DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Finanzmathematik und Investment II

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 28. Oktober 2022

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 27 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Dr. Mario Hörig, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Dr. Marcus Scheffer, Prof. Dr. Jochen Wolf,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

Aufgabe 1. *[Portfoliotheorie und -management] [20 Punkte]*

Betrachten Sie einen Investor, der seine Entscheidungen nach dem Erwartungswert-Varianz-Kriterium (EV-Investor) trifft.

(a) *[5 Punkte]* Das Markowitz-Einperioden-Modell ist renditebasiert, d. h. verwendet Erwartungswerte und Varianzen der Renditen der Kapitalanlagen. Erläutern Sie anhand der Präferenzfunktionale auf Wert- und Renditeebene, weshalb im Gegensatz dazu bei Mehrperiodenentscheidungen des EV-Investors der Wert des Portfolios nicht ignoriert werden kann.

(b) *[15 Punkte]* Betrachten Sie ein Zweiperioden-Modell für den Zeitraum $[0, 2]$ mit einem risikobehafteten Wertpapier mit der zufälligen Einperiodenrendite R_i in Periode $i = 1, 2$ und einer risikofreien Anlage mit der konstanten Einperiodenrendite $r = 0$. Mit W_t bezeichnen wir das Vermögen eines Investors zum Zeitpunkt $t = 0, 1, 2$, mit π_t, $t = 0, 1$, den Geldbetrag, der zum Zeitpunkt t in das risikobehaftete Wertpapier investiert ist.

Ferner definieren wir die Nutzenfunktionen

$$U_t := \mathbb{E}_t[W_2] - \gamma \operatorname{Var}_t(W_2), \quad t = 0, 1,$$

wobei γ eine positive Konstante ist. Dabei bezeichnen $\mathbb{E}_t[\cdot] = \mathbb{E}[\cdot \mid \mathcal{F}_t]$ den bedingten Erwartungswert und $\operatorname{Var}_t(\cdot) = \operatorname{Var}(\cdot \mid \mathcal{F}_t)$ die bedingte Varianz, gegeben die σ-Algebra $\mathcal{F}_t$ der Information des Finanzmarkts bis zur Zeit t. Gehen Sie davon aus, dass es keine Volumenbeschränkungen in den Anlagen gibt und dass $\mathbb{E}_0 = \mathbb{E}$ und $\operatorname{Var}_0 = \operatorname{Var}$ gilt.

(i) *[10 Punkte]* Der Investor mit gegebenem Anfangsvermögen $W_0 > 0$ trifft seine nicht-antizipierenden Entscheidungen gemäß folgender Strategie per Rückwärtsrekursion.

1. π_1 wird zum Zeitpunkt $t = 1$ so bestimmt, dass U_1 zum Zeitpunkt 1 maximal wird.
2. Gegeben das optimale π_1, wird π_0 zum Zeitpunkt $t = 0$ so bestimmt, dass U_0 zum Zeitpunkt 0 maximiert wird.

Zeigen Sie

$$\pi_1 = \frac{1}{2\gamma \cdot \operatorname{Var}_1(R_2)} \cdot \mathbb{E}_1[R_2], \pi_0 = \frac{1}{2\gamma \cdot \operatorname{Var}(R_1)} \left(\mathbb{E}[R_1] - 2\gamma \cdot \operatorname{Cov}(R_1, \pi_1 R_2)\right)$$

und interpretieren Sie die Rolle des Abzugsterms in der Darstellung von π_0 für das Verhalten des Zweiperioden-Investors.

Hinweis:

- Es gilt die Rechenregel $\operatorname{Var}(X) = \operatorname{Var}(\mathbb{E}_t[X]) + \mathbb{E}[\operatorname{Var}_t(X)]$.
- Für $\mathcal{F}_t$-messbares X gilt: $\operatorname{Var}_t(X+Y) = \operatorname{Var}_t(Y)$, $\operatorname{Var}_t(X \cdot Y) = X^2 \cdot \operatorname{Var}_t(Y)$.

(ii) *[5 Punkte]* Betrachten Sie folgenden Spezialfall der Situation unter Teil (b) (i) dieser Aufgabe. Es seien $\lambda > 0$, σ_1^2, σ_2^2 lognormalverteilt mit den gleichen Parametern sowie $R_i \mid \sigma_1^2, \sigma_2^2 \sim \mathcal{N}(\lambda\sigma_i, \sigma_i^2)$, $i = 1, 2$, bedingt unabhängig, gegeben σ_1^2, σ_2^2. Nehmen Sie an, dass die Zufallsvariable σ_2^2 zum Zeitpunkt 1 bekannt, d. h. $\mathcal{F}_1$-messbar, ist. Zeigen Sie, dass $\mathrm{Cov}(R_1, \pi_1 R_2) = 0$ gilt, und erklären Sie dieses Resultat.

Hinweis:

- Für eine beliebige σ-Algebra $\mathcal{F}$ gilt die Rechenregel

$$\mathrm{Cov}(X, Y) = \mathrm{Cov}\left(\mathbb{E}[X \mid \mathcal{F}], \mathbb{E}[Y \mid \mathcal{F}]\right) + \mathbb{E}\left[\mathrm{Cov}(X, Y \mid \mathcal{F})\right],$$

  wobei $\mathrm{Cov}(\cdot, \cdot \mid \mathcal{F})$ die bedingte Kovarianz, gegeben $\mathcal{F}$ ist.

- Für $\mathcal{F}$-messbares Z gilt $\mathrm{Cov}(Z \cdot X, Y \mid \mathcal{F}) = Z \cdot \mathrm{Cov}(X, Y \mid \mathcal{F})$.

Lösungsskizze:

(a) Auf der Ebene der zufälligen Portfoliowerte W_1 nach einer Periode sind die individuellen Präferenzen des EV-Investors, gegeben das Startvermögen W_0, bestimmt durch ein Präferenzfunktional der Form

$$\Phi(W_1, \gamma) = \mathbb{E}[W_1] - \gamma\,\mathrm{Var}(W_1)$$

mit einem Risikoaversionsparameter $\gamma > 0$. Dargestellt über die zufällige Einperiodenrendite R gilt

$$\begin{aligned}\Phi(W_1, \gamma) &= \mathbb{E}[W_0(1+R)] - \gamma\,\mathrm{Var}(W_0(1+R)) \\ &= W_0 + W_0 \cdot \mathbb{E}[R] - \gamma (W_0)^2 \cdot \mathrm{Var}(R) \\ &= W_0(1 + \tilde{\Phi}(R, \gamma \cdot W_0))\end{aligned}$$

mit dem Präferenzfunktional $\tilde{\Phi}(R, \gamma \cdot W_0) = \mathbb{E}[R] - \gamma \cdot W_0 \cdot \mathrm{Var}(R)$ auf Renditeebene, dessen Risikoaversionsparameter $\gamma \cdot W_0$ explizit vom Startvermögen abhängt. Zur Portfoliooptimierung ist es äquivalent, auf Renditeebene bezüglich $\tilde{\Phi}(R, \gamma \cdot W_0)$ oder auf Wertebene bezüglich $\Phi(W_1, \gamma)$ zu optimieren.

Optimiert man im Mehrperiodenkontext, so ist der Risikoaversionsparameter abhängig vom Portfoliowert am Periodenanfang und muss entsprechend im Präferenzfunktional auf Renditeebene adjustiert werden.

(b) (i) Die Wertentwicklung des Portfolios in der 2. Periode ist gegeben durch

$$W_2 = W_1 + \pi_1 R_2,$$

sodass gemäß den angegebenen Rechenregeln

$$U_1 = \mathbb{E}_1[W_2] - \gamma\,\mathrm{Var}_1(W_2) = W_1 + \pi_1 \mathbb{E}_1[R_2] - \gamma\,\mathrm{Var}_1(R_2)\pi_1^2$$

gilt. Der Investor maximiert daher äquivalent zu U_1 den Ausdruck

$$\pi_1 \mathbb{E}_1[R_2] - \gamma \operatorname{Var}_1(R_2)\pi_1^2.$$

Wie im Markowitz-Einperioden-Modell liefert Nullsetzen der Ableitung nach π_1

$$\mathbb{E}_1[R_2] - 2\gamma \operatorname{Var}_1(R_2)\pi_1 = 0$$

das optimale Portfolio $\pi_1 = \frac{1}{2\gamma \operatorname{Var}_1(R_2)} \cdot \mathbb{E}_1[R_2]$.

Mit dem so gewählten π_1 ergibt sich die Wertentwicklung in $[0,2]$ zu

$$W_2 = W_0 + \pi_0 R_1 + \pi_1 R_2.$$

Die Maximierung von

$$\begin{aligned} U_0 &= \mathbb{E}[W_2] - \gamma \operatorname{Var}(W_2) \\ &= W_0 + \mathbb{E}[\pi_1 R_2] + \pi_0 \cdot \mathbb{E}[R_1] \\ &\quad - \gamma \left(\operatorname{Var}(R_1)\pi_0^2 + 2\pi_0 \operatorname{Cov}(R_1, \pi_1 R_2) + \operatorname{Var}(\pi_1 R_2) \right) \end{aligned}$$

ist bei gegebenem π_1 äquivalent zur Maximierung von

$$\pi_0 \cdot \mathbb{E}[R_1] - \gamma \left(\operatorname{Var}(R_1)\pi_0^2 + 2\pi_0 \operatorname{Cov}(R_1, \pi_1 R_2) \right).$$

Nullsetzen der Ableitung nach π_0

$$\mathbb{E}[R_1] - 2\gamma \left(\operatorname{Var}(R_1)\pi_0 + \operatorname{Cov}(R_1, \pi_1 R_2) \right) = 0$$

liefert den optimalen Betrag

$$\pi_0 = \tfrac{1}{2\gamma \operatorname{Var}(R_1)} \left(\mathbb{E}[R_1] - 2\gamma \operatorname{Cov}(R_1, \pi_1 R_2) \right).$$

Sind die beiden Periodenrenditen positiv korreliert, so führt dies zu einer Erhöhung der Volatilität der Zweiperioden-Rendite mit dem Effekt, dass die Investition in die risikobehaftete Anlage weniger attraktiv wird.

(ii) Bedingen auf die von σ_1^2, σ_2^2 erzeugte σ-Algebra liefert unter Beachtung von $\pi_1 = \frac{\lambda}{2\gamma\sigma_2}$

$$\begin{aligned} & \operatorname{Cov}(R_1, \pi_1 R_2) \\ = \; & \operatorname{Cov}\left(\mathbb{E}[R_1 \mid \sigma_1^2, \sigma_2^2], \mathbb{E}[\pi_1 R_2 \mid \sigma_1^2, \sigma_2^2] \right) + \mathbb{E}\left[\operatorname{Cov}(R_1, \pi_1 R_2 \mid \sigma_1^2, \sigma_2^2) \right] \\ = \; & \operatorname{Cov}\left(\mathbb{E}[R_1 \mid \sigma_1^2, \sigma_2^2], \frac{\lambda}{2\gamma\sigma_2} \mathbb{E}[R_2 \mid \sigma_1^2, \sigma_2^2] \right) \\ & + \mathbb{E}\left[\frac{\lambda}{2\gamma\sigma_2} \cdot \operatorname{Cov}(R_1, R_2 \mid \sigma_1^2, \sigma_2^2) \right] \\ = \; & \operatorname{Cov}\left(\lambda\sigma_1, \frac{\lambda^2}{2\gamma} \right) + \mathbb{E}\left[\frac{\lambda}{2\gamma\sigma_2} \operatorname{Cov}(R_1, R_2 \mid \sigma_1^2, \sigma_2^2) \right] \\ = \; & 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

wobei wir im letzten Schritt die bedingte Unabhängigkeit von R_1 und R_2, gegeben σ_1^2, σ_2^2 ausgenutzt haben.

Da die Ein-Perioden-Renditen bedingt unabhängig, gegeben die Volatilitäten der Perioden sind, und das Verhältnis von erwarteter Rendite und Volatilität konstant ist, ist für den Investor keine intertemporale Abhängigkeit erkennbar. Somit trifft er in beiden Perioden die Entscheidung eines Ein-Perioden-EV-Investors.

Aufgabe 2. *[Internationale Investments und Währung] [20 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, welche Überlegung der Theorie der Zinsparität zugrunde liegt?

(b) *[5 Punkte]* Wie lautet die Gleichung der (gedeckten) Zinsparität bei Preisnotierung? Erklären Sie beide Seiten der Gleichung *kurz*.

(c) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, wie sich die gedeckte von der ungedeckten Zinsparität unterscheidet?

(d) *[2 Punkte]* Warum gilt in der Praxis die Gleichung der (gedeckten) Zinsparität nicht immer? Geben Sie zwei Gründe an.

(e) *[7 Punkte]* Aus der Zinsparität ergibt sich eine Alternative zum Devisentermingeschäft: Beim *Money-Market-Hedge* nimmt der Investor einen Kredit in Höhe des erwarteten Rückflusses aus einer Investition in der Fremdwährung auf und legt ihn in inländischer Währung an. Am Periodenende bedient der Rückfluss aus der Investition den Tilgungsbetrag des Kredits. Das Fremdwährungsrisiko ist eliminiert.

Ein kanadisches Industrieunternehmen erwartet in einem Jahr einen Rückfluss aus einem Investment in Höhe von 500.000 USD. Um den Nominalbetrag gegen Schwankungen im USD abzusichern, entschließt es sich für einen Money-Market-Hedge.

Ermitteln Sie in einem Einperiodenmodell für die folgenden Marktparameter

i_{USD} (Zinssatz USA)	i_{CAD} (Zinssatz Kanada)	S_0 (Wechselkurs in $t=0$)	S_1 (Wechselkurs in $t=1$)	
			Szenario 1	Szenario 2
2,90%	2,50%	0,78 $\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}$	0,83 $\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}$	0,67 $\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}$

- den Kreditbetrag in USD in $t=0$ sowie in CAD in $t=0$ und $t=1$,
- die GuV aus dem Money-Market-Hedge in CAD in $t=1$
- sowie den finalen Cashflow aus dem Gesamtinvestment in CAD in $t=1$.

Lösungsskizze:

(a) Ein Investor wird immer versuchen, in dem Währungsraum sein Kapital anzulegen, in dem er die größtmögliche (risikoadjustierte) Rendite erwirtschaften kann. Durch das Anlageverhalten der Investoren werden Arbitragemöglichkeiten sofort erkannt, genutzt und verschwinden damit wieder, sodass die Gleichung der Zinsparität gilt.

(b) Gleichung der gedeckten Zinsparität:

$$1 + i_{\text{Inland}} = \frac{F}{S} \cdot (1 + i_{\text{Ausland}})$$

- *Rechte Seite:*
  Lege eine Geldeinheit in der inländischen Währung an.
  ⇝ Endvermögen: $1 + i_{\text{Inland}}$

- *Linke Seite:*
  Tausche eine Geldeinheit der inländischen Währung in die ausländische Währung zum aktuellen Wechselkurs $1/S$.
  Lege zu i_{Ausland} an.
  Verkaufe den erwarteten Anlagebetrag auf Termin zu F.
  ⇝ Endvermögen: $\frac{F}{S} \cdot (1 + i_{\text{Ausland}})$

(c) Bei der ungedeckten Zinsparität geht der Anleger davon aus, dass prognostizierte Wechselkursänderungen auch eintreten, er akzeptiert das Wechselkursrisiko. Es kommen keine Finanzderivate zur Absicherung zum Einsatz.

Bei der gedeckten Zinsparität werden Finanzderivate (Termingeschäfte) eingesetzt, um das Wechselkursrisikos auszuschalten.

(d) Es ist eine vollkommene Kapitalmobilität notwendig, beliebig große Kapitalmengen müssen innerhalb kürzester Zeit und ohne Kosten transferiert werden können.

Gerade für kleine Währungsräume könnte es keine oder nur eine eingeschränkte Verfügbarkeit von Hedging-Instrumenten geben.

(e) Kreditbetrag in USD in $t = 0$ sowie in CAD in $t = 0$ und $t = 1$:

Kredit in USD in $t = 0$	$\frac{500.000\,\text{USD}}{1{,}029} = 485.908{,}65\,\text{USD}$
Kredit in CAD in $t = 0$	$\frac{485.908{,}65\,\text{USD}}{0{,}78\,\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}} = 622.959{,}81\,\text{CAD}$
Kredit in CAD in $t = 1$	$622.959{,}81\,\text{CAD} \cdot 1{,}025 = 638.533{,}80\,\text{CAD}$

GuV in CAD in $t = 1$:

S_1	GuV in CAD in $t = 1$
Szenario 1: $0{,}83\,\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}$	$638.533{,}80\ \text{CAD} - \frac{500.000\,\text{USD}}{0{,}83\,\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}} = \quad 36.124{,}16\,\text{CAD}$
Szenario 2: $0{,}67\,\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}$	$638.533{,}80\ \text{CAD} - \frac{500.000\,\text{USD}}{0{,}67\,\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}} = -107.734{,}85\,\text{CAD}$

Cashflow aus dem Gesamtinvestment in CAD in $t = 1$:

S_1	Cashflow in CAD in $t = 1$
Szenario 1: $0{,}83\,\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}$	$36.124{,}16\,\text{CAD} + \frac{500.000\,\text{USD}}{0{,}83\,\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}} = 638.533{,}80\ \text{CAD}$
Szenario 2: $0{,}67\,\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}$	$-107.734{,}85\,\text{CAD} + \frac{500.000\,\text{USD}}{0{,}67\,\frac{\text{USD}}{\text{CAD}}} = 638.533{,}80\ \text{CAD}$

Aufgabe 3. *[Management von Zinsrisiken und Zinstiteln] [20 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Sie werden mit der Durchführung der Risikosteuerung in Ihrem Versicherungsunternehmen beauftragt. Ihre Aktiva und Passiva besitzen folgende Werte:

	Marktwert in Mio. €
Festverzinsliche Kapitalanlagen	1.000
Passivseite (Best Estimate Liabilities)	800

Durch ein Curve Fitting kennen Sie die Marktwerte der festverzinslichen Kapitalanlagen (Assets) $f_{\text{Assets}}(z)$ sowie der Passivseite (Liabilities) $f_{\text{Liabilities}}(z)$ (jeweils in Mio. €) bezüglich paralleler Zinskurvenänderungen $z \in [-0{,}01; 0{,}01]$ der heutigen Basiszinskurve in funktionaler Form:

$$\begin{aligned} f_{\text{Assets}}(z) &= 250.000z^2 - 17.500z + 1.000 \\ f_{\text{Liabilities}}(z) &= 500.000z^2 - 15.000z + \quad 800. \end{aligned}$$

Hierbei ist beispielsweise $f.(0{,}01)$ als Marktwert nach einem Parallelshift von +1% der heutigen Basiszinskurve zu lesen.

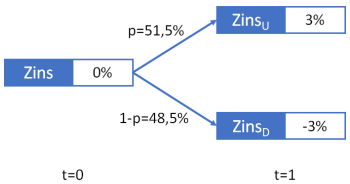
(i) *[2 Punkte]* Geben Sie die allgemeine analytische Funktion der *absoluten* effektiven Zins-Duration für die Assets auf $[-0{,}01; 0{,}01]$ an, basierend auf der Funktion aus dem Curve Fitting. Berechnen Sie anschließend damit die absolute effektive Zins-Duration für die konkrete Zinsverschiebung von +1%.

(ii) *[5 Punkte]* Stellen Sie fest, ob Sie ein Zinsanstiegs- oder Zinsrückgangsrisiko besitzen, indem Sie die *Veränderung der Eigenmittel* für eine parallele Veränderung der Zinskurve um -1%- sowie +1%-Punkte berechnen.

(b) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie den Marktwert eines Single-Callable Bonds mit folgenden Eigenschaften:

- Laufzeit = zwei Jahre (d.h. Rückzahlung in $t = 2$)
- Kupon = 3%
- Kündigungs-Option im 1. Jahr ($t = 1$) zu 102% des Nominals
- Nominal = 100

Gehen Sie bei der Bewertung jeweils von einer flachen Zinsstruktur in $t = 0$ und $t = 1$ aus. Die Zinsstrukturen für diskrete Zinsen seien durch folgenden Binomialbaum



gegeben, wobei die risikoneutrale Wahrscheinlichkeit 51,5% für einen Zinsanstieg von $t = 0$ auf $t = 1$ beträgt bzw. für einen Zinsrückgang bei 48,5% liegt.

(c) *[8 Punkte]* Begründen Sie mit jeweils zwei Stichpunkten, warum die folgenden Aussagen nicht korrekt sind:

(i) *[2 Punkte]* Alle Finanztitel mit einer momentanen effektiven Zins-Duration von Null besitzen kein Zinsrisiko.

(ii) *[2 Punkte]* Um zinssensitive Finanztitel unter einer veränderten Zinskurve exakt bewerten zu können, ist es nur notwendig anstatt der Verwendung der effektiven Duration auf die Key-Rate-Durationen überzugehen.

(iii) *[2 Punkte]* Ein Single-Callable Bond gibt dem Käufer eines Bonds das Recht diesen zu einem speziellen Zeitpunkt durch den Verkäufer zurückzahlen zu lassen.

(iv) *[2 Punkte]* CMS-Floater mit Cap in Heimatwährung besitzen lediglich ein Zinsänderungs- und ein Kreditrisiko.

Lösungsskizze:

(a) (i) Die absolute effektive Duration ist ausgehend von der Marktwertfunktion definiert durch

$$\mathrm{Dur}_{\cdot,\mathrm{abs}}(z) := -\tfrac{d}{dz} f_\cdot(z).$$

Damit folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{Dur}_{\mathrm{Assets,abs}}(z) &= -(500.000z - 17.500) = -500.000z + 17.500, \\ \mathrm{Dur}_{\mathrm{Assets,abs}}(+1\%) &= -5.000 + 17.500 = 12.500. \end{aligned}$$

(ii) Mit EM als Notation für Eigenmittel gilt:

$$\begin{aligned} \mathrm{EM}(\text{heute}) &= \mathrm{EM}(0) = 1.000 - 800 = 200 \\ \mathrm{EM}(-1\%) &= f_{\mathrm{Assets}}(-1\%) - f_{\mathrm{Liabilities}}(-1\%) = 1.200 - 1.000 = 200 \\ \mathrm{EM}(+1\%) &= f_{\mathrm{Assets}}(+1\%) - f_{\mathrm{Liabilities}}(+1\%) = 850 - 700 = 150 \\ \Rightarrow \Delta\mathrm{EM}(-1\%) &= \mathrm{EM}(-1\%) - \mathrm{EM}(0) = 200 - 200 = 0 \\ \Rightarrow \Delta\mathrm{EM}(+1\%) &= \mathrm{EM}(+1\%) - \mathrm{EM}(0) = 150 - 200 = -50 \end{aligned}$$

Bei einem parallelen Zinsanstieg von +1% reduzieren sich die Eigenmittel um 50 Mio. €. Damit existiert ein Zinsanstiegsrisiko.

(b) Bewertung durch Rückwärtseinsetzen, mit analoger Bezeichnung des Marktwertes im Szenario und Zeitschritt wie beim Zins.

In $t = 2$: Zahlung nach 2 Jahren bei Nichtausübung=100+3

Marktwerte in $t = 1$ bei Strike=102:

$$\mathrm{MW}_U = 3 + \min\left\{\tfrac{100+3}{1+3\%}, 102\right\} = 3 + 100 = 103$$
$$\mathrm{MW}_D = 3 + \min\left\{\tfrac{100+3}{1-3\%}, 102\right\} = 3 + 102 = 105$$

Marktwert in $t = 0$:

$$\mathrm{MW}_{\text{Callable}} = \tfrac{0{,}515 \cdot \mathrm{MW}_U + 0{,}485 \cdot \mathrm{MW}_D}{1+0\%} = \underline{103{,}97}$$

(c) (i) i. Die effektive Duration stellt lediglich eine Sensitivität bzgl. einer parallelen Änderung der Zinskurve, ausgehend von einer speziellen Zinskurvenrealisierung, dar.

ii. Weiterhin handelt es sich lediglich um eine lineare Sensitivität, die keine Krümmungen des Marktwertverhaltens berücksichtigt.

(ii) i. Key-Rate-Durationen stellen zwar i. A. eine bessere Approximation des Marktwertes bzgl. Zinskurvenveränderungen dar, da diese nicht auf parallele Zinskurvenänderungen beschränkt sind.

ii. Es handelt es sich pro Zahlungszeitpunkt trotzdem um lineare Sensitivitäten, die nicht exakt sind.

(iii) i. Bei einem Single-Callable Bond besitzt der Verkäufer die Option, nicht der Käufer.

ii. Laut Beschreibung handelt es sich um einen Single-Putable Bond.

(iv) i. Dieser Finanztitel besitzt insbesondere auch ein Zinsvolatilitätsrisiko.

ii. Dies ist der Fall, da der Kupon nicht deterministisch ist und von der Realisierung zukünftiger Zinskurven in asymmetrischer Weise abhängt. Es handelt sich um eine eingebette Zinsoption, die von der Zinsvolatilität abhängt.

Aufgabe 4. *[Ökonomische Szenariogeneratoren: Szenariokonstruktion] [34 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Ökonomische Szenariogeneratoren (ESGs) existieren in zwei verschiedenen Ausprägungen, als *risikoneutrale* und als *real-world* Modellierung. Grenzen Sie zunächst allgemein, ausgehend vom Grundgedanken der Risikoneutralität, die beiden Ansätze gegeneinander ab und beschreiben Sie die Unterscheidung der Anwendungsfälle.

(b) *[6 Punkte]* Begründen Sie in den folgenden Anwendungsfällen, ob ein risikoneutraler oder ein real-world ESG zu verwenden ist.

(i) *[2 Punkte]* Im Zuge eines moderaten Zinsanstiegs im Euroraum verringern sich die zukünftigen Rückstellungen für die Zinszusatzreserve. Dementsprechend soll eine neue Projektion der Verteilung der zukünftigen Zinszusatzreserve (ZZR) zur Steuerung der Kapitalanlage ermittelt werden.

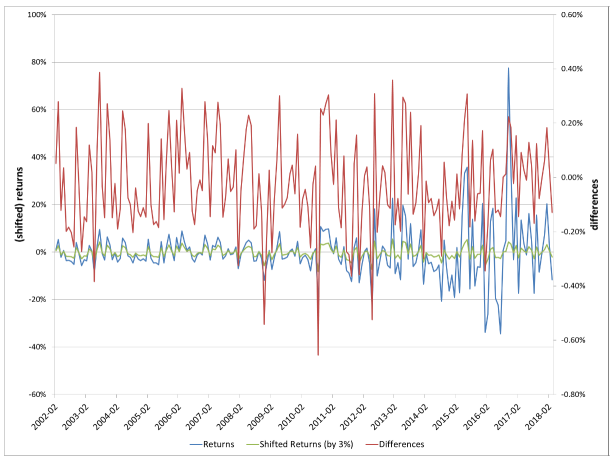
(ii) *[2 Punkte]* Sie unterstützen bei einer Versicherungsübernahme ein Runoff Unternehmen, das als Bieter auftritt, und sollen einen angemessenen Angebotsvorschlag abgeben.

(iii) *[2 Punkte]* Um der erwarteten Inflation zu begegnen, wird in Ihrem Unternehmen derzeit diskutiert, in der Neuanlage des Corporate Bond Portfolios chancenreichere Investments durch eine Erhöhung des Kreditrisikos zu tätigen. Sie werden gebeten, die zu erwartende Überrendite für eine solche Portfolioanpassung zu bestimmen.

(c) *[23 Punkte]* Das Kernstück eines ESGs stellt typischerweise das Zinsmodell dar, das im Folgenden im real-world Kontext betrachtet werden soll.

(i) *[6 Punkte]* Eine besondere Herausforderung besteht in der Modellierung einer realistischen Form der Zinsstrukturkurve. Beschreiben Sie die beiden Ansätze, die dazu im Seminar vorgestellt wurden.

(ii) *[7 Punkte]* Die folgende Graphik zeigt die historischen monatlichen Änderungen des Risikofaktors „10-jährige EUR-Swaprate“ anhand der Größen *Returns*, *Shifted Returns* und *Differenzen*.



Beschreiben Sie *kurz* diese drei Größen zur Modellierung der realistischen Änderung des Risikofaktors „10-jährige EUR-Swaprate“ vom Zeitpunkt t zu $t+\Delta$ formal. Begründen Sie anschließend anhand Ihrer Beobachtungen in der Graphik, mit welcher der drei Größen Sie die realistische Änderung des Risikofaktors „10-jährige EUR-Swaprate“ modellieren würden.

(iii) *[10 Punkte]* Angenommen, Sie sollen die einjährige realistische Entwicklung der 10-jährigen EUR-Spotrate über einen Zeithorizont von einem Jahr modellieren. Dazu sollen Sie zum einen *jährliche Differenzen* und zum anderen *jährliche shifted Log-Returns* mit einem Shift-Parameter $\delta = 2\%$ verwenden, wobei für beide Größen eine Normalverteilungsannahme getroffen wird. Die normalverteilten Größen besitzen jeweils den Erwartungswert 0 sowie die folgenden annualisierten Volatilitäten:

- Differenzen: 0,55%,
- Shifted Log-Returns: 6,36%.

Ermitteln Sie zunächst für beide Modelle das 0,5%-Quantil der Verteilung der 10-jährigen EUR-Spotrate nach einem Jahr, wenn der Stichtagswert 1,65% beträgt. Vergleichen Sie diese Ergebnisse mit denen für einen Stichtagswert von 5% und erklären Sie, worauf die Unterschiede zurückzuführen sind.

Hinweis: Das 0,5%-Quantil der Standardnormalverteilung beträgt -2,57583.

Lösungsskizze:

(a) Bei der risikoneutralen Bewertung werden Preise von Finanzderivvaten formal als Erwartungswert der diskontierten Auszahlungen unter einem risikoneutralen Maß bzw. Martingalmaß berechnet, d. h. als ob Investoren risikoneutral wären und ihre Entscheidungen ausschließlich anhand des Erwartungswerts treffen würden.[1] In einem risikoneutralen ESG ist die Risikoprämie gleich Null. Somit verdienen im Erwartungswert alle möglichen Anlagen und Strategien denselben Return.

In der Realität sind Investoren im Allgemeinen allerdings risikoavers und verlangen eine Kompensation für die Risikoübernahme. Dieser Realität wird in einem real-world ESG Rechnung getragen, in dem risikoreichere Anlageklassen einen positiven Drift des erwarteten Returns haben.

Genutzt werden risikoneutrale ESGs für die faire Bewertung komplexer Zahlungsströme. Einvernehmen über den Wert der Risikoprämie vorausgesetzt,

[1] Obwohl als „risikoneutral“ bezeichnet aufgrund der formalen Struktur, ist dieser Ansatz vollständig konsistent mit risikoaversen Marktakteuren. Risikoaversion spiegelt sich marktkonsistent im Martingalmaß wider.

ist die Bewertung unabhängig von der tatsächlichen Höhe und der Fall von Null ist am einfachsten zu handhaben. Auf der anderen Seite ist für die Ermittlung von Chancen und Risiken eine realistische Modellierung vorauszusetzen, weswegen hierfür real-world ESGs verwendet werden.

(b) (i) Die Ermittlung der zu erwartenden Rückstellungen für die ZZR fußt auf einer realistischen Abschätzung zukünftiger Marktentwicklungen. Daher wird hier ein real-world ESG benötigt.

(ii) Das Angebot soll einen fairen Preis für das Gesamtportfolio des Versicherungsunternehmens darstellen. Daher handelt es sich um eine Bewertungsaufgabe, für die ein risikoneutraler ESG erforderlich ist.

(iii) Die Ermittlung der erwartbaren Überrendite erfordert eine realistische Betrachtung des Chancen-Risiko-Profils. Diese wird durch die Nutzung eines real-world ESGs vermittelt.

(c) (i) Eine Variante ist die direkte Modellierung einzelner Punkte der Zinskurve. Die vollständige Zinskurve wird dann durch Interpolation und ggf. Extrapolation erzeugt. Alternativ kann auch eine Hauptkomponentenanalyse (PCA) angewandt werden. Dabei wird die Zinskurve durch eine Überlagerung verschiedener Kurven, den Hauptkomponenten, dargestellt. Simuliert werden hierbei die Gewichte der verschiedenen Hauptkomponenten.

(ii) Für den Risikofaktor (rf) „10-jährige EUR-Swaprate“ sind die folgenden Größen dargestellt:

1. *Returns*:
   - Zielgröße ist $\mathrm{ret}(t) = \frac{\mathrm{rf}(t+\Delta)}{\mathrm{rf}(t)} - 1$
   - Anwendung: $\mathrm{rf}(t+\Delta) = \mathrm{rf}(t) \cdot (1 + \mathrm{ret}(t))$
   - Einschätzung: Man beobachtet in jüngster Zeit stark wachsende Returns, da das Level weiter abgefallen ist. Eine Modellierung mit statischen Parametern ist nicht empfehlenswert.
2. *Shifted Returns*:
   - Zielgröße ist $\mathrm{shifted.ret}(t) = \frac{\mathrm{rf}(t+\Delta)+\delta}{\mathrm{rf}(t)+\delta} - 1$
   - Anwendung: $\mathrm{rf}(t+\Delta) = (\mathrm{rf}(t)+\delta) \cdot (1 + \mathrm{shifted.ret}(t)) - \delta$
   - Einschätzung: Das Verhalten der Shifted Returns gleicht dem der Returns zu Beginn der Historie und zeigt keine starke Zeitabhängigkeit oder extremen Ausschläge. Eine Modellierung durch Shifted Returns ist denkbar.

3. *Differenzen*:
   - Zielgröße ist $\text{diff}(t) = \text{rf}(t+\Delta) - \text{rf}(t)$
   - Anwendung: $\text{rf}(t+\Delta) = \text{rf}(t) + \text{diff}(t)$
   - Einschätzung: Differenzen zeigen ein homogenes Verhalten über die komplette Zeitperiode. Teilweise sehr tiefe Ausschläge deuten auf eine Linksschiefe der Verteilung hin. Eine Modellierung durch Shifted Returns ist aber denkbar.

(iii) Für Differenzen $r_{10}(t+1) = r_{10}(t) + \text{diff}(1) = 0{,}0165 + \text{diff}(1)$ mit $\text{diff}(1) \sim \mathcal{N}(0; (0{,}055)^2)$ gilt für das 0,5%-Quantil

$$\begin{aligned} q_{0,5\%}(r_{10}(t+1)) &= q_{0,5\%}(-0{,}0025 + \text{diff}(1)) = 0{,}0165 + q_{0,5\%}(\text{diff}(1)) \\ &= 0{,}0165 - 0{,}0055 \cdot 2{,}57583 = \underline{0{,}23\%}. \end{aligned}$$

Für shifted Log-Returns gilt

$$\begin{aligned} r_{10}(t+1) &= (r_{10}(t) + \delta) e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - \delta \\ &= (0{,}0165 + 0{,}02) e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - 0{,}02 \end{aligned}$$

mit $\text{shifted.log.ret}(1) \sim \mathcal{N}(0, (0{,}0636)^2)$ und damit für das 0,5%-Quantil

$$\begin{aligned} q_{0,5\%}(r_{10}(t+1)) &= q_{0,5\%}((0{,}0165 + 0{,}02) e^{\text{shifted.log.ret}(1)} - 0{,}02) \\ &= (0{,}0165 + 0{,}02) e^{q_{0,5\%}(\text{shifted.log.ret}(1))} - 0{,}02 \\ &= (0{,}0165 + 0{,}02) e^{-0{,}0636 \cdot 2{,}57583} - 0{,}02 = \underline{1{,}10\%}. \end{aligned}$$

Analog folgt für einen Startzins von 5% für Differenzen

$$q_{0,5\%}(r_{10}(t+1)) = \underline{3{,}58\%}.$$

Für shifted Log-Returns gilt

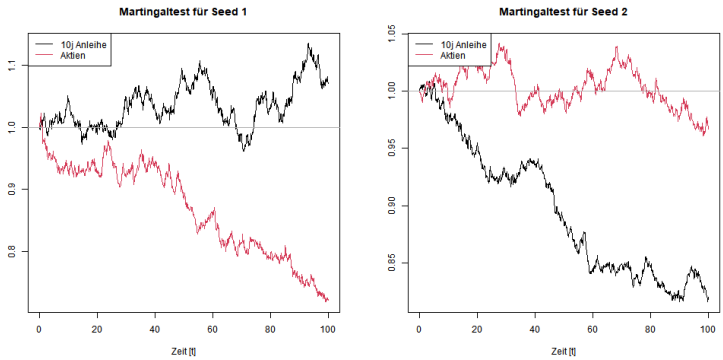
$$q_{0,5\%}(r_{10}(t+1)) = \underline{3{,}94\%}.$$

Bei niedrigen Startzinsen führen Differenzen zu einem deutlich niedrigeren Quantilswerten als die shifted Log-Returns. Bei steigendem Zins schwächt sich dieser Effekt ab, sodass bei einem Startzins von 5% shifted Log-Returns und Differenzen ein ähnliches Level für das 0,5%-Quantil aufweisen. Die Stresshöhe ist bei Differenzen immer dieselbe und hängt nicht vom Stichtagswert des Risikofaktors ab, wie es bei shifted Log-Returns der Fall ist. Bei einem relativ niedrigen Ausgangswert von 1,65% fällt der Stress bei shifted Log-Returns daher noch sehr gering aus (-55 bp), aber steigt bei dem höheren Ausgangswert von 5% stark an (-106 bp). Dies ist eine Konsequenz der Eigenschaften der shifted Log-Returns und wird auch als „Elastizität“ bezeichnet.

Aufgabe 5. *[Ökonomische Szenariogeneratoren: Monte-Carlo-Methoden] [26 Punkte]*

Die Bewertung von Finanzderivaten basiert auf der *risikoneutralen Bewertungsformel*, d. h. arbitrage-freie Preise ergeben sich als (bedingte) Erwartungswerte der diskontierten Auszahlungen unter einem geeignet kalibrierten risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$. In der Praxis müssen diese Erwartungswerte jedoch in der Regel mithilfe von *Monte-Carlo-Simulationen* bestimmt werden.

(a) *[12 Punkte] Martingaltest:* Die beiden folgenden Gaphiken stellen die Ergebnisse des Martingaltests für einen 10-jährigen Bond und einen Aktienrisikofaktor für zwei verschiedene Seeds in der Monte-Carlo-Simulation dar.



(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie allgemein die Zielsetzung und die Funktionsweise eines Martingaltests.

(ii) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie *kurz*, was der Monte-Carlo-Fehler ist, und erläutern Sie *speziell*, warum verschiedene Seeds zu unterschiedlichen Ergebnissen des Martingaltests führen können. Schlagen Sie Maßnahmen vor, die diesen Effekt reduzieren können.

(iii) *[5 Punkte]* Beschreiben und diskutieren Sie die beiden oben dargestellten Ergebnisse. Wägen Sie ab, unter welchen Bedingungen Sie den einen oder den anderen Seed bevorzugen würden.

(b) *[14 Punkte] Varianzreduktionstechniken - Kontrollvariablen:*

(i) *[5 Punkte]* Beschreiben Sie, wie der Schätzer für den Erwartungswert einer Zufallsvariable Y mithilfe einer Kontrollvariablen X modifiziert werden kann, sodass die Varianz des modifizierten Schätzers minimiert wird. Berechnen Sie dabei explizit die Varianz des modifizierten Schätzers sowie die Lösung des Varianzminimierungsproblems.

(ii) *[5 Punkte]* Die folgende Tabelle stellt ein Simulationsergebnis einer Größe Y und der Kontrollvariablen X (zur Vereinfachung für eine geringe Simulationsanzahl) dar:

Beobachtung	Y	X
1	-4	2
2	2	6
3	1	4
4	-8	0

Der Erwartungswert der Kontrollvariablen beträgt $\mathbb{E}[X] = 2$. Bestimmen Sie zunächst den im Seminar diskutierten Schätzer $\hat{b}$ für den optimalen Korrekturparameter und berechnen Sie anschließend die korrigierte Realisierung der beobachteten Variable $Y(\hat{b})$ sowie den daraus resultierenden korrigierten Mittelwertschätzer $\bar{Y}(\hat{b})$.

(iii) *[4 Punkte]* Stellen Sie *qualitativ* die Methodik der Kontrollvariablen graphisch als Regression dar und kommentieren Sie Ihre Skizze *kurz*. Folgern Sie, wodurch sich eine geeignete Kontrollvariablen auszeichnet. Geben Sie als Beispiel eine geeignete Kontrollvariable für die Berechnung des Erwartungswerts einer Europäische Put-Option an.

Lösungsskizze:

(a) (i) Der Martingaltest prüft im risikoneutralen Kontext auf Ebene eines simulierten Szenarios das Vorliegen der Martingaleigenschaft von diskontierten Preisprozessen. Formal wird hierzu für das zugrunde liegende Finanzinstrument mit Preisprozess $(P_t)_{t\geq 0}$ und einen Numéraire $(B_t)_{t\geq 0}$ (z. B. Geldmarktfonds) in jedem Zeitpunkt t die für die Martingaleigenschaft des diskontierten Preisprozesses notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P_t}{B_t}\right] = \frac{P_0}{B_0} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{B_0}{P_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P_t}{B_t}\right]$$

geprüft. Der Erwartungswert bezieht sich dabei auf das risikoneutrale Maß bzw. Martingalmaß $\mathbb{Q}$ und wird als Mittelwert aus dem per Monte-Carlo-Simulation erzeugten Szenario ermittelt.

Der Martingaltest ist erfüllt, wenn die aus der Simulation geschätzten Werte für $\frac{B_0}{P_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P_t}{B_t}\right]$ „hinreichend nahe“ bei 1 liegen.

(ii) Der Monte-Carlo-Ansatz wird durch das Gesetz der großen Zahlen gerechtfertigt und liefert bei einer endlichen Anzahl von Pfaden grundsätzlich nur eine Approximation des Erwartungswerts und damit der gewünschten Martingaleigenschaft. Da in Bewertungsmodellen die Anzahl der simulierten Pfade endlich (und oft der Rechengeschwindigkeit geschuldet zu klein) ist, kann eine bemerkenswerte Abweichung bzw. Instabilität in Abhängigkeit des Seeds der Zufallszahlen vorliegen.

Verschiedene Seeds bedeuten, dass der deterministische Algorithmus, der zur Erzeugung der Pseudozufallszahlen genutzt wird, unterschiedlich initialisiert wird. Daher ist die Folge der Zufallszahlen, die generiert wird, anders, was zu einer unterschiedlichen Realisierung der simulierten Größen auf den einzelnen Pfaden führt. Aufgrund der begrenzten Anzahl der Realisierungen folgen daraus unter anderem unterschiedliche (diskontierte)

Mittelwerte und dementsprechend unterschiedliche Ergebnisse im Martingaltest.

Eine Erhöhung der Pfadanzahl führt zu einem geringeren Einfluss des Monte-Carlo-Fehlers; dies ist allerdings aufgrund begrenzter Ressourcen nicht immer möglich. Hilfreich sind in diesem Fall Maßnahmen zur Varianzreduktion wie zum Beispiel die Nutzung antithetischer Zufallszahlen oder (falls möglich) von Kontrollvariablen.

(iii) Für Seed 1 ist die Anleihe etwa beim optimalen Wert von 1; die Martingaleigenschaft kann als erfüllt gelten. Für den Aktienwert hingegen ist eine systematische negative Abweichung zu erkennen, die zu Werten unter 80% führt. Für Seed 2 schwankt der Aktienrisikofaktor hingegen eng um den optimalen Wert, allerdings ist die Abweichung der 10-jährige Anleihe hier recht hoch.

Das erste Szenarios kann genutzt werden, falls zum Beispiel das Exposure hinsichtlich dem Aktienrisikofaktor relativ klein ist, und eine Abweichung vom Erwartungswert entsprechend wenig Einfluss auf die Bewertung nimmt. Für das zweite Szenario spricht die fast optimale Evolution der Aktien, allerdings sind die steigenden Anleihenwerte ein relativ großes Problem. Für kurze Zeithorizonte und kurzlaufende Verbindlichkeiten kann der Szenariensatz zu Seed 2 möglicherweise noch verwendbar sein. Es bleibt aber zu beachten, dass aufgrund der hohen Korrelation zwischen Zinsen unterschiedlicher Laufzeit auch kurzfristige Zinsen und insbesondere der Diskontfaktor selbst einen schlechten Martingaltest zeigen können. Weitere Tests wären in diesem Fall notwendig.

(b) (i) Sind $(Y_1, X_1), \ldots, (Y_n, X_n)$ mit $Y_i \sim Y$, $X_i \sim X$ i. i. d. Simulationen von Y bzw. der Kontrollvariablen X, so wird der Mittelwertschätzer

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

für den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$ für einen Parameter $b \in \mathbb{R}$ korrigiert durch

$$\bar{Y}(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i(b) \quad \text{mit } Y_i(b) := Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X]),\ i = 1, \ldots, n.$$

Die zugehörige Varianz beträgt

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}(\bar{Y}(b)) &= \operatorname{Var}(\bar{Y} - b \cdot \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i) \\
&= \operatorname{Var}(\bar{Y}) + \operatorname{Var}(-b \cdot \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i) + 2 \operatorname{Cov}(\bar{Y}, -b \cdot \tfrac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i) \\
&= \operatorname{Var}(\bar{Y}) + \tfrac{b^2}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Var}(X_i) - 2 \tfrac{b}{n^2} \sum_{i=1}^{n} \operatorname{Cov}(Y_i, X_i) \\
&= \operatorname{Var}(\bar{Y}) + \tfrac{b^2}{n} \operatorname{Var}(X_1) - \tfrac{2b}{n} \operatorname{Cov}(Y_1, X_1)
\end{aligned}$$

und wird minimal für $b = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1, X_1)}{\mathrm{Var}(X_1)}$. Der optimale Parameter kann aus Daten geschätzt werden via

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2},$$

wobei $\bar{X}$ bzw. $\bar{Y}$ die empirischen Erwartungswerte der Stichprobe von X und Y bezeichnen.

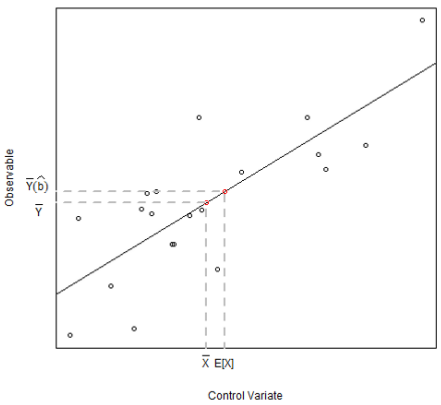
(ii) Die empirischen Mittelwerte sind gegeben durch $\bar{Y} = -2,25$ und $\bar{X} = 3$. Mithilfe der Werte in der nachfolgenden Tabelle berechnet man den Schätzer $\hat{b} = 1,75$ sowie die Realisierungen der korrigierten Variablen $Y(\hat{b}) = Y - \hat{b}(X - \mathbb{E}[X])$.

Beobachtung	Y	X	$(X-\bar{X})^2$	$(Y-\bar{Y})\cdot(X-\bar{X})$	$Y(\hat{b})$
1	-4	2	1	1,75	-4
2	2	6	9	12,75	-5
3	1	4	1	3,25	-2,5
4	-8	0	9	17,25	-4,5

Aus der letzten Spalte folgt $\bar{Y}(\hat{b}) = -4$.

(iii) Trägt man wie in der folgenden Graphik illustriert die Beobachtungen von Y gegen die simultanen Beobachtungen von X auf, so hat die eingezeichnete Regressionsgerade die Steigung b. Die Methode der Kontrollvariable entspricht nun einer Verschiebung der empirischen Mittelwerte $(\bar{X}, \bar{Y})$ entlang dieser Geraden bis zum bekannten Erwartungswert der Kontrollvariablen $\mathbb{E}[X]$.

Die Korrektur entlang der Regressionsgerade ist umso angemessener, je größer der erklärende Gehalt der Regression ist, d. h. je höher die Korrelation zwischen der Kontrollvariablen und der abhängigen Variablen ist. Im Falle einer Aktien-Option stellt der zugrunde liegende Aktienwert eine geeignete Wahl dar.



Aufgabe 6. *[Projektion von Kapitalanlagen] [20 Punkte]*

Sie möchten im Rahmen einer ALM-Studie untersuchen, welche Auswirkung ein schneller Zinsanstieg in Kombination mit einer Spreadausweitung und fallenden Aktienmärkten auf Ihren Kapitalanlagebestand hat. Ihre Kapitalanlage besteht aktuell aus

- einer festverzinslichen Staatsanleihe im Anlagevermögen (jährliche Kuponzahlung), Nominal = 5.500 €,
- einer festverzinslichen Unternehmensanleihe im Umlaufvermögen (jährliche Kuponzahlung), Nominal = 9.000 €,
- einer Aktie im Umlaufvermögen (jährliche Dividendenrendite, bezieht sich auf den Buchwert am Periodenende).

Die folgende Tabelle zeigt die aktuellen Marktwerte sowie die Anschaffungskosten:

	Anschaffungskosten	**Marktwert T=0**	**Kupon/Dividende**
Staatsanleihe	5.500 €	6.000 €	0,5%
Unternehmensanleihe	8.000 €	9.000 €	1,0%
Aktie	12.000 €	14.000 €	2,0%

Folgendes Szenario soll nun analysiert werden:

T	**0**	**1**	**2**	**3**
Zinssatz bei flacher Zinskurve	-0,5%	1,0%	3,0%	4,0%
Spread Unternehmensanleihe	100bp	200bp	300bp	200bp
Aktienrendite	–	-5,0%	-15,0%	5,0%
Staatsanleihe				
Restlaufzeit	10	9	8	7
Modified Duration	9,8	8,7	7,6	6,6
Unternehmensanleihe				
Restlaufzeit	5	4	3	2
Modified Duration	4,9	3,9	2,9	1,9

(a) *[12 Punkte]* Erstellen Sie unter Zuhilfenahme der oben gegebenen Informationen für die Jahre $T = 1$ bis $T = 3$ eine Projektion der Aktiva und der GuV nach dem folgenden Schema:

T	**0**	**1**	**2**	**3**
Aktiva				
Marktwert Staatsanleihe	6.000			
Buchwert Staatsanleihe	5.500			
Marktwert Unternehmensanleihe	9.000			
Buchwert Unternehmensanleihe	8.000			
Marktwert Aktien	14.000			
Buchwert Aktien	12.000			
GuV				
Kapitalerträge	–			
- davon ordentliche Kapitalerträge	–			
- davon außerordentliche Kapitalerträge	–			

Hinweis: Der Marktwert der festverzinslichen Anleihe ist mithilfe der Zinssensitivität und durch anschließende Aufzinsung näherungsweise fortzuschreiben. Zins- und Aktienerträge fließen zum 31.12. eines jeden Jahres zu.

(b) *[4 Punkte]* Wie können Sie in einem Kapitalanlagemodell berücksichtigen, dass sich die Kreditqualität Ihrer Anleihen ändern kann? Beschreiben Sie *qualitativ*, wie sich eine Änderung der Kreditqualität auf Ihre Aktiva und Ihren Jahresabschluss auswirken kann?

(c) *[4 Punkte]* Sie möchten die am Sekundärmarkt gehandelte Unternehmensanleihe durch ein nicht am Markt gehandeltes Darlehen mit gleicher Laufzeit ersetzen. Das Darlehen ist ebenfalls in EUR denominiert, die Kreditqualität ist ähnlich zu der der Unternehmensanleihe. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Welche Anpassungen müssen Sie in Ihrem Projektionsmodul vornehmen?
- Muss eine Kalibrierung des Modellzeitwerts auf den tatsächlichen Zeitwert vorgenommen werden?
- Müssen Sie die Migrationsmatrix anpassen, falls Sie Ausfallwahrscheinlichkeiten über eine Übergangsmatrix modellieren?
- Bilanzieren Sie das Darlehen im Anlage- oder im Umlaufvermögen und warum?

Lösungsskizze:

(a) Projektion der Aktiva und der GuV:

T	**0**	**1**	**2**	**3**
Aktiva				
Marktwert Staatsanleihe	6.000	5.169	4.398	4.226
Buchwert Staatsanleihe	5.500	5.500	5.500	5.500
Marktwert Unternehmensanleihe	9.000	8.134	7.614	8.070
Buchwert Unternehmensanleihe	8.000	8.000	7.614	8.000
Marktwert Aktien	14.000	13.300	11.305	11.870
Buchwert Aktien	12.000	12.000	11.305	11.870
GuV				
Kapitalerträge	–	358	-738	1.306
- davon ordentliche Kapitalerträge	–	358	344	355
- davon außerordentliche Kapitalerträge	–	–	-1.081	952

Investments im Umlaufvermögen sind zwingend nach dem *strengen Niederstwertprinzip* abzuschreiben; für das Anlagevermögen gilt das gemilderte Niederstwertprinzip (§253 Abs. 4 Satz 1 HGB).

(b) Durch eine Migrationsmatrix mit einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten können Übergänge zwischen Kreditqualitätsklassen stochastisch modelliert werden.

Migriert die Anleihe zwischen zwei Zeitschritten in eine höhere Kreditqualitätsklasse / in eine niedrigere Kreditqualitätsklasse, erhält sie einen Spreadabschlag / einen Spreadaufschlag. Der Marktwert der Anleihe steigt / fällt zusätzlich zur regulären Reaktion auf die modellierte Zinsbewegung.

Es kann zu außerordentlichen Verlusten durch eine Abschreibung kommen, sodass das Jahresergebnis sinkt. Es kann aber auch zu Zuschreibungen kommen und das Jahresergebnis steigt (*Achtung:* Zuschreibungen sind nur im Rahmen einer Wertaufholung bis zu den ursprünglichen Anschaffungskosten erlaubt).

(c) Da das Darlehen nicht am Sekundärmarkt gehandelt wird, existiert kein aktueller Marktpreis. Der Zeitwert in $T = 0$ muss also anhand eines Modells ermittelt werden (*Mark-to-Model*).

Pricing und Projektion:

Die verfügbaren historische Preise des Darlehens können mit den entsprechenden historischen Preisen der Unternehmensanleihe verglichen werden, um einen Spread (eine Illiquiditätsprämie) auf die Diskontkurve der Unternehmensanleihe zu ermitteln. Dieser Spread wird dann auf die projizierte Diskontkurve der Unternehmensanleihe addiert. Die so ermittelte Diskontkurve wird auf das Auszahlungsprofil des Darlehens angewandt, um den projizierten Preis des Darlehens zu ermitteln.

Eine Kalibrierung der Modellwerte an den Startwert entfällt dann logischerweise, da der Modellwert in $T = 0$ den fehlenden Marktwert ersetzt.

Kommt eine Übergangsmatrix zur Modellierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten zum Einsatz, so kann diese aufgrund der zur Unternehmensanleihe ähnlichen Kreditqualität beibehalten werden.

Das Darlehen sollte im Anlagevermögen bilanziert werden. Da es nicht jederzeit handelbar ist und eventuell eine hohe Liquiditätsprämie/Bid-Ask-Spread beim Handel fällig wird, darf davon ausgegangen werden, dass es dazu bestimmt ist, dem Geschäftsbetrieb dauernd zu dienen (§247 Abs. 2 HGB).

Aufgabe 7. *[Investmentrisiken unter Solvency II] [16 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Seit August 2021 sind die Zinsen und damit die risikofreie Basiszinskurve sehr deutlich gestiegen. Erläutern Sie den Einfluss, der hieraus auf den Zähler und den Nenner der Solvabilitätsquote einer Lebensversicherung resultiert, deren marktwertgewichtete Duration der Aktiva spürbar geringer als die der Passiva ist.

(b) *[4 Punkte]* Im Portfolio Ihrer Versicherung befindet sich eine Unternehmensanleihe, deren S&P Rating sich von BBB auf BB+ verschlechtert.

(i) *[3 Punkte]* Berechnen Sie den Effekt auf das SCR Brutto des Spreadmoduls unter der vereinfachten Annahme, dass vor und nach dem Downgrade der Marktwert jeweils 10 Mio. EUR und die modified Duration jeweils 9 betragen.

(ii) *[1 Punkt]* Wie verändert sich das SCR Brutto des Spreadmoduls, wenn Sie die BB+ Unternehmensanleihe verkaufen und hierfür eine französische Staatsanleihe mit einem S&P Rating von AA und einer Duration von 15 erwerben?

(c) *[8 Punkte]* Erläutern Sie den Unterschied zwischen dem SCR Brutto und dem SCR Netto. Gehen Sie dabei auch auf die Unterschiede zwischen Lebens- und Sachversicherern ein.

Hilfsmittel: 1) Zuweisung von Ratings externer Ratingagenturen zu einer objektiven Skala von Bonitätsstufen:

Bonitätsstufe	0	1	2	3	4	5	6
Standard & Poor's Credit Market Services France S.A.S., Standard & Poor's Credit Market Services Italy S.r.l., Standard & Poor's Credit Market Services Europe Limited							
Skala für langfristige Emittentenratings	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC, CC, R, SD/D
Skala für langfristige Emissionsratings	AAA	AA	A	BBB	BB	B	CCC, CC, C, D

Quelle: Durchführungsverordnung (EU) 2016/1800

2) Auszug Tabelle Spread-Risiko von Anleihen und Krediten:

Bonitätseinstufung		0		1		2		3		4		5 und 6	
Duration (dur_i)	$stress_i$	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i	a_i	b_i
bis zu 5	$b_i \cdot dur_i$	—	0,9 %	—	1,1 %	—	1,4 %	—	2,5 %	—	4,5 %	—	7,5 %
mehr als 5 und bis zu 10	$a_i + b_i \cdot (dur_i - 5)$	4,5 %	0,5 %	5,5 %	0,6 %	7,0 %	0,7 %	12,5 %	1,5 %	22,5 %	2,5 %	37,5 %	4,2 %
mehr als 10 und bis zu 15	$a_i + b_i \cdot (dur_i - 10)$	7,0 %	0,5 %	8,5 %	0,5 %	10,5 %	0,5 %	20,0 %	1,0 %	35,0 %	1,8 %	58,5 %	0,5 %
mehr als 15 und bis zu 20	$a_i + b_i \cdot (dur_i - 15)$	9,5 %	0,5 %	11 %	0,5 %	13,0 %	0,5 %	25,0 %	1,0 %	44,0 %	0,5 %	61,0 %	0,5 %

Quelle: Delegierte Verordnung (EU) 2015/35

Lösungsskizze:

(a) Solvabilitätsquote = Available Solvency Margin (ASM) dividiert durch Solvenzkapitalanforderung (SCR)

- *Zähler:* Der Marktwertverlust der Aktiva durch den Zinsanstieg ist geringer als die Marktwertverringerung der Passiva, wodurch die Eigenmittel steigen.
- *Nenner:* Durch die höheren Zinssätze der Basiszinskurve steigt die absolute Verschiebung im Zinsdown-Stress, wodurch das Brutto SCR im Zinsmodul steigt. (Gemildert wird der Effekt durch die aus dem Zinsanstieg c. p. resultierende Verringerung des Duration Gap zwischen Aktiv- und Passivseite.)

(b) (i) Die Ratingnote BBB entspricht der Bonitätsstufe 3, die Ratingnote BB+ der Bonitätsstufe 4.

Stressfaktor Anleihe vor dem Downgrade $= 12{,}5\% + 4 \cdot 1{,}5\% = 18{,}5\%$
Stressfaktor Anleihe nach dem Downgrade $= 22{,}5\% + 4 \cdot 2{,}5\% = 32{,}5\%$

Das SCR Brutto des Spreadmoduls erhöht sich um

$$14\% \cdot 10 \text{ Mio. EUR} = \underline{1{,}4 \text{ Mio. EUR}}.$$

(ii) Europäische Staatsanleihen in Landeswährung werden im Spreadmodul nicht gestresst, d. h. der Stressfaktor beträgt 0%. Das SCR Brutto des Spreadmoduls würde sich durch die Transaktion verringern um

$$32{,}5\% \cdot 10 \text{ Mio. EUR} = \underline{3{,}25 \text{ Mio. EUR}}.$$

(c)
- Das SCR folgt nicht unmittelbar aus dem Stressfaktor, sondern aus der durch den Stress ausgelösten Verringerung der Eigenmittel.
- Zur Ermittlung ist ausgehend von den gestressten Assets eine Neuberechnung der kompletten Solvency II Bilanz notwendig.
- Nach einem Stress verringert sich die ZÜB, d. h. die VN tragen einen Teil des Verlusts, wodurch der Eigenmittelrückgang geringer ausfällt als die durch den Stress implizierte Marktwertänderung der Kapitalanlagen (beim Zinsstress incl. der Änderung des BW der Garantien) (*loss absorbing capacity of technical provisions*).
- Die Solvenzkapitalanforderung unter Berücksichtigung der risikomindernden Wirkung der ZÜB nennt man SCR Netto.

- Beim SCR Brutto wird hingegen unterstellt, dass die VN eine unveränderte Überschussbeteiligung erhalten. Es wird ermittelt, um eine überhöhte Anrechnung von Risikominderungseffekten zu vermeiden, da jede Risikokategorie zunächst separat gestresst und somit die Risikominderung der ZÜB separat genutzt wird.
- Die Summe aller bei den Einzelrisiken angesetzten Risikominderungseffekte darf nicht größer sein, als der in der SII-Ausgangsbilanz vorhandene Wert der ZÜB (Vergleich von diesem mit der Differenz der „korrelierten Summen“ von SCR Brutto und SCR Netto).
- Bei Sachversicherungen existiert eine solche verlustmindernde Wirkung der Passivseite bei Eintreten von Verlusten auf der Aktivseite nicht.

Aufgabe 8. *[Kapital- und Renditegarantien in Versicherungsprodukten] [24 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Beschreiben Sie die Funktionsweise eines dynamischen Hybridprodukts. Gehen Sie dabei auch auf die Unterschiede zwischen 2- und 3-Topf Hybriden ein und erläutern Sie, welche Vorteile dynamische gegenüber statischen Hybridprodukten haben.

(b) *[2 Punkte]* Zum 1.01.2022 wurde der Höchstrechnungszins auf 0,25% gesenkt. Seit Jahresbeginn sind die Zinsen jedoch stark gestiegen. Welcher Einfluss resultiert aus dem Zinsanstieg auf die bilanzielle Garantieabbildung im Neugeschäft statischer Hybridprodukte?

(c) *[8 Punkte]* Für ein Hybridprodukt setzen Sie einen Garantiefonds mit monatlicher Wertuntergrenze von 90% auf, der über einen CPPI dargestellt wird. Das riskante Asset des Fonds besitzt einen maximalen Overnight Verlust von 25%.

  (i) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie die prozentuale Allokation zu Beginn des ersten Monats.

  (ii) *[2 Punkte]* Zur Monatsmitte ist der Garantiefonds auf 95% seines Startwerts gefallen. Wie lautet die neue Allokation?

  (iii) *[3 Punkte]* Wie hat sich unter (ii) das Gap-Risiko im Vergleich zu (i) verändert?

  (iv) *[1 Punkt]* Am Monatsende ist der Wert des Fonds bis auf die Wertuntergrenze von 90% gefallen. Wie sieht die prozentuale Allokation für den folgenden Monat aus?

(d) *[4 Punkte]* Was versteht man unter einem internen Fonds? Welche Vor- und Nachteile haben diese aus Sicht eines Versicherungsunternehmens?

Lösungsskizze:

(a)
- Im Gegensatz zu den statischen wird bei den dynamischen Hybridprodukten die Garantie über das konventionelle SV und die Fonds abgebildet.
- Die Aufteilung auf das konventionelle SV und die Fonds erfolgt derart, dass auch nach einem maximal unterstellten Verlust für die Fonds in einer Periode, konventionelles SV und Wert der Fonds den Wert der Garantie am Ende der Periode bedecken.
- Um sicherzustellen, dass die Fonds den maximalen Verlust nicht überschreiten, werden Garantiefonds verwendet.
- Der maximal zulässige Verlust des Garantiefonds in einer Periode (i. d. R. 1 Monat) beträgt meist 10% oder 20%. Diese Verlustgrenze gilt für jede Periode neu!

- In Abhängigkeit der Fondsperformance wird am Ende jeder Periode die Aufteilung zwischen Garantiefonds und konventionellem SV neu festgelegt (dynamische Umschichtung) bzw. ergibt sich die Aufteilung des neuen Sparbeitrags.
- Im Gegensatz zu statischen Hybriden erfolgt also keine Aufteilung der Beiträge sondern des Policenwerts.
- Die Steuerung der Garantie erfolgt auf somit 3 Ebenen: Kapitalanlagesteuerung im Garantiefonds (CPPI + Crash Put); Umschichtungen zwischen Garantiefonds und konventionellem SV (versicherungsvertragsspezifisches CPPI = iCCPI); Kapitalanlagesteuerung des konventionellen SV.
- Besteht ein Puffer für die Bedeckung der Garantie durch das konventionelle SV und den Garantiefonds, kann das rechtliche Guthaben zur Verbesserung der Return Chancen in freie Fonds (3. Topf) investiert werden.
- Dabei gibt es 3-Topf Hybride, die gleichzeitig in Garantie- und freie Fonds oder nur jeweils in eine der beiden Fondsarten investieren.

(b) Für die Ermittlung des handelsrechtlichen Werts der Garantie ist der Höchstrechnungszins und nicht das Marktzinsniveau relevant. Der Zinsanstieg hat daher diesbezüglich keinen Einfluss.

(c) (i) Cushion = 100% - 90% = 10%
Multiplikator = 1/25% = 4
Allokation in das riskante Asset = $4 \cdot 10\% = 40\%$
Allokation in das risikofreie Asset = 60%

(ii) Cushion = 95% - 90% = 5%
Allokation in das riskante Asset = $4 \cdot 5\% = 20\%$
Allokation in das risikofreie Asset = 75%

(iii) In (ii) ist das Gap-Risiko niedriger als unter (i). Die Wahrscheinlichkeit eines Overnight-Verlusts von mehr als 25% ist zwar in beiden Fällen gleich, unter (ii) würde in diesem Fall aber aufgrund der geringeren Allokation in das riskante Asset die Unterschreitung der Wertuntergrenze geringer ausfallen.

(iv) Die prozentuale Allokation ist identisch zu (i), da zu Beginn eines jeden Monats wieder der volle Puffer zur Verfügung steht.

(d)
- Bei einem internen Fonds handelt es sich um ein vom konventionellen Sicherungsvermögen separierten Kapitalanlagebestand des Sicherungsvermögens (gem. §124 (2) VAG).

- Der einzelne Versicherungsnehmer hat einen explizit ermittelten Anteil an diesem Bestand.
- Interne Fonds kommen insb. im Rahmen von Hybridprodukten zum Einsatz.
- Für das VU haben interne Fonds den Vorteil, dass die eigene Expertise des Kapitalanlagenmanagements genutzt werden kann (und die Gebühren hierfür vereinnahmt werden können).
- Auf der anderen Seite trägt das VU bei dynamischen Hybriden auch das Risiko, dass der interne Fonds die für die Aufteilung des Guthabens angenommenen Wertuntergrenzen nicht einhält.