DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

Finanzmathematik und Investment I

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 24. Mai 2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 26 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Carolin Apfel, Dr. Mario Hörig,
Prof. Dr. Thomas Knispel, Dr. Marcus Scheffer,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

Aufgabe 1. *[Grundlegende Denkfiguren der Finanzmathematik] [25 Punkte]*

(a) *[12 Punkte]* [Sensitivitäten] Es seien der folgende Zahlungsstrom, der zugehörige bewertungsrelevante Zero-Zinssatz (hier: jahresunabhängig) sowie entsprechende Diskontfaktoren gegeben. Die Zahlungen erfolgen jeweils am Ende der Jahre 4 und 8.

Hinweis: Nutzen Sie zur schnelleren Berechnung die gegebenen Diskontfaktoren.

	Jahr 4	**Jahr 8**
Zahlungsstrom	100	100
Zins z	3%	3%
$q^{Jahr} = (1+z)^{-Jahr}$	0,888	0,789
$\tilde{q}^{Jahr} = (1+z+0{,}1\%)^{-Jahr}$	0,885	0,783

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den *heutigen Marktwert* des Zahlungsstroms.

(ii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Zins-Duration* des Zahlungsstroms, indem Sie eine Diskretisierung von +0,1% (=10 Basispunkte) verwenden.

(iii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Key-Rate-Duration* zu Jahr 8 mithilfe der gleichen Diskretisierung von +0,1% (=10 Basispunkte).

(iv) *[2 Punkte]* Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Key-Rate-Duration* zu Jahr 4 mithilfe der gleichen Diskretisierung von +0,1% (=10 Basispunkte). Sie können – sofern möglich – bisherige Ergebnisse verwenden.

(b) *[5 Punkte]* [Risiken und Stabilität]

(i) *[4 Punkte]* Geben Sie jeweils zwei Beispiele für robuste Modelle sowie für instabile Modelle an. Skizzieren Sie jeweils *kurz*, inwiefern diese Modelle robust bzw. instabil sind.

(ii) *[1 Punkt]* Sie möchten ein Risikomodell aufbauen und wollen zur Kalibrierung historische Marktdaten verwenden. Erklären Sie, welche Problematik sich ggf. für die Risikomessung ergibt, wenn Sie nur Randverteilungen von einzelnen Risikofaktoren sowie deren allgemeine (Pearson-) Korrelation messen bzw. modellieren.

(c) *[8 Punkte]* [Geld, Krypto-Assets und Blockchain-Technologie]

(i) *[3 Punkte]* Nennen Sie die drei durch die Deutsche Bundesbank definierten Anforderungen an Geld.

(ii) *[5 Punkte]* Nennen Sie 5 Anwendungsbeispiele der Blockchain-Technologie.

Lösungsskizze:

(a) (i) Für den Zahlungsstrom mit Laufzeit von 8 Jahren und Zahlungen c_4 und c_8 sowie assoziiertem Diskontfaktor $q = (1 + \text{Zins})^{-1}$ ist der Marktwert gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{MW} &= \sum_{t=4,8} \text{c}_\text{t} \cdot q^t \\ &= \text{c}_4 \cdot q^4 + \text{c}_8 \cdot q^8 \\ &\approx 88{,}8 + 78{,}9 \\ &= 167{,}7. \end{aligned}$$

(ii) Für den verändertem Diskontfaktor $\tilde{q} = (1 + \text{Zins} + 0{,}1\%)^{-1}$ beträgt der Marktwert

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{MW}} &= \sum_{t=4,8} \text{c}_\text{t} \cdot \tilde{q}^t \\ &= \text{c}_4 \cdot \tilde{q}^4 + \text{c}_8 \cdot \tilde{q}^8 \\ &\approx 88{,}5 + 78{,}3 \\ &= 166{,}8. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die approximierte effektive Zins-Duration

$$\begin{aligned} \text{D}_{eff} &= -\frac{\widetilde{\text{MW}} - \text{MW}}{0{,}1\% \cdot \text{MW}} \\ &= -\frac{166{,}8 - 167{,}7}{0{,}001 \cdot 167{,}7} \\ &\approx 5{,}367. \end{aligned}$$

(iii) Berechnung der approximierten effektiven Key Rate-Duration zu Jahr 8:

$$\begin{aligned} \text{KRD}_{eff}^{(8)} &= -\frac{c_8 \cdot \tilde{q}^8 - c_8 \cdot q^8}{0{,}1\% \cdot \text{MW}} \\ &\approx -\frac{78{,}3 - 78{,}9}{0{,}001 \cdot 167{,}7} \\ &\approx 3{,}578 \end{aligned}$$

(iv) Da Zahlungen nur in den Jahren 4 und 8 stattfinden, gilt in diesem Fall für die Summe der Key-Rate-Durationen:

$$\begin{aligned} \text{D}_{eff} &= \text{KRD}_{eff}^{(4)} + \text{KRD}_{eff}^{(8)} \\ \Leftrightarrow \text{KRD}_{eff}^{(4)} &= \text{D}_{eff} - \text{KRD}_{eff}^{(8)} \\ &\approx 5{,}376 - 3{,}578 \\ &\approx 1{,}789. \end{aligned}$$

(b) (i) Instabil:

- Black-Scholes-Formel für Swaptions bei negativen Zinsen
- Portfoliotheorie nach Markowitz für kleine Änderungen von Korrelationen deutlich verändertes optimales Portfolio

Robust:

- Hauptkomponentenanalyse bedingt anwendbar auch bei nicht normalverteilten Daten
- Smith-Wilson-Extrapolation funktioniert auch weiterhin bei negativen Zinsen

[*Weitere Nennungen sind möglich.*]

(ii) Die Korrelation (in Verbindung mit den Randverteilungen) legt die Abhängigkeitsstruktur im Allgemeinen nicht eindeutig fest. Daher sind trotz gleicher Korrelation unterschiedliche Abhängigkeiten im Tail der gemeinsamen Verteilung und damit verbunden Risikokennzahlen sowie Diversifkationseffekte möglich, siehe z. B. Popsicle Verteilung oder Vergleich von Abhängigkeiten „Gauß-Copula vs. *t*-Copula“ mit identischer Korrelation.

(c) (i) Sparmittelfunktion, Tauschmittelfunktion, Wertmessfunktion

(ii)
- Zahlungssysteme/ Transfer von Werten
- Automatisch erfüllende Verträge/ Smart Contracts
- Speicherung von Lieferketten für Produkte
- Non-Fungible Tokens (NFT) / digitale Kunstobjekte
- Digitale Identitäten
- Speicherung von Besitzverhältnissen
- Erwirtschaftung von Zinserträgen (Beispiele: Lending oder Staking)
- Stable Coins für Fiat Währungen
- Tokenisierung von Aktien oder Derivaten
- Dezentrale Börsen

[*Gefragt waren fünf Anwendungen; alternative Nennungen sind möglich.*]

Aufgabe 2. *[Anlageklassen und Finanztitel] [25 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* [Aktien und Anleihen]

(i) *[4 Punkte]* In einem Gespräch mit einem Finanzmanager der Versicherungs-AG über die Wertpapiere *Aktien* und *Anleihen* tätigt dieser Ihnen gegenüber die nachfolgend angeführten Aussagen (1)-(4). Geben Sie für jede dieser Aussagen an, ob diese für Aktien resp. Anleihen zutrifft oder nicht zutrifft.

(1) Eine Vielzahl dieser Wertpapiere kann an der Börse gehandelt werden.

(2) Diese Wertpapiere können jederzeit an den Emittenten zurückgegeben werden.

(3) Diese Wertpapiere verbriefen Teilhaberechte an einem Unternehmen, wie z. B. Teilnahme- und Mitbestimmungsrechte auf der Hauptversammlung.

(4) Diese Wertpapiere haben ein Kursrisiko.

(ii) *[4 Punkte]* Im gleichen Gespräch erläutert der Finanzmanager Ihnen das Wertpapier *Aktienanleihe*:
Eine Aktienanleihe ist ein Wertpapier mit einer festen Laufzeit (Fälligkeit im Zeitpunkt T). In Analogie zu gewöhnlichen Anleihen werden zu den Zeitpunkten $t = 1, \ldots, T$ feste Kuponzahlungen Z geleistet. Bei Fälligkeit zum Zeitpunkt T kann der Emittent der Anleihe diese entweder zum Nennbetrag N zurückzahlen oder eine (zum Emissionszeitpunkt) festgelegte Anzahl n von Aktien als Tilgungsleistung liefern, wenn dies für ihn günstiger ist, d. h. der Wert der Aktien geringer als der Nennwert der Anleihe ist.

(1) Geben Sie den Zahlungsstrom der Aktienanleihe für die Zeitpunkte $t = 1, \ldots, T$ an.

(2) Zeigen Sie anhand von (1), dass sich der Zahlungsstrom einer Aktienanleihe zu den Zeitpunkten $t = 1, \ldots, T$ über ein Portfolio bestehend aus einer gewöhnlichen Anleihe und Short Puts duplizieren lässt.

Hinweis: Die zugrunde liegenden Basistitel der Aktienanleihe in (1) und der Puts in (2) sind identisch.

(iii) *[2 Punkte]* Bei der Versicherungs-AG existiere ein bestimmtes Kosten-Volumen (in Euro), welches gegenüber Inflationsrisiken exponiert ist. Der Finanzmanager der Versicherungs-AG behauptet, er könne dieses Kosten-Volumen durch den Erwerb von Inflation Linked Bonds (Inflationsindex = VPI; Nominalvolumen = Kosten-Volumen der Exponierung) vollständig gegenüber Inflationsrisiken absichern. Nennen Sie zwei Gründe, warum die Behauptung des Finanzmanagers falsch ist.

(b) *[8 Punkte]* [Swaps]

(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie allgemein den Begriff des Swap-Kontrakts!

(ii) *[4 Punkte]* Angenommen, Unternehmen *XY* habe vor einem Jahr eine Anleihe mit einem Nominalvolumen i. H. v. 10 Mio. Euro, variabler Verzinsung (Referenzzins: 6-Monats-EURIBOR) und fünf Jahren Laufzeit emittiert.

(1) Das Unternehmen *XY* geht nun für die nächsten vier Jahre von steigenden Zinsen aus. Geben Sie den Swap-Kontrakt und dessen Ausstattungsmerkmale an, den Unternehmen *XY* in diesem Fall eingehen sollte, um sich gegen den angenommenen Zinsanstieg zu immunisieren.

(2) Das Unternehmen *XY* möchte sich die Option offen halten, die Zinsentwicklung zunächst noch zwei Jahre abzuwarten, um sich dann gegenüber steigenden Zinsen immunisieren zu können. Geben Sie den Kontrakt und dessen Ausstattungsmerkmale an, den das Unternehmen in diesem Fall wählen sollte.

(c) *[7 Punkte]* [Alternative Investments]

(i) *[3 Punkte]* Nennen Sie drei Anlagearten, die unter der Kategorie *Alternative Investments* subsumiert werden.

(ii) *[4 Punkte]* Skizzieren Sie für zwei Anlagearten der Kategorie *Alternative Investments*, wie die Kapitalanforderungen im Rahmen von Solvency II gemäß Standardformel abgebildet werden.

Lösungsskizze:

(a) (i) Aussagen über Aktien und Anleihen:

(1) Aktien und Anleihen

(2) weder Aktien noch Anleihen

(3) Aktien

(4) Aktien und Anleihen

(ii) Aktienanleihe:

(1) Der Zahlungsstrom der Aktienanleihe für die Zeitpunkte $t = 1, \dots, T$ lautet (aus Käufersicht):

$$\{Z, \dots, Z, Z + \min(N, nS_T)\},$$

wobei S_T den Aktienkurs zum Zeitpunkt T bezeichnet.

(2) Darstellung Aktienanleihe über ein Portfolio bestehend aus einer gewöhnlichen Anleihe und Short Puts: Basierend auf (1) lässt sich die dort angeführte letzte Komponente folgendermaßen zerlegen:

$$\begin{aligned}\min(N, nS_T) &= N + \min(nS_T - N, 0)\\ &= N + n\min(S_T - N/n, 0)\\ &= N - n\max(N/n - S_T, 0)\end{aligned}$$

Insgesamt ergibt sich somit folgende Duplikation zu der Aktienanleihe

$$\{Z, \ldots, Z, Z+N\} - n\{0, \ldots, 0, \max(N/n - S_T, 0)\},$$

welche einem Portfolio bestehend aus einer gewöhnlichen Anleihe und n Short Puts entspricht.

(iii) Inflation Linked Bonds:

- Referenz-Inflationsindex:
  Diskrepanz zwischen der aus Unternehmenssicht relevanten Inflation und der den inflationsindexierten Anleihen zugrunde liegenden Inflation. Die Inflationindexierung der ILBs basiert laut Aufgabe auf einem Verbraucherpreisindex (VPI). Für ein Unternehmen spielt jedoch auch die Lohninflation eine maßgebliche Rolle, sodass in diesem Fall die Risiko-Exponierung des Unternehmens nicht kongruent abgedeckt werden kann.

- Indexation Lag:
  Ein vollständiger Inflationsschutz wäre nur dann sichergestellt, wenn alle Zahlungsströme des ILB unmittelbar bei Zahlung an den aktuellen Stand des Preisniveaus angepasst würden. Eine perfekte Indexierung ist jedoch nicht erreichbar, da stets ein sogenanntes Indexation Lag, vorliegt. D. h. es liegt eine zeitliche Verzögerung zwischen dem Stichtag des zugrundeliegenden Preisindexes und dem Termin der Kuponzahlung vor, weshalb eine vollständige Absicherung nicht erreicht werden kann.

(b) (i) Swap-Kontrakt: Ein Swap (engl. = Tausch) ist eine Vereinbarung zwischen zwei Vertragspartnern, bei der heute festgelegt wird, zu welchen Bedingungen in der Zukunft getauscht wird. In der Regel handelt es sich dabei um Zahlungsströme und es existieren mehrere Termine, an denen ein Tausch stattfindet.

- Bei Swaps handelt es sich um OTC-gehandelte Derivate, da die Konditionen an die individuellen Bedürfnisse der Vertragspartner angepasst werden.

- Swaps sind in der Regel Terminfixgeschäfte. Es existieren aber durchaus Swaps, die einen Optionscharakter enthalten. (→ Swaptions)

(ii) (1) Payer-Swap mit einer Restlaufzeit von vier Jahren, variablem Zins (6-Monats EURIBOR) und einer fixed rate i. H. v. x % (Unternehmen *XY* ist fixed-rate Payer).

(2) Long European Payer-Swaption (Optionslaufzeit 2 Jahre; Swap-Laufzeit 2 Jahre, variablem Zins (6-Monats-EURIBOR) und fixed-rate i. H. v. y %).

(c) (i) Private Equity, Hegde Funds, Infrastruktur, Commodities, . . .

[*Die hier angeführte Aufzählung ist nicht abschließend. Es waren nur drei gefragt.*]

(ii) Regulatorische Behandlung im Rahmen von Solvency II (Standardformel):

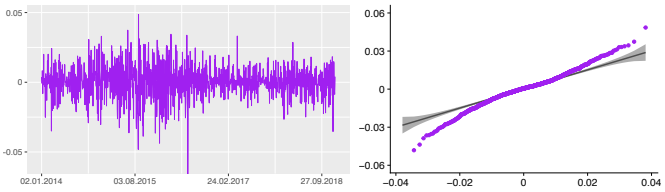
- Alternative Investments können je nach Ausgestaltung in verschiedenen Untermodulen des Marktrisikos erfasst werden, z. B. Zins- und Spreadrisiko, Aktienrisiko Typ 2, ...
- Private Equity, Hedge Funds und Rohstoffe werden der Kategorie „Equity Risk“ und innerhalb dieser Kategorie der Position „Others“ (Private Equity sofern „non-listed“) zugeordnet.
- Für qualifizierte Infrastrukturanlagen können innerhalb des Equity- bzw. Spread-Moduls reduzierte Stressfaktoren angesetzt werden. Z. B. gibt es für eigenkapitalbasierte Investitionen in qualifizierte Infrastruktur innerhalb des Untermoduls für das Aktienrisiko ein separates Modul für qualifizierte Eigenkapitalinvestitionen. Für nicht-strategische Investitionen in qualifizierte Infrastruktureinrichtungen beträgt der Stressfaktor 30%. Der Stressfaktor für strategische Investitionen beträgt 22%.

[*Die hier angeführte Aufzählung ist nicht abschließend.*]

Aufgabe 3. *[Konkrete Assetmodelle] [25 Punkte]*

Angenommen, Sie arbeiten im Asset Management und befassen sich mit der Analyse von Finanzmarktzeitreihen sowie der Modellierung von Kapitalmarktprodukten.

(a) *[6 Punkte]* Zur Ad-hoc-Analyse der täglichen Log-Renditen eines Aktienindizes haben Sie die historischen Log-Renditen visualisiert sowie einen Q-Q-Plot zum Vergleich der empirischen Renditeverteilung mit der Normalverteilung erstellt.



(i) *[2 Punkte]* Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie aus diesen beiden Graphiken in Bezug auf wesentliche empirische Eigenschaften der vorliegenden Renditezeitreihe?

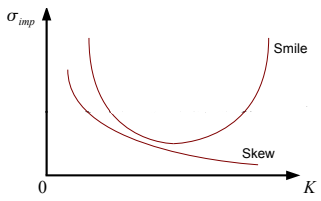
(ii) *[4 Punkte]* Geben Sie an, welche zentrale empirische Eigenschaft ARCH- und GARCH-Zeitreihenmodelle in Bezug auf die Volatilität abbilden, und beschreiben Sie für eines dieser beiden Zeitreihenmodelle die mathematische Struktur. Welchen Zusatzeffekt bildet das GARCH-Modell im Vergleich zum ARCH-Modell ab?

(b) *[7 Punkte]* Ihr Versicherungsunternehmen erwägt, in einen Immobilienfonds zu investieren. Die Auswertung historischer Zeitreihen der jährlich auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen R des Immobilienfonds ergibt die erwartete Rendite $\mu(R) = 5\%$, die Volatilität $\sigma(R) = 4\%$ und die Autokorrelation 1. Ordnung in Höhe von $a = 0{,}8$. Der risikofreie Zins r beträgt 2% p. a..

(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie *kurz*, warum die Renditen des Immobilienfonds eine Autokorrelation aufweisen können. Führen Sie zur Korrektur der Volatilität die Entglättung mit dem *Blundell-Ward-Verfahren* durch.

(ii) *[3 Punkte]* Berechnen Sie jeweils die Sharpe-Ratio der Renditen ohne und mit Entglättung. Erläutern Sie anhand Ihres Rechenergebnisses, welche Konsequenzen die Nicht-Berücksichtigung der Entglättung auf die Portfolioselektion Ihres Versicherungsunternehmens haben könnte.

(c) *[7 Punkte]* Die folgende Graphik zeigt typische Abhängigkeiten der *impliziten Volatilität* Europäischer Call-Optionen vom Strike K im Black-Scholes-Modell.



(i) *[2 Punkte]* Erklären Sie *kurz*, was man unter der impliziten Volatilität versteht, und erläutern Sie, inwiefern die obige Graphik das Black-Scholes-Modell falsifiziert.

(ii) *[2 Punkte]* Beschreiben Sie den Kerngedanken der Weiterentwicklung des Black-Scholes-Modells durch *stochastische Volatilitätsmodelle*. Geben Sie dabei die Dynamik des diskontierten Aktienpreisprozesses $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ unter dem zugrunde liegenden risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ an.

(iii) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie die mathematische Struktur des *Heston-Modells* aus der Klasse der stochastischen Volatilitätsmodelle. Gehen Sie dabei insbesondere auf die Interpretation der Modellparameter ein.

(d) *[5 Punkte]* In der Finanzmathematik ist der *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess*, auch *Vasicek-Prozess* genannt, (hier zur Vereinfachung mit Mean-Reversion-Level 0)

$$X_t = x_0 e^{-at} + be^{-at} \int_0^t e^{as}\, dW_s, \quad a, b > 0, t \geq 0,$$

ein beliebter Modellbaustein, wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ einen Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bezeichnet.

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie inklusive *kurzer* Herleitung die Verteilung der Zufallsvariable X_t, $t > 0$, unter $\mathbb{P}$ an.

(ii) *[2 Punkte]* Welche Implikation hat diese Verteilungseigenschaft bei Verwendung von $(X_t)_{t\geq 0}$ zur Modellierung der Short-Rate und welche Herausforderung ergibt sich dadurch?

Lösungsskizze:

(a) (i) Die Visualisierung der Renditezeitreihe verdeutlicht, dass die Volatilität im Zeitverlauf variiert. Bei Finanzmarktzeitreihen treten extreme Renditen in Clustern auf (*Volatility Clustering*). Die Q-Q-Plots weisen eine „invertierte *S*-Form“ auf und weichen von einer Geraden ab. Dies bedeutet, dass die Normalverteilung kein geeignetes Modell für die Verteilung täglicher Renditen ist.

(ii) Das ARCH(p)-Modell und das GARCH(p,q)-Modell bilden Volatiltätscluster ab und weisen die folgende mathematische Struktur auf:

- Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt ARCH(p)-Prozess, falls für einen strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t\in T}$ folgende Gleichungen bestehen:

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \geq 0.$$

Hierbei ist $(Z_t)_{t\in T}$ ein striktes Weißes Rauschen SWN$(0, 1)$.

- Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt GARCH(p,q)-Prozess, falls für einen strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t\in T}$ folgende Gleichungen bestehen:

$$X_t = \sigma_t Z_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \geq 0.$$

[*Zu beschreiben war nur ein Zeitreihenmodell.*]

Sind beim ARCH-Modell $|X_{t-1}|, |X_{t-2}|, \ldots |X_{t-p}|$ groß, so ist auch die Volatilität σ_t und damit - modulo Wirkung des Shocks Z_t aus dem Rauschen - $|X_t|$ hoch. Selbiges gilt für den GARCH-Prozess. Allerdings sind hier die Perioden hoher Volatilität persistenter als im ARCH-Modell, da σ_t^2 explizit auch von $\sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \ldots, \sigma_{t-q}^2$ abhängt.

(b) (i) Bei Zeitreihen im Immobilienbereich wird häufig eine Autokorrelation durch Verzerrungen im Bewertungsprozess induziert, u. a.:

- Ankerfunktion vorangegangener Wertgutachten,
- Vernachlässigung/Fehlen aktueller Marktdaten,
- zeitversetzte Bewertung einzelner Immobilien.

Das Blundell-Ward-Verfahren korrigiert die Varianz einer Zeitreihe von Renditen R_t, $t = 1, 2, \ldots$, gemäß $\mathrm{Var}(R_t^*) = \mathrm{Var}(R_t)\frac{1-a^2}{(1-a)^2}$, also

$$\sigma(R^*) = \sigma(R)\sqrt{\tfrac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 0{,}04 \cdot \tfrac{\sqrt{1-0{,}8^2}}{1-0{,}8} = 0{,}12 \quad (12\%).$$

Der Erwartungswert bleibt unverändert, d. h. $\mu(R^*) = \mu(R) = 5\%$.

(ii) Für die Sharpe-Ratios SR der Einperiodenrenditen gilt

$$\mathrm{SR}(R) = \tfrac{\mu(R)-r}{\sigma(R)} = \tfrac{0{,}05-0{,}02}{0{,}04} = 0{,}75, \quad \mathrm{SR}(R^*) = \tfrac{\mu(R^*)-r}{\sigma(R^*)} = \tfrac{0{,}05-0{,}02}{0{,}12} = 0{,}25.$$

Die Verwendung unbereinigter Immobilienzeitreihen führt zu einer Unterschätzung der Volatilität und damit ceteris paribus zu einer Überschätzung der Sharpe-Ratio, die insbesondere ein risikoadjustiertes Perfomancemaß darstellt. Damit können Risiko-Return-Analysen (z. B. im klassischen Markowitz-Modell, angewendet auf der Ebene der Hauptanlageklassen) ein verzerrtes Bild ergeben und zu einer suboptimalen Asset-Allokation führen.

(c) (i) Im Black-Scholes-Modell steigt ceteris paribus der Preis einer Europäischen Call-Option, wenn die Volatilität σ erhöht wird. Aufgrund dieser

Monotonie kann man für einen am Markt beobachteten Preis einer Call-Option die Volatilität σ_{imp} bestimmen, die im Black-Scholes-Modell vorliegen müsste, um diesen Preis zu generieren (wenn alle anderen Parameter gegeben sind). Diese Größe heißt implizite Volatilität.

Die Graphik zeigt, dass die implizite Volatilität vom zugrunde liegenden Strike abhängt, während der Volatilitätsparameter σ im Black-Scholes-Modell konstant ist. Insofern ist das Black-Scholes-Modell empirisch nicht geeignet.

(ii) Im Black-Scholes-Modell besitzt der diskontierte Aktienpreisprozess unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ die Dynamik $d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t \, dW_t^{\mathbb{Q}}$ ($(W_t^{\mathbb{Q}})_{t\geq 0}$ Wiener-Prozess unter $\mathbb{Q}$) mit einem konstanten Volatilitätsparameter $\sigma > 0$. Stochastische Volatilitätsmodelle unterstellen als Erweiterung, dass die Volatilität durch einen stochastischen Prozess $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ beschrieben ist, d. h.

$$d\widetilde{S}_t = \sigma_t \widetilde{S}_t \, dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

(iii) Für zwei korrelierte $\mathbb{Q}$-Wiener-Prozesse $W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}}$ mit Kovariation $\langle W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}} \rangle_t = \rho t$ sind im Heston-Modell der diskontierte Aktienpreisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ und die zugehörige Volatilität unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ modelliert durch:

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= \sigma_t \widetilde{S}_t \, dW_t^{\mathbb{Q}}, \\ \sigma_t &= \sqrt{v_t}. \end{aligned}$$

Der Prozess v heißt „variance“ und ist definiert durch einen *Cox-Ingersoll-Ross-Prozess*

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\, dt + \xi \sqrt{v_t} \, dB_t^{\mathbb{Q}}.$$

Die Modellparameter besitzen folgende Interpretation:

- $\kappa \geq 0$ „speed of mean reversion“
- $\theta > 0$ long vol (Erwartungswert von v_t strebt gegen θ für $t \uparrow \infty$.)
- ξ vol of vol (Volatilität der Volatilität)

(d) (i) Die Itô-Integrale $(\int_0^t e^{as} \, dW_s)_{t\geq 0}$ stellen einen Gauß'schen Prozess mit eindimensionalen Randverteilungen

$$\int_0^t e^{as} \, dW_s \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t (e^{as})^2 \, ds\right) = \mathcal{N}\left(0, \tfrac{1}{2a}(e^{2at} - 1)\right)$$

dar. Aus der expliziten Darstellung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses folgt daher mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(x_0 e^{-at}, \tfrac{b^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right).$$

(ii) Da X_t normalverteilt ist, nimmt X_t Werte unterhalb jeder negativen Schranke mit positiver Wahrscheinlichkeit an. Die Verwendung des OU-Prozesses als Modell für die Short-Rate (Vasicek-Modell) führt daher zu negativen Zinsen. Dies war im Zinsumfeld, das in den vergangenen Jahren vorlag, grundsätzlich sinnvoll. Gleichwohl können die Zinsen im Modell beliebig negativ werden, was bei stark negativen Zinsen ggf. unrealistisch und zudem aufgrund der „Bargeldhaltungsoption“ kritisch zu sehen ist.

Aufgabe 4. *[Verallgemeinerte real-world Zinsmodelle] [25 Punkte]*

(a) *[11 Punkte]* [Allgemeines] Es sei eine Datenmatrix X gegeben mit M Spalten und 500 Zeilen. Jede Zeile stelle eine wöchentliche absolute Zinskurvenänderung mit M Laufzeiten zu aufeinander folgenden Wochen der ungefähr letzten 10 Jahre dar. Gehen Sie davon aus, dass die Spalten der Matrix X zentriert sind. Sie möchten diese wöchentlichen zentrierten Änderungen mit einer Hauptkomponentenanalyse (*Principal Component Analysis* (PCA)) modellieren.

(i) *[3 Punkte]* Nennen Sie drei generelle Gründe, die für eine Verwendung einer PCA bei der Zinskurvenmodellierung sprechen.

(ii) *[3 Punkte]* Nennen Sie Ihre Erwartung, welche Gestalt die ersten drei Basisfunktionen besitzen werden.

(iii) *[3 Punkte]* Erklären Sie *kurz*, wie Sie die Basisfunktionen der PCA berechnen. Gehen Sie davon aus, dass Ihnen die Matrix X bereits vorliegt.

(iv) *[2 Punkte]* Was lässt sich über die empirische Korrelation $\mathrm{Corr}(\mathrm{PC}_i, \mathrm{PC}_j)$ der Faktorladungen PC_i und PC_j von zwei beliebigen $i, j \in \{1, \ldots, M\}$, basierend auf den verwendeten Daten, aussagen?

(b) *[8 Punkte]* [Rechnung] Es sei Ihnen nur der erste Eigenvektor EV_1 einer PCA zu gegebenen zweidimensionalen Datenpunkten bekannt mit $\mathrm{EV}_1^T := [-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$. Es sei $x := [2; 2]^T$ aus der zentrierten Punktwolke, die Sie modellieren.

(i) *[1 Punkt]* Berechnen Sie PC_1 von x.

(ii) *[1 Punkt]* Begründen Sie anschaulich das Ergebnis aus (i).

(iii) *[3 Punkte]* Berechnen Sie PC_2 von x.

(iv) *[1 Punkt]* Berechnen Sie die euklidische Länge des Vektors x mit $||.||_2 := \sqrt{\langle ., . \rangle}$.

(v) *[2 Punkte]* Vergleichen Sie die Ergebnisse aus (iii) und (iv) und geben Sie eine Erklärung. Gehen Sie in Ihrer Erklärung außerdem auf das Ergebnis von (i) ein.

(c) *[6 Punkte]* [Nelson-Siegel-Modell] Nennen Sie drei Gemeinsamkeiten und drei Unterschiede zwischen der PCA und dem Nelson-Siegel-Modell.

Lösungsskizze:

(a) (i)
- Gute Abbildung historischer Zinskurvenbewegungen mit wenigen Parametern
- Dimensionsreduktion
- Einfache Berechnung der Faktorladungen durch Matrixmultiplikation
- Unkorreliertheit der historischen Faktorladungen

[*Weitere Nennungen sind möglich.*]

(ii) ähnlich Parallelshift, Steigung, Krümmung

(iii) Gesucht sind die Eigenvektoren der Kovarianzmatrix der zentrierten wöchentlichen Änderungen. Sie berechnen die Kovarianzmatrix der empirischen wöchentlichen Änderungen und berechnen anschließend die Eigenvektoren dieser.

(iv) $c_{i,j} = \delta_{i,j}$, wobei $\delta_{i,j}$ das Kronecker-Symbol ist.

(b) (i) $\mathrm{PC}_1 = x^T \mathrm{EV}_1 = [2;2][-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]^T = -\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = 0$

(ii) Der Punkt x besitzt keine Ausbreitung in Richtung EV_1. Deshalb ist die Faktorladung PC_1 in diese Richtung gleich null.

(iii) Es wird eine normierte und orthogonale Ergänzung mit Länge 1 von EV_1 gesucht. Da EV_1 auf der Winkelhalbierenden des zweiten Quadranten liegt, liegt $\mathrm{EV}_2 := [\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ auf der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten und erfüllt die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingung. Es musste nur das Vorzeichen des ersten Eintrags des Vektors EV_1 umgedreht werden. (Alternativ hätte auch das Vorzeichen des zweiten Eintrags des Vektors EV_1 umgedreht werden können.) Damit kann PC_2 berechnet werden:

$$\mathrm{PC}_2 = x^T \mathrm{EV}_2 = [2;2][\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]^T = \frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2}{\sqrt{2}} = \frac{4}{\sqrt{2}} = \sqrt{8} \approx 2{,}828.$$

(iv) $||x||_2 := \sqrt{\langle 2, 2 \rangle} = \sqrt{8} \approx 2{,}828.$

(v) Da x sich nur in Richtung von EV_2 ausbreitet, entspricht die Länge von x genau der Faktorladung PC_2.

(c) <u>Gemeinsamkeiten:</u>

- Können beide zur Beschreibung von Zinskurven verwendet werden
- Kleinste-Quadrate-Minimierung zur Bestimmung der Modellparameter

- Grob ähnliche Interpretation der Basisfunktionen möglich: Parallelverschiebung, Steigung, Krümmung

Unterschiede:

- PCA auch für beliebige Transformationen von Zinskurvenänderungen möglich
- Basisfunktionen sind diskret vs. stetig
- Extrapolation bei Nelson-Siegel automatisch gegeben, bei PCA nicht

[*Weitere Nennungen sind möglich.*]

Aufgabe 5. *[Bewertung von Optionen im Black-Scholes-Modell] [40 Punkte]*

Angenommen, das Portfolio Ihrer Versicherung enthält Aktien des Solarparkbetreibers „Sun Energy AG“, dessen Aktien an der Börse gehandelt werden. Sie entscheiden sich, den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ zur Risikomessung unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift-Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilitätsparameter $\sigma > 0$ zu modellieren, wobei der Zufall unter $\mathbb{P}$ durch einen Wiener-Prozess $(W_t^{\mathbb{P}})_{t\geq 0}$ getrieben ist, der die Informationsfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ erzeugt. In konsistenter Form verwenden Sie das assoziierte Black-Scholes-Modell mit Zeithorizont T für Bewertungszwecke. Hierbei ist die Wertentwicklung des Geldmarktfonds bei stetiger Verzinsung mit Zinsrate $r \geq 0$ gegeben durch $B_t = e^{rt}$, $t \geq 0$.

(a) *[11 Punkte]*

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie die Dynamik des Aktienpreisprozesses $(S_t)_{t\geq 0}$ unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ an. Berechnen Sie anschließend mithilfe der Itô-Formel formal unter $\mathbb{P}$ die Dynamik des diskontierten Aktienpreisprozesses $\widetilde{S}_t := e^{-rt}S_t$, $t \geq 0$.

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie das eindeutige äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ mithilfe einer geeigneten Girsanov-Transformation. Erläutern Sie dabei *kurz* Ihr Vorgehen. Welche Dynamik besitzt der Aktienpreisprozess unter $\mathbb{Q}$?

(iii) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, welche Implikationen die Existenz des äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ auf die Arbitragefreiheit und die arbitragefreie Bewertung von Contingent Claims hat. Genügt umgekehrt Arbitragefreiheit in allgemeinen zeitstetigen Finanzmarktmodellen, um die Existenz eines äquivalenten Martingalmaßes zu sichern? Begründen Sie Ihre Aussage.

(iv) *[2 Punkte]* Zeigen Sie mithilfe der Martingaleigenschaft, dass für die Aktie $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t] = S_0 e^{rt}$, $t \in [0, T]$, gilt. Interpretieren Sie diese Gleichung.

(b) *[10 Punkte]* Ihnen wird ein Finanzderivat angeboten, das Ihnen zur Maturität $T > 0$ in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T der „Sun Energy AG“ die Auszahlung $C_T := 5(S_T)^2 + 100$ liefert.

(i) *[5 Punkte]* Leiten Sie eine explizite Formel zur Berechnung des arbitragefreien Preises C_t des Finanzderivats zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ her. Zeigen Sie dabei insbesondere, dass $C_t = v(S_t, t)$ für eine geeignete Funktion v gilt.

Hinweis: Für $X \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2)$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[\exp(aX)] = \exp(\frac{1}{2}a^2\gamma^2)$.

(ii) *[5 Punkte]* Berechnen Sie eine dynamische Hedging-Strategie, mit der Ihre Gegenpartei die Auszahlung C_T durch Handel von Geldmarktfonds und Aktie theoretisch perfekt absichern kann. Wie hoch sind die Kosten für die Implementierung der Hedging-Strategie?

(c) *[5 Punkte]* Eine Kollegin hat im Black-Scholes-Modell für eine Call-Option auf die Aktie mit Restlaufzeit von 4 Jahren und Strike $K = 90$ den Preis 22,49 berechnet. Aus Marktdaten ist für Sie ablesbar, dass der heutige Kurs der Aktie $S_0 = 100$ und die Zinsrate $r = 0{,}01$ betragen, während Ihnen der Volatilitätsparameter σ unbekannt ist.

(i) *[3 Punkte]* Angenommen, Sie erhalten den Auftrag eine Put-Option auf die Aktie mit Restlaufzeit von 4 Jahren und Strike $K = 90$ zu bewerten, möchten jedoch aus Effizienzgründen σ nicht neu bestimmen. Nutzen Sie die Ergebnisse der Kollegin, um den Preis der Put-Option zu ermitteln.

(ii) *[2 Punkte]* Beschreiben Sie unter Angabe entsprechender Formeln, wie Sie die Absicherungsstrategie der Call-Option über Aktie und Geldmarktfonds in eine Absicherungsstrategie für die Put-Option übersetzen können.

(d) *[7 Punkte]* Bei einer *Asiatischen Call-Option* auf die Aktie $(S_t)_{t\geq 0}$ mit Maturität $T > 0$ und Strike 100 ist das Auszahlungsprofil

$$C_T := \left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} S_k - 100\right)^+$$

abhängig vom Durchschnittswert der Aktie zu bestimmten Zeitpunkten. Ihnen steht ein Rechenprogramm zur Verfügung, mit dem Sie beliebig viele Zufallszahlen $z_1, z_2, \ldots$ aus einer Standardnormalverteilung generieren können.

Erläutern Sie mithilfe entsprechender Formeln, wie Sie zur Bewertung dieser Option in $t = 0$ mit *Monte-Carlo-Methoden* vorgehen. Geben Sie dabei explizit an, inwiefern der Monte-Carlo-Ansatz eine Approximation darstellt und welche Probleme daraus in der praktischen Anwendung resultieren können.

(e) *[7 Punkte]* Angenommen, die geometrische Brownsche Bewegung mit den Parametern μ und σ beschreibt anstelle des Aktienkurses den Firmenwertprozess $(X_t)_{t\geq 0}$ der Sun Energy AG unter $\mathbb{P}$. Die Sun Energy AG sei durch Eigenkapital sowie durch Fremdkapital in Form einer Nullkuponanleihe mit Nennwert 100.000 Euro und Fälligkeit zum Zeitpunkt T finanziert.

(i) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie im Sinne des *Merton-Modells*, wann ein Ausfall der Sun Energy AG vorliegt. Zeigen Sie, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ zum Zeitpunkt 0 gegeben ist durch

$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{100.000}{S_0}\right) - \left(\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)T\right)\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

(ii) *[4 Punkte]* Geben Sie Formeln für den Wert von Eigenkapital E_T sowie der Schulden D_T zum Fälligkeitszeitpunkt T an. Erläutern Sie *kurz*, wie Sie den Wert von Eigenkapital und Schulden zum Zeitpunkt 0 berechnen können.

Hinweis: Die Durchführung der Berechnungen ist nicht gefordert.

Lösungsskizze:

(a) (i) Der Preisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ der Aktie besitzt unter dem Maß $\mathbb{P}$ die Dynamik

$$dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{P}}), \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, S_0 = s > 0.$$

Die Funktion $f(x,t) = e^{-rt}x$ erlaubt die Darstellung der diskontierten Aktienpreise $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, $t \geq 0$, in der Form $\widetilde{S}_t = f(S_t, t)$. Mit der Itô-Formel folgt für die Dynamik des Prozesses $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ daher

$$d\widetilde{S}_t = df(S_t,t) = \tfrac{\partial}{\partial x}f(S_t,t)\,dS_t + \tfrac{\partial}{\partial t}f(S_t,t)\,dt + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{(\partial x)^2}f(S_t,t)\,d\langle S\rangle_t.$$

Da die Ableitung $\frac{\partial^2}{(\partial x)^2}f$ verschwindet, erhält man somit

$$d\widetilde{S}_t = e^{-rt}\,dS_t - re^{-rt}S_t\,dt = \widetilde{S}_t\sigma(dW_t^{\mathbb{P}} + \tfrac{\mu-r}{\sigma}\,dt). \tag{1}$$

(ii) $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ ist nach (1) ein Martingal bezüglich eines Maßes $\mathbb{Q}$ (Martingalmaß), falls

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \tfrac{\mu-r}{\sigma}\,du, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

ein Wiener-Prozess unter $\mathbb{Q}$ ist. Zur Konstruktion des (eindeutig bestimmten!) äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ wird der Satz von Girsanov verwendet: Definiert man $\mathbb{Q}$ durch die Dichte

$$\tfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\big|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\int_0^T \frac{\mu-r}{\sigma}\,dW_u^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 du} = e^{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_T^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T},$$

d. h. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T}X]$, so ist der Prozess $(W_t^{\mathbb{Q}})_{\in[0,T]}$ ein $\mathbb{Q}$-Wiener-Prozess bis zur Zeit T. Für die Dynamik von $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ unter $\mathbb{Q}$ gilt

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t\sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}},$$

d. h. der diskontierte Preisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ ist in der Tat ein $\mathbb{Q}$-Martingal.

Für die Dynamik des Aktienpreises $(S_t)_{t\in[0,T]}$ unter $\mathbb{Q}$ erhält man via (2)

$$dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{P}}) = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}}), \tag{3}$$

d. h. $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ist unter $\mathbb{Q}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilitätsparameter σ.

(iii) Aus der Existenz des äquivalenten Martingalmaßes folgt die Arbitragefreiheit des Black-Scholes-Modells. Der arbitragefreie Preis eines Contingent Claims C_T mit Maturität T in t ergibt sich durch risikoneutrale Bewertung:

$$B_t\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tfrac{C_T}{B_T}|\mathcal{F}_t] = e^{rt}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}C_T|\mathcal{F}_t].$$

Umgekehrt impliziert (im Gegensatz zu zeitdiskreten Finanzmarktmodellen) in zeitstetigen Modellen Arbitragefreiheit im Allgemeinen nicht die Existenz eines Martingalmaßes. Hierzu benötigt man die stärkere Bedingung *No Free Lunch with Vanishing Risk* (NFLVR).

(iv) Da der diskontierte Aktienpreisprozess $(\tilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ ein $\mathbb{Q}$-Martingal ist, gilt $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_0] = \tilde{S}_0$ bzw. nach Multiplikation mit e^{rt} äquivalent wie behauptet $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t] = S_0 e^{rt}$.Dies bedeutet, dass sich unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ der Wert einer Aktie im Mittel wie eine Anlage im Sparbuch mit risikofreiem Zins r entwickelt. Man nennt daher $\mathbb{Q}$ auch risikoneutrales Maß.

(b) (i) Im Black-Scholes-Modell ist der Aktienpreisprozess unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilitätsparameter σ, siehe (a) (ii). Somit folgt für den arbitrage-freien Preis im Zeitpunkt t mit risikoneutraler Bewertung

$$\begin{aligned}
C_t &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[5(S_T)^2 + 100|\mathcal{F}_t] \\
&= 5e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T)^2|\mathcal{F}_t] + 100e^{-r(T-t)} \\
&= 5e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)})^2|\mathcal{F}_t] + 100e^{-r(T-t)} \\
&= 5e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t)^2 e^{2\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})}e^{2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}|\mathcal{F}_t] + 100e^{-r(T-t)} \\
&= 5(S_t)^2 e^{(2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)-r)(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{2\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})}] + 100e^{-r(T-t)} \\
&= 5(S_t)^2 e^{(r-\sigma^2)(T-t)}e^{\frac{1}{2}4\sigma^2(T-t)} + 100e^{-r(T-t)} \\
&= 5(S_t)^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + 100e^{-r(T-t)}.
\end{aligned}$$

Fazit: $C_t = v(S_t, t)$ mit $v(x,t) = 5x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)} + 100e^{-r(T-t)}$

(ii) Man berechnet via Delta-Hedging die dynamische Absicherungsstrategie:

- Einheiten Aktie:

$$\vartheta_t^S = \tfrac{\partial}{\partial x} v(S_t, t) = 10 S_t e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

- Einheiten Geldmarktfonds: Mit $V_t^{\vartheta} = C_t$ als Wertprozess der Handelsstrategie folgt

$$\vartheta_t^B = \tfrac{V_t^{\vartheta} - \vartheta_t^S S_t}{B_t} = -5(S_t)^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)-rt} + 100e^{-rT}.$$

Der arbitrage-freie Preis C_t entspricht in jedem Zeitpunkt den Kosten der Replikation.

(c) Die Preise der Call- und Put-Option sind durch die Put-Call-Parität verbunden, d. h. für jeden Zeitpunkt $t \in [0,4]$ gilt für die entsprechenden arbitrage-freien Preise C_t^{call} bzw. C_t^{put}

$$C_t^{\text{call}} - C_t^{\text{put}} = S_t - Ke^{-(4-t)r} \quad \text{bzw.} \quad C_t^{\text{put}} = C_t^{\text{call}} - S_t + Ke^{-(4-t)r}.$$

(i) Daraus folgt speziell für den Bewertungszeitpunkt $t = 0$

$$C_0^{\text{put}} = 22{,}49 - 100 + 90e^{-4\cdot 0{,}01} = \underline{8{,}96}.$$

(ii) Es seien $(\vartheta_t^{B,\text{call}}, \vartheta_t^{S,\text{call}})$ die Einheiten von Geldmarktfonds und Aktie, die im Zeitpunkt t in der Absicherungsstrategie der Call-Option gehalten werden. Aus der Put-Call-Parität folgt z. B. durch Ableiten nach dem Aktienkurs (Delta-Hedging) für die Einheiten der Aktie zur Absicherung der Put-Option

$$\vartheta_t^{S,\text{put}} = \vartheta_t^{S,\text{call}} - 1$$

sowie nachgelagert

$$\vartheta_t^{B,\text{put}} = \frac{C_t^{\text{put}} - \vartheta_t^{S,\text{put}} S_t}{e^{rt}} = \frac{C_t^{\text{call}} - S_t + Ke^{-(4-t)r} - (\vartheta_t^{S,\text{call}} - 1)S_t}{e^{rt}} = \vartheta_t^{B,\text{call}} + Ke^{-4r}.$$

(d) Der arbitrage-freie Preis der Asiatischen Call-Option in $t = 0$ entspricht dem Erwartungswert der diskontierten Auszahlung unter dem (eindeutigen) äquivalenten risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$:

$$C_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} C_T] = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\tfrac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} S_k - 100\right)^+\right].$$

Monte-Carlo-Schätzer:

Dieser Erwartungswert kann mithilfe einer „hinreichend“ großen Anzahl n von unabhängig simulierten (diskretisierten) Pfaden des Aktienpreisprozesses $\{s_1(j), s_2(j), \ldots, s_T(j)\}$, $j = 1, \ldots, n$, approximiert werden:

$$C_0 = e^{-rT} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\tfrac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} S_k - 100\right)^+\right] \approx e^{-rT} \tfrac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left(\tfrac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} s_k(j) - 100\right)^+.$$

Der Monte-Carlo-Ansatz wird durch das starke Gesetz der großen Zahlen gerechtfertigt, das für $n \uparrow \infty$ die Konvergenz der rechten Seite gegen den gesuchten Erwartungswert impliziert. Bei einer endlichen Anzahl von Pfaden liefert es grundsätzlich jedoch nur eine Approximation des gesuchten Erwartungswerts. Da in Bewertungsmodellen die Anzahl der simulierten Pfade endlich (und oft der Rechengeschwindigkeit geschuldet zu klein) ist, kann eine bemerkenswerte Abweichung (Monte-Carlo-Fehler) bzw. Instabilität in Abhängigkeit des Seeds der Zufallszahlen vorliegen.

Bemerkung: In praktischen Anwendungen muss der Monte-Carlo-Fehler daher kontrolliert und limitiert werden: hinreichend hohe Anzahl von Simulationen und/oder Einsatz von Varianzreduktionstechniken (z. B. antithetische Zufallszahlen, Importance Sampling, Stratified Sampling).

Simulation der Pfade:

Bei der Simulation ist zu beachten, dass der Aktienpreisprozess unter $\mathbb{Q}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilitätsparameter σ ist. Zur Simulation der Pfade bietet sich die direkte Simulation ausgehend von der geschlossenen Lösung der Stochastischen Differentialgleichung

an:

$$s_k(j) = S_0 \exp(\sigma \sum_{i=1}^{k} z_i(j) + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)k), \quad k = 1, \ldots, T, j = 1, \ldots, n.$$

Hierbei werden für jeden Pfad j neue standardnormalverteilte Zufallszahlen $z_1(j), \ldots, z_T(j)$ verwendet. Denkbar (wenn auch weniger exakt) wäre auch ausgehend vom Startpreis S_0 und der SDE $dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}})$ eine Diskretisierung gemäß Euler-Verfahren mit hinreichend kleiner Schrittweite $h > 0$, sodass die Werte des Aktienpreisprozesses zu den relevanten Zeitpunkten inkludiert sind:

$$s_{kh}(j) = s_{(k-1)h}(j) + r s_{(k-1)h}(j)h + \sigma s_{(k-1)h}(j)\sqrt{h} z_k(j),\ k = 1, 2, \ldots.$$

(e) (i) Der Ausfall tritt ein, falls zur Fälligkeit T die Verbindlichkeiten in Höhe von 100.000 Euro den Firmenwert X_T übersteigen, d. h. die Ausfallzeit τ ist gegeben durch

$$\tau = \begin{cases} T & \text{falls} \quad X_T < 100.000 \text{ Euro}, \\ \infty & \text{falls} \quad X_T \geq 100.000 \text{ Euro}. \end{cases}$$

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet man

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau \leq T] &= \mathbb{P}[X_T < 100.000] \\ &= \mathbb{P}[X_0 \exp(\sigma W_T^{\mathbb{P}} + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T) < 100.000] \\ &= \mathbb{P}[\exp(\sigma W_T^{\mathbb{P}} + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T) < \tfrac{100.000}{X_0}] \\ &= \mathbb{P}[\tfrac{W_T^{\mathbb{P}}}{\sqrt{T}} < \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln\left(\tfrac{100.000}{X_0}\right) - (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T)] \\ &= \Phi\left(\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln\left(\tfrac{100.000}{X_0}\right) - (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T)\right), \end{aligned}$$

da $W_T^{\mathbb{P}}/\sqrt{T}$ standardnormalverteilt ist.

(ii) Der Wert des Eigenkapitals bzw. der Schulden zum Zeitpunkt T sind gegeben durch

$$E_T = (X_T - 100.000)^+$$

bzw.

$$D_T = \min\{100.000, X_T\} = 100.000 - (100.000 - X_T)^+$$

Damit entspricht das Eigenkapital zur Fälligkeit einer Europäischen Call-Option auf den Firmenwert mit Strike 100.000, während der Wert der Schulden ein Portfolio aus risikofreiem Darlehen 100.000 mit Fälligkeit T und einer Short Position in einer Europäischen Put-Option auf den Firmenwert mit Strike 100.000 darstellt. Zur Bewertung von Eigenkapital und Schulden in $t = 0$ können dementsprechend die Black-Scholes-Formeln für Call- und Put-Optionen verwendet werden.

Aufgabe 6. *[Bewertung im Zinsbereich] [40 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* [LMM und HJM-Modell]

Grenzen Sie das *LIBOR-Marktmodell* (LMM) und das *Heath-Jarrow-Morton-Modell* (HJM) in Hinblick auf die jeweils modellierte Größe gegeneinander ab. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen dar und geben Sie für die modellierten Größen jeweils den Zusammenhang zur Diskontkurve an.

(b) *[15 Punkte]* [1-Faktor Shortrate-Modelle]

(i) *[5 Punkte]* Vergleichen Sie die stochastischen Bewegungsgleichungen der Shortrate-Prozesse im *Vasicek-Modell* und im *Hull-White-Modell* miteinander. Beschreiben Sie hierbei, welche gemeinsamen Eigenschaften aus den zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen abzulesen sind und welche Unterscheidungsmerkmale diese aufweisen. Was können Sie über die Marktkonsistenz der beiden Modelle aussagen?

(ii) *[5 Punkte]* Für das *Hull-White-Modell* ist eine alternative Darstellung des Shortrate-Prozesses $(r_t)_{t\geq 0}$ gebräuchlich, bei der die Shortrate in einen stochastischen Prozess $(x_t)_{t\geq 0}$, der langfristig gegen Null strebt, und eine deterministische Verschiebung $\varphi(t)$ aufgeteilt wird.

Geben Sie die mathematische Formulierung dieses Alternativmodells an, und arbeiten Sie den Zusammenhang der deterministischen Verschiebung mit dem *Mean-Reversion-Level* der ursprünglichen Formulierung heraus.

(iii) *[5 Punkte]* Im *Hull-White-Modell* kann der Wert einer Nullkuponanleihe mit Laufzeit S zur Simulationszeit t als Funktion der am Markt beobachtbaren Startzinskurve $P^M(0, T_i)$ dargestellt werden. Wie lautet diese Darstellung und was impliziert dies für die notwendige maximale Laufzeit der Startzinskurve T_n?

(c) *[19 Punkte]* [2-Faktor Hull-White-Modell]

(i) *[5 Punkte]* Eine Erweiterung des einfachen Hull-White-Modells ist das sogenannte *2-Faktor Hull-White-Modell*. Dieses geht aus dem ursprünglichen 1-Faktor-Modell wie in (b)(i) hervor, indem das zeitabhängige Mean-Reversion-Level um einen zusätzlichen korrelierten stochastischen Term erweitert wird. Der zusätzliche stochastische Term ist ebenfalls ein Mean-Reversion-Prozess mit dem langfristigen Ziel Null.

Stellen Sie die mathematische Formulierung des 2-Faktor Hull-White-Modells auf.

(ii) *[10 Punkte]* Eine alternative Formulierung des 2-Faktor Hull-White-Modells ist das *G2++-Modell*, in dem die Shortrate als Summe von zwei korrelierten *Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen* und einer deterministischen Verschiebung folgt, d. h. $r_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)} + \varphi(t)$, wobei

$$dx_t^{(i)} = -\alpha_i x_t^{(i)}\,dt + \sigma_i\,dZ_t^{(i)} \text{ mit } d\langle Z^{(1)}, dZ^{(2)}\rangle_t = \rho\,dt \quad (|\rho| \le 1)$$

für zwei Wiener-Prozesse $(Z_t^{(1)})_{t\ge 0}$ und $(Z_t^{(2)})_{t\ge 0}$.

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden stochastischen Modelle, indem Sie die Parameter α_i, σ_i, $\varphi(t)$ und ρ in Abhängigkeit der Parameter darstellen, die Sie in der vorangegangenen Aufgabe für das 2-Faktor Hull-White-Modell gewählt haben.

Hinweis: Betrachten Sie die Differentialgleichung für $(r_t)_{t\ge 0}$ und nutzen Sie, dass der Prozess

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}}(\sigma_1 Z_t^{(1)} + \sigma_2 Z_t^{(2)}), \quad t \ge 0,$$

ebenfalls ein Wiener-Prozess ist.

(iii) *[4 Punkte]* Begründen Sie *qualitativ*, warum ein 2-Faktor Hull-White-Modell dem 1-Faktor Modell überlegen ist.

Lösungsskizze:

(a) Im LIBOR-Marktmodell wird die diskrete Forwardrate $f_t(T, T+\Delta T)$ modelliert, während das HJM-Modell die kontinuierliche Forwardrate $f_t(T)$ betrachtet. Letztere entspricht dem Grenzwert verschwindend kleiner Anlagehorizonte der diskreten Forwardrate, d. h. $f_t(T) = \lim_{\Delta T \downarrow 0} f_t(T, T+\Delta T)$.

Der Zusammenhang mit der Diskontkurve $T \mapsto P(t,T)$ für die beiden Größen stellt sich dar als

$$f_t(T, T+\Delta T) = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,T+\Delta T)} - 1\right),$$
$$f_t(T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}.$$

(b) (i) Für einen Wiener-Prozess $(W_t)_{t\ge 0}$, Konstanten α, σ, θ sowie eine zeitabhängige Funktion $\theta(\cdot)$ lauten die beiden Bewegungsgleichungen:

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t \qquad \text{(Vasicek-Modell)}$$
$$dr_t = \alpha(\theta(t) - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t \qquad \text{(Hull-White-Modell)}$$

Beiden Prozessen ist gemein, dass sie ein „Mean-Reversion-Feature“ mit *Mean-Reversion-Geschwindigkeit* α aufweisen. Der Parameter α skaliert

dabei die relative Stärke dieser Asymptotik im Vergleich zum stochastischen Part. Das *Mean-Reversion-Level* θ bzw. $\theta(t)$ gibt an, gegen welchen Wert der deterministische Teil des Prozesses langfristig strebt. Der stochastische Teil wird in beiden Modellen durch den konstanten *Volatilitätsparameter* σ bestimmt, der die Schwankungen des Wiener-Prozesses skaliert und in eine beliebige Richtung treibt, d. h. insbesondere weg vom Mean-Reversion-Level.

Das Hull-White-Modell unterscheidet sich vom Vasicek-Modell durch die Zeitabhängigkeit des Mean-Reversion-Levels. Dadurch ist es möglich, das Hull-White-Modell so zu kalibrieren, dass eine beliebige Startzinskurve reproduziert werden kann, also auch insbesondere eine marktkonsistente Kalibrierung durchzuführen. Im Gegensatz dazu kann im Vasicek-Modell die Startzinskurve nur an einzelnen Punkten repliziert werden. Die Marktkonsistenz ist also eingeschränkt.

(ii) Die im Seminar vorgestellte alternative Darstellung lautet

$$\begin{aligned} r_t &= x_t + \varphi(t) \\ \text{mit } dx_t &= -\alpha x_t\,dt + \sigma\,dW_t. \end{aligned}$$

Zur Herleitung des Zusammenhangs zwischen $\varphi(t)$ und $\theta(t)$ betrachtet man das Differential dx_t:

$$\begin{aligned} dx_t &= d(r_t - \varphi(t)) = dr_t - \varphi'(t)\,dt \\ &= \alpha\,(\theta(t) - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t - \varphi'(t)\,dt \\ &= \alpha\left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha}\varphi'(t) - r_t\right)dt + \sigma\,dW_t \\ &= \alpha\left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha}\varphi'(t) - x_t - \varphi(t)\right)dt + \sigma\,dW_t \\ &= -\alpha x_t\,dt + \sigma\,dW_t + \alpha\left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha}\varphi'(t) - \varphi(t)\right)dt. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der oben dargestellten Bewegungsgleichung führt zur Beziehung

$$\theta(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\alpha}\varphi'(t).$$

(iii) Die Bondpreise sind im Hull-White-Modell gegeben als

$$P(t,S) = \frac{P^M(0,S)}{P^M(0,t)} \exp\left(-B(t,S)x_t + \frac{1}{2}\left(V(t,S) - V(0,S) + V(0,t)\right)\right).$$

Somit muss die maximale Laufzeit der Startzinskurve mindestens dem maximalen Wert für $T_n = t + S$ entsprechen.

(c) (i) Die Differentialgleichungen des 2-Faktor Hull-White-Modells lauten

$$dr_t = \bar{\alpha}_1(\theta + u_t - r_t)dt + \bar{\sigma}_1 dW_t^{(1)},$$
$$du_t = -\bar{\alpha}_2 u_t dt + \bar{\sigma}_2 dW_t^{(2)},$$

wobei der Zufall durch zwei Wiener-Prozesse $(W_t^{(1)})_{t\geq 0}$ und $(W_t^{(2)})_{t\geq 0}$ mit quadratischer Kovariation $\langle W^{(1)}, W^{(2)}\rangle_t = \bar{\rho} t$ getrieben wird.

(ii) Man betrachte die stochastische Differentialgleichungen für den Shortrate-Prozess im G2++ Modell:

$$\begin{aligned}
dr_t &= dx_t^{(1)} + dx_t^{(2)} + \varphi'(t)\,dt \\
&= -\alpha_1 x_t^{(1)}\,dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} - \alpha_2 x_t^{(2)}\,dt + \sigma_2 dZ_t^{(2)} + \varphi'(t)\,dt \\
&= \alpha_1\left(\tfrac{1}{\alpha_1}\varphi'(t) - x_t^{(1)} - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)}\right)dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} + \sigma_2\,dZ_t^{(2)} \\
&= \alpha_1\left(\tfrac{1}{\alpha_1}\varphi'(t) + \varphi(t) + \tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)} - r_t\right)dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} + \sigma_2\,dZ_t^{(2)} \\
&= \alpha_1\left(\theta(t) + u_t - r_t\right)dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} + \sigma_2\,dZ_t^{(2)} \\
&= \bar{\alpha}_1\left(\theta(t) + u_t - r_t\right)dt + \bar{\sigma}_1\,dW_t
\end{aligned}$$

mit den Identifikationen $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$, $\theta(t) = \frac{1}{\alpha_1}\varphi'(t) + \varphi(t)$ und $u_t = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)}$ sowie mit dem Wiener-Prozess

$$W_t^{(1)} := \tfrac{1}{\bar{\sigma}_1}(\sigma_1 Z_t^{(1)} + \sigma_2 Z_t^{(2)}) \quad \text{mit } \bar{\sigma}_1 := \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2},$$

vgl. Hinweis. Die Differentialgleichung für u_t folgt mit $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$ als

$$\begin{aligned}
du_t &= d\left(\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)}\right) \\
&= -\bar{\alpha}_2 u_t\,dt + \bar{\sigma}_2\,dZ_t^{(2)} \quad \text{mit } \bar{\sigma}_2 = \tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}\sigma_2,
\end{aligned}$$

sodass sich mit der Identifikation $dW_t^{(2)} = dZ_t^{(2)}$ die Gleichung aus (c)(i) ergibt. Schlussendlich folgt für die quadratische Kovariation der beiden stochastischen Prozesse

$$\begin{aligned}
d\langle W_t^{(1)}, dW_t^{(2)}\rangle_t &= d\langle \tfrac{1}{\bar{\sigma}_1}(\sigma_1 Z_t^{(1)} + \sigma_2 Z_t^{(2)}), Z_t^{(2)}\rangle \\
&= \tfrac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\rho\,dt + \tfrac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_1}\,dt.
\end{aligned}$$

Somit ist mit $\bar{\rho} = \frac{\sigma_1\rho+\sigma_2}{\bar{\sigma}_1}$ die Äquivalenz der beiden Prozesse nachgewiesen.

(iii) Im 1-Faktor Modell entsprechen die Zinsbewegungen im Wesentlichen einer Parallelverschiebung der Startzinskurve. Somit kann der Einfluss struktureller Änderungen der Zinskurve mit einem solchen Modell nicht angemessen berücksichtigt werden. Das 2-Faktor Modell führt zu deutlich variableren Zinskurven und kann derartige Effekte abbilden. Zudem ist (als Konsequenz der Variabilität) eine bessere Replikation einer vorgegebenen Swaptionvolatilitätsfläche und somit auch ein höherer Grad an Marktkonsistenz möglich.