DAV
Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

Schriftliche Prüfung im Fach

Finanzmathematik und Investment I

gemäß Prüfungsordnung 5
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 23. Mai 2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 27 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Carolin Apfel, Dr. Mario Hörig,
Prof. Dr. Thomas Knispel, Dr. Marcus Scheffer,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

Aufgabe 1. *[Grundlegende Denkfiguren der Finanzmathematik] [25 Punkte]*

(a) *[12 Punkte]* [Sensitivitäten] Es seien der folgende Zahlungsstrom, der zugehörige bewertungsrelevante Zero-Zinssatz (hier: jahresunabhängig) sowie entsprechende Diskontfaktoren gegeben. Die Zahlungen erfolgen jeweils am Ende des Jahres 5 und 10.

	Jahr 5	**Jahr 10**
Zahlungsstrom	100	100
Zins z	4%	4%
$q^{Jahr} = (1+z)^{-Jahr}$	0,822	0,676
$\tilde{q}^{Jahr} = (1+z+0{,}2\%)^{-Jahr}$	0,814	0,663

Hinweis: Nutzen Sie zur schnelleren Berechnung die gegebenen Diskontfaktoren.

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den *heutigen Marktwert* des Zahlungsstroms.

(ii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Zins-Duration* des Zahlungsstroms, indem Sie eine Diskretisierung von +0,2% (=20 Basispunkte) verwenden.

(iii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Key-Rate-Duration* zu Jahr 10 mithilfe der gleichen Diskretisierung von +0,2% (=20 Basispunkte).

(iv) *[2 Punkte]* Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Key-Rate-Duration* zu Jahr 5 mithilfe der gleichen Diskretisierung von +0,2% (=20 Basispunkte). Sie können – sofern möglich – bisherige Ergebnisse verwenden.

(b) *[8 Punkte]* [Allgemeine Modelle] Begründen Sie jeweils mit einem Argument, warum die folgenden Aussagen nicht korrekt sind.

(i) *[2 Punkte]* Besitzen zwei Paare von Zufallsvariablen (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) die gleichen Randverteilungen und (Pearson-)Korrelationen, so ist ihr Risikoprofil identisch.

(ii) *[2 Punkte]* Beträgt die (approximierte, relative) effektive Zins-Duration eines Finanztitels gleich null, dann besitzt dieser kein Zinsänderungsrisiko.

(iii) *[2 Punkte]* Bei der Beschaffung von Modell-Inputs kann ein intransparenter Markt Schwierigkeiten bereiten, da auf diesem kein Handel stattfindet.

(iv) *[2 Punkte]* Es sei ein fixer positiver Zahlungsstrom gegeben. Dann kann je nach Ausgestaltung die Zinsduration positiv sowie auch negativ sein.

(c) *[5 Punkte]* [Geld] Nennen Sie die drei durch die Deutsche Bundesbank definierten Anforderungen an Geld. Begründen Sie *kurz*, warum insbesondere eine der Anforderungen in den letzten Jahren in Deutschland bzw. der Europäischen Währungsunion weniger gut erfüllt wurde.

Lösungsskizze:

(a) (i) Für den Zahlungsstrom mit Laufzeit von 10 Jahren und Zahlungen c_5 und c_{10} sowie den assoziierten Diskontfaktor $q = (1+\text{Zins})^{-1}$ ist der Marktwert gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{MW} &= \sum_{k=5,10} \text{c}_\text{k} \cdot q^k \\ &= c_5 \cdot q^5 + c_{10} \cdot q^{10} \\ &\approx 82{,}2 + 67{,}6 \\ &\approx \underline{149{,}8}. \end{aligned}$$

(ii) Für den veränderten Diskontfaktor $\tilde{q} = (1 + \text{Zins} + 0{,}2\%)^{-1}$ beträgt der Marktwert

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{MW}} &= \sum_{k=5,10} c_k \cdot \tilde{q}^k \\ &= c_5 \cdot \tilde{q}^5 + c_{10} \cdot \tilde{q}^{10} \\ &\approx 81{,}4 + 66{,}3 \\ &\approx 147{,}7. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die approximierte effektive Zins-Duration

$$\begin{aligned} \text{D}_{eff} &= -\frac{\widetilde{\text{MW}} - \text{MW}}{0{,}2\% \cdot \text{MW}} \\ &= -\frac{147{,}7 - 149{,}8}{0{,}002 \cdot 149{,}8} \\ &\approx \underline{7{,}0}. \end{aligned}$$

(iii) Berechnung der approximierten effektiven Key Rate-Duration zu Jahr 10:

$$\begin{aligned} \text{KRD}_{eff}^{(10)} &= -\frac{c_{10} \cdot \tilde{q}^{10} - c_{10} \cdot q^{10}}{0{,}2\% \cdot \text{MW}} \\ &\approx -\frac{66{,}3 - 67{,}6}{0{,}002 \cdot 149{,}8} \\ &\approx \underline{4{,}34} \end{aligned}$$

(iv) Da Zahlungen nur in Jahr 5 und 10 stattfinden, gilt in diesem Fall für die Summe der Key Rate-Durations:

$$\begin{aligned} D_{eff} &= KRD_{eff}^{(5)} + KRD_{eff}^{(10)} \\ \Leftrightarrow KRD_{eff}^{(5)} &= D_{eff} - KRD_{eff}^{(10)} \\ &\approx 7{,}0 - 4{,}34 \\ &\approx \underline{2{,}66}. \end{aligned}$$

(b) (i) Falsch, denn die (Pearson-)Korrelation beschreibt nur in Spezialfällen die Abhängigkeitsstruktur eindeutig. Im Allgemeinen ist diese jedoch durch die zugrunde liegende Copula bestimmt. Deshalb kann das Risikoprofil unterschiedlich sein.

(ii) Falsch: Es könnte sich um eine lokale Eigenschaft handeln. Weiterhin beschreiben Durationen nur Änderungen bzgl. paralleler Zinsbewegungen.

(iii) Falsch: intransparenter Markt: keine öffentlichen Daten verfügbar; inaktiver Markt: kein Handel

(iv) Falsch, denn diese kann nur positiv sein. Das leitet sich direkt aus der Definition her.

(c) Es handelt sich bei den Anforderungen um die Sparmittelfunktion, Tauschmittelfunktion und Wertmessfunktion. Die Stützung der Wirtschaft mit Geld sowie stark gestiegene Kosten für Lieferketten während und nach der Corona-Krise bewirkten eine stärkere Inflation, sodass die Sparmittelfunktion des Euros weniger gut erfüllt wurde.

Aufgabe 2. *[Anlageklassen und Finanztitel] [25 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* [Forwards und Futures]

(i) *[5 Punkte]* Geben Sie für jede der nachfolgenden Aussagen (1)-(5) an, ob diese für *Forwards* und/oder *Futures* zutrifft oder nicht zutrifft.

(1) Bei diesen Wertpapieren handelt es sich um Termingeschäfte mit individuell vereinbarten Vertragsspezifikationen.

(2) Diese Wertpapiere werden in einem transparenten und geregelten Terminmarkt (Terminbörse) gehandelt.

(3) Bei diesen Wertpapieren hat der Käufer die Option, eine künftige Transaktion zu tätigen.

(4) Diese Wertpapiere können jederzeit glattgestellt werden.

(5) Diese Wertpapiere werden auf OTC-Märkten gehandelt.

(ii) *[5 Punkte]* Erläutern Sie prägnant die Funktionsweise des Marginssystems bei Futurekontrakten.

(b) *[10 Punkte]* [Swaps]

(i) *[4 Punkte]* Stellen Sie die Funktionsweise eines „Plain-Vanilla“-Zinsswaps dar. Gehen Sie dabei insbesondere auf die am Geschäft beteiligten Vertragspartner ein.

(ii) *[6 Punkte]* Die Versicherung XY hat vor drei Jahren einen Receiver-Swap mit der Bank AB mit folgenden Konditionen vereinbart: Nennwert 50 Mio. Euro, Laufzeit 5 Jahre, Zahlungsrhythmus: jährlich, Festzins: 5% p. a., variabler Zins: 12-Monats-EURIBOR, Fixed-Rate-Payer: Bank AB.

Zum heutigen Zeitpunkt $t = 0$, also drei Jahre nach Abschluss des Swaps, soll der o. g. Swap-Kontrakt aufgehoben werden und der Restwert dieses Swaps durch Zahlung ausgeglichen werden. Bestimmen Sie den Wert der noch bestehenden Swap-Position. Die aktuell in $t = 0$ gültigen arbitragefreien Swap-Sätze (gegen den 12-Monats-EURIBOR) lauten folgendermaßen:

- 1 Jahr: 3,6% p. a.
- 2 Jahre: 4,0% p. a.
- 3 Jahre: 4,3% p. a.
- 4 Jahre: 4,6% p. a.

Hinweis: Die zum heutigen Zeitpunkt $t = 0$ gültigen Preise von Zero-Coupon-Bonds $P(t = 0, i)$ mit normiertem Nennwert 1 und Fälligkeit $i = 1, \ldots, 4$ Jahre seien wie folgt:
$P(0, 1) = 0{,}9653$, $P(0, 2) = 0{,}9244$, $P(0, 3) = 0{,}8809$ und $P(0, 4) = 0{,}8342$.

(c) *[5 Punkte]* [Immobilien]

(i) *[2 Punkte]* Immobilien sind traditionell ein bedeutsames Anlageinstrument für Versicherungsunternehmen. Nennen Sie zwei Eigenschaften, welche diese Anlageklasse für Versicherer attraktiv machen.

(ii) *[3 Punkte]* Erläutern Sie anhand von drei Merkmalen, welche Herausforderungen bei der Erstellung von Immobilienzeitreihen zu beachten sind.

Lösungsskizze:

(a) (i) Aussagen über Forwards und Futures

(1) Forwards

(2) Futures

(3) weder noch

(4) Futures

(5) Forwards

(ii) *Marginsystem:* Bei der Eröffnung und während der Laufzeit einer Futureposition muss nicht der gesamte Kontraktwert (Nominal) als Sicherheit bereitgestellt werden. Um das Erfüllungsrisiko maßgeblich zu reduzieren bzw. auszuschließen, werden von den Clearingmitgliedern jedoch Sicherheitsleistungen, sogenannte Margins, erhoben. Die Sicherheiten können dabei in Form von Geld und/oder durch die Hinterlegung von Wertpapieren geleistet werden. Die als Sicherheiten akzeptierten Wertpapiere müssen dabei eine hohe Qualität aufweisen. Hinsichtlich der Margins ist generell zu unterscheiden zwischen

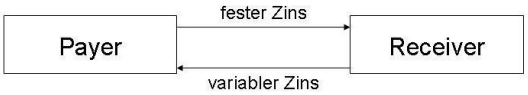
- den bei der Eröffnung einer Position bereitzustellenden Sicherheitsleistungen und
- den während der Haltedauer einer Position (Bestehen von offenen Positionen) sukzessiv zu erbringenden Sicherheitsleistungen.

Für das Margin-Konto wird eine Maintenance Margin festgelegt, die unterhalb der Initial Margin, also der anfänglichen Margin, liegt. Fällt der Saldo des Margin-Kontos unter die Maintenance Margin, kommt es zu einem sogenannten Margin Call, einer Nachschussforderung, d. h. das Margin-Konto muss auf das Niveau der Initial Margin aufgestockt werden.

(b) (i) *„Plain-Vanilla"-Zinsswap:*

Ein Vertragspartner verpflichtet sich, einen festen Zins (Swap-Satz) bezogen auf einen fiktiven Nominalbetrag zu bestimmten Terminen an den anderen Vertragspartner zu zahlen. Im Gegenzug zahlt der andere Vertragspartner an den gleichen Terminen einen variablen Zins, der sich auf denselben Nominalbetrag bezieht.

- Der Vertragspartner, der sich zur Festzinszahlung verpflichtet, wird „Payer", „Zahler" oder „Swapkäufer" genannt.
- Der Vertragspartner, der den variablen Zins leistet bzw. den festen Zins erhält, heißt „Receiver", „Empfänger" oder „Swapverkäufer".



Der variable Zins, der im Zeitpunkt t gezahlt werden muss, wird einen Zahlungszeitpunkt vorher festgestellt.

(ii) *Vorgehen:*

Ermittle den relevanten Swap-Satz für ein Gegengeschäft, welches die gleichen Spezifikationen (bzgl. Referenzzinssatz, Zinszahlungsmethode, etc.) aufweist. Bestimme anschließend die Differenz der Zahlungsströme zwischen Grundgeschäft und Gegengeschäft. Bilde zuletzt den Wert dieser Swap-Position zum heutigen Zeitpunkt.

→ Relevant ist der 2-Jahres-Swapsatz, da die Restlaufzeit (des Grundgeschäfts) 2 Jahre beträgt.

Aus Sicht der Versicherung XY ergeben sich also folgende Geschäfte:

- Receiver-Swap (Grundgeschäft):
  Versicherung XY erhält 5% p.a. und zahlt 12-Monats-EURIBOR
- Payer-Swap (Gegengeschäft):
  Versicherung XY erhält 12-Monats-EURIBOR und zahlt 4,0% p. a.

Die EURIBOR-Zahlungen heben sich gegenseitig auf, bei Saldierung der Festzinszahlungen ergibt sich für Versicherung XY eine positive Differenz von 1,0% p. a. jährlich nachträglich auf den Betrag von 50 Mio. Euro. Die resultierenden Differenzzahlungen i. H. v. jeweils

$$50 \text{ Mio. Euro} \cdot 1{,}0\% = 500.000 \text{ Euro}$$

sind auf heute abzuzinsen.

$$500.000 \cdot 0{,}9653 + 500.000 \cdot 0{,}9244 = 944.850{,}00 \text{ Euro}$$

Bank AB muss Versicherung XY 944.850,00 Euro zahlen.

(c) (i) Eigenschaften der Anlageklasse Immobilien sind z. B.

- die hohe reale Wertbeständigkeit (Inflationsschutz),
- eine geringe Korrelation der Wertentwicklung von Immobilien mit anderen Anlageklassen (Diversifikationspotential).

(ii) Merkmale von Immobilien, die bei der Erstellung von Immobilienzeitreihen zu beachten sind:

- Spezifische Faktoren wie z. B. Alter, Lage, Zustand, etc. beeinflussen der Wert der Immobilien und erschweren die Gruppierung.
- Im Gegensatz zu anderen Wertpapieren werden Immobilien nicht zu standardisierten Bedingungen gehandelt.
- Transaktionspreise in vergleichbaren Immobilien ergeben sich eher selten.

Aufgabe 3. *[Konkrete Assetmodelle] [25 Punkte]*

(a) *[12 Punkte]* Geben Sie – **jeweils mit Begründung** – an, ob die folgenden Aussagen **insgesamt** „wahr“ oder „falsch“ sind.

(i) *[3 Punkte]* ARCH- und GARCH-Zeitreihenmodelle bilden beide Volatilitätscluster ab; jedoch sind beim ARCH-Modell die Perioden hoher Volatilität persistenter als im GARCH-Modell.

(ii) *[3 Punkte]* Der in der Finanzmathematik als Modellbaustein beliebte *Vasicek-Prozess*, auch *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess* genannt, (hier zur Vereinfachung mit Mean-Reversion-Level 0, $(W_t)_{t\geq 0}$ Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$)

$$X_t = x_0 e^{-at} + b e^{-at} \int_0^t e^{as}\, dW_s, \quad a, b > 0, t \geq 0,$$

stellt einen Gauß’schen Prozess dar und erfüllt die Markov-Eigenschaft.

(iii) *[3 Punkte]* Bezeichnet $(W_t)_{t\geq 0}$ einen Wiener-Prozess unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$, so ist der stochastische Prozess

$$X_t = 5 \exp(0{,}2W_t - 0{,}02t), \quad t \geq 0,$$

ein $\mathbb{Q}$-Martingal und kann als Modell für einen diskontierten Aktienpreisprozess in Bewertungsmodellen verwendet werden.

(iv) *[3 Punkte]* Das Merton-Sprungdiffusionsmodell für Aktienpreisprozesse ist eine Erweiterung des Black-Scholes-Modells, bei dem in jedem Zeitintervall beliebig viele Sprünge mit positiver Wahrscheinlichkeit sowohl nach oben als auch nach unten auftreten können, wobei der Aktienpreis stets positiv bleibt.

(b) *[6 Punkte]* Ihr Versicherungsunternehmen verwendet zur Berechnung der Solvabilitätskapitalanforderung (SCR) ein Internes Modell und erwägt, in einen Immobilienfonds zu investieren. Die Auswertung historischer Zeitreihen der jährlich auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen R des Immobilienfonds ergibt die erwartete Rendite $\mu(R) = 4\%$, die Volatilität $\sigma(R) = 6\%$ und die Autokorrelation 1. Ordnung in Höhe von $a = 0{,}6$.

(i) *[2 Punkte]* Begründen Sie *kurz*, warum die Renditen des Immobilienfonds eine Autokorrelation aufweisen können. Geben Sie inklusive Formel ein einfaches Zeitreihenmodell für die beobachtbaren Renditen an, das die Autokorrelation 1. Ordnung in Höhe von $a = 0{,}6$ widerspiegelt.

(ii) *[4 Punkte]* Erläutern Sie mit Blick auf die Parametrisierung des Internen Modells zur Berechnung des Immobilienrisikos *kurz*, warum Sie die empirische Volatilität $\sigma(R)$ nicht direkt verwenden können, sondern „entglätten“ müssen. Führen Sie zur Korrektur der Volatilität die Entglättung mit dem *Blundell-Ward-Verfahren* durch. Wie wirkt sich die Entglättung auf den Erwartungswert der Renditen aus?

(c) *[7 Punkte]*

(i) *[2 Punkte]* Erläutern Sie *kurz* anhand von zwei empirischen Beobachtungen, warum in der Praxis die Volatilität eines Aktienpreisprozesses selbst als stochastischer Prozess modelliert wird.

(ii) *[2 Punkte]* Beschreiben Sie die mathematische Struktur des *Heston-Modells* aus der Klasse der stochastischen Volatilitätsmodelle.

(iii) *[3 Punkte]* Geben Sie eine Modifikation des Heston-Modells zur Modellierung der stochastischen Volatilität an, mit der Phasen unterschiedlicher Volatilität an Märkten modelliert werden können.

Lösungsskizze:

(a) (i) **falsch:** Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt ARCH(p)-Prozess, falls für einen strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t\in T}$ folgende Gleichungen bestehen:

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \geq 0.$$

Hierbei ist $(Z_t)_{t\in T}$ ein striktes Weißes Rauschen SWN(0, 1). Gilt

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \geq 0,$$

so handelt es sich um einen GARCH(p,q)-Prozess.

Sind beim ARCH-Modell $|X_{t-1}|, |X_{t-2}|, \ldots |X_{t-p}|$ groß, so ist auch die Volatilität σ_t und damit – modulo Wirkung des Shocks Z_t aus dem Rauschen – $|X_t|$ hoch. Selbiges gilt für den GARCH-Prozess, sodass beide Zeitreihenmodelle in der Tat Volatilitätscluster abbilden. Allerdings sind – entgegen der Aussage – die Perioden hoher Volatilität beim GARCH-Modell persistenter als im ARCH-Modell, da σ_t^2 explizit auch von $\sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \ldots, \sigma_{t-q}^2$ abhängt.

(ii) **wahr:** Die Itô-Integrale $(\int_0^t e^{as}\, dW_s)_{t\geq 0}$ der deterministischen Funktion $t \mapsto f(t) = e^{at}$ stellen einen Gauß'schen Prozess dar. Aus der expliziten Darstellung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (Skalierung des Itô-Integrals mit dem deterministischen Faktor be^{-at} sowie Verschiebung um die deterministische Größe $x_0 e^{-at}$) folgt daher, dass auch der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess selbst ein Gauß'scher Prozess ist.

Die explizite Darstellung zeigt zugleich für $0 \leq s < t$

$$X_t = e^{-a(t-s)} X_s + be^{-at} \int_s^t e^{au}\, dW_u.$$

Da die Inkremente des Wiener-Prozesses in $\int_s^t e^{au}\,dW_u$ unabhängig von der Information $\mathcal{F}_s$ sind und X_s $\mathcal{F}_s$-messbar ist, ergibt sich unmittelbar die Markov-Eigenschaft:

$$\mathbb{E}[h(X_t)|\mathcal{F}_s] = g(X_s, s).$$

Hinweis: Alternativ kann argumentiert werden, dass der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess als Lösung der SDE $dX_t = -\alpha X_t\,dt + \sigma\,dW_t$ ein Diffussionsprozess ist und alle Diffussionsprozesse die Markov-Eigenschaft besitzen.

(iii) **wahr:** Die Anwendung der Itô-Formel auf $X_t = 5e^{0{,}2W_t - 0{,}02t} = f(W_t, t)$ mit $f(w,t) = 5e^{0{,}2w - 0{,}02t}$ und den partielle Ableitungen

$$\tfrac{\partial}{\partial w}f(w,t) = 0{,}2f(w,t),\ \tfrac{\partial}{\partial t}f(w,t) = -0{,}02f(w,t),\ \tfrac{\partial^2}{(\partial w)^2}f(w,t) = 0{,}04f(w,t),$$

ergibt

$$\begin{aligned} df(W_t,t) &= \tfrac{\partial}{\partial w}f(W_t,t)\,dW_t + (\tfrac{\partial}{\partial t}f(W_t,t) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{(\partial w)^2}f(W_t,t))\,dt \\ &= 0{,}2f(W_t,t)\,dW_t. \end{aligned}$$

bzw. $dX_t = 0{,}2X_t\,dW_t$. Da der Drift-Term in der SDE verschwindet, ist $(X_t)_{t\geq 0}$ ein Martingal und damit ein Kandidat für einen diskontierten Preisprozess.

Hinweis: Alternativ kann die Martingaleigenschaft $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ für alle $0 \leq s < t$ direkt nachgerechnet werden.

(iv) **wahr:** Im Merton-Sprungdiffusionsmodell ist der Preisprozess der Aktie $(S_t^M)_{t\geq 0}$ unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ (mit technischen Bedingungen an die Parameter) modelliert durch

$$S_t^M = S_0^M \exp(\sigma W_t^{\mathbb{Q}} + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i) \quad (t \geq 0)$$

mit:

- Unter $\mathbb{Q}$ ist $(W_t^{\mathbb{Q}})_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess. $(N_t)_{t\geq 0}$ ist ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$, d. h. $N_t - N_s \sim \text{Poiss}(\lambda)$ stellt die Anzahl der Sprünge im Zeitintervall $[s,t]$ dar.
- Die Sprunghöhen $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sind i. i. d. normalverteilte Zufallsvariablen.

Zwischen den Sprüngen verhält sich der Preisprozess somit wie eine Geometrische Brownsche Bewegung (Aktienpreis im Black-Scholes-Modell). Wegen $N_t - N_s \sim \text{Poiss}(\lambda)$ sind zudem in jeden Zeitfenster beliebig viele Sprünge mit positiver Wahrscheinlichkeit möglich, wobei die Sprünge aufgrund der Normalverteilungsannahme für die Sprunghöhen sowohl nach oben als auch nach unten gehen können. Das Exponential sichert, dass der Preisprozess stets positiv bleibt.

(b) (i) Bei Zeitreihen im Immobilienbereich wird häufig eine Autokorrelation durch Verzerrungen im Bewertungsprozess induziert, u. a.:

- Ankerfunktion vorangegangener Wertgutachten,
- Vernachlässigung/Fehlen aktueller Marktdaten,
- zeitversetzte Bewertung einzelner Immobilien.

Die beobachtbaren Renditen können durch einen *autoregressiven Prozess 1. Ordnung* der Form $R_t = \alpha + \beta R_{t-1} + Z_t$, $\alpha > 0$, mit einem zentrierten weißen Rauschen (Z_t) beschrieben werden. Der Parameter $\beta \in (0,1)$ entspricht der Autokorrelation 1. Ordnung und beträgt hier 0,6.

(ii) Die Verwendung unbereinigter Immobilienzeitreihen würde aufgrund der Autokorrelation zu einer Unterschätzung der Volatilität führen, die sich in eine Unterschätzung des Immobilienrisikos im Internen Modell unter Solvency II übersetzen würde. Daher ist eine Korrektur („Entglättung“) der Autokorrelation notwendig.

Das Blundell-Ward-Verfahren korrigiert die Varianz einer Zeitreihe von Renditen R_t, $t = 1, 2, \ldots$, gemäß $\mathrm{Var}(R_t^*) = \mathrm{Var}(R_t)\frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha)^2}$, also

$$\sigma(R^*) = \sigma(R)\sqrt{\frac{1-\alpha^2}{(1-\alpha)^2}} = 0{,}06 \cdot \frac{\sqrt{1-0{,}6^2}}{1-0{,}6} = 0{,}12 \quad (12\%).$$

Der Erwartungswert bleibt unverändert, d. h. $\mu(R^*) = \mu(R) = 4\%$.

(c) (i) Aus der Analyse von Zeitreihen von Aktienreturns ist erstens z. B. erkennbar, dass sich die Volatilität im Zeitverlauf ändert. Insbesondere sind Phasen mit niedriger und hoher Volatilität zu beobachten. Zweitens besteht eine Abhängigkeit der impliziten Volatilität von Call- und Put-Optionen vom Strike und der Restlaufzeit/Maturität. Dies steht im Widerspruch zu einer konstanten Volatilität und motiviert die Volatilität als stochastischen Prozess (*stochastische Volatilitätsmodelle*) zu modellieren.

(ii) Für zwei korrelierte $\mathbb{Q}$-Wiener-Prozesse $W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}}$ mit Kovariation $\langle W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}} \rangle_t = \rho t$ sind im Heston-Modell der diskontierte Aktienpreisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t \geq 0}$ und die zugehörige Volatilität unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ modelliert durch:

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= \sigma_t \widetilde{S}_t \, dW_t^{\mathbb{Q}}, \\ \sigma_t &= \sqrt{v_t}. \end{aligned}$$

Der Prozess v heißt „variance“ und ist definiert durch einen *Cox-Ingersoll-Ross-Prozess*

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\, dt + \xi \sqrt{v_t}\, dB_t^{\mathbb{Q}}.$$

(iii) Eine Erweiterung des Heston-Modells im Kontext von Regime-Switching-Modellen ist gegeben durch folgende Modellierung des diskontierten Aktienpreisprozesses unter einem Martingalmaß $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= \widetilde{S}_t \sqrt{Y_t}\, dW_t^{\mathbb{Q}}, \\ dY_t &= \kappa(\theta - Y_t)\, dt + X_t \xi \sqrt{Y_t}\, dB_t^{\mathbb{Q}}. \end{aligned}$$

Hierbei sind $W^{\mathbb{Q}}$, $B^{\mathbb{Q}}$ korrelierte Wiener-Prozesse unter $\mathbb{Q}$ mit $\langle W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}} \rangle_t = \rho t$, $\rho \in (-1, 1)$, und $(X_t)_{t \geq 0}$ bezeichnet einen (zeitlich homogenen) Markov-Prozess mit z. B. zwei Zuständen $\{z_1, z_2\}$, $0 < z_1 < 1 < z_2$. In diesem Fall hängt die „Vol of Vol“ vom Zustand des exogenen Faktors ab. Die zwei Zustände spiegeln eine Verringerung oder Verstärkung der Volatilität wider.

Aufgabe 4. *[Verallgemeinerte real-world Zinsmodelle] [25 Punkte]*

(a) *[13 Punkte]* [Allgemeines] Angenommen, Sie sind damit beauftragt, für eine bestimmte Währung ein Zinsmodell, das mögliche sinnvolle zukünftige Zinsentwicklungen nach einem Jahr generieren kann, zu entwickeln. Das Modell soll später zur Risikomessung verwendet werden. Sie machen sich Gedanken, ob eine Hauptkomponentenanalyse (*Principal Component Analysis* (PCA)) sinnvoll sein könnte. Da das betreffende Land vor einem Jahr zahlungsunfähig wurde und eine neue Währung herausgebracht hat, liegen Ihnen für die aktuelle Währung nur tägliche Zinsdaten vor, die innerhalb des letzten Jahres auftraten.

(i) *[3 Punkte]* Nennen Sie drei generelle Gründe, die für eine Verwendung einer PCA bei der Zinskurvenmodellierung sprechen.

(ii) *[3 Punkte]* Nennen Sie Ihre Erwartung, welche Gestalt die ersten drei Basisfunktionen besitzen werden.

(iii) *[2 Punkte]* Nennen Sie zwei Gründe, die im vorliegenden Fall gegen eine Verwendung einer PCA auf den gegebenen Daten sprechen könnten.

(iv) *[2 Punkte]* Skizzieren Sie *kurz* einen Ansatz in zwei Stichpunkten, wie Sie ein einfaches Zinsmodell mithilfe der PCA basierend auf den genannten Daten aufbauen könnten.

(v) *[3 Punkte]* Nennen Sie zwei unterschiedliche Möglichkeiten, wie Sie das Problem der kurzen Datenhistorie sinnvoll lösen könnten, wenn Ihnen Zinsdaten von weiteren Währungen mit längeren Zeitfenstern vorliegen. Begründen Sie, welche Lösung Sie vorziehen würden.

(b) *[6 Punkte]* [Rechnung] Es sei Ihnen nur der erste Eigenvektor EV_1 einer PCA zu gegebenen zweidimensionalen Datenpunkten bekannt mit $\mathrm{EV}_1^T := [-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}]^T$. Weiterhin sei $x := [-3; 3]^T$ aus der zentrierten Punktwolke, die Sie modellieren.

(i) *[1 Punkt]* Berechnen Sie PC_1 von x.

(ii) *[1 Punkt]* Begründen Sie anschaulich das Ergebnis aus (i).

(iii) *[3 Punkte]* Schreiben Sie EV_2 auf und berechnen anschließend PC_2 von x.

(iv) *[1 Punkt]* Begründen Sie *kurz*, warum die Faktorladungen eines Punktes in einer PCA zu gegebenen Eigenvektoren eindeutig sind.

(c) *[6 Punkte]* [Nelson-Siegel-Modell] Nennen Sie drei Gemeinsamkeiten und drei Unterschiede zwischen der PCA und dem Nelson-Siegel-Modell.

Lösungsskizze:

(a) (i)
- Gute Abbildung historischer Zinskurvenbewegungen mit wenigen Parametern
- Dimensionsreduktion
- Einfache Berechnung der Faktorladungen durch Matrixmultiplikation
- Unkorreliertheit der historischen Faktorladungen

[*Weitere Nennungen sind möglich.*]

(ii) Parallelshift, Steigung, Krümmung

(iii)
- Da das Zeitfenster nur ein Jahr beträgt, können keine jährlichen Änderungen gebildet werden.
- Das Datenfenster beträgt nur ein Jahr und ist damit sehr kurz, um sinvolle Aussagen über die zukünftige Gestalt von Zinsänderungen wie auch die Verteilung von Faktorladungen zu machen.

[*Andere Antworten sind möglich.*]

(iv)
- Betrachtung von unterjährigen Änderungen
- Anschließende Annualisierung der Verteilungen der Faktorladungen zur Generierung von Szenarien zukünftiger Zinskurven

[*Andere Antworten sind möglich.*]

(v)
- Verwendung einer anderen Währung mit längerer Datenhistorie, die in dem gegebenen Zeitfenster eine hohe Korrelation zu dieser Währung aufweist und Sie erwarten können, dass dies auch zukünftig der Fall sein wird.
- Verwendung der Währung dieses Landes mit einem Zeitfenster bis zur Insolvenz des Landes, also vor dem gegebenen Zeitfenster. Ggf. Korrektur oder Streichung der Zinsdaten kurz vor Insolvenz, da die Bewegungen extrem aussehen könnten.
- Wahl: Nutzung einer anderen Währung mit voraussichtlich ähnlichem zukünftigen Verhalten, um manuelle Datenkorrekturen zu vermeiden.

[*Andere Antworten sind möglich.*]

(b) (i) $\mathrm{PC}_1 = x^T \mathrm{EV}_1 = [-3; 3]\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T = \frac{3}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{2}} = 0$

(ii) Der Punkt x besitzt keine Ausbreitung in Richtung EV_1. Deshalb ist die Faktorladung PC_1 in diese Richtung gleich null.

(iii) Es wird eine normierte und orthogonale Ergänzung mit Länge 1 von EV_1 gesucht. Da EV_1 auf der Winkelhalbierenden des dritten Quadranten liegt, befindet sich $EV_2 := [-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ auf der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten und erfüllt die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingung. Es musste nur das Vorzeichen des zweiten Eintrags des Vektors EV_1 umgedreht werden. (Alternativ hätte auch das Vorzeichen des zweiten Eintrags des Vektors EV_1 umgedreht werden können.) Damit kann PC_2 berechnet werden:

$$PC_2 = x^T EV_2 = [-3; 3]\left[-\tfrac{1}{\sqrt{2}}; \tfrac{1}{\sqrt{2}}\right]^T = \tfrac{3}{\sqrt{2}} + \tfrac{3}{\sqrt{2}} = \tfrac{6}{\sqrt{2}} = \sqrt{18} \approx \underline{4{,}243}.$$

(iv) Mögliche Antworten:

- Die PCA stellt nach Konstruktion eine injektive Koordinatentransformation des ursprünglichen Raums dar.
- Die Eigenvektoren sind linear unabhängig.

[*Weitere Antworten sind möglich.*]

(c) <u>Gemeinsamkeiten:</u>

- Können beide zur Beschreibung von Zinskurven verwendet werden
- Kleinste Quadrate Minimierung zur Bestimmung der Modellparameter
- Grob ähnliche Interpretation der Basisfunktionen möglich: Parallelverschiebung, Steigung, Krümmung

<u>Unterschiede:</u>

- PCA auch für beliebige Transformationen von Zinskurvenänderungen möglich
- Basisfunktionen sind diskret vs. stetig
- Extrapolation bei Nelson-Siegel automatisch gegeben, bei PCA nicht

[*Weitere Nennungen sind möglich.*]

Aufgabe 5. *[Bewertung von Optionen im Black-Scholes-Modell] [40 Punkte]*

Angenommen, das Portfolio Ihrer Versicherung enthält Aktien der „Green Car AG“, einer Manufaktur für Elektro-Sportwagen, die neu an der Börse notiert wurde. Sie entscheiden sich, den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ zur Risikomessung unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift-Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilitätsparameter $\sigma > 0$ zu modellieren, wobei der Zufall unter $\mathbb{P}$ durch einen Wiener-Prozess $(W_t^{\mathbb{P}})_{t\geq 0}$ getrieben ist, der die Informationsfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ erzeugt. In konsistenter Form verwenden Sie das assoziierte Black-Scholes-Modell mit Zeithorizont T für Bewertungszwecke. Hierbei ist die Wertentwicklung des Geldmarktfonds bei stetiger Verzinsung mit Zinsrate $r \geq 0$ gegeben durch $B_t = e^{rt}$, $t \geq 0$.

(a) *[12 Punkte]* Nehmen Sie an, dass ein Jahr 260 Handelstage umfasst.

(i) *[2 Punkte]* Geben Sie inklusive *kurzer* Herleitung die Marginalverteilung der täglichen Log-Renditen der Aktie unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ an.

(ii) *[2 Punkte]* Begründen Sie, warum die täglichen Log-Renditen unter $\mathbb{P}$ stochastisch unabhängig sind, und bewerten Sie diese Eigenschaft im Kontext empirischer Finanzmarktzeitreihen.

(iii) *[4 Punkte]* Ihnen stehen für die Green Car AG die realisierten täglichen Log-Renditen $r_1, \ldots, r_5$ der ersten 5 Handelstage zur Verfügung.

Handelstag i	1	2	3	4	5
Rendite r_i in %	2	-2	1	3	1

Nutzen Sie einen geeigneten Schätzer, um auf dieser Datengrundlage einen Schätzwert $\hat{\sigma}$ für den Volatilitätsparameter σ im Black-Scholes-Modell zu ermitteln. Begründen Sie Ihre Vorgehensweise *kurz*.

(iv) *[4 Punkte]* Erklären Sie den Begriff der impliziten Volatilität. Erläutern Sie *kurz*, wie man mit dieser – alternativ zur aus Renditedaten geschätzten historischen Volatilität $\hat{\sigma}$ – unter Einsatz numerischer Verfahren eine Kalibrierung der Volatilität vornehmen kann. Bewerten Sie mithilfe der impliziten Volatilität die empirische Validität des Black-Scholes-Modells.

(b) *[12 Punkte]* Ihnen wird ein Finanzderivat angeboten, das Ihnen zur Maturität $T > 0$ in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T der Green Car AG die Auszahlung $C_T := 10(S_T)^4 + 50S_T$ liefert.

(i) *[2 Punkte]* Begründen Sie, warum der Aktienpreisprozess unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ der Stochastischen Differentialgleichung $dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}})$ genügen muss, wobei $(W_t^{\mathbb{Q}})_{t\geq 0}$ einen Wiener-Prozess unter $\mathbb{Q}$ bezeichnet.

(ii) *[5 Punkte]* Leiten Sie eine explizite Formel zur Berechnung des arbitragefreien Preises C_t des Finanzderivats zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ her. Zeigen Sie dabei, dass $C_t = v(S_t, t)$ für eine geeignete Funktion v gilt.
Hinweis: Für $X \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2)$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[\exp(aX)] = \exp(\frac{1}{2}a^2\gamma^2)$. Sie können zudem die Martingaleigenschaft nutzen!

(iii) *[5 Punkte]* Berechnen Sie eine dynamische Hedging-Strategie, mit der Ihre Gegenpartei die Auszahlung C_T durch Handel von Geldmarktfonds und Aktie theoretisch perfekt absichern kann. Wie hoch sind die Kosten für die Implementierung der Hedging-Strategie?

(c) *[7 Punkte]* Eine Kollegin hat im Black-Scholes-Modell für eine Call-Option auf die Aktie mit Restlaufzeit von 3 Jahren und Strike $K = 40$ den Preis 13,23 € berechnet. Aus Marktdaten ist für Sie ablesbar, dass der heutige Kurs der Aktie $S_0 = 50$ und die Zinsrate $r = 0{,}01$ betragen, während Ihnen der Volatilitätsparameter σ unbekannt ist.

(i) *[4 Punkte]* Angenommen, Sie erhalten den Auftrag einen Straddle, d. h. eine Kombination von einer Long Call- und einer Long Put-Option, auf die Aktie mit Restlaufzeit von 3 Jahren und Strike $K = 40$ zu bewerten, möchten jedoch aus Effizienzgründen σ nicht neu bestimmen. Nutzen Sie die Ergebnisse der Kollegin, um den Preis des Straddles zu ermitteln.

(ii) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie unter Angabe entsprechender Formeln, wie Sie die Absicherungsstrategie der Call-Option über Aktie und Geldmarktfonds in eine Absicherungsstrategie für den Straddle übersetzen können.

(d) *[6 Punkte]* Angenommen, eine fondsgebundene Erlebensfallversicherung für eine bei Vertragsabschluss x-jährige versicherte Person mit Laufzeit T liefert im Erlebensfall als Auszahlung das Maximum aus dem Fondsvermögen $80 \cdot S_T$ (80=Anzahl der Aktien der Green Car AG im Fonds) und einer vereinbarten deterministischen Garantie G.

Leiten Sie eine Formel zur Berechnung der Nettoeinmalprämie dieser Erlebensfallversicherung her. Begründen Sie gegebenenfalls Ihre Annahmen.

Hinweis: Der Preis einer Call-Option auf die Aktie mit Maturität T und Strike $K > 0$ ist in $t \in [0, T]$ gegeben durch $C_t^{\text{call}} = v^{\text{call}}(S_t, t)$ für die Funktion

$$v^{\text{call}}(x,t) = x\Phi(d_+(x,t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(x,t)) \text{ mit } d_\pm(x,t) = \frac{\ln(x/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}},$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

(e) *[3 Punkte]* Angenommen, die geometrische Brownsche Bewegung mit den Parametern μ und σ beschreibt anstelle des Aktienkurses den Firmenwertprozess $(X_t)_{t \geq 0}$ der Green Car AG unter $\mathbb{P}$. Die Green Car AG sei neben Eigenkapital durch Fremdkapital in Form einer Nullkuponanleihe mit Nennwert 100.000 Euro und Fälligkeit zum Zeitpunkt T finanziert.

Beschreiben Sie im Sinne des *Merton-Modells*, wann ein Ausfall der Green Car AG vorliegt. Zeigen Sie, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ zum Zeitpunkt 0 gegeben ist durch

$$\Phi\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{T}}\left(\ln\left(\frac{100.000}{S_0}\right) - (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T\right)\right),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist.

Lösungsskizze:

(a) (i) Der Aktienpreisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ ist unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ gegeben durch

$$S_t = S_0 \exp(\sigma W_t^{\mathbb{P}} + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t), \quad t \geq 0,$$

wobei der Zufall durch einen $\mathbb{P}$-Wiener-Prozess $(W_t^{\mathbb{P}})_{t\geq 0}$ getrieben wird. Mit $\delta := \frac{1}{260}$ gilt somit für die Log-Rendite R_i an Handelstag $i \in \mathbb{N}$

$$R_i = \ln\left(\frac{S_{i\delta}}{S_{(i-1)\delta}}\right) = \sigma(W_{i\delta}^{\mathbb{P}} - W_{(i-1)\delta}^{\mathbb{P}}) + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\delta) \sim \mathcal{N}((\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)\delta, \sigma^2\delta). \quad (1)$$

(ii) Die Inkremente $(W_{i\delta}^{\mathbb{P}} - W_{(i-1)\delta}^{\mathbb{P}})_{i\in\mathbb{N}}$ des Wiener-Prozesses sind stochastisch unabhängig und diese Eigenschaft überträgt sich mit Blick auf (1) unmittelbar auf die täglichen Log-Renditen $R_1, R_2, \ldots$. Aus empirischer Sicht ist dies nicht realistisch, da die Renditen typischer Finanzmarktzeitreihen durch Autokorrelation, Volatilitätscluster etc. geprägt sind.

(iii) Da die täglichen Renditen $R_1, \ldots, R_5$ unabhängig und identisch verteilt mit $\mathrm{Var}(R_i) = \sigma^2\delta$ sind, bietet sich als (erwartungstreue) Schätzfunktion für σ^2

$$\hat{\sigma}^2(R_1, \ldots, R_5) := \tfrac{1}{\delta}\tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(R_i - \bar{R})^2 \quad \text{mit} \quad \bar{R} := \tfrac{1}{5}\sum_{i=1}^{5} R_i$$

an. Entsprechend ist eine Schätzfunktion für die historische Volatilität gegeben durch

$$\hat{\sigma}(R_1, \ldots, R_5) = \sqrt{\hat{\sigma}^2(R_1, \ldots, R_5)} = \sqrt{\tfrac{1}{\delta}\tfrac{1}{4}\sum_{i=1}^{5}(R_i - \bar{R})^2}.$$

Einsetzen der konkreten Stichprobe $r_1, \ldots, r_5$ der täglichen Log-Renditen liefert den Schätzwert $\hat{\sigma} = 0{,}3017$ bzw. 30,17%.

(iv) Der Preis einer Option (z. B. Europäische Call-Option) steigt ceteris paribus, wenn die Volatilität σ erhöht wird. Aufgrund dieser Monotonie kann man für einen am Markt beobachteten Preis einer Option C_0^{Markt} die Volatilität σ_{imp} bestimmen, die im Black-Scholes-Modell vorliegen müsste, sodass der Modellpreis $C_0^{\text{Modell}}(S_0, T, r, \sigma)$ mit dem Marktpreis übereinstimmt (wenn alle anderen Parameter gegeben sind). Diese Größe heißt *implizite Volatilität*.

Daher kann durch Invertieren der Modellpreise (z. B. Black-Scholes-Formel für Call- und Put-Optionen) aus Marktpreisen die Volatilität ermittelt werden. Üblicherweise ist die Preisformel $C_0^{\text{Modell}}(S_0, T, r, \sigma)$ nicht explizit nach σ auflösbar, sodass numerische Verfahren zur Nullstellenberechnung der Funktion $f(\sigma) = C_0^{\text{Modell}}(S_0, T, r, \sigma) - C_0^{\text{Markt}}$ erforderlich sind, z. B. das Newton-Verfahren.

Empirische Beobachtungen zeigen, dass die implizite Volatilität von der Restlaufzeit der Option (Term-Structure) sowie vom zugrunde liegenden Strike der Option abhängen (Smile, Skew). Da die Volatilität im Black-Scholes-Modell jedoch konstant ist, wird dadurch das Black-Scholes-Modell empirisch falsifiziert.

(b) (i) Der diskontierte Aktienpreisprozess $\tilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, $t \in [0,T]$, muss unter $\mathbb{Q}$ ein Martingal sein. Dies erfordert jedoch, dass der Drift-Term in der SDE verschwindet, d. h. es gilt $d\tilde{S}_t = \tilde{S}_t \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}}$. Anwenden der Itô-Formel auf $S_t = e^{rt}\tilde{S}_t$ zeigt, dass der Aktienpreisprozess die SDE $dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\, dW_t^{\mathbb{Q}})$ unter $\mathbb{Q}$ erfüllt.

(ii) Der arbitrage-freie Preis im Zeitpunkt t ergibt sich durch risikoneutrale Bewertung, d. h.

$$\begin{aligned} C_t &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[10(S_T)^4 + 50S_T|\mathcal{F}_t] \\ &= 10e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T)^4|\mathcal{F}_t] + 50e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_T|\mathcal{F}_t] \\ &= 10e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T)^4|\mathcal{F}_t] + 50S_t. \end{aligned}$$

Hierbei wurde im letzten Schritt die Martingaleigenschaft des diskontierten Aktienpreisprozesses unter dem (eindeutigen) äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ verwendet.

Da der Aktienpreisprozess im Black-Scholes-Modell unter $\mathbb{Q}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilitätsparameter σ ist (siehe (i)), berechnet man weiterhin

$$\begin{aligned} C_t &= 10e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}}) + (r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)})^4|\mathcal{F}_t] + 50S_t \\ &= 10e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t)^4 e^{4\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})} e^{4(r - \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}|\mathcal{F}_t] + 50S_t \\ &= 10(S_t)^4 e^{(4(r - \frac{1}{2}\sigma^2) - r)(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{4\sigma(W_T^{\mathbb{Q}} - W_t^{\mathbb{Q}})}] + 50S_t \\ &= 10(S_t)^4 e^{(3r - 2\sigma^2)(T-t)} e^{\frac{1}{2}16\sigma^2(T-t)} + 50S_t \\ &= 10(S_t)^4 e^{(3r + 6\sigma^2)(T-t)} + 50S_t. \end{aligned}$$

Fazit: $C_t = v(S_t, t)$ mit $v(x,t) = 10x^4 e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)} + 50x$

(iii) Man berechnet via Delta-Hedging die dynamische Absicherungsstrategie:

- Einheiten Aktie:

$$\vartheta_t^S = \frac{\partial}{\partial x} v(S_t, t) = 40(S_t)^3 e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)} + 50$$

- Einheiten Geldmarktfonds: Mit $V_t^{\vartheta} = C_t$ als Wertprozess der Handelsstrategie folgt

$$\vartheta_t^B = \frac{V_t^{\vartheta} - \vartheta_t^S S_t}{B_t} = -30(S_t)^4 e^{(3r+6\sigma^2)(T-t) - rt}.$$

Der arbitrage-freie Preis C_t entspricht in jedem Zeitpunkt den Kosten der Replikation.

(c) Die Preise der Call- und Put-Option sind durch die Put-Call-Parität verbunden, d. h. für jeden Zeitpunkt $t \in [0,3]$ gilt für die entsprechenden arbitrage-freien Preise C_t^{call} bzw. C_t^{put}

$$C_t^{\text{call}} - C_t^{\text{put}} = S_t - Ke^{-(3-t)r} \quad \text{bzw.} \quad C_t^{\text{put}} = C_t^{\text{call}} - S_t + Ke^{-(3-t)r}.$$

(i) Daraus folgt speziell für den Bewertungszeitpunkt $t = 0$

$$C_0^{\text{put}} = 13{,}23 - 50 + 40e^{-3\cdot 0{,}01} = 2{,}05$$

sowie $C_0^{\text{straddle}} = C_0^{\text{call}} + C_0^{\text{put}} = \underline{15{,}28}$.

(ii) Es seien $(\vartheta_t^{B,\text{call}}, \vartheta_t^{S,\text{call}})$ die Einheiten von Geldmarktfonds und Aktie, die im Zeitpunkt t in der Absicherungsstrategie der Call-Option gehalten werden. Für die Put-Option und den Straddle werden die analogen Notationen verwendet. Aus der Put-Call-Parität folgt z. B. durch Ableiten nach dem Aktienkurs (Delta-Hedging) für die Einheiten der Aktie zur Absicherung der Put-Option

$$\vartheta_t^{S,\text{put}} = \vartheta_t^{S,\text{call}} - 1$$

sowie nachgelagert

$$\vartheta_t^{B,\text{put}} = \frac{C_t^{\text{put}} - \vartheta_t^{S,\text{put}} S_t}{e^{rt}} = \frac{C_t^{\text{call}} - S_t + Ke^{-(3-t)r} - (\vartheta_t^{S,\text{call}} - 1)S_t}{e^{rt}} = \vartheta_t^{B,\text{call}} + Ke^{-3r}.$$

Dies bedeutet

$$\vartheta_t^{S,\text{straddle}} = 2\vartheta_t^{S,\text{call}} - 1 \text{ und } \vartheta_t^{B,\text{straddle}} = 2\vartheta_t^{B,\text{call}} + Ke^{-3r}.$$

(d) Mit der Restlebensdauer T_x der x-jährigen versicherten Person lässt sich die Auszahlung der Erlebensfallversicherung im Zeitpunkt T schreiben als

$$1_{\{T_x > T\}} \max\{80 \cdot S_T, G\} = 1_{\{T_x > T\}} \left(G + 80 \cdot \left(S_T - \tfrac{G}{80} \right)^+ \right).$$

Nimmt man an, dass das biometrische Risiko unabhängig vom Marktrisiko ist, so gilt für die Nettoeinmalprämie NEP_0 zum Zeitpunkt 0

$$\begin{aligned} \text{NEP}_0 &= {}_Tp_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \left(G + 80 \cdot \left(S_T - \tfrac{G}{80} \right)^+ \right) \right] \\ &= {}_Tp_x \left(e^{-rT} G + 80 \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left[e^{-rT} \left(S_T - \tfrac{G}{80} \right)^+ \right] \right), \end{aligned}$$

wobei ${}_Tp_x$ die T-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit der x-jährigen versicherten Person bezeichnet. Damit lässt sich die Berechnung der Nettoeinmalprämie auf die Bewertung einer Europäischen Call-Option mit Strike $K = G/80$ zurückführen, d. h. es gilt

$$\text{NEP}_0 = {}_Tp_x \left(e^{-rT} G + 80 v^{\text{call}}(S_0, 0) \right).$$

(e) Der Ausfall tritt ein, falls zur Fälligkeit T die Verbindlichkeiten in Höhe von 100.000 Euro den Firmenwert X_T übersteigen, d. h. die Ausfallzeit τ ist gegeben durch

$$\tau = \begin{cases} T & \text{falls} \quad X_T < 100.000 \text{ Euro}, \\ \infty & \text{falls} \quad X_T \geq 100.000 \text{ Euro}. \end{cases}$$

Für die Ausfallwahrscheinlichkeit berechnet man

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[\tau \leq T] &= \mathbb{P}[X_T < 100.000] \\ &= \mathbb{P}[X_0 \exp(\sigma W_T^{\mathbb{P}} + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T) < 100.000] \\ &= \mathbb{P}[\exp(\sigma W_T^{\mathbb{P}} + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T) < \tfrac{100.000}{X_0}] \\ &= \mathbb{P}[\tfrac{W_T^{\mathbb{P}}}{\sqrt{T}} < \tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln\left(\tfrac{100.000}{X_0}\right) - (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T)] \\ &= \Phi\left(\tfrac{1}{\sigma\sqrt{T}}(\ln\left(\tfrac{100.000}{X_0}\right) - (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)T)\right), \end{aligned}$$

da $W_T^{\mathbb{P}}/\sqrt{T}$ standardnormalverteilt ist.

Aufgabe 6. *[Short-Rate-Modelle: Cox-Ingersoll-Ross-Prozess] [40 Punkte]*

Der *Cox-Ingersoll-Ross-Prozess* (CIR) ist definiert durch die Stochastische Differentialgleichung

$$dr_t = \kappa(\theta - r_t)\,dt + \sigma\sqrt{r_t}\,dW_t, \quad r_0 = r(0) > 0, \kappa, \theta, \sigma > 0,$$

und stellt ein populäres Modell für die Short-Rate dar.

(a) *[2 Punkte]* Geben Sie eine weitere Anwendung des CIR-Prozesses in der Finanzmathematik inklusive *kurzer* Beschreibung des Modells an.

(b) *[3 Punkte]* Erklären Sie die Bedeutung der Modellparameter κ, θ und σ. Gehen Sie dabei insbesondere auf das Langzeitverhalten und die Rolle des „Wurzelterms“ des CIR-Prozesses ein.

(c) *[2 Punkte]* Formulieren Sie die risikoneutrale Bewertungsformel für den Preis $P(t,T)$ einer ausfallfreien Nullkuponanleihe, die zum Fälligkeitszeitpunkt $T > 0$ den normierten Nennwert 1 auszahlt, im Bewertungszeitpunkt $t < T$. Erläutern Sie anhand dieser Formel *kurz*, warum der Preis $P(\cdot, T)$ eine Funktion der Zeit t und des Zustands r_t des CIR-Prozesses ist.

(d) *[20 Punkte]* Das CIR-Modell zählt zur Klasse der *affinen Short-Rate-Modelle*, d. h. Preise von ausfallfreien Nullkuponanleihen besitzen für alle Laufzeiten $T > 0$ die Form

$$P(t,T) = e^{-A(t,T) - B(t,T) r_t}, \quad t \in [0,T],$$

mit deterministischen Funktionen $A(\cdot, T)$ und $B(\cdot, T)$.

(i) *[10 Punkte]* Zeigen Sie ausgehend von der Martingaleigenschaft des diskontierten Preisprozesses der Nullkuponanleihe unter dem risikoneutralen Bewertungsmaß $\mathbb{Q}$, dass die deterministischen Funktionen $A(\cdot, T)$ und $B(\cdot, T)$ im CIR-Modell durch die folgenden Riccatti-Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} \tfrac{\partial}{\partial t} A(t,T) &= -\kappa\theta B(t,T), \\ \tfrac{\partial}{\partial t} B(t,T) &= \tfrac{\sigma^2}{2} B^2(t,T) + \kappa B(t,T) - 1, \end{aligned}$$

mit den Randbedingungen $A(T,T) = 0$ und $B(T,T) = 0$ bestimmt sind.

Hinweis: Wenden Sie die zeitabhängige Itô-Formel auf das Martingal an.

(ii) *[5 Punkte]* Durch Lösen dieser Differentialgleichungen ergeben sich geschlossene Formeln für A und B sowie für die Bondpreise im CIR-Modell, die von den Modellparametern κ, θ, σ abhängen. Erläutern Sie, inwiefern diese affine Struktur für die Kalibrierung des CIR-Modells hilfreich ist.

(iii) *[5 Punkte]* Das Hull-White-Modell gehört ebenfalls zur Klasse der affinen Modelle. Erläutern Sie den Hauptunterschied zwischen dem Hull-White-Modell und dem CIR-Modell in Bezug auf die Zinslevel, die durch die jeweilige Modellierung möglich sind. Gehen Sie dabei auf je einen Nachteil des Hull-White-Modells und des CIR-Modells ein. Welche Erweiterung des CIR-Modells würden Sie in diesem Kontext vorschlagen?

(e) *[4 Punkte]* Eine Grundanforderung an einen Zinsprozess ist die Konformität zur Zinsstruktur. Erläutern Sie, was darunter zu verstehen ist und was dies im Hinblick auf die notwendigen Modellparameter bedeutet. Warum ist das hier betrachtete einfache CIR-Modell in dieser Hinsicht ungenügend und welche Anpassungen wären vorzunehmen?

(f) *[4 Punkte]* Der CIR-Prozess ist ein Modell für die Short-Rate r_t, die einen Grenzwert des Kassazinses (Spot Rate) darstellt. Die instantane Forward-Rate $f_t(T)$ stellt hingegen einen Grenzwert des Terminzinses dar. Stellen Sie beide Grenzwerte gegenüber und leiten Sie ab, welche Verbindung zwischen beiden Größen besteht. Geben Sie eine Formel an, mit der Sie die Forward-Rate $f_t(T)$ im CIR-Modell auf Basis der Funktionen A und B berechnen können.

(g) *[5 Punkte]* Für die praktische Anwendung des CIR-Modells ist es erforderlich, diskretisierte Pfade zu simulieren. Geben Sie für den CIR-Prozess die Diskretisierungsvorschriften für die beiden im Webinar besprochenen Verfahren an. Identifizieren Sie das Problem, das in beiden Verfahren auftreten kann, und schlagen Sie vor, wie dieses behandelt werden kann.

Lösungsskizze:

(a) Der CIR-Prozess wird u. a. auch im Heston-Modell zur Modellierung der stochastischen Volatilität von Aktienkursen verwendet. Hierbei sind der diskontierte Aktienpreisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ und die zugehörige Volatilität $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ unter dem risikoneutralen Maß für zwei korrelierte Wiener-Prozesse B, W mit Kovariation $\langle W, B\rangle_t = \rho t$ modelliert durch

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= \sigma_t \widetilde{S}_t \, dB_t, \\ \sigma_t &= \sqrt{v_t} \quad \text{mit } dv_t = \kappa(\theta - v_t)\, dt + \xi\sqrt{v_t}\, dW_t. \end{aligned}$$

[Alternative Beispiele sind möglich, z. B. Modellierung der Hazard-Rate in Kreditriskomodellen.]

(b) Der CIR-Prozess ist ein Mean-Reversion-Prozess mit *Mean-Reversion-Level* θ und *Mean-Reversion-Geschwindigkeit* κ. Der Parameter θ gibt an, gegen welchen Wert der deterministische Teil des Prozesses langfristig strebt, wohingegen κ die relative Stärke dieser Asymptotik im Vergleich zum stochastischen

Teil skaliert. Der stochastische Teil wird durch den *Volatilitätsparameter* σ bestimmt und treibt den Prozess in eine beliebige Richtung, d. h. insbesondere weg vom Mean-Reversion-Level. Die Besonderheit des CIR-Prozesses liegt in der Wurzelabhängigkeit des Diffusionsterms von der Short-Rate selbst. Diese sorgt dafür, dass die stochastische Bewegung kleiner wird, je mehr sich r_t der Null annähert und verhindert, dass die Short-Rate negativ wird.

(c) Als Numéraire wird der Geldmarktfonds mit Wertentwicklung $B_t = \exp(\int_0^t r_s\,ds)$, $t \geq 0$, gewählt. Da die Nullkuponanleihe zum Zeitpunkt T sicher die Auszahlung 1 leistet, ergibt sich durch risikoneutrale Bewertung zum Zeitpunkt $t \leq T$ der Preis

$$P(t,T) = B_t \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\tfrac{1}{B_T}|\mathcal{F}_t\right] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-\int_t^T r_s\,ds}|\mathcal{F}_t\right],$$

wobei $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ die zugrunde liegende Informationsfiltration bezeichnet. Da der CIR-Prozess als Diffusionsprozess ein Markov-Prozess ist, folgt unmittelbar, dass der Bondpreis ausschließlich eine Funktion der Zeit t und des Zustandes r_t ist.

(d) (i) Mit der Funktion $f(t,r) := \exp(-A(t,T) - B(t,T)r)$ berechnet man für die diskontierten Bondpreise mithilfe der Itô-Formel und $d\langle r\rangle_t = \sigma^2 r_t\,dt$ zunächst

$$\begin{aligned}
& d(e^{-\int_0^t r_u\,du}P(t,T)) = d(e^{-\int_0^t r_u\,du}f(t,r_t)) \\
= \;& e^{-\int_0^t r_u\,du}\,df(t,r_t) + f(t,r_t)\,d(e^{-\int_0^t r_u\,du}) \\
= \;& \left[\tfrac{\partial f}{\partial r}(t,r_t)\,dr_t + \tfrac{\partial f}{\partial t}(t,r_t)\,dt + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}(t,r_t)\,d\langle r\rangle_t - f(t,r_t)r_t\,dt\right]e^{-\int_0^t r_u\,du} \\
= \;& \left[\tfrac{\partial f}{\partial r}(t,r_t)\kappa(\theta - r_t) + \tfrac{\partial f}{\partial t}(t,r_t) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}(t,r_t)\sigma^2 r_t - f(t,r_t)r_t\right]e^{-\int_0^t r_u\,du}\,dt \\
+ \;& \tfrac{\partial f}{\partial r}(t,r_t)\sigma\sqrt{r_t}e^{-\int_0^t r_u du}\,dW_t.
\end{aligned}$$

Aufgrund der Martingaleigenschaft muss der dt-Term verschwinden, d. h. es gilt für alle t und r

$$\tfrac{\partial f}{\partial r}(t,r)\kappa(\theta - r) + \tfrac{\partial f}{\partial t}(t,r) + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2 f}{\partial r^2}(t,r)\sigma^2 r - f(t,r)r = 0.$$

Das Berechnen der partiellen Ableitungen inklusive Anordnen der Terme führt zur Bedingung

$$\left(-\tfrac{\partial}{\partial t}A(t,T) - \kappa\theta B(t,T)\right) + \left(-\tfrac{\partial}{\partial t}B(t,T) + \kappa B(t,T) + \tfrac{\sigma^2}{2}B^2(t,T) - 1\right)r = 0,$$

die nur bei Gültigkeit folgender Differentialgleichungen erfüllt sein kann:

$$\tfrac{\partial}{\partial t}A(t,T) = -\kappa\theta B(t,T), \quad \tfrac{\partial}{\partial t}B(t,T) = \kappa B(t,T) + \tfrac{\sigma^2}{2}B^2(t,T) - 1.$$

Die Randbedingungen $A(T,T) = B(T,T) = 0$ resultieren aus $P(T,T) = 1$.

(ii) Aufgrund der affinen Struktur des CIR-Modells stehen explizite Preisformeln für Nullkuponanleihen in Abhängigkeit der Modellparameter zur Verfügung. Dies ist für die marktkonsistente Kalibrierung des CIR-Modells hilfreich, da eine direkte Übersetzung der beobachtbaren Zinskurve (ausgedrückt über Marktpreise von Nullkuponanleihen) zu den Modellparametern ermöglicht wird. Hierzu werden die Modellparameter κ, θ, σ so gewählt, dass in einer geeigneten Metrik der Abstand von Markt- und Modellpreisen minimiert wird.

(iii) Das Hull-White-Modell besitzt normalverteilte Short-Rates und kann somit - im Gegensatz zum nicht-negativen CIR-Prozess - auch negative Zinsen generieren, die im derzeitigen Niedrigzinsumfeld beobachtet werden. Allerdings sind im Hull-White-Modell negative Zinsen in unbeschränkter Höhe möglich, was aufgrund der Bargeldhaltungsoption unrealistisch ist. Eine Anpassung des CIR-Prozesses, bei der die verschobene Short-Rate $(r_t + s)$ mittels eines CIR-Prozess simuliert wird, würde negative Zinsen bis zur unteren Schranke s erlauben.

(e) Zinskonformität bedeutet, dass das Modell die Anfangszinskurve $P^M(T)$, die am Markt beobachtet wird, exakt reproduziert, also $P(0,T) = P^M(T)$. Um dies für eine Zinskurve mit N_T beobachteten Stützstellen zu erreichen, müssen also N_T Gleichungen erfüllt werden, was grundsätzlich die Existenz von ebenso vielen unabhängigen Modellparametern erfordert. Das hier betrachtete CIR-Modell hat drei konstante Kalibrierungsparameter (κ, θ und σ), sodass eine Zinskurve mit mehr als drei Stützstellen nicht exakt reproduziert werden kann. Eine mögliche Anpassung wäre, den Mean-Reversion-Level zeitabhängig zu wählen ($\theta \to \theta(t)$), sodass für jede Laufzeit ein individueller Kalibrierungsparameter gegeben ist.

(f) Short-Rate und instantane Forward-Rate für $t < T$ sind definiert als

$$r_t = \lim_{T \searrow t} r_t^s(T) = \lim_{\delta \searrow 0} -\frac{\ln P(t,t+\delta)}{\delta},$$
$$f_t(T) = \lim_{\delta \searrow 0} f_t^s(T, T+\delta) = \lim_{\delta \searrow 0} -\frac{\ln P(t,T+\delta) - \ln P(t,T)}{\delta} = -\frac{\partial}{\partial T} \ln(P(t,T)).$$

Setzt man in der Definition der instantanen Forward-Rate nun $T = t$ und benutzt $P(t,t) = 1$, so folgt direkt $r_t = f_t(t)$. Ferner:

$$f_t(T) = -\frac{\partial}{\partial T} \ln(P(t,T)) = -\frac{\partial}{\partial T} A(t,T) + \frac{\partial}{\partial T} B(t,T) r_t.$$

(g) Im Webinar wurden die Diskretisierungen nach Euler bzw. Milstein vorgestellt. Für den CIR-Prozess lauten die iterativen Vorschriften für diskrete Zeitschritte

der Länge δ

$$\text{Euler:} \quad r_0 = r(0); \quad r_{i+1} = r_i + \kappa(\theta - r_i)\delta + \sigma\sqrt{r_i}\Delta W_i,$$

$$\text{Milstein:} \quad r_0 = r(0); \quad r_{i+1} = r_i + \kappa(\theta - r_i)\delta + \sigma\sqrt{r_i}\Delta W_i + \frac{\sigma^2}{4}((\Delta W_i)^2 - \delta),$$

wobei $\Delta W_i = W_{i+1} - W_i \sim \mathcal{N}(0, \delta)$ normalverteilte Zufallszahlen sind.

Bei beiden Diskretisierungsverfahren ist aufgrund des diskreten Fluktuationsterms nicht gewährleistet, dass r_i strikt positiv bleibt. Im Falle negativer Werte ist allerdings die Wurzel nicht definiert. Daher führt man üblicherweise im Diffusionsterm eine untere Schranke ein, indem man $\sqrt{r_i}$ durch $\max\{\sqrt{r_i}, 0\}$ ersetzt.