DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Finanzmathematik und Investment II

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 20. Oktober 2023

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 26 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Carolin Apfel, Dr. Mario Hörig,
Prof. Dr. Thomas Knispel, Dr. Marcus Scheffer,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

Aufgabe 1. *[Performance Measurement] [18 Punkte]*

Die Mathematikstudentin Hanna Riese wird im Rahmen ihres Praktikums bei der BesserLeben AG damit beauftragt, die Performance des Kapitalanlageportfolios zu analysieren. Für das globale Aktiensegment der BesserLeben AG kann sie auf die Renditen der letzten 10 Jahre zurückgreifen. Weiterhin stehen ihr die Renditen eines breit gestreuten, globalen Aktienindex, der die vergangenen 10 Jahre als Benchmark des Aktiensegments gedient hat, zur Verfügung (siehe Tabelle 1).

Jahr	Portfolio-Rendite	Benchmark-Rendite
1	5%	5%
2	-5%	-9%
3	4%	7%
4	10%	4%
5	12%	8%
6	7%	4%
7	2%	12%
8	-2%	1%
9	7%	10%
10	8%	12%

Tabelle 1: Portfolio- und Benchmark-Renditen des globalen Aktiensegments der BesserLeben AG

Aus den Daten ermittelt Hanna – leider noch unvollständig – die in Tabelle 2 dargestellten Kennzahlen. Sie hofft anhand dieser Werte, Rückschlüsse auf den Erfolg der globalen Aktienstrategie ziehen zu können.

	Portfolio	Benchmark
Durchschnittliche Rendite $\hat{r}$	**???**	5,40%
Standardabweichung $\hat{\sigma}$	5,27%	6,22%
Beta-Faktor β	0,55	**???**
Risikofreier Zins r_f	2,5%	

Tabelle 2: Kennzahlen des globalen Aktiensegments der BesserLeben AG

(a) *[2 Punkte]* Ermitteln Sie in Tabelle 2 die beiden fehlenden Werte.

(b) *[5 Punkte]* Geben Sie mit *kurzer* Erläuterung zwei Kriterien zur Auswahl einer geeigneten Benchmark an. Treffen diese Kriterien auf den hier als Benchmark gewählten breiten, globalen Aktienindex zu?

(c) *[4 Punkte]* Welche der folgenden alternativen Aussagen ist ausgehend von den Daten in den Tabellen 1 und 2 korrekt? Begründen Sie Ihre Aussage anhand einer Berechnung.

- **Aussage A:** Das globale Aktiensegment der BesserLeben AG hat seine Benchmark auf Basis der Überrendite pro Einheit des eingegangenen Risikos übertroffen.

- **Aussage B:** Das globale Aktiensegment der BesserLeben AG hat schlechter als seine Benchmark auf Basis der Überrendite pro Einheit des eingegangenen Risikos abgeschnitten.

(d) *[3 Punkte]* Wie unterscheidet sich die Treynor Ratio von der Sharpe Ratio? Ändert sich die unter (c) getroffene Aussage bezüglich der Treynor Ratio? Begründen Sie Ihre Aussage anhand einer Berechnung.

(e) *[4 Punkte]* Welche der folgenden Aussagen ist ausgehend von den Daten in den Tabellen 1 und 2 korrekt? Begründen Sie Ihre Aussage *qualitativ*.

- **Aussage A:** Das globale Aktiensegment der BesserLeben AG hat seine Benchmark auf Basis der Information Ratio „outperformed“.
- **Aussage B:** Das globale Aktiensegment der BesserLeben AG hat seine Benchmark auf Basis der Information Ratio „underperformed“.
- **Aussage C:** Die in den Abbildungen 1 und 2 gegebenen Daten reichen nicht aus um die Information Ratio zu berechnen

Lösungsskizze:

(a)

	Portfolio	**Benchmark**
Durchschnittliche Rendite $\hat{r}$	**4,80**	5,40%
Standardabweichung $\hat{\sigma}$	5,27%	6,22%
Beta-Faktor β	0,55	**1,00**
Risikofreier Zins r_f	2,5%	

(b)

Investierbar	Die gewählte Benchmark muss replizierbar sein.
Messbar	Es muss möglich sein, den Benchmark-Return in einer gewissen Häufigkeit und zeitgerecht zu berechnen.
Eindeutig	Die in der Benchmark enthaltenen Einzeltitel und deren Gewichte müssen eindeutig feststellbar sein.
Im Vorfeld festgelegt	Die Benchmark des Portfolios muss im Vorfeld des Auswertungszeitraums spezifiziert werden.
Angemessen	Die Benchmark muss konsistent zum Investmentstiel / zu den Portfolio-Charakteristika sein.

Die angegebenen Kriterien an eine Benchmark sind beim oben gewählten Aktienindex erfüllt (erforderlich ist nur die Nennung zweier Eigenschaften).

(c) Die Überrendite pro Einheit eingegangenes Risiko wird durch die Sharpe Ratio SR bestimmt. Aussage B) ist korrekt, da

$$\begin{aligned} \mathrm{SR}_{\mathrm{Portfolio}} &= \frac{\hat{r}_{\mathrm{Portfolio}} - r_f}{\hat{\sigma}_{\mathrm{Portfolio}}} = \frac{4{,}80\% - 2{,}50\%}{5{,}27\%} = \underline{0{,}44}, \\ \mathrm{SR}_{\mathrm{Benchmark}} &= \frac{\hat{r}_{\mathrm{Benchmark}} - r_f}{\hat{\sigma}_{\mathrm{Benchmark}}} = \frac{5{,}40\% - 2{,}50\%}{6{,}22\%} = \underline{0{,}47}. \end{aligned}$$

(d) Die Treynor Ratio TR verwendet anstelle der Standardabweichung $\hat{\sigma}$ den Beta-Faktor β des CAPM und gibt damit die Überrendite pro Einheit übernommenen (relativen) systematischen Risikos an:

$$\mathrm{TR} = \frac{\hat{r} - r_{\mathrm{f}}}{\beta}$$

Die unter (c) getroffene Aussage wird sich mit der Treynor Ratio umkehren:

$$\begin{aligned} \mathrm{TR}_{\mathrm{Portfolio}} &= \frac{\hat{r}_{\mathrm{Portfolio}} - r_{\mathrm{f}}}{\beta_{\mathrm{Portfolio}}} = \frac{4{,}80\% - 2{,}50\%}{0{,}55} = \underline{4{,}20\%}, \\ \mathrm{TR}_{\mathrm{Benchmark}} &= \frac{\hat{r}_{\mathrm{Benchmark}} - r_{\mathrm{f}}}{\beta_{\mathrm{Benchmark}}} = \frac{5{,}40\% - 2{,}50\%}{1{,}00} = \underline{2{,}90\%}. \end{aligned}$$

(e) Die Infomation Ratio ist definiert durch

$$\mathrm{IR} = \frac{\hat{r}_{\mathrm{Portfolio}} - \hat{r}_{\mathrm{Benchmark}}}{\text{Tracking Error}},$$

wobei der Tracking Error durch die Volatilität der Abweichungen der Renditen von Portfolio und Benchmark gemessen wird. Aussage C) ist nicht korrekt, da die Information Ratio anhand der in den Tabellen 1 und 2 gegebenen Daten berechnet werden kann. Der Nenner der obigen Formel ist offensichtlich positiv, während der Zähler hingegen für die vorliegenden durchschnittlichen Renditen negativ ist. Damit ist die Information Ratio negativ und das Portfolio hat seine Benchmark „underperformed“. Insofern ist Aussage B) korrekt (und Aussage A) falsch). Eine Berechnung der Information Ratio ist nicht notwendig.

Aufgabe 2. *[Portfoliotheorie und -management] [12 Punkte]*

Ihre Kollegin Rebecca Martin und Sie bereiten sich gemeinsam auf Ihre letzte Prüfung im Rahmen der DAV-Ausbildung vor. Sie gehen dabei Ihre Mitschriften zum Seminar „Finanzmathematik und Investment II“ durch.

Zum Thema *Reverse Optimization* hat sich Rebecca Martin das Folgende notiert:

- **Notiz A:** Ein Input der Reverse Optimization sind Portfoliogewichte, die als optimal angesehen werden können; ein gängiger Vektor an Portfoliogewichten stellt das nach Marktkapitalisierung gewichtete Portfolio aller zulässigen Assetklassen dar (CAPM-Portfolio).
- **Notiz B:** Wählt man die Gewichte nach Marktkapitalisierung, so muss darauf geachtet werden, dass es keine Überlappungen zwischen den Assetklassen gibt.
- **Notiz C:** Der durch die Startgewichte implizierte erwartete Return wird in einem zweiten Schritt an die subjektive Kapitalmarktsicht des Investors oder die Expertenmeinung des Asset Managers angepasst.

Zum Thema *Resampling* haben Sie sich die folgenden Notizen gemacht:

- **Notiz D:** Das Resampling ist eine Kombination aus Markowitz-Optimierung und Monte-Carlo-Simulation.
- **Notiz E:** Es werden eine Vielzahl an Stichproben für die erwarteten Renditen, Varianzen und Kovarianzen gebildet und im Anschluss gemittelt; die Mittelwerte dienen dann als Input für die eigentliche Markowitz-Optimierung.
- **Notiz F:** Werden zusätzlich Restriktionen vorgegeben, ist es möglich, dass das Resampling-Portfolio diese nicht erfüllt; die entstandene Effizienzlinie ist möglicherweise auch nicht streng konkav.

(a) *[6 Punkte]* Sind Martins Notizen A, B und C zum Thema Reverse Optimization korrekt? Falls Sie Notizen als falsch identifizieren, erklären Sie *kurz* warum.

(b) *[6 Punkte]* Sind Ihre Notizen D, E und F zum Thema Resampling korrekt? Falls Sie Notizen als falsch identifizieren, erklären Sie *kurz* warum.

Lösungsskizze:

(a) Notizen A und B sind korrekt. Aussage C ist falsch. Eine Anpassung der erwarteten Renditen an die subjektive Kapitalmarktsicht ist Teil des Black-Litterman-Modells und nicht der zweite Schritt der Reverse Optimization.

(b) Notizen D und F sind richtig. Aussage E ist nicht korrekt. Mit jedem Stichprobenset wird eine Markowitz-Optimierung durchgeführt, erst im Anschluss werden die Ergebnisse (Portfoliogewichte) gemittelt.

Aufgabe 3. *[Management von Zinsrisiken und Zinstiteln] [20 Punkte]*

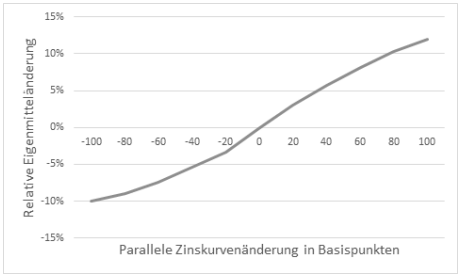
(a) *[8 Punkte]* Sie möchten die Eigenmittel Ihres Versicherungsunternehmens bezüglich paralleler Verschiebungen der Zinskurve hedgen. Dabei stehen Ihnen die folgenden Typen von Finanztiteln zum Kauf zur Verfügung:

1) Payer Swap
2) Receiver Swap
3) Plain Vanilla Bond
4) CMS-Floater mit Floor und Multiplikator
5) CMS-Floater mit Cap
6) Callable Bond
7) Putable Bond

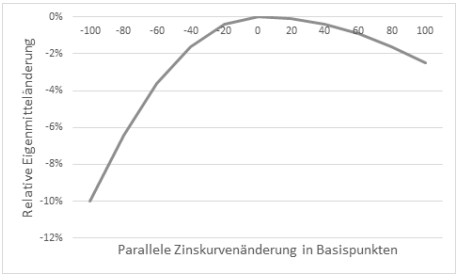
Wählen Sie zu jeder nachfolgenden Funktion, die die Eigenmitteländerung bezüglich einer parallelen Zinskurvenänderung beschreibt, den oben genannten Finanztitel, der besonders gut für das Hedging geeignet ist. Begründen Sie jeweils *kurz* Ihre Entscheidung.

Hinweis: Gehen Sie vereinfachend davon aus, dass die Passiva nicht auf Änderungen der Aktiva reagieren.

(i) *[2 Punkte]*



(ii) *[2 Punkte]*



(iii) *[2 Punkte]*

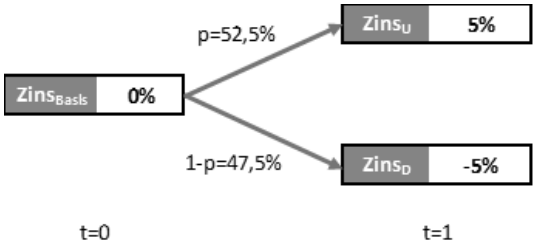
(iv) *[2 Punkte]*

(b) *[6 Punkte]*

(i) *[5 Punkte]* Es sei der unten stehende Binomialbaum für diskrete Zinsen gegeben. Bestimmen Sie den Marktwert eines Single-Putable Bonds mit folgenden Eigenschaften:

Laufzeit = zwei Jahre (d. h. Rückzahlung in $t = 2$)
Kupon = 5%
Kündigungs-Option im 1. Jahr ($t = 1$) zu 212
Nominal = 200

Gehen Sie von einer flachen Zinsstruktur aus. Es seien die *risikoneutralen* Wahrscheinlichkeiten für einen Zinsanstieg bei 52,5% und für einen Rückgang des Zinses bei 47,5% von $t = 0$ auf $t = 1$ gegeben. Der heutige Zins ($t = 0$) sei 0%.



(ii) *[1 Punkt]* Berechnen Sie den Marktwert des unter (i) genannten Finanztitels, wenn dieser keine Kündigungsoption besitzen, es sich also um einen Plain-Vanilla Bond handeln, und die restlichen Parameter identisch sein würden.

(c) *[6 Punkte]* Begründen Sie mit jeweils zwei Stichpunkten, warum die folgenden Aussagen nicht korrekt sind:

(i) *[2 Punkte]* Alle Finanztitel mit einer momentanen effektiven Zins-Duration von Null besitzen kein Zinsrisiko.

(ii) *[2 Punkte]* Um zinssensitive Finanztitel unter einer veränderten Zinskurve exakt bewerten zu können, ist es nur notwendig anstatt der Verwendung der effektiven Duration auf die Key-Rate-Durationen überzugehen.

(iii) *[2 Punkte]* Ein Single-Callable Bond gibt dem Käufer eines Bonds das Recht, diesen zu einem speziellen Zeitpunkt durch den Verkäufer zurückzahlen zu lassen.

Lösungsskizze:

(a) Es müssen Finanzprodukte gefunden werden, die grob einen an der x-Achse gespiegelten Verlauf der Eigenmitteländerung erzeugen.

(i) Hedging mit 6) Callable Bond: Verlauf ähnlich Plain Vanilla Bond, nur linker Bereich krümmt sich leicht entgegengesetzt

(ii) Hedging mit 4) CMS mit Floor und Multiplikator: Linker Bereich Floor ähnlich Plain Vanilla Bond, rechter Bereich leicht steigend, wenn Multiplikator geeignet gewählt ist

(iii) Hedging mit 1) Payer Swap: etwas gekrümmter als linear steigend, da für steigende Zinssätze der Diskonteffekt größer wird

(iv) Hedging mit 3) Plain Vanilla Bond oder 2) Receiver Swap: typischer konvexer Marktwertverlauf

(b) (i) Bewertung durch Rückwärtseinsetzen, mit analoger Bezeichnung des Marktwertes im Szenario und Zeitschritt wie beim Zins.

In $t = 2$:

Zahlung nach 2 Jahren=200+10=210
Strike=212

Marktwerte in $t = 1$:

$$\mathrm{MW_U} = 10 + \max\left\{\tfrac{200+10}{1+5\%}, 212\right\} = 222$$
$$\mathrm{MW_D} = 10 + \max\left\{\tfrac{200+10}{1-5\%}, 212\right\} \approx 231{,}05$$

Marktwert in $t = 0$:

$$\mathrm{MW_{Putable}} = \tfrac{0{,}525\cdot \mathrm{MW_U} + 0{,}475\cdot \mathrm{MW_D}}{1+0\%} \approx 226{,}3$$

(ii) Marktwert in $t = 0$ (die momentane Zinskurve ist für alle Laufzeiten gleich 0%, eine stochastische Bewertung ist nicht notwendig):

$$\mathrm{MW_{Bond}} = \tfrac{10}{1+0\%} + \tfrac{10+200}{1+0\%} = 220$$

(c) (i) i. Die effektive Duration stellt lediglich eine Sensitivität bzgl. einer parallelen Änderung der Zinskurve, ausgehend von einer speziellen Zinskurvenrealisierung, dar.

ii. Weiterhin handelt es sich lediglich um eine lineare Sensitivität und berücksichtigt keine Krümmungen des Marktwertverhaltens.

(ii) i. Key-Rate-Durationen stellen zwar i. A. eine bessere Approximation des Marktwertes bzgl. Zinskurvenveränderungen dar, da diese nicht auf parallele Zinskurvenänderungen beschränkt sind.

ii. Es handelt es sich pro Zahlungszeitpunkt trotzdem um lineare Sensitivitäten, die nicht exakt sind.

(iii) i. Bei einem Single-Callable Bond besitzt der Verkäufer die Option, nicht der Käufer.

ii. Laut Beschreibung handelt es sich um einen Single-Putable Bond.

Aufgabe 4. *[Risikomanagement von Optionen] [10 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Gegeben sei eine Einheit eines (dividendenfreien) Basisobjekts mit Kursverlauf $(S_t; 0 \le t \le T)$ sowie ein Long Put auf eine Einheit dieses Basisobjekts mit Laufzeit T, Ausübungspreis K und Kursverlauf $(P_t; 0 \le t \le T)$. Ein *(1:1)-Put-Hedge* besteht aus der Kombination dieser beiden Positionen.

(i) *[3 Punkte]* Wie lautet die Gewinn/Verlust-Position G_T dieses Put-Hedges in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T zum Zeitpunkt T? Vernachlässigen Sie dabei Zinseffekte.

(ii) *[1 Punkt]* Stellen Sie die Gewinn/Verlust-Position in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T graphisch dar.

(b) *[6 Punkte]* Betrachten Sie das Black-Scholes-Modell, in dem der Aktienpreisprozess unter dem statistischen Maß P gegeben ist durch

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t), \quad t \ge 0,$$

wobei W ein Wiener-Prozess ist sowie $\mu \in \mathbb{R}$ und $\sigma > 0$ den Drift- bzw. Volatilitätsparameter bezeichnen. Der Preis C_t einer Europäischen Call-Option auf die Aktie mit Maturität T im Zeitpunkt t ist gegeben als $v(x, \tau)$, wobei x der Aktienkurs in t ist und $\tau = T - t$ die Restlaufzeit darstellt.

(i) *[3 Punkte]* Erklären Sie, wie die Sensitivität „Delta“ approximativ zur Absicherung einer Call-Optionsposition gegen Wertänderungen in der Basisposition „Aktie“ verwendet werden kann (Delta-Hedge).

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Value at Risk zum Niveau λ über das Zeitintervall $[t, t+h]$ für den Gewinn/Verlust einer Call-Position auf der Basis einer Delta-Exakt-Approximation.

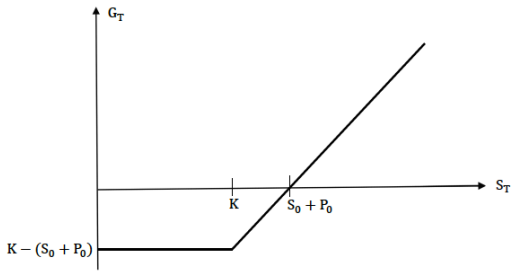
Hinweis: Nutzen Sie die Rechenregel zur Quantiltransformation.

Lösungsskizze:

(a) (i) Mit $P_0 = P_0(K)$ gilt für die Gewinnposition:

$$\begin{aligned} G_T &= S_T - S_0 + P_T - P_0 \\ &= S_T + \max\{K - S_T, 0\} - (S_0 + P_0) \\ &= \max\{S_T, K\} - (S_0 + P_0) \\ &= \begin{cases} K - (S_0 + P_0) & \text{für } S_T \le K, \\ S_T - (S_0 + P_0) & \text{für } S_T > K \end{cases} \end{aligned}$$

(ii) Graphische Darstellung:



(b) (i) Ist $(S_t)_{t\geq 0}$ der Preisprozess der Aktie, so gilt per Taylor-Entwicklung 1. Ordnung approximativ für die Wertänderung des Optionspreises in kleinen Zeitintervallen $[t, t+h]$, $h > 0$,

$$v(S_{t+h}, \tau - h) - v(S_t, \tau) \approx \Delta(S_t, \tau)(S_{t+h} - S_t)$$

bzw.

$$v(S_{t+h}, \tau - h) - v(S_t, \tau) + (-\Delta(S_t, \tau))(S_{t+h} - S_t) \approx 0.$$

Werden im Zeitpunkt t also $\Delta(S_t, \tau) = \Phi(d_+(S_t, \tau)) > 0$ Einheiten der Aktie verkauft (ohne Adjustierungen bis $t+h$), so ist das Gesamtportfolio bestehend aus einer Call-Option und $-\Delta(S_t, \tau)$ Einheiten der Aktie approximativ immunisiert gegen Preisänderungen der Aktie. Das resultierende Portfolio aus Option und Basisposition hat ein Gesamt-Delta von Null (Δ-neutral).

(ii) Für die Wertänderung der Call-Option gilt approximativ

$$\Delta C = C_{t+h} - C_t \approx \Delta(S_t, \tau)(S_{t+h} - S_t) = \Delta(S_t, \tau) S_t (e^{\sigma(W_{t+h} - W_t) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)h} - 1).$$

also mithilfe der Regel für die Quantiltransformation

$$\begin{aligned}
\mathrm{V@R}_\lambda(\Delta C) &\approx \mathrm{V@R}_\lambda(\Delta(S_t, \tau) S_t(\exp(\sigma(W_{t+h} - W_t) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1)) \\
&= -q_{\Delta(S_t,\tau)S_t(\exp(\sigma(W_{t+h}-W_t)+(\mu-\frac{1}{2}\sigma^2)h)-1)}(\lambda) \\
&= -\Delta(S_t, \tau) S_t(\exp(\sigma q_{W_{t+h}-W_t}(\lambda) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1) \\
&= -\Delta(S_t, \tau) S_t(\exp(\sigma\sqrt{h}\Phi^{-1}(\lambda) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)h) - 1).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5. *[ESG – Szenariokonstruktion] [30 Punkte]*

In Ihrem Versicherungsunternehmen soll im Rahmen der *unternehmenseigenen Risiko- und Solvabilitätsbeurteilung* (ORSA) ein Risikoszenario „Pandemie“ betrachtet werden, das sich an dem beobachteten Markteinbruch im März 2020 orientiert. Sie wirken daran mit, den ökonomischen Szenariogenerator (ESG) aufzustellen, mit dem die Eigenmittel in einem solchen Szenario abgeschätzt werden soll. Der verantwortliche Risikomanager wendet sich dabei an Sie mit folgenden Fragen:

(a) *[5 Punkte]* Für das Zinsmodell soll die Annahme gelten, dass langfristig ein mittleres Zinsniveau existiert und dass die Volatilitätsfunktion (Diffusionskoeffizient) in der zugrunde liegenden Stochastischen Differentialgleichung des Zinsmodells über den Projektionshorizont konstant ist. Begründen Sie, welche Art von Modell Sie vorschlagen würden. Stellen Sie das entsprechende Modell mathematisch dar und erläutern Sie die Bedeutung der Modellparameter.

(b) *[10 Punkte]* Für das Aktienmodell ist die Wahl auf eine *Geometrische Brownsche Bewegung* gefallen.

  (i) *[4 Punkte]* Wie würden Sie die jährlichen Änderungen parametrisieren? Gehen Sie dabei auch auf alternative Parametrisierungsmöglichkeiten ein und erläutern Sie Ihre Wahl.

  (ii) *[6 Punkte]* Hinsichtlich der Modellparameter „Volatilität“ und „Drift“ ist geplant, diese anhand von historischen Daten zu schätzen. Nehmen Sie dazu Stellung und begründen Sie, welches Verfahren Sie zur Parametrisierung vorschlagen würden.

(c) *[15 Punkte]* Eine weiterführende Überlegung ist, auch Anleihenspreads stochastisch zu simulieren.

  (i) *[3 Punkte]* Die aktuelle Idee besteht in der Projektion der jährlichen Ausfallwahrscheinlichkeiten. Welche zusätzliche(n) Parameterannahme(n) müssen bei dieser Vorgehensweise außerdem noch getroffen werden? Welche Vereinfachung wird in einem solchen Modell vorgnenommen?

  (ii) *[12 Punkte]* Als Rechenbeispiel stellen Sie dar, wie der Spread sich in einem Pfad eines solchen Szenarios berechnet. Zeigen Sie dies am Beispiel einer heute 7-jährigen Anleihe ohne Kuponzahlung zum Projektionszeitpunkt $t = 4$ auf einem Pfad, auf dem sich eine jährliche Ausfallwahrscheinlichkeit von 1,2% realisiert hat. Dabei habe die äquivalente risikofreie Nullkuponanleihe auf diesem Pfad in $t = 4$ einen Preis von 99,40 € bei einem Nominalwert von 100 €. Außerdem sei der erwartete Zahlungsausfall bei Ausfall des Emittenten 60% des Nominals. Gehen Sie davon aus, dass die Anleihe zum Zeitpunkt $t = 4$ noch nicht ausgefallen ist und dass bei einem Ausfall die Recovery-Zahlung zur Fälligkeit in $t = 7$ gezahlt wird.

  Hinweis: Runden Sie alle Zwischenergebnisse auf die 4. Nachkommastelle.

Lösungsskizze:

Die Ermittlung der Eigenmittel ist eine Bewertungsfrage, sodass im Szenariogenerator risikoneutrale Szenarien erzeugt werden müssen.

(a) *Zinsmodell:* Ein geeigneter Ausgangspunkt der Zinsmodellierung ist der Short-Rate-Prozess $(r_t)_{t\geq 0}$. Die Bedingung des langfristigen Mittelwertes wird durch einen *Mean-Reversion-Effekt* abgebildet. Die Annahme einer konstanten Volatilitätsfunktion grenzt das Modell auf einen (verallgemeinerten) Ornstein-Uhlenbeck-Prozess für die Short Rate ein (z. B. Vasicek-Modell oder Hull-White-Modell), dessen allgemeine Form mit Konstanten $\alpha, \sigma > 0$ und einer deterministischen Funktion $t \mapsto \theta_t$ der Zeit

$$dr_t = \alpha(\theta_t - r_t)\, dt + \sigma\, dW_t$$

lautet. Treiber des Zufalls ist ein Wiener-Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$ unter dem geeignet zu kalibrierenden risikoneutralen Maß. Hierbei sind θ_t der zeitabhängige Mean-Reversion-Level und α die Geschwindigkeit der Annäherung an θ_t bzw. die Stärke des Konvergenzterms im Vergleich zum diffusiven Term. Die Stärke des diffusiven Terms wird durch den Volatilitätsparameter σ bestimmt.

(b) *Aktienmodell:*

(i) Eine Geometrische Brownsche Bewegung $S(t)$, $t \geq 0$, ist ein lognormales Modell. Daher ist die Betrachtung von Log-Returns angemessen:

$$\text{LogRet}(t) = \ln\left(\frac{S(t+\Delta)}{S(t)}\right).$$

Alternative wäre eine Parametrisierung durch shifted Log-Returns

$$\text{Shifted LogRet}(t) = \ln\left(\frac{S(t+\Delta)+\delta}{S(t)+\delta}\right)$$

denkbar. Da dies aber zu negativen Aktienwerten (bei positivem Shift) oder einer untere Grenze für Aktienwerte oberhalb von Null (negativer Shift) führen würde, ist eine solche Parametrisierung nicht angemessen. Parametrisierungen als (shifted) Returns oder Differenzen sind in einem lognormalen Modell nicht geeignet, da zusätzliches Logarithmieren notwendig wäre.

(ii) Eine Kalibrierung des Drifts ist im risikoneutralen Kontext nicht möglich, da der Drift des Aktienmodells nicht frei gewählt werden kann. Er ist durch die Forderung nach Arbitragefreiheit an die mittlere Zinsentwicklung gekoppelt.

Für die Kalibrierung der Volatilität wird im risikoneutralen Kontext üblicherweise nicht die historische Aktienvolatilität genutzt, sondern die implizite

Volatilität von Aktienoptionen. Diese stellt das aktuell erwartete Level von Fluktuationen dar, welches insbesondere für die Bewertung im aktuellen Marktumfeld maßgeblich ist.

(c) *Spreadmodell:*

(i) Als zusätzliche Parameter muss noch eine Recovery-Rate definiert werden, die den erwarteten Anteil des Nominals bestimmt, der bei Ausfall noch zurückgezahlt wird. Die Vereinfachung des Modells besteht darin, dass Ratingmigrationen in einem solchen Modell ausgeschlossen sind.

(ii) Im Rechenbeispiel beträgt zum Projektionszeitpunkt die Laufzeit der Anleihe noch 3 Jahre. Daher ist die Überlebenswahrscheinlichkeit über die Restlaufzeit gegeben als

$$p_3^{\text{surv}} = (1 - 0{,}012)^3 = 0{,}9644,$$

die Ausfallwahrscheinlichkeit beträgt $p_3^{\text{default}} = 1 - p_3^{\text{surv}} = 0{,}0356$. Aus den gegebenen Größen errechnet sich so der Preis der Anleihe zum Projektionszeitpunkt pro 100 € Nominal als

$$P = 99{,}40 \cdot (0{,}9644 + 0{,}4 \cdot 0{,}0356) = 97{,}28.$$

Mit dem Zins der Nullkuponanleihe von $r_3(4) = 0{,}9940^{-1/3} - 1 = 0{,}2\%$ folgt der Spread aus der allgemeinen Formel $P = (1 + r_T + \text{spread}_T)^{-T}$ als

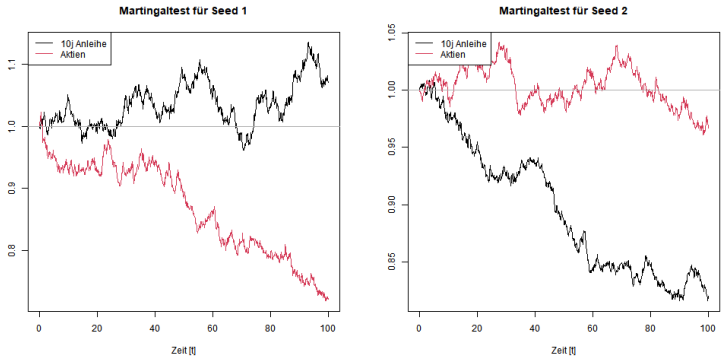
$$\text{spread}_3(4) = 0{,}0072.$$

Der Spread in diesem Pfad beträgt also 72 bp.

Aufgabe 6. *[Ökonomische Szenariogeneratoren: Monte-Carlo-Methoden] [30 Punkte]*

Die Bewertung von Finanzderivaten basiert auf der *risikoneutralen Bewertungsformel*, d. h. arbitrage-freie Preise ergeben sich als (bedingte) Erwartungswerte der diskontierten Auszahlungen unter einem geeignet kalibrierten risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$. In der Praxis müssen diese Erwartungswerte jedoch in der Regel mithilfe von *Monte-Carlo-Simulationen* bestimmt werden.

(a) *[15 Punkte] Martingaltest:* Die beiden folgenden Gaphiken stellen die Ergebnisse des Martingaltests für einen 10-jährigen Bond und einen Aktienrisikofaktor für zwei verschiedene Seeds in der Monte-Carlo-Simulation dar.



(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie allgemein die Zielsetzung eines Martingaltests und das mathematische Testprinzip.

(ii) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie *kurz*, was man unter dem Monte-Carlo-Fehler versteht, und erläutern Sie *speziell*, warum verschiedene Seeds zu unterschiedlichen Ergebnissen des Martingaltests führen können. Schlagen Sie zwei Maßnahmen vor, die diesen Effekt reduzieren können.

(iii) *[7 Punkte]* Beschreiben und diskutieren Sie die beiden oben dargestellten Ergebnisse. Wägen Sie allgemein ab, unter welchen Bedingungen Sie den einen oder den anderen Seed bevorzugen würden, und gehen Sie im Speziellen auf die Bewertungsanwendung in der Lebensversicherung ein.

(b) *[15 Punkte] Varianzreduktionstechniken - Kontrollvariablen:*

(i) *[5 Punkte]* Beschreiben Sie, wie der Schätzer für den Erwartungswert einer Zufallsvariable Y mithilfe einer Kontrollvariablen X modifiziert werden kann, sodass die Varianz des modifizierten Schätzers minimiert wird. Berechnen Sie dabei explizit die Varianz des modifizierten Schätzers sowie die Lösung des Varianzminimierungsproblems.

(ii) *[5 Punkte]* Die folgende Tabelle stellt ein Simulationsergebnis einer Größe Y und der Kontrollvariablen X (zur Vereinfachung für eine geringe Simulationsanzahl) dar:

Beobachtung	Y	X
1	-4	2
2	2	6
3	1	4
4	-8	0

Der Erwartungswert der Kontrollvariablen beträgt $\mathbb{E}[X] = 2$. Bestimmen Sie zunächst den im Seminar diskutierten Schätzer $\hat{b}$ für den optimalen Korrekturparameter und berechnen Sie anschließend die korrigierte Realisierung der beobachteten Variable $Y(\hat{b})$ sowie den daraus resultierenden korrigierten Mittelwertschätzer $\bar{Y}(\hat{b})$.

(iii) *[5 Punkte]* Stellen Sie *qualitativ* die Methodik der Kontrollvariablen graphisch als Regression dar und kommentieren Sie Ihre Skizze *kurz*. Folgern Sie, wodurch sich eine geeignete Kontrollvariablen auszeichnet. Geben Sie als Beispiel eine geeignete Kontrollvariable für die Berechnung des Erwartungswerts einer Europäischen Put-Option an.

Lösungsskizze:

(a) (i) Der Martingaltest prüft im risikoneutralen Kontext auf Ebene eines simulierten Szenarios das Vorliegen der Martingaleigenschaft von diskontierten Preisprozessen. Formal wird hierzu für das zugrunde liegende Finanzinstrument mit Preisprozess $(P_t)_{t\geq 0}$ und einen Numéraire $(B_t)_{t\geq 0}$ (z. B. Geldmarktfonds) in jedem Zeitpunkt t die für die Martingaleigenschaft des diskontierten Preisprozesses notwendige (aber nicht hinreichende) Bedingung

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P_t}{B_t}\right] = \frac{P_0}{B_0} \quad \Leftrightarrow \quad 1 = \frac{B_0}{P_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P_t}{B_t}\right]$$

geprüft. Der Erwartungswert bezieht sich dabei auf das risikoneutrale Maß bzw. Martingalmaß $\mathbb{Q}$ und wird als Mittelwert aus dem per Monte-Carlo-Simulation erzeugten Szenario ermittelt.

Der Martingaltest ist erfüllt, wenn die aus der Simulation geschätzten Werte für $\frac{B_0}{P_0}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\frac{P_t}{B_t}\right]$ „hinreichend nahe“ bei 1 liegen.

(ii) Der Monte-Carlo-Ansatz wird durch das Gesetz der großen Zahlen gerechtfertigt und liefert bei einer endlichen Anzahl von Pfaden grundsätzlich nur eine Approximation des Erwartungswerts und damit der gewünschten Martingaleigenschaft. Da in Bewertungsmodellen die Anzahl der simulierten Pfade endlich (und oft der Rechengeschwindigkeit geschuldet zu klein) ist, kann eine bemerkenswerte Abweichung bzw. Instabilität in Abhängigkeit des Seeds der Zufallszahlen vorliegen.

Verschiedene Seeds bedeuten, dass der deterministische Algorithmus, der zur Erzeugung der Pseudozufallszahlen genutzt wird, unterschiedlich in-

itialisiert wird. Daher ist die Folge der Zufallszahlen, die generiert wird, anders, was zu einer unterschiedlichen Realisierung der simulierten Größen auf den einzelnen Pfaden führt. Aufgrund der begrenzten Anzahl der Realisierungen folgen daraus unter anderem unterschiedliche (diskontierte) Mittelwerte und dementsprechend unterschiedliche Ergebnisse im Martingaltest.

Eine Erhöhung der Pfadanzahl führt zu einem geringeren Einfluss des Monte-Carlo-Fehlers; dies ist allerdings aufgrund begrenzter Ressourcen nicht immer möglich. Hilfreich sind in diesem Fall Maßnahmen zur Varianzreduktion wie zum Beispiel die Nutzung antithetischer Zufallszahlen oder (falls möglich) von Kontrollvariablen.

(iii) Für Seed 1 ist die Anleihe etwa beim optimalen Wert von 1; die Martingaleigenschaft kann als erfüllt gelten. Für den Aktienwert hingegen ist eine systematische negative Abweichung zu erkennen, die zu Werten unter 80% führt. Für Seed 2 schwankt der Aktienrisikofaktor hingegen eng um den optimalen Wert, allerdings ist die Abweichung der 10-jährige Anleihe hier recht hoch.

Das erste Szenario kann genutzt werden, falls zum Beispiel das Exposure hinsichtlich dem Aktienrisikofaktor relativ klein ist, und eine Abweichung vom Erwartungswert entsprechend wenig Einfluss auf die Bewertung nimmt. Für das zweite Szenario spricht die fast optimale Evolution der Aktien, allerdings sind die steigenden Anleihenwerte ein relativ großes Problem. Für kurze Projektionshorizont und hohes Aktienexposure kann der Szenariensatz zu Seed 2 möglicherweise noch verwendbar sein. Es bleibt aber zu beachten, dass aufgrund der hohen Korrelation zwischen Zinsen unterschiedlicher Laufzeit auch kurzfristige Zinsen und insbesondere der Diskontfaktor selbst einen schlechten Martingaltest zeigen können.

Im Kontext der Lebensversicherung ist zu beachten, dass typischerweise langlaufende Verbindlichkeiten einen weiten Projektionshorizont erfordern. Zudem ist das Anlagenportfolio meist stark von langlaufenden Zinstiteln geprägt. Das Aktienexposure ist im Gegensatz dazu häufig relativ niedrig. Daher ist hier eher Seed 1 zu wählen.

(b) (i) Sind $(Y_1, X_1), \dots, (Y_n, X_n)$ mit $Y_i \sim Y$, $X_i \sim X$ i. i. d. Simulationen von Y bzw. der Kontrollvariablen X, so wird der Mittelwertschätzer

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

für den Erwartungswert $\mathbb{E}[Y]$ für einen Parameter $b \in \mathbb{R}$ korrigiert durch

$$\bar{Y}(b) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i(b) \quad \text{mit } Y_i(b) := Y_i - b(X_i - \mathbb{E}[X]),\ i = 1, \dots, n.$$

Die zugehörige Varianz beträgt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(\bar{Y}(b)) &= \mathrm{Var}(\bar{Y} - b \cdot \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \\
&= \mathrm{Var}(\bar{Y}) + \mathrm{Var}(-b \cdot \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) + 2\,\mathrm{Cov}(\bar{Y}, -b \cdot \tfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i) \\
&= \mathrm{Var}(\bar{Y}) + \tfrac{b^2}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Var}(X_i) - 2\tfrac{b}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\mathrm{Cov}(Y_i, X_i) \\
&= \mathrm{Var}(\bar{Y}) + \tfrac{b^2}{n}\,\mathrm{Var}(X_1) - \tfrac{2b}{n}\,\mathrm{Cov}(Y_1, X_1)
\end{aligned}$$

und wird minimal für $b = \frac{\mathrm{Cov}(Y_1, X_1)}{\mathrm{Var}(X_1)}$. Der optimale Parameter kann aus Daten geschätzt werden via

$$\hat{b} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(X_i - \bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2},$$

wobei $\bar{X}$ bzw. $\bar{Y}$ die empirischen Erwartungswerte der Stichprobe von X und Y bezeichnen.

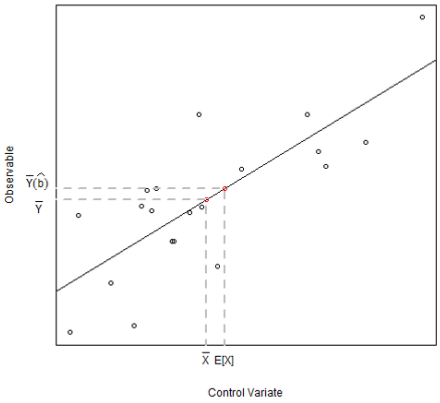
(ii) Die empirischen Mittelwerte sind gegeben durch $\bar{Y} = -2,25$ und $\bar{X} = 3$. Mithilfe der Werte in der nachfolgenden Tabelle berechnet man den Schätzer $\hat{b} = 1{,}75$ sowie die Realisierungen der korrigierten Variablen $Y(\hat{b}) = Y - \hat{b}(X - \mathbb{E}[X])$.

Beobachtung	Y	X	$(X-\bar{X})^2$	$(Y-\bar{Y})\cdot(X-\bar{X})$	$Y(\hat{b})$
1	-4	2	1	1,75	-4
2	2	6	9	12,75	-5
3	1	4	1	3,25	-2,5
4	-8	0	9	17,25	-4,5

Aus der letzten Spalte folgt $\bar{Y}(\hat{b}) = -4$.

(iii) Trägt man – wie in der folgenden Graphik illustriert – die Beobachtungen von Y gegen die simultanen Beobachtungen von X auf, so hat die eingezeichnete Regressionsgerade die Steigung b. Die Methode der Kontrollvariable entspricht nun einer Verschiebung der empirischen Mittelwerte $(\bar{X}, \bar{Y})$ entlang dieser Geraden bis zum bekannten Erwartungswert der Kontrollvariablen $\mathbb{E}[X]$.

Die Korrektur entlang der Regressionsgerade ist umso angemessener, je größer der erklärende Gehalt der Regression ist, d. h. je höher die Korrelation zwischen der Kontrollvariablen und der abhängigen Variablen ist. Im Falle einer Aktien-Option stellt der zugrunde liegende Aktienwert eine geeignete Wahl dar.


Observable
$\overline{Y(\hat{b})}$
$\overline{Y}$
$\overline{X}$ E[X]
Control Variate

Aufgabe 7. *[Projektion von Kapitalanlagen] [20 Punkte]*

Sie möchten im Rahmen einer ALM-Studie untersuchen, welche Auswirkung ein schneller Zinsanstieg in Kombination mit einer Spreadausweitung und volatilen Aktienmärkten auf Ihren Kapitalanlagebestand hat. Ihre Kapitalanlage umfasst aktuell

- eine festverzinsliche Staatsanleihe im Anlagevermögen (jährliche Kuponzahlung), Nominal = 5.000 €,
- eine festverzinsliche Unternehmensanleihe im Umlaufvermögen (jährliche Kuponzahlung), Nominal = 10.000 €,
- eine Aktie im Umlaufvermögen (jährliche Dividendenrendite, bezieht sich auf den Buchwert am Periodenende).

Die folgende Tabelle zeigt die aktuellen Marktwerte sowie die Anschaffungskosten:

	Anschaffungskosten	**Marktwert T=0**	**Kupon/Dividende**
Staatsanleihe	5.000 €	4.500 €	2,0%
Unternehmensanleihe	10.500 €	10.000 €	4,0%
Aktie	15.000 €	13.000 €	2,0%

Folgendes Szenario soll nun analysiert werden:

T	**0**	**1**	**2**	**3**
Zinssatz bei flacher Zinskurve	3,0%	4,0%	5,0%	4,0%
Spread Unternehmensanleihe	100bp	200bp	300bp	100bp
Aktienrendite	–	-5,0%	15,0%	10,0%
Staatsanleihe				
Restlaufzeit	10	9	8	7
Modified Duration	8,5	7,9	7,0	6,3
Unternehmensanleihe				
Restlaufzeit	5	4	3	2
Modified Duration	4,5	3,5	2,7	1,9

(a) *[12 Punkte]* Erstellen Sie unter Zuhilfenahme der oben gegebenen Informationen für die Jahre $T = 0$ bis $T = 3$ eine Projektion der Aktiva und der GuV nach dem folgenden Schema:

T	**0**	**1**	**2**	**3**
Aktiva				
Marktwert Staatsanleihe				
Buchwert Staatsanleihe				
Marktwert Unternehmensanleihe				
Buchwert Unternehmensanleihe				
Marktwert Aktien				
Buchwert Aktien				
GuV				
Kapitalerträge	–			
- davon ordentliche Kapitalerträge	–			
- davon außerordentliche Kapitalerträge	–			

Hinweis: Der Marktwert der festverzinslichen Anleihe ist mithilfe der Zinssensitivität und durch anschließende Aufzinsung näherungsweise fortzuschreiben. Zins- und Aktienerträge fließen zum 31.12. eines jeden Jahres zu.

(b) *[4 Punkte]* Wie können Sie in einem Kapitalanlagemodell berücksichtigen, dass sich die Kreditqualität Ihrer Anleihen ändern kann? Beschreiben Sie *qualitativ*, wie sich eine Änderung der Kreditqualität auf Ihre Aktiva und Ihren Jahresabschluss auswirken kann?

(c) *[4 Punkte]* Sie möchten die am Sekundärmarkt gehandelte Unternehmensanleihe durch ein nicht am Markt gehandeltes Darlehen mit gleicher Laufzeit ersetzen. Das Darlehen ist ebenfalls in EUR denominiert, die Kreditqualität ist ähnlich zu der der Unternehmensanleihe. Beantworten Sie die folgenden Fragen:

- Welche Anpassungen müssen Sie in Ihrem Projektionsmodul vornehmen?
- Muss eine Kalibrierung des Modellzeitwerts auf den tatsächlichen Zeitwert vorgenommen werden?
- Müssen Sie die Migrationsmatrix anpassen, falls Sie Ausfallwahrscheinlichkeiten über eine Übergangsmatrix modellieren?
- Bilanzieren Sie das Darlehen im Anlage- oder im Umlaufvermögen und warum?

Lösungsskizze:

(a) Projektion der Aktiva und der GuV:

T	**0**	**1**	**2**	**3**
Aktiva				
Marktwert Staatsanleihe	4.500	4.282	4.141	4.608
Buchwert Staatsanleihe	5.000	5.000	5.000	5.000
Marktwert Unternehmensanleihe	10.000	9.646	9.688	10.997
Buchwert Unternehmensanleihe	10.000	9.646	9.688	10.500
Marktwert Aktien	13.000	12.350	14.203	15.623
Buchwert Aktien	13.000	12.350	14.203	15.000
GuV				
Kapitalerträge	–	-257	2.679	2.409
- davon ordentliche Kapitalerträge	–	747	784	800
- davon außerordentliche Kapitalerträge	–	-1.004	1.895	1.609

Investments im Umlaufvermögen sind zwingend nach dem *strengen Niederstwertprinzip* abzuschreiben; für das Anlagevermögen gilt das gemilderte Niederstwertprinzip (§253 Abs. 4 Satz 1 HGB).

(b) Durch eine Migrationsmatrix mit einperiodigen Übergangswahrscheinlichkeiten können Übergänge zwischen Kreditqualitätsklassen stochastisch modelliert werden.

Migriert die Anleihe zwischen zwei Zeitschritten in eine höhere Kreditqualitätsklasse / in eine niedrigere Kreditqualitätsklasse, erhält sie einen Spreadabschlag / einen Spreadaufschlag. Der Marktwert der Anleihe steigt / fällt zusätzlich zur regulären Reaktion auf die modellierte Zinsbewegung.

Es kann zu außerordentlichen Verlusten durch eine Abschreibung kommen, sodass das Jahresergebnis sinkt. Es kann aber auch zu Zuschreibungen kommen und das Jahresergebnis steigt (*Achtung:* Zuschreibungen sind nur im Rahmen einer Wertaufholung bis zu den ursprünglichen Anschaffungskosten erlaubt).

(c) Da das Darlehen nicht am Sekundärmarkt gehandelt wird, existiert kein aktueller Marktpreis. Der Zeitwert in $T = 0$ muss also anhand eines Modells ermittelt werden (*Mark-to-Model*).

Pricing und Projektion:

Die verfügbaren historische Preise des Darlehens können mit den entsprechenden historischen Preisen der Unternehmensanleihe verglichen werden, um einen Spread (eine Illiquiditätsprämie) auf die Diskontkurve der Unternehmensanleihe zu ermitteln. Dieser Spread wird dann auf die projizierte Diskontkurve der Unternehmensanleihe addiert. Die so ermittelte Diskontkurve wird auf das Auszahlungsprofil des Darlehens angewandt, um den projizierten Preis des Darlehens zu ermitteln.

Eine Kalibrierung der Modellwerte an den Startwert entfällt dann logischerweise, da der Modellwert in $T = 0$ den fehlenden Marktwert ersetzt.

Kommt eine Übergangsmatrix zur Modellierung von Ausfallwahrscheinlichkeiten zum Einsatz, so kann diese aufgrund der zur Unternehmensanleihe ähnlichen Kreditqualität beibehalten werden.

Das Darlehen sollte im Anlagevermögen bilanziert werden. Da es nicht jederzeit handelbar ist und eventuell eine hohe Liquiditätsprämie/Bid-Ask-Spread beim Handel fällig wird, darf davon ausgegangen werden, dass es dazu bestimmt ist, dem Geschäftsbetrieb dauernd zu dienen (§247 Abs. 2 HGB).

Aufgabe 8. *[Investmentrisiken unter Solvency II] [25 Punkte]*

(a) *[15 Punkte]* [EIOPA-Zinsstrukturkurve]

(i) *[2 Punkte]* Nennen Sie zwei Anwendungsgebiete der *EIOPA-Zinsstrukturkurve* im Rahmen von Solvency II.

(ii) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie die Bedeutung und Funktion des *Last Liquid Points* (kurz: LLP) für die EIOPA-Zinsstrukturkurve.

(iii) *[4 Punkte]* Beschreiben Sie die Bedeutung und Funktion der *Ultimate Forward Rate* (kurz: UFR) für die EIOPA-Zinsstrukturkurve. Erläutern Sie dabei, aus welchen Größen sich die UFR zusammensetzt und beschreiben Sie diese Größen prägnant.

(iv) *[6 Punkte]* Im Rahmen des sogenannten Solvency II Reviews hat die EIOPA Vorschläge zur Anpassung des Solvency II Standardmodells veröffentlicht. Beschreiben Sie *kurz* die geplante Änderung hinsichtlich

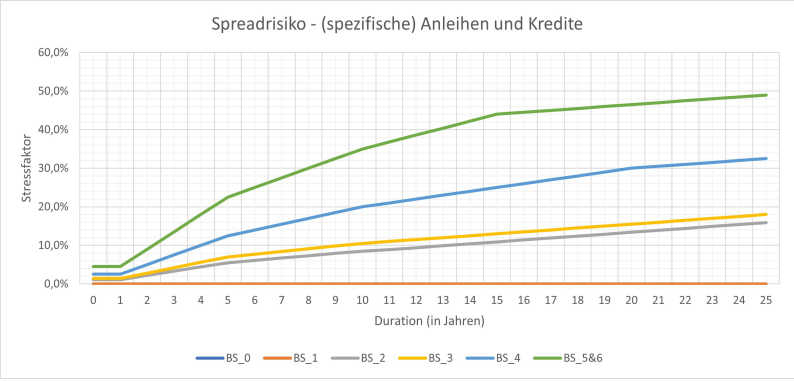
- der risikolosen Zinskurve jenseits des LLPs und
- der Berechnung des Zinsstresses

und erläutern Sie, wie sich diese Änderungen jeweils ceteris paribus auf die Kapitalanlage eines Lebensversicherers auswirken könnten.

(b) *[10 Punkte]* [Spreadrisikomodul]

(i) *[6 Punkte]* Nennen Sie die drei maßgeblichen Determinanten der Stressfaktoren im Spreadrisikomodul und beschreiben Sie diese prägnant.

(ii) *[4 Punkte]* Die nachfolgende Abbildung zeigt anzusetzende Stressfaktoren für das Spreadrisiko spezifischer Anleihen und Kredite. Welche zwei Kernaussagen lassen sich auf Basis der Abbildung hinsichtlich der Höhe des Stressfaktors in Abhängigkeit der Bonitätsstufen (kurz: BS) bzw. der Duration treffen? Nennen Sie ein konkretes Beispiel einer Anleihe, die die Bonitätsstufe null aufweist!



Lösungsskizze:

(a) EIOPA-Zinsstrukturkurve (ZSK):

(i) Zwei Anwendungsgebiete:

- marktkonsistente Bewertung der Versicherungsverpflichtungen,
- Ausgangsbasis für die (Standardformel-)Zinsstresse zur Berechnung des entsprechenden Risikokapitals.

(ii) LLP:

- Die EIOPA-ZSK soll eine Bewertung auch von sehr lang laufenden Verträgen ermöglichen und dabei Daten aus tiefen, liquiden und transparenten (DLT) Kapitalmärkten verwenden.
- Solche Märkte sind für die in den Versicherungsverträgen vereinbarten Dauern von häufig mehr als 50 Jahren nicht verfügbar.
- Die EIOPA spezifiziert den Zeitpunkt, bis wann die Märkte als DLT gelten als Last Liquid Point (LLP). Für die Währung Euro liegt dieser zurzeit bei 20 Jahren.

(iii) UFR:

- Da für langfristige Verpflichtungen per definitionem (vgl. LLP) keine adäquaten Marktdaten für Zinssätze verfügbar sind, werden diese ausgehend vom LLP basierend auf den Erwartungswerten für langfristige Zinssätze und für die Inflation extrapoliert. Langfristig nähert sich die Zinsstrukturkurve der einjährigen Forwardraten der UFR an.
- Die UFR ist die Summe aus erwartetem Realzins und erwarteter Inflationsrate.
- Der erwartete Realzins ist für alle Währungen identisch und berechnet sich als Durchschnitt vergangener Realzinsen eines Korbs repräsentativer Länder seit 1963.
- Die erwartete Inflationsrate ist währungsspezifisch und basiert auf den Inflationszielen von Zentralbanken (z. B. EZB-Inflationsziel i.H.v. 2%).

(iv) Solvency II Review:

- Anpassung jenseits des LLPs:
  Führt im Vergleich zum bisherigen Verfahren zu niedrigeren Zinssätzen.
  → Durch die Senkung der risikofreien Zinskurve steigt der Marktwert

der versicherungstechnischen Rückstellungen und damit sinken die Eigenmittel in der SII-Bilanz. Damit kann ein LVU potentiell weniger Marktrisiken eingehen.

- Vorschläge zur Veränderungen des Zinssenkungsstresses:
  stärkerer Zinssenkungsstress sowie Stress auch negativer Zinsen.
  → Erhöhen (sofern die Zinssenkung das dominante Risiko darstellt) das SCR Zins deutlich. Damit erhöht sich der Druck, den Gap zwischen der marktwertgewichteten Duration der Aktivseite und der Passivseite zu verringern sowie unter Umständen andere Marktrisiken zu reduzieren.

(b) Spreadrisikomodul:

(i) Determinanten der Stressfaktoren:
Der jeweilige Stressfaktor ist abhängig aus der Kombination des Ratings, der Duration und des Typs des Wertpapiers.

- Die Bonität wird in Solvency II nach den Stufen 0 bis 6 differenziert. Durch die Durchführungsverordnung (EU) 2016/1800 erfolgt ein Mapping von Ratings auf diese Bonitätsstufen.
- Die Stressfaktoren werden in Abhängigkeit von der Duration des Wertpapiers bestimmt. Die für die Bestimmung der Stressfaktoren relevanten Parameter a_i und b_i ergeben sich dabei in Abhängigkeit des entsprechenden Durationsintervalls. Wichtig: Bei Anleihen oder Krediten mit variablem Zinssatz entspricht die Duration der modifizierten Duration einer Anleihe oder eines Kredits mit festem Zinssatz mit derselben Restlaufzeit und mit Kuponzahlungen in Höhe des Terminzinssatzes.
- Der anzusetzende Stressfaktor ist darüber hinaus abhängig vom Typ des exponierten Wertpapiers (z. B. Anleihen/Kredite, Verbriefungen und Kreditderivate, etc.)

(ii) Aussagen auf Basis der Abbildung:

- Der Stressfaktor nimmt mit sich verschlechternden Rating zu.
- Die Stressfaktoren ergeben sich stufenweise linear in Abhängigkeit der Duration.
- Bsp.: Anleihen emittiert von EWR-Zentralstaaten.

Aufgabe 9. *[Kapital- und Renditegarantien in Versicherungsprodukten] [15 Punkte]*

(a) *[8 Punkte]* [Klassik vs. neue Klassik]

(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie, wie Kapital- und Renditeversprechen sowohl bei der *Klassik* als auch der *neuen Klassik* dar- und sichergestellt werden.

(ii) *[4 Punkte]* Grenzen Sie die *Klassik* und die *neue Klassik* in zwei Punkten voneinander ab.

(b) *[7 Punkte]* [Hybridprodukt/CPPI]

Für ein Hybridprodukt setzen Sie einen Garantiefonds mit monatlicher Wertuntergrenze von 90% auf, der über einen CPPI dargestellt wird. Der Multiplikator sei 5.

(i) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie die prozentuale Start-Allokation in %.

(ii) *[3 Punkte]* Ein Mitarbeiter aus der Produktentwicklung weist Sie darauf hin, dass es beim CPPI auch die Möglichkeit gibt, eine maximal tolerierbare Quote α für das riskante Asset zu berücksichtigen. Konkret gelte, dass der Anteil in das riskante Asset q

(A) sich aus dem Cushion C und dem Multiplikator m ergibt, sofern dieser kleiner als die maximal tolerierbare Quote α ist, oder

(B) der maximal tolerierbaren Quote α entspricht, falls (A) nicht gilt.

Geben Sie die entsprechende Formel für die Berechnung der Quote q in das riskante Asset an, die die beiden genannten Bedingungen (A) und (B) berücksichtigt.

(iii) *[2 Punkte]* Für die maximal tolerierbare Quote des riskanten Assets gelte im Fall

(1) $\alpha = 40\%$,

(2) $\alpha = 60\%$.

Bestimmen Sie für die beiden Fälle (1) und (2) den Anteil q, der auf Basis der in (ii) hergeleiteten Formel effektiv in das riskante Asset investiert wird.

Lösungsskizze:

(a) Klassik vs. neue Klassik:

(i) Kapital- und Renditegarantien werden bei der Klassik und der neuen Klassik zu 100% über das konventionelle Sicherungsvermögen (SV) dargestellt. Wesentliches Merkmal des konventionellen SV ist der Ausgleich im Kollektiv und in der Zeit. Die Garantien werden nicht explizit gehedgt, sondern sollen durch die risikoarme Anlagestruktur des SV und ein ALM gesichert werden. Dabei werden häufig Aktien- und Fremdwährungsrisiken durch Derivate reduziert. Zusätzlich helfen verschiedene Pufferfunktionen die jährlichen Garantien darzustellen:

- Bilanzierung zum gemilderten Niederstwertprinzip (§341b HGB),
- Bildung/Auflösung stiller Reserven,
- freie RfB.

(ii) Die neue Klassik unterscheidet sich von den klassischen LV- und RV-Produkten durch die Höhe der ausgesprochenen Garantien, z. B. reduzierter Garantiezins und Bruttobeitragsgarantie.

Als Ausgleich für die verringerten Garantien soll bei „normaler“ oder guter Kapitalmarktentwicklung eine höhere Überschussbeteiligung gezahlt werden, welche die geringeren Garantien überkompensiert.

Hinweis: Die beiden hier exemplarisch genannten Punkte stellen keine vollständige Abgrenzung zwischen Klassik und neuer Klassik dar. Alternative Antworten sind möglich.

(b) Hybridprodukt/CPPI:

(i)
- Cushion C= 100% - 90% = 10%
- Allokation in das riskante Asset = $5 \cdot 10\% = 50\%$
- Allokation in das risikofreie Asset = 50%

(ii) Die Formel, die die beiden Bedingungen berücksichtigt lautet

$$q := \min\{m \cdot C, \alpha\}.$$

(iii) Es gilt $m \cdot C = 50\%$ und

(1) $\alpha = 40\% \Rightarrow q = \min\{m \cdot C, \alpha\} = 40\%$

(2) $\alpha = 60\% \Rightarrow q = \min\{m \cdot C, \alpha\} = 50\%$