplett gegen steigende Zinsen absichern. Die Bundesanleihen haben eine Duration von 8,50 und ihr aktueller Marktwert liegt bei 98,037 Mio. EUR.

Für die Absicherung wählt der Portfoliomanager eine Short-Position in Euro-Bund Futures. Aktuell handeln diese bei 130,53 EUR. Die Cheapest-to-Deliver-Anleihe ist die DBR 2,25% 06/15/2035 mit einem Preis von 99,22 EUR, einer Modified Duration von 8,432 und einem Konversionsfaktor von 0,62059. Die standardisierte Kontraktgröße des Futures ist 100.000 EUR.

Nutzen Sie zur Beantwortung der nachfolgenden Fragen ggf. vereinfachende Annahmen.

(i) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie folgende Werte:

- den Basis-Point-Value BPV_P der Position in DBR,
- den Basis-Point-Value BPV_{CTD} der Cheapest-to-Deliver-Anleihe,
- die Anzahl zu verkaufender Euro-Bund Futures.

Noch bevor der Portfoliomanager die entsprechende Anzahl Euro-Bund Futures verkaufen kann, wird ein Strategiemeeting einberufen, bei dem die Einschätzung des Hauses gegenüber steigenden Zinsen angepasst wird. Der Portfoliomanager passt daraufhin auch seine Absicherungsstrategie an und möchte nunmehr die Duration seiner Position von 8,50 auf 7,00 senken.

(ii) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie die folgenden Werte:

- den Basis-Point-Value BPV_T des Zielportfolios,
- die Anzahl zu verkaufender Euro-Bund Futures.

(b) *[10 Punkte]* (Internationale Investments und Währungsexposure)

Runden Sie bei der Bearbeitung Ihre (Zwischen-)Ergebnisse auf vier Nachkommastellen.

(i) *[6 Punkte]* Für die beiden Währungen W1 und W2 besteht aktuell der folgende Zusammenhang:

i_{W1}	i_{W2}	S	F
2,45%	4,70%	1 W1 = 0,8700 W2	1 W1 = 0,9000 W2

Hierbei bezeichnen i_{W1} sowie i_{W2} den Periodenzins (Periode=1 Jahr) in den Währungen W1 bzw. W2, S den aktuellen Wechselkurs und F den Forwardkurs für den Wechselkurs am Periodenende.

Angenommen, ein Marktteilnehmer kann in der Währung W2 einen Kredit von 100 Geldeinheiten aufnehmen. Konstruieren Sie - ausgehend von dieser Kreditaufnahme - eine Handelsstrategie, mit der ein Arbitragegewinn erzielt werden kann, und geben Sie den Gewinn der Arbitragestrategie in Einheiten der Währung W2 an.

(ii) *[1 Punkt]* Passen Sie den Forwardkurs F unter (i) so an, dass keine Arbitragemöglichkeit mehr existiert.

(iii) *[3 Punkte]* Sie halten einen Aktienfonds, der in Irland aufgelegt ist und dessen Performance in EUR gemessen wird. Der Fonds besteht ausschließlich aus in USD denominierten Staats- und Unternehmensanleihen. Am Ende des Jahres weist die Depotbank folgende Performancekennzahlen aus:

Portfoliorendite in Fremdwährung	Portfoliorendite in Fondswährung
5,5%	8,0%

Hat der EUR zum USD auf- oder abgewertet? Begründen Sie Ihre Antwort mit einer Berechnung der Wechselkursrendite.

Lösungsskizze:

(a) (i) Im Folgenden bezeichnen MV den Marktwert, MDUR die Modified Duration, P den Preis sowie CF den Konversionsfaktor.

- BPV_P der Position in DBR:

$$\begin{aligned} BPV_P &= MDUR_P \cdot 0{,}0001 \cdot MV_P \\ &= 8{,}50 \cdot 0{,}0001 \cdot 98{,}037 \text{ Mio. EUR} = \underline{83.331{,}45 \text{ EUR}} \end{aligned}$$

- BPV_{CTD} der Cheapest-to-Deliver-Anleihe:

$$\begin{aligned} BPV_{CTD} &= MDUR_{CTD} \cdot 0{,}0001 \cdot MV_{CTD} \\ &= MDUR_{CTD} \cdot 0{,}0001 \cdot \frac{P_{CTD}}{100} \cdot \text{Kontraktgröße Future} \\ &= 8{,}432 \cdot 0{,}0001 \cdot \frac{99{,}22}{100} \cdot 100.000. \text{ EUR} = \underline{83{,}66 \text{ EUR}} \end{aligned}$$

- Anzahl zu verkaufender Euro-Bund Futures:

$$BPVHR = -\frac{BPV_P}{BPV_{CTD}} \cdot CF = -\frac{83.331{,}45}{83{,}66} \cdot 0{,}62059 = \underline{-618{,}14}$$

Damit müssen 618 Euro-Bund Futures verkauft werden, um die Position vollständig abzusichern.

(ii) - $BPV_T = 7{,}00 \cdot 0{,}0001 \cdot 98{,}037$ Mio. EUR = $\underline{68.625{,}90 \text{ EUR}}$

- Anzahl zu verkaufender Euro-Bund Futures:

$$\begin{aligned}\text{BPVHR} &= \frac{\text{BPV}_\text{T} - \text{BPV}_\text{P}}{\text{BPV}_\text{F}} \\ &= \frac{\text{BPV}_\text{T} - \text{BPV}_\text{P}}{\text{BPV}_\text{CTD}} \cdot \text{CF} = -\frac{68.625{,}90 - 83.331{,}45}{83{,}66} \cdot 0{,}62059 = \underline{-109{,}08}\end{aligned}$$

  Damit würde der Portfoliomanager nun 109 Kontrakte verkaufen.

(b) (i) t=0:

- Kreditaufnahme in Höhe von 100 W2 zum Sollzins 4,70%
- Abschluss eines Devisenforwards zum Kurs $F = 0{,}9000 \frac{\text{W2}}{\text{W1}}$ und Nominalbetrag

$$\frac{100\,\text{W2}}{0{,}8700 \frac{\text{W2}}{\text{W1}}} \cdot (1 + 2{,}45\%) = 117{,}7586\,\text{W1}$$

- Tausch des Kreditbetrags von Währung W2 in W1 zu $\frac{100}{0{,}8700}$ W1 und Anlage zum Habenzins 2,45%

$t = 1$:

- Anlageergebnis in W1: $\frac{100\,\text{W2}}{0{,}8700 \frac{\text{W2}}{\text{W1}}} \cdot (1 + 2{,}45\%) = 117{,}7586\,\text{W1}$
- Rücktausch des Investments in W2:

$$117{,}7586\ \text{W1} \cdot 0{,}9000 \cdot \frac{\text{W2}}{\text{W1}} = 105{,}9827\,\text{W2}$$

- Tilgung des Kredits: $100\,\text{W2} \cdot (1 + 4{,}70\%) = 104{,}7000\,\text{W2}$
- Gewinn: $105{,}9827\,\text{W2} - 104{,}7000\,\text{W2} = \underline{1{,}2827\,\text{W2}}$

(ii) Es gilt:

$$(1 + i_{\text{W2}}) = \frac{F}{S}(1 + i_{\text{W1}}) \quad \Leftrightarrow \quad F = S \cdot \frac{1 + i_{\text{W2}}}{1 + i_{\text{W1}}} = 0{,}8700 \cdot \frac{1{,}0470}{1{,}0245} = 0{,}8891 \frac{\text{W2}}{\text{W1}}.$$

(iii) Der EUR hat gegenüber dem USD abgewertet.

Begründung:

- Die Performance in Fremdwährung ist geringer als die Performance in Fondswährung; also muss der EUR gegenüber dem USD abgewertet haben.
- Die Gesamtrendite ist $r_G = (1 + r)(1 + e) - 1$, wobei r die lokale Rendite in Fremdwährung und e die Wechselkursrendite bezeichnen. Also:

$$8{,}0\% = (1 + 5{,}5\%)(1 + e) - 1 \quad \rightarrow \quad e = 2{,}37\% > 0$$

- Nicht in EUR, sondern in USD investiert gewesen zu sein, hat also positiv zur Fondsperformance beigetragen. → Der EUR hat gegenüber dem USD verloren.

Aufgabe 2. *[Performance-Messung] [10 Punkte]*

Die Bausparkasse „Trautes Heim“ möchte ihr Anlageportfolio weiter diversifizieren. Wichtige Ziele der Bausparkasse sind dabei, zum einen vom Aufwärtstrend im Aktienmarkt zu profitieren und zum anderen das Risiko bei fallenden Kursen zu limitieren.

Die long-short Hedgefondsstrategie LSE ist in der engeren Auswahl der Kapitalanlageabteilung der Bausparkasse. Den Kapitalanlegern ist wichtig, dass lange Verlustphasen vermieden werden, da diese zu regulatorischen Schwierigkeiten führen könnten. Die folgende Tabelle zeigt die (einfachen) Monatsrenditen des LSE-Fonds im vergangenen Kalenderjahr.

Monat	JAN	FEB	MRZ	APR	MAI	JUN	JUL	AUG	SEP	OKT	NOV	DEZ
Rendite (%)	1,23	-0,56	-1,33	-3,04	0,10	-0,78	0,54	1,02	2,33	1,12	0,93	2,40

(a) *[7 Punkte]* Berechnen Sie für die obigen Monatsrenditen den Maximum Drawdown für den LSE-Fonds.

Hinweis: Unterstellen Sie zum 1. Januar für den LSE-Fonds einen fiktiven Portfoliowert von 1000 Euro und berechnen Sie die monatliche Wertentwicklung.

(b) *[3 Punkte]* Welche der folgenden Aussagen sind korrekt? Begründen Sie Ihre Antwort *kurz*.

A) Die Drawdown-Duration für den LSE-Fonds betrug im vergangenen Kalenderjahr 9 Monate.

B) Die Drawdown-Duration für den LSE-Fonds betrug im vergangenen Kalenderjahr 10 Monate.

C) Im vergangenen Kalenderjahr dauerte die Recovery-Phase länger als die Drawdown-Phase an.

Lösungsskizze:

(a) Bezogen auf einen Portfoliowert von 1000 Euro zum 1. Januar ergibt sich folgende Wertentwicklung, bei der der Tiefststand (und zwar unabhängig vom Startportfoliowert) im Juni erreicht wird.

Monat	Rendite (%)	Portfoliowert	kumulierter Drawdown (%)	Kommentar
JAN	1,23	1012,30	0,00	
FEB	-0,56	1006,63	-0,56	Start Drawdown
MRZ	-1,33	993,24	-1,88	
APR	-3,04	963,05	-4,87	
MAI	0,10	964,05	-4,77	
JUN	-0,78	**956,49**	**-5,51**	**Maximum Drawdown**
JUL	0,54	961,66	-5,00	
AUG	1,02	971,47	-4,03	
SEP	2,33	994,10	-1,80	
OKT	1,12	1005,24	-0,70	
NOV	0,93	1014,58	0,00	Ende Recovery
DEZ	2,40	1038,93	0,00	

Insofern beträgt der Maximum Drawdown (MDD):

$$\text{MDD} = \frac{956{,}49 - 1012{,}30}{1012{,}30} = \underline{-0{,}0551} \quad (-5{,}51\%).$$

(b) Nur Antwort B) ist korrekt: Die Drawdown-Phase dauert 5 Monate, die Recovery-Phase dauert ebenfalls 5 Monate. Somit liegt die Drawdown-Duration bei 10 Monaten und die Recovery-Phase und die Drawdown-Phase sind gleich lang.

Aufgabe 3. *[Management von Zinsrisiken und Zinstiteln] [20 Punkte]*

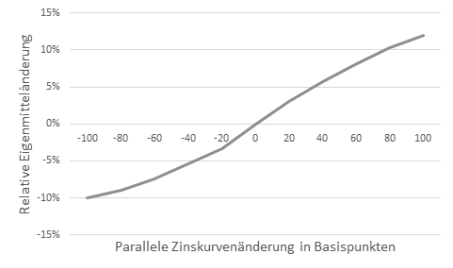
(a) *[8 Punkte]* Sie möchten die Eigenmittel Ihres Versicherungsunternehmens bezüglich paralleler Verschiebungen der Zinskurve hedgen. Dabei stehen Ihnen die folgenden Typen von Finanztiteln zum Kauf zur Verfügung:

1) Payer Swap
2) Receiver Swap
3) Plain Vanilla Bond
4) CMS-Floater mit Floor und Multiplikator
5) CMS-Floater mit Cap
6) Callable Bond
7) Putable Bond

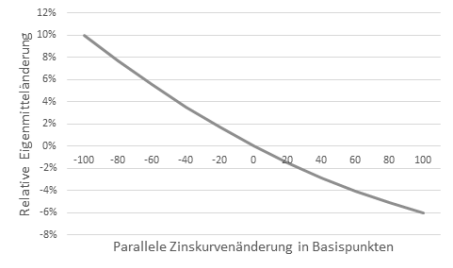
Wählen Sie zu jeder nachfolgenden Funktion, die die Eigenmitteländerung bezüglich einer parallelen Zinskurvenänderung beschreibt, den oben genannten Finanztitel, der besonders gut für das Hedging geeignet ist. Begründen Sie jeweils *kurz* Ihre Entscheidung.

Hinweis: Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass die Passiva nicht auf Änderungen der Aktiva reagieren.

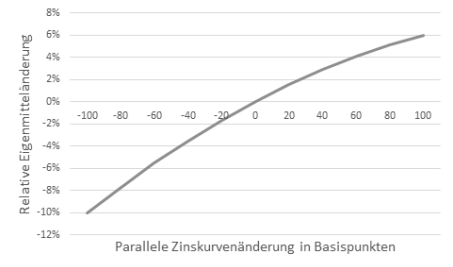
(i) *[2 Punkte]*



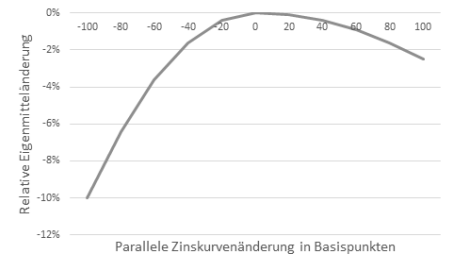
(ii) *[2 Punkte]*



(iii) *[2 Punkte]*



(iv) *[2 Punkte]*

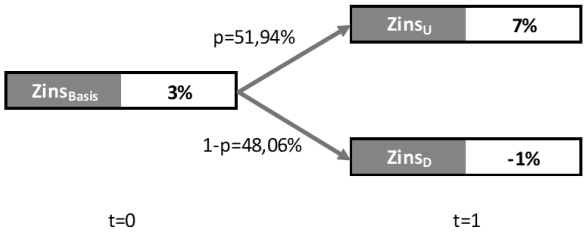


(b) *[12 Punkte]*

(i) *[5 Punkte]* Es sei der unten stehende Binomialbaum für diskrete Zinsen gegeben. Bestimmen Sie den Marktwert eines Single-Putable Bonds mit folgenden Eigenschaften:

Laufzeit = zwei Jahre (d. h. Rückzahlung in $t = 2$)
Kupon (jährlich) = 3%
Kündigungs-Option im 1. Jahr ($t = 1$) zu 101
Nominal = 100

Gehen Sie von einer flachen Zinsstruktur aus. Es seien die *risikoneutralen* Wahrscheinlichkeiten für einen Zinsanstieg bei 51,94% und Rückgang des Zinses bei 48,06% von $t = 0$ auf $t = 1$ gegeben. Der heutige Zins ($t = 0$) sei 3%.



(ii) *[1 Punkt]* Es seien ein Callable Bond, ein Putable Bond und ein Plain Vanilla Bond mit exakt gleicher Ausgestaltung (Emittent, Nominal, Kupon, Seniorität, Laufzeit) gegeben. Geben Sie an, welche Ungleichungsbeziehungen für die Marktwerte der drei Titel bzgl. aller zukünftigen Zinsszenarien gilt.

(iii) *[5 Punkte]* Berechnen Sie mithilfe des gegebenen Binomialbaums den Marktwert des unter (i) genannten Finanztitels, wenn der zahlbare Betrag (Strike) bei Kündigung abhängig vom aktuellen Zins zum möglichen Kündigungszeitpunkt ist. Alle anderen Parameter bleiben dabei unverändert. Nehmen Sie dabei an, dass der Strike bestimmt ist durch

$$\text{Strike} := \text{Nominal} \cdot (1 + \text{aktueller Zins} - 3\%).$$

(iv) *[1 Punkt]* Nennen Sie einen Vorteil und einen Nachteil bei der Bewertung von Finanztiteln mithilfe von rekombinierenden Bäumen.

Lösungsskizze:

(a) Es müssen Finanzprodukte gefunden werden, die grob einen an der x-Achse gespiegelten Verlauf der Eigenmitteländerung erzeugen.

(i) Hedging mit 6) Callable Bond: Verlauf ähnlich Plain Vanilla Bond, nur linker Bereich krümmt sich leicht entgegengesetzt

(ii) Hedging mit 1) Payer Swap: etwas gekrümmter als linear steigend, da für steigende Zinssätze der Diskonteffekt größer wird

(iii) Hedging mit 3) Plain Vanilla Bond oder 2) Receiver Swap: typischer konvexer Marktwertverlauf

(iv) Hedging mit 4) CMS-Floater mit Floor und Multiplikator: Linker Bereich Floor ähnlich Plain Vanilla Bond, rechter Bereich leicht steigend, wenn Multiplikator geeignet gewählt ist

(b) (i) Bewertung durch Rückwärtseinsetzen, mit analoger Bezeichnung des Marktwertes im Szenario und Zeitschritt wie beim Zins.

In $t = 2$:

Zahlung nach 2 Jahren=100+3=103
Strike=101

Marktwerte in $t = 1$:

$$\mathrm{MW}_U = 3 + \max\left\{\frac{103}{1+7\%}, 101\right\} = 104{,}00$$
$$\mathrm{MW}_D = 3 + \max\left\{\frac{103}{1-1\%}, 101\right\} \approx 107{,}04$$

Marktwert in $t = 0$:

$$\mathrm{MW}_{Putable} = \frac{0{,}5194 \cdot \mathrm{MW}_U + 0{,}4806 \cdot \mathrm{MW}_D}{1+3\%} \approx \underline{102{,}39}$$

(ii) Für die Marktwerte aller zukünftigen Zinskurven gilt:

$$\mathrm{MW}_{Callable}(Zins) \leq \mathrm{MW}_{Bond}(Zins) \leq \mathrm{MW}_{Putable}(Zins)$$

(iii) Bewertung durch Rückwärtseinsetzen, mit analoger Bezeichnung des Marktwertes im Szenario und Zeitschritt wie beim Zins. Unterschied zu (i) ist, dass nun zusätzlich der Strike vom aktuellen Zins abhängt.

In $t = 2$:

Zahlung nach 2 Jahren=100+3=103
Strike=Nominal (1+ aktueller Zins -3%)

Marktwerte in $t = 1$:

$$\mathrm{Strike}_U = 100(1 + 7\% - 3\%) = 104$$
$$\mathrm{Strike}_D = 100(1 - 1\% - 3\%) = 96$$
$$\text{MW-flexStrike}_U = 3 + \max\left\{\frac{103}{1+7\%}, \mathrm{Strike}_U\right\} = 107{,}00$$
$$\text{MW-flexStrike}_D = 3 + \max\left\{\frac{103}{1-1\%}, \mathrm{Strike}_D\right\} \approx 107{,}04$$

Marktwert in $t = 0$:

$$\mathrm{MW}_{Putable-flexStrike} = \frac{0{,}5194 \cdot \text{MW-flexStrike}_U + 0{,}4806 \cdot \text{MW-flexStrike}_D}{1+3\%} \approx \underline{103{,}90}$$

(iv)
- *Vorteil:* Relativ geringer Rechenaufwand, weil Berechnungsergebnisse in Knoten mehrfach genutzt werden.
- *Nachteil:* Komplexere Modelle (z. B. Zinsmodelle) sind i. A. schwer oder nicht umsetzbar.

[*Weitere Nennungen sind möglich.*]

Aufgabe 4. *[Risikomanagement von und mit Optionen] [10 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Gegeben sei eine Einheit einer (dividendenfreien) Aktie mit Kursverlauf $(S_t; 0 \leq t \leq T)$ sowie ein Long Put auf eine Einheit dieser Aktie mit Laufzeit T, Ausübungspreis K und Kursverlauf $(P_t; 0 \leq t \leq T)$. Ein *(1:1)-Put-Hedge* besteht aus der Kombination dieser beiden Positionen.

(i) *[3 Punkte]* Wie lautet zum Zeitpunkt T die Gewinn/Verlust-Position G_T dieses Put-Hedges in Abhängigkeit des terminalen Aktienkurses S_T? Vernachlässigen Sie dabei Zinseffekte.

(ii) *[1 Punkt]* Stellen Sie die Gewinn/Verlust-Position in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T graphisch dar.

(b) *[6 Punkte]* Betrachten Sie das Black-Scholes-Modell, in dem der Aktienpreisprozess unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ gegeben ist durch

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t), \quad t \geq 0,$$

wobei W ein Wiener-Prozess ist sowie $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ den Drift- bzw. Volatilitätsparameter bezeichnen. Der Preis C_t einer Europäischen Call-Option auf die Aktie mit Maturität T im Zeitpunkt t ist gegeben als $v(x, \tau)$, wobei x der Aktienkurs in t ist und $\tau = T - t$ die Restlaufzeit darstellt.

(i) *[3 Punkte]* Erklären Sie, wie die Sensitivität „Delta“ approximativ zur Absicherung einer Call-Optionsposition gegen Wertänderungen in der Basisposition „Aktie“ verwendet werden kann (Delta-Hedge).

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Value at Risk zum Niveau λ über das Zeitintervall $[t, t + h]$ für den Gewinn/Verlust einer Call-Position auf der Basis einer Delta-Exakt-Approximation.

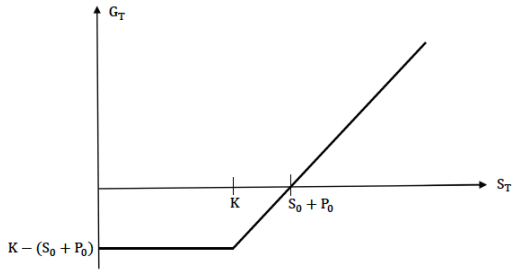
Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregel zur Quantiltransformation.

Lösungsskizze:

(a) (i) Mit $P_0 = P_0(K)$ gilt für die Gewinnposition:

$$\begin{aligned} G_T &= S_T - S_0 + P_T - P_0 \\ &= S_T + \max\{K - S_T, 0\} - (S_0 + P_0) \\ &= \max\{S_T, K\} - (S_0 + P_0) \\ &= \begin{cases} K - (S_0 + P_0) & \text{für } S_T \leq K, \\ S_T - (S_0 + P_0) & \text{für } S_T > K \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Graphische Darstellung:



(b) (i) Ist $(S_t)_{t\geq 0}$ der Preisprozess der Aktie, so gilt per Taylor-Entwicklung 1. Ordnung approximativ für die Wertänderung des Optionspreises in kleinen Zeitintervallen $[t, t+h]$, $h > 0$,

$$v(S_{t+h}, \tau - h) - v(S_t, \tau) \approx \Delta(S_t, \tau)(S_{t+h} - S_t)$$

bzw.

$$v(S_{t+h}, \tau - h) - v(S_t, \tau) + (-\Delta(S_t, \tau))(S_{t+h} - S_t) \approx 0.$$

Werden im Zeitpunkt t also $\Delta(S_t, \tau) = \Phi(d_+(S_t, \tau)) > 0$ Einheiten der Aktie verkauft (ohne Adjustierungen bis $t+h$), so ist das Gesamtportfolio bestehend aus einer Call-Option und $-\Delta(S_t, \tau)$ Einheiten der Aktie approximativ immunisiert gegen Preisänderungen der Aktie. Das resultierende Portfolio aus Option und Basisposition hat ein Gesamt-Delta von Null (Δ-neutral).

(ii) Für die Wertänderung der Call-Option gilt approximativ

$$\Delta C = C_{t+h} - C_t \approx \Delta(S_t, \tau)(S_{t+h} - S_t) = \Delta(S_t, \tau)S_t(e^{\sigma(W_{t+h}-W_t)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)h} - 1).$$

also mithilfe der Regel für die Quantiltransformation

$$\begin{aligned} \mathrm{V@R}_\lambda(\Delta C) &\approx \mathrm{V@R}_\lambda(\Delta(S_t, \tau)S_t(\exp(\sigma(W_{t+h} - W_t) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1)) \\ &= -q_{\Delta(S_t,\tau)S_t(\exp(\sigma(W_{t+h}-W_t)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)h)-1)}(\lambda) \\ &= -\Delta(S_t, \tau)S_t(\exp(\sigma q_{W_{t+h}-W_t}(\lambda) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1) \\ &= -\Delta(S_t, \tau)S_t(\exp(\sigma\sqrt{h}\Phi^{-1}(\lambda) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1). \end{aligned}$$

Aufgabe 5. *[Ökonomische Szenariogeneratoren - real-world] [34 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Ökonomische Szenariogeneratoren (ESGs) existieren in zwei verschiedenen Ausprägungen, als *risikoneutrale* und als *real-world* Modellierung. Grenzen Sie zunächst allgemein, ausgehend vom Grundgedanken der Risikoneutralität, die beiden Ansätze gegeneinander ab und beschreiben Sie die Unterscheidung der Anwendungsfälle.

(b) *[6 Punkte]* Fassen Sie das im Webinar diskutierte Baukastenrezept für Risikofaktormodelle eines real-world ESGs zusammen und geben Sie für jeden Schritt zwei Beispiele für die jeweiligen Wahlmöglichkeiten an.

(c) *[13 Punkte]* Als Projektionsmodell für Kreditspreads über einen 1-Jahres Horizont sollen Sie die Modellwahl zwischen normalverteilten Differenzen und normalverteilten Log-Returns illustrieren. Beachten Sie, dass bei beiden Modellen der Erwartungswert der Normalverteilung 0 beträgt.

(i) *[3 Punkte]* Fassen Sie kurz zusammen, was man unter Kreditspreads versteht und in welche Komponenten man diese generell aufteilen kann.

(ii) *[4 Punkte]* Stellen Sie je eine Modellschwäche von normalverteilten Differenzen und normalverteilten Log-Returns für das Spreadmodell dar und begründen Sie diese.

(iii) *[6 Punkte]* Das Ausgangslevel des Speads (Basislevel) sei 1,30% und das Kalibrierungsziel sei so gewählt, dass die Verteilung im 10%-Quantil ein Spreadlevel von 0,3% realisiert. Bestimmen Sie zunächst die Volatilität der beiden Verteilungen. Illustrieren Sie für die so kalibrierten Verteilungen die oben genannten Modellschwächen an geeignet gewählten Quantilen.

Hinweis: Die folgende Tabelle stellt ausgewählte Quantile der Standardnormalverteilung dar.

p	0,5%	1,0%	10,0%	50,0%	90,0%	99,0%	99,5%
$\Phi^{-1}(p)$	-2,576	-2,326	-1,282	0	1,282	2,326	2,576

(d) *[10 Punkte]* Sie werden gebeten, das Konzept der Risikoprämie anhand aktueller Marktdaten zu illustrieren. Zum Stichtag betragen der risikofreie Zinssatz in EUR zur Laufzeit 5 Jahre 2,2% sowie der Spread einer BBB gerateten Unternehmensanleihe ohne Kuponzahlungen aus dem EUR-Raum zur Laufzeit 5 Jahre 1,30%.

(i) *[4 Punkte]* Ermitteln Sie daraus die risikoneutral eingepreiste annualisierte Ausfallwahrscheinlichkeit $p_{\text{annualized}}^{(\text{default, risk neutral})}$ dieses Titels unter der Annahme, dass der Verlust bei Ausfall 75% des Nominals beträgt.

(ii) *[4 Punkte]* Erläutern Sie kurz, wie die Risikoprämie mit dem realistischen Erwartungswert der Ausfallwahrscheinlichkeit $p_{\text{annualized}}^{(\text{default, real world})}$ zusammenhängt. Nehmen Sie an, dass die realistische Erwartung der annualisierten Ausfallwahrscheinlichkeit nur

ein Drittel der risikoneutral eingepreisten beträgt. Leiten Sie daraus die Risikoprämie als Teil des Gesamtspreads ab.

Hinweis: Alternativ können Sie auch $p_{\text{annualized}}^{(\text{default, risk neutral})} = 1{,}82\%$ statt dem Ergebnis aus Teil (i) verwenden.

(iii) *[2 Punkte]* Erläutern Sie, warum es aufgrund der Aussage in (ii) insbesondere für Versicherer lukrativ sein kann, solche Investments zu tätigen.

Lösungsskizze:

(a) Bei der risikoneutralen Bewertung werden Preise von Finanzderivaten formal als Erwartungswert der diskontierten Auszahlungen unter einem risikoneutralen Maß bzw. Martingalmaß berechnet, d. h. als ob Investoren risikoneutral wären und ihre Entscheidungen ausschließlich anhand des Erwartungswerts treffen würden.[1] In einem risikoneutralen ESG ist die Risikoprämie gleich Null. Somit verdienen im Erwartungswert alle möglichen Anlagen und Strategien denselben Return.

In der Realität sind Investoren im Allgemeinen allerdings risikoavers und verlangen eine Kompensation für die Risikoübernahme. Dieser Realität wird in einem real-world ESG Rechnung getragen, in dem risikoreichere Anlageklassen einen positiven Drift des erwarteten Returns haben.

Genutzt werden risikoneutrale ESGs für die faire Bewertung komplexer derivativer Zahlungsströme. Unter der Voraussetzung der Existenz einer dynamischen Hedgestrategie, mit der das Derivat risikofrei gestellt werden kann, ist die Bewertung unabhängig von der tatsächlichen Höhe der Risikoprämie und der Fall von Null ist am einfachsten zu handhaben. Auf der anderen Seite ist für die Ermittlung von Chancen und Risiken die Risikoneigung der Marktteilnehmer essentiell und daher eine realistische Modellierung durch einen real-world ESG zu verwenden.

(b) Das Baukastenrezept besteht aus 3 Schritten:

1. Wahl der Zielgröße. Beispiele sind Differenzen, (shifted) Returns oder (shifted) Log-Returns
2. Wahl der Verteilung der Zielgröße. Beispiele sind Normalverteilung, Log-Normalverteilung, t-Verteilung und weitere
3. Wahl optionaler zusätzlicher Features, zum Beispiel Mean-Reversion oder Regime-Switching.

(c) Als Projektionsmodell für Kreditspreads über einen 1-Jahres Horizont sollen Sie die Modellwahl zwischen normalverteilten Differenzen und normalverteilten Log-Returns illustrieren.

[1] Obwohl als „risikoneutral“ bezeichnet aufgrund der formalen Struktur, ist dieser Ansatz vollständig konsistent mit risikoaversen Marktakteuren. Risikoaversion spiegelt sich marktkonsistent im Martingalmaß wider.

(i) Kreditspreads entsprechen einem Aufschlag auf die risikolose Zinskurve, der in der Bewertung von ausfallbehafteten Anleihen angewandt wird. Diese Überrendite stellt eine Kompensation für die mit dem Investment zusätzlich eingegangenen Risiken dar.
Der Gesamtspread einer Anleihe kann als Summe verschiedener Komponenten für erwarteten Ausfall und geringere Liquidität aufgefasst werden. Zusätzlich ist noch eine Risikoprämie enthalten, die den risikoadversen Investor für das Eingehen von Risiken kompensiert.

(ii) Normalverteilte Differenzen sind im Allgemeinen unbeschränkt und können somit auch negative Kreditspreads erzeugen. Dies ist ökonomisch im Allgemeinen nicht sinnvoll. Je nach Parametrisierung und Ausgangsniveau kann die Wahrscheinlichkeit solcher Pfade aber gering sein. Normalverteilte Log-Returns führen zu einer Lognormalverteilung. Diese sichert die Positivität der Kreditspreads. Allerdings können sehr hohe (unrealistische) Spreads insbesondere bei erhöhtem Ausgangsniveau auftreten, also ein stark prozyklisches Verhalten.

(iii) Für Differenzen gilt $\text{diff}(1) = s(t+1) - s(t)$ mit $\text{diff}(1) \sim \mathcal{N}(0; (\sigma_N)^2)$. Gemäß dem Kalibrierungsziel folgt also

$$\sigma_N = (0{,}003 - 0{,}013)/\Phi^{-1}(10\%) = 0{,}0078.$$

Für Log-Returns gilt $\text{log. ret}(1) = \ln(s(t+1)/s(t))$ mit $\text{log. ret}(1) \sim \mathcal{N}(0; (\sigma_{LN})^2)$. Gemäß dem Kalibrierungsziel folgt also

$$\sigma_{LN} = \ln(0{,}003/0{,}013)/\Phi^{-1}(10\%) = 1{,}1442.$$

Berechnet man in dieser Kalibrierung zum Beispiel das 1% Quantil der Verteilung erhält mal für den Differenzenansatz einen Spread von $s(t+1) = -0{,}52\%$. Im Gegensatz dazu ist der Spread im Log-Return-Modell mit 0,09% weiterhin positiv.

Auf der anderen Seite ist das 99% Quantil der Verteilung im Differenzenansatz eher moderat (Spreadanstieg auf 3,12%), während das Log-Return-Modell 18,62% projiziert.

(d) (i) Das Nominal wird gleich 1 gesetzt. Dann gilt für den Marktpreis der Anleihe

$$\text{Preis}_5^{\text{BBB}} = (1 + 0{,}022 + 0{,}013)^{-5} = 0{,}8420$$

sowie für den Preis einer analogen risikofreien Anleihe

$$\text{ZCB}_5 = (1 + 0{,}022)^{-5} = 0{,}8969.$$

Für diese Preise besteht bei risikoneutraler Bewertung der Zusammenhang

$$\text{Preis}_5^{\text{BBB}} = \text{ZCB}_5(p_5^{(\text{survive,risk-neutral})} \cdot 1 + (1 - p_5^{(\text{survive,risk-neutral})}) \cdot 1 \cdot \text{RR}),$$

wobei RR die Recovery Rate bezeichnet. Daraus folgt

$$p_5^{(\text{survive,risk-neutral})} = \frac{\text{Preis}_5^{BBB} / \text{ZCB}_5 - \text{RR}}{1 - \text{RR}} = 0{,}9183.$$

Es gilt somit

$$p_5^{(\text{survive,risk-neutral})} = (p_{\text{annualized}}^{(\text{survive,risk-neutral})})^5 = (1 - p_{\text{annualized}}^{(\text{default,risk-neutral})})^5$$

und somit $p_{\text{annualized}}^{(\text{default,risk-neutral})} = 1 - 0{,}9183^{1/5} = 1{,}69\%$

(ii) Die tatsächlich realisierte annualisierte Ausfallrate eines solchen Titels $p_{\text{annualized}}^{(\text{default, real world})}$ liegt in der Regel deutlich unterhalb von $p_{\text{annualized}}^{(\text{default, risk-neutral})}$ aus (i). Dies liegt daran, dass Investoren für die Möglichkeit des Ausfalls (aber auch für die potentiell niedrigere Liquidität) eines solchen Titels eine Kompensation fordern, um ein solches Investment zu tätigen. Diese Risikoprämie entspricht somit dem Aufschlag im Spread, über die reine Ausfallkomponente hinaus, die sich aus $p_{\text{annualized}}^{(\text{default, real world})}$ ergibt.
Unter der Voraussetzung, dass die reale Ausfallwahrscheinlichkeit nur ein Drittel beträgt ergibt sich somit:

$$p_{\text{annualized}}^{(\text{default, real world})} = 0{,}56\% \quad \Rightarrow \quad p_5^{(\text{survive,real world})} = 97{,}22\%$$

und somit aus der risikoneutralen Sicht ein Modellpreis von

$$\text{Preis}_{5,RW}^{BBB} = \text{ZCB}_5(p_5^{(\text{survive,real world})} \cdot 1 + (1 - p_5^{(\text{survive,real world})}) \cdot 1 \cdot \text{RR}) = 0{,}8782.$$

Der reine Ausfall-Spread beträgt somit

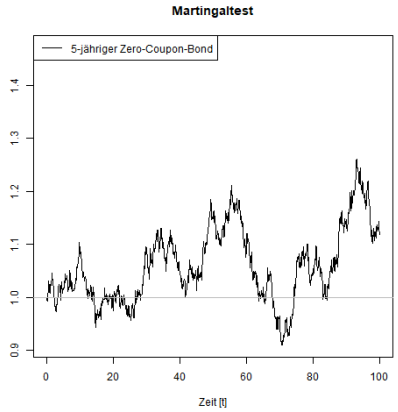
$$s_0 = \left(\text{Preis}_{5,RW}^{BBB}\right)^{-1/5} - (1 + 0{,}022) = 0{,}43\%$$

bzw. die Risikoprämie 0,87%.

(iii) Versicherer können die in (ii) beschriebene Überrendite verdienen, da sie typischerweise als „buy-and-hold"-Investoren agieren und somit den Titel inklusive des Preisabschlags (entsprechend der Risikoprämie) erwerben, diesen auch in Zeiten höherer Spreads nicht verkaufen müssen und am Ende mit höherer Wahrscheinlichkeit als $p_5^{(\text{survive, risk-neutral})}$ das Nominal zurückbezahlt bekommen. Damit können sie effektiv die Risikoprämie realisieren.

Aufgabe 6. *[Ökonomische Szenariogeneratoren - risikoneutral] [26 Punkte]*

(a) *[4 Punkte] Martingaltest:* Die folgende Graphik visualisiert die Ergebnisse des Martingaltests für Zero-Coupon-Bonds mit Restlaufzeit von 5 Jahren im Kontext der risikoneutralen Modellierung.



Beschreiben Sie, welche konkrete Bedingung in diesem Martingaltest geprüft wird. Geben Sie insbesondere an, wie der Wert des Graphen zum Zeitpunkt $t = 20$ formal berechnet wird. Warum ist eine solche Untersuchung im Kontext von real-world Szenarien nicht sinnvoll?

(b) *[12 Punkte] Constant Maturity Bond Fund:* Der Martingaltest für Zinsen kann alternativ auch auf einem sogenannten Constant Maturity Bond Fund durchgeführt werden. Dieser besteht aus Nullkuponanleihen einer spezifischen festgelegten Laufzeit, kombiniert mit einem periodischen Rebalancing, sodass die Alterung der Anleihen berücksichtigt wird und an einem jeweiligen Periodenanfang die festgelegte Fondslaufzeit wieder hergestellt wird. Zum Ende jeder Periode wird dementsprechend ein Rebalancing vorgenommen, das die Alterung der Anleihen berücksichtigt, um die Fondslaufzeit auf Periodensicht konstant zu halten. Nehmen Sie daher an, dass sich die Fondslaufzeit im Zeitverlauf nicht verändert.

(i) *[7 Punkte]* Gehen Sie von einem Anfangsinvestment N und einer Laufzeit von 5 Jahren aus. Bestimmen Sie die Wertentwicklung des Fonds über die ersten 3 Simulationsperioden.

(ii) *[5 Punkte]* Folgern Sie aus der vorangegangenen Betrachtung die mathematische Bedingung des entsprechenden Martingaltests bezüglich des Startpunkts der Simulation.

(c) *[10 Punkte] Kalibrierung:* Betrachten Sie in einem Finanzmarktmodell eine stochastische Größe (wie z. B. einen Aktienkurs), die sich gemäß einer geometrischen Brownschen Bewegung mit einem stochastischen Drift-Prozess $(\mu_t)_{t\geq 0}$ entwickelt. Der Geldmarktfonds $(B_t)_{t\geq 0}$ mit Short-Rate $(r_t)_{t\geq 0}$ wird im Modell als Numéraire verwendet.

(i) *[5 Punkte]* Erläutern Sie *qualitativ*, warum im risikoneutralen Kontext der Drift kein freier Kalibrierungsparameter ist.

(ii) *[5 Punkte]* Leiten Sie *formal* ab, wie der Drift mit der Short-Rate zusammenhängt.

Lösungsskizze:

(a) Der Martingaltest prüft im risikoneutralen Kontext auf Ebene eines simulierten Szenarios das Vorliegen der Martingaleigenschaft von diskontierten Preisprozessen. Für einen 5-jährigen Zero-Coupon-Bond wird hierzu formal in jedem Zeitpunkt t die notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung

$$\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{ZCB}_5(t)}{B_t}\right] = \mathrm{ZCB}_{5+t}(0) \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{1}{\mathrm{ZCB}_{5+t}(0)}\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{ZCB}_5(t)}{B_t}\right]$$

mit

- B_t: Wert des Geldmarktfonds mit Startwert $B_0 = 1$ zum Zeitpunkt t
- $\mathrm{ZCB}_i(t)$: Preis eines Zero-Coupon-Bonds mit Laufzeit von i Jahren in t

geprüft. Der Erwartungswert bezieht sich dabei auf das risikoneutrale Maß bzw. Martingalmaß und wird als Mittelwert aus dem Szenario ermittelt.

Der Martingaltest ist erfüllt, wenn die Werte $\frac{1}{\mathrm{ZCB}_{5+t}(0)}\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{ZCB}_5(t)}{B_t}\right]$ „hinreichend nahe“ bei 1 liegen.

In vorliegender Graphik ist der Wert für $t = 20$ gegeben als

$$\frac{1}{\mathrm{ZCB}_{25}(0)}\mathbb{E}\left[\frac{\mathrm{ZCB}_5(20)}{B_{20}}\right].$$

Im real-world Kontext ist der Martingaltest nicht sinnvoll, da volatile Anlagen dort eine Risikoprämie verdienen.

(b) (i) Es bezeichne $\mathrm{ZCB}_T(t)$ den Wert eines Zerocouponbonds mit Laufzeit T zum Projektionszeitpunkt t. Ferner seien für die Perioden $t = 1, 2, 3$ der Zeitpunkt $t-1$ der Beginn der Periode (BoP) sowie t der Zeitpunkt des Periodenendes (EoP). Die Wertentwicklung lässt sich in folgender Tabelle darstellen:

Periode	Wert BoP	Investment	Anzahl	Wert EoP
1	N	$\mathrm{ZCB}_5(0)$	$N/\mathrm{ZCB}_5(0)$	$N\frac{\mathrm{ZCB}_4(1)}{\mathrm{ZCB}_5(0)}$
2	$N\frac{\mathrm{ZCB}_4(1)}{\mathrm{ZCB}_5(0)}$	$\mathrm{ZCB}_5(1)$	$N\frac{\mathrm{ZCB}_4(1)}{\mathrm{ZCB}_5(0)\mathrm{ZCB}_5(1)}$	$N\frac{\mathrm{ZCB}_4(1)\mathrm{ZCB}_4(2)}{\mathrm{ZCB}_5(0)\mathrm{ZCB}_5(1)}$
3	$N\prod_{j=0}^{1}\frac{\mathrm{ZCB}_4(i+1)}{\mathrm{ZCB}_5(i)}$	$\mathrm{ZCB}_5(2)$	$\frac{N}{\mathrm{ZCB}_5(2)}\prod_{j=0}^{1}\frac{\mathrm{ZCB}_4(i+1)}{\mathrm{ZCB}_5(i)}$	$N\prod_{j=0}^{2}\frac{\mathrm{ZCB}_4(i+1)}{\mathrm{ZCB}_5(i)}$

(ii) Der Constant Maturity Funds erwirtschaftet im Mittel den risikoneutralen Return, folglich muss der diskontierte Fondwert dem Ausgangsinvestment entsprechen, also

$$\mathbb{E}\left[\mathrm{Disc}(t)\cdot N\prod_{j=0}^{t-1}\frac{\mathrm{ZCB}_4(j+1)}{\mathrm{ZCB}_5(j)}\right] = N.$$

wobei $\mathrm{Disc}(t)$ den Diskontfaktor zum Projektionszeitpunkt t bezeichnet.

(c) (i) Als Konsequenz der Martingaleigenschaft der diskontierten Preisprozesse unter dem risikoneutralen Bewertungsmaß verdient im risikoneutralen Kontext jedes Investment im Mittel grob gesprochen dieselbe risikolose Rendite. Die risikolose Rendite ist durch die Startzinskurve festgelegt, die marktkonsistent ermittelt wird. Somit kann der Drift der geometrischen Brownschen Bewegung nicht willkürlich gewählt werden, sondern ist durch die Startzinskurve festgelegt.

(ii) Die zeitliche Entwicklung der geometrischen Brownsche Bewegung mit stochastischer Drift ist gegeben durch

$$S_t = S_0 \exp\left(\int_0^t \mu_s \, ds - \tfrac{1}{2}\sigma^2 t + \sigma W_t\right), \quad t \geq 0,$$

wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ einen Wiener-Prozess unter dem risikoneutralen Bewertungsmaß bezeichnet.

Der mit dem Geldmarktfonds $B_t = e^{-\int_0^t r_s ds}$, $t \geq 0$, diskontierte Prozess $\tilde{S}_t = S_t/B_t$, $t \geq 0$, folgt dann der Stochastischen Differentialgleichung

$$d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t((\mu_t - r_t)\, dt + \sigma \, dW_t).$$

Da die Martingaleigenschaft nur vorliegen kann, wenn der Drift-Term verschwindet, muss gelten $\mu_t = r_t$ fast sicher.

Aufgabe 7. *[Projektion von Kapitalanlagen] [45 Punkte]*

(a) *[8 Punkte]* (Managementregeln)

(i) *[2 Punkte]* Erläutern Sie, was unter dem Begriff *„Managementregeln“* zu verstehen ist.

(ii) *[3 Punkte]* Sie beabsichtigen, eine Managementregel zur Realisierung stiller Reserven für nicht börsennotierte Anlagen wie Private Equity und Infrastruktur zu implementieren. Welche grundsätzliche Herausforderung bringt das mit sich?

(iii) *[3 Punkte]* Begründen Sie anhand eines Beispiels, warum auch das Verhalten von Versicherungsnehmern durch definierte Regeln in Projektionsmodellen berücksichtigt werden sollte.

(b) *[10 Punkte]* (Risikoneutrale Szenarien in Bewertungsmodellen)

Risikoneutrale Szenarien werden zur Bewertung benutzt, d. h. immer dann, wenn erwartete Barwerte zukünftiger Cashflows im Fokus stehen und nicht die Cashflows selber. Erläutern Sie den Kontext, in dem risikoneutrale Szenarien in Stochastischen Projektionsmodellen der Lebensversicherung verwendet werden und warum diese Szenarien in diesem Zusammenhang wichtig sind.

(c) *[10 Punkte]* (Solvency II - Standardformel)

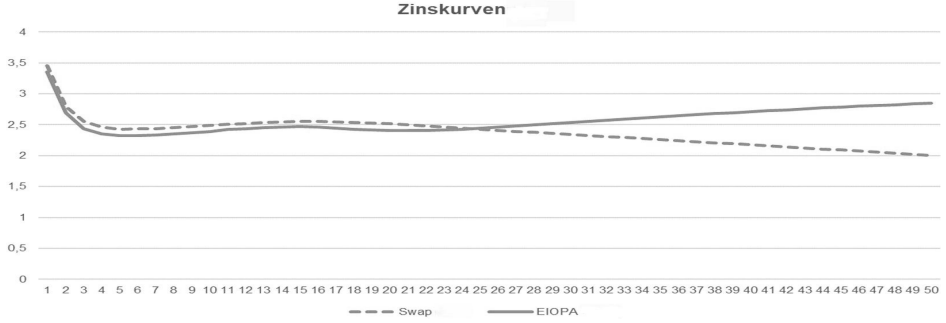
(i) *[3 Punkte]* Investmentrisiken fließen im Kontext weiterer Risiken in die Solvenzkapitalanforderung ein. Beschreiben Sie prägnant zwei Risikokategorien der 1. Aggregationsebene des Standardmodells, bei denen Investmentrisiken in die Berechnung der Basissolvenzkapitalanforderung (BSCR) eingehen.

(ii) *[2 Punkte]* Geben Sie die Formel zur Ermittlung des BSCR an (2. Aggregationsebene).

(iii) *[5 Punkte]* Erläutern Sie, worin sich die Solvenzkapitalanforderung (SCR) und das BSCR unterscheiden. Gehen sie dabei auch auf die Begriffe *„SCR Netto“* und *„SCR Brutto“* ein.

(d) *[7 Punkte]* (EIOPA-Zinsstrukturkurve)

Die folgende Abbildung zeigt die EIOPA- und die Swap-Kurve zu einem beliebigen Zeitpunkt des letzten Jahres (Angabe Ordinate: in %; Angabe Abszisse: in Jahren):



Worin unterscheiden sich EIOPA- und Swap-Kurve bei den kurz- bzw. mittelfristigen Laufzeiten sowie am langen Ende? Was bedeutet das Auseinanderlaufen der EIOPA-Zinsstrukturkurve und der Swap-Kurve am langen Ende für die Bewertung von Aktiva und Passiva in der Solvenzbilanz?

(e) *[10 Punkte]* (Aktienrisikomodul)

Die ABC Versicherung ist u. a. in den Anlageklassen Aktien, Private Equity und Infrastruktur investiert. Zum letzten Stichtag haben Sie die Eigenmittelunterlegung gemäß Solvency-II-Standardmodell im Aktienrisikomodul ermittelt. Ein Kollege von Ihnen behauptet, dass Ihre Berechnung fehlerhaft sei, und trifft die Aussage, dass die Eigenmittelunterlegung im Aktienrisikomodul immer 39% ihres Marktwertes beträgt.

Nennen und erläutern Sie 4 Gründe, warum diese Aussage nicht zutrifft. Gehen Sie dafür auch auf unterschiedliche Anlagenkategorien im Aktienrisikomodul ein.

Lösungsskizze:

(a) Managementregeln

(i) Managementregeln (MMR) sind Handlungsvorschriften, mit denen im Unternehmensmodell Entscheidungen des Managements abgebildet werden. Sie können statischer oder dynamischer Natur sein.

(ii) Durch die Illiquidität dieser Vermögenswerte ist es schwierig, einen realistischen Marktwert bei der Implementierung dieser Managementregel anzusetzen.

(iii) Nicht nur die Entscheidungen des Managements sind für den Projektionsverlauf relevant, sondern auch das Verhalten der Versicherungsnehmer.

Beispiel: Bei fondsgebundenen Versicherungen könnte z. B. eine negative Abweichung der Aktienperformance von der Zielverzinsung zu erhöhtem Storno führen. Liegt die Aktienperformance hingegen über der Zielverzinsung, stornieren die Versicherungsnehmer hingegen ggf. weniger.

(b) Risikoneutrale Szenarien in Bewertungsmodellen

- Klassische Bedeutung einer Bilanz: Aktiva = „Mittelverwendung“, Passiva = „Mittelherkunft“
- Die Marktwerte der Aktiva sind bekannt und gehen in die risikoneutrale Projektion ein. Gesucht sind die Bilanzpositionen der Passivseite.
- Die risikoneutrale Projektion ist aufgrund der Komplexität des deutschen Versicherungsgeschäfts bzw. der deutschen Überschussbeteiligung und der ausgesprochenen Garantien notwendig, um die Frage des „Gehörens“ für Aktionäre, Versicherungsnehmer und Fiskus entscheiden zu können. In einer (z. B. 50-jährigen) Abwicklung des Bestandes werden für jedes Jahr HGB-GuVen und -Bilanzen auf Basis

der Modellierung von Kapitalanlagen, Versicherungstarifen und Managementregeln aufgestellt. Hieraus ergibt sich die gesuchte Aufteilung. Anschließend werden die resultierenden Cashflows diskontiert.

- Das Vorgehen wird für eine festgelegte Anzahl verschiedener Monte-Carlo-Simulationen des Kapitalmarkts wiederholt. Aus den erhaltenen Barwerten wird dann ein Mittelwert über alle Simulationen gebildet. Diese Mittelwerte bilden die passivseitigen Bilanzpositionen der Solvabilitätsübersicht.
- Die Eigenschaft „Risikoneutralität“, die für die Einhaltung des Martingaltests bzw. Leakagetests sorgt, ist die Grundlage für die Bilanzgleichung „Aktivseite = Passivseite“.

(c) Solvency II - Standardformel

(i) Gemäß §100 VAG ist die Basissolvenzkapitalanforderung (BSCR) eine Aggregation der Kapitalanforderungen der Risikomodule, die eine Diversifizierung zwischen den folgenden sechs Risiken ermöglichen: Marktrisiko, versicherungstechnisches Risiko Leben, versicherungstechnisches Risiko Kranken, versicherungstechnisches Risiko Nicht-Leben, mit immateriellen Vermögenswerten verbundenes Risiko. Investmentrisiken gehen dabei in folgende Module ein:

- Marktrisiko - Beschreibt die Schwankung der Marktwerte von Kapitalanlagen und Verbindlichkeiten und gliedert sich in die Teilrisiken Zins, Spread, Aktien, Immobilien, FX und Konzentration.
- Gegenparteiausfallrisiko - Risiko, das die Verluste durch Ausfall bzw. Minderung der Bonität von Gegenparteien aufweist.

(ii) Die Aggregation der unter (i) genannten Risikomodule erfolgt über die Kovarianz-Formel („Wurzelformel“)

$$\text{BSCR} = \sqrt{\sum_{i,j} \text{Corr}_{i,j} \cdot \text{SCR}_i \cdot \text{SCR}_j}$$

mit

- $\text{Corr}_{i,j}$ - Koeffizienten der Korrelationsmatrix,
- SCR_i und SCR_j - Kapitalanforderungen der einzelnen Risiken gemäß Zeile i und Spalte j der Korrelationsmatrix

(iii) Das SCR ist die Gesamtkapitalanforderung und ergibt sich aus .

$$\text{SCR} = \text{BSCR} + \text{SCR}_{OpRisk} - \text{LAC}_{TP\&DT}$$

- BSCR - siehe oben,

- SCR_{OpRisk} - Das operationelles Risiko adressiert die Gefahr, dass Verluste aus dem Versagen von internen Prozessen, Mitarbeitern oder Systemen, durch externe Ereignisse oder Rechtsrisiken entstehen.
- $LAC_{TP\&DT}$ - Die Risikominderung berücksichtigt einen möglichen Ausgleich von unerwarteten Verlusten durch eine gleichzeitige Reduzierung der versicherungstechnischen Rückstellungen (in Form einer Reduzierung der zukünftigen Überschussbeteiligung (ZÜB)) und latenter Steuern.
- Die Solvenzkapitalanforderung unter Berücksichtigung der risikomindernden Wirkung der ZÜB nennt man *SCR Netto*. Beim *SCR Brutto* wird hingegen unterstellt, dass die Versicherungsnehmer eine unveränderte Überschussbeteiligung erhalten.

(d) EIOPA-Zinsstrukturkurve

- Aktiva und Passiva werden mit unterschiedlichen Zinskurven bewertet. Die Bewertung der Assets erfolgt am Markt. Die Bewertung der versicherungstechnischen Rückstellung erfolgt marktkonsistent mit der EIOPA-Kurve und nicht mit einer reinen Marktkurve.
- Die EIOPA-Kurve folgt bis zum Jahr 20 überwiegend der Marktkurve; sie unterscheidet sich jedoch durch Anpassungen wie dem Credit Risk Adjustment (CRA) und dem Volatility Adjustment (VA). Die EIOPA-Kurve extrapoliert nach dem Last Liquid Point (LLP) zu einem Langfristniveau, der sogenannten Ultimate Forward Rate (UFR).
- Die Bewertung von Aktiva und Passiva erfolgt also mit verschiedenen Kurven. Selbst bei identischen Cashflows auf Aktivseite und Passivseite kann daher die Bewertung unterschiedlich sein.
- Dieser Unterschied schwankt mit jedem Stichtag.

(e) Aktienrisikomodul

- Der Faktor i. H. v. 39% stellt nur den Basisstress für *Typ 1* Aktien aus OECD-Ländern dar. Für Aktien vom *Typ 2* (sonst. Aktien, Private Equity, ...) ist im Basisstress dagegen ein Faktor i. H. v. 49% anzusetzen.
- Darüber hinaus werden im Aktienrisikomodul auch *weitere Anlagearten* wie z. B. Investitionen in *qualifizierte Infrastruktur* und *strategische Beteiligungen* erfasst und mit geringeren Basisstress-Faktoren unterlegt.
- Die Basisstressfaktoren werden an jedem Stichtag additiv um den *symmetrischen Anpassungsfaktor* korrigiert (Ausnahme: strategische Beteiligungen). Die Berechnung des symmetrischen Anpassungsfaktors basiert auf dem Vergleich des Aktienmarktniveaus am Stichtag mit dem Durchschnittsniveau der letzten drei Jahre. Übertrifft das aktuelle Niveau den Durchschnitt um einen bestimmten Prozentsatz, erfolgt

eine Erhöhung des Stressfaktors et vice versa. Die Anpassung ist auf +/-10%-Punkte begrenzt. Der Stressfaktor ändert sich im Zeitablauf, ist aber für alle Unternehmen gleich.

- Die einzelnen Unterkategorien des Aktienrisikomoduls werden zunächst separat gestresst und ein separater Eigenmittelrückgang ermittelt. Die Korrelation zwischen Aktien vom Typ 1 und den weiteren Kategorien beträgt 0,75. Hieraus resultiert innerhalb des Aktienrisikomoduls ein *gewisser Diversifikationseffekt*.

Aufgabe 8. *[Kapital- und Renditegarantien in Versicherungsprodukten] [15 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* (Lebens- und Rentenversicherungsprodukte)

In einem Gespräch mit einem Vertriebsmitarbeiter der Versicherungs-AG über Lebens- und Rentenversicherungsprodukte tätigt dieser Ihnen gegenüber die nachfolgend angeführten Aussagen (1)-(5). Geben Sie für jede dieser Aussagen an, für welche der jeweils genannten Produkte die Aussage zutrifft bzw. nicht zutrifft.

(i) *[1 Punkt] Klassik* bzw. *neue Klassik*: Die Kapitalanlage erfolgt bei diesem Produkttyp zu 100% über das konventionelle Sicherungsvermögen.

(ii) *[1 Punkt] Statische* bzw. *dynamische Hybridprodukte*: Die Produkte kombinieren die Kapitalanlage in das konventionelle Sicherungsvermögen mit Investments in Fonds.

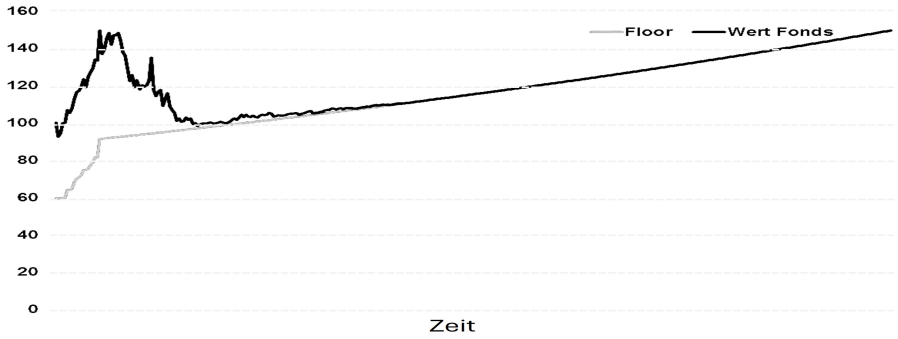
(iii) *[1 Punkt] Statische* bzw. *dynamische Hybridprodukte*: Um Verluste zu begrenzen, nutzt das Produkt meist Garantiefonds, deren maximal zulässiger Verlust jede Periode (i. d. R. 1 Monat) neu festgelegt wird und meist 10% oder 20% beträgt.

(iv) *[1 Punkt] Index Tranchenprodukte* bzw. *Indexpolice*: Bei diesen Produkten wird der Sparbeitrag vollständig in ein Zertifikat einer Bank investiert.

(v) *[1 Punkt] Variable Annuities* bzw. *dynamische Hybridprodukte*: Wesentliches Charakteristikum bei diesem Produkt ist die explizite Trennung der Kapitalanlage im Rahmen der Fonds und die Darstellung der Garantien.

(b) *[5 Punkte]* (Garantiefonds)

Die folgende Abbildung zeigt den Verlauf eines Garantiefonds über die Zeit:



Um welche Art von Garantiefonds handelt es sich? Begründen Sie Ihre Antwort. Im Zeitverlauf weisen Floor und Wert des Fonds einen identischen Verlauf auf. Warum? Wie nennt man diese Situation?

(c) *[5 Punkte]* (Variable Annuities) Erläutern Sie anhand von zwei Punkten, warum Variable Annuities in Deutschland nur eine Nischenlösung darstellen.

Lösungsskizze:

(a) Lebens- und Rentenversicherungsprodukte

(i) beides

(ii) beides

(iii) nur dynamisch

(iv) nur Tranchen

(v) nur VA

(b) Garantiefonds

- Es handelt sich um einen Höchststand-Garantiefonds. Hier bei wird das Garantieniveau zu bestimmten Stichtagen (z. B. Monatsende) erhöht, wenn der Fondswert an diesem Stichtag einen neuen Höchststand erreicht hat. Die Erhöhungen des Floors sind am linken Bildrand erkennbar.
- Im weiteren Verlauf erreicht der Wert des Fonds den Floor, d. h. es kann bis zur „Fälligkeit“ des Fonds nur noch in die risikolose Anlage investiert werden. Diese Situation wird als Cash Lock bezeichnet.

(c) Variable Annuities

Die nachfolgend genannten Punkte stellen keine abschließende Liste dar, d. h. die Beantwortung anhand weiterer bzw. alternativer Gründe ist möglich.

- Die Vorschriften zur bilanziellen Abbildung von Garantien in Deutschland verhindern faktisch, dass diese Produkte aus Deutschland angeboten werden können. Für die Bedeckung der aus den Garantien resultierenden versicherungstechnischen Verbindlichkeiten müssten die Marktwerte der Derivate des Hedgeportfolios angerechnet werden dürfen.
- In der Finanzmarktkrise haben eine Reihe von Anbietern von Variable Annuities in den USA und Europa hohe Verluste erlitten, da die ausgesprochenen Garantien zum Teil nur sehr schwer abzusichern waren bzw. die Absicherungskosten stark gestiegen waren. Gleichzeitig verteuerten sich die zur Absicherung benötigten Finanzinstrumente deutlich. In der Folge wurde das Neugeschäft in diesen Produkten häufig zumindest temporär ausgesetzt sowie die Konzeption der Produkte angepasst. Infolge dessen führte dies zu einer schlechten Reputation des Produkts.