DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im Spezialwissen

# Finanzmathematik und Investment I

gemäß Prüfungsordnung 4
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 24. Mai 2022

*Hinweise:*

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 29 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

*Mitglieder der Prüfungskommission:*

Dr. Mario Hörig, Prof. Dr. Thomas Knispel,
Dr. Marcus Scheffer, Prof. Dr. Jochen Wolf,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

**Aufgabe 1.** *[Grundlegende Denkfiguren der Finanzmathematik] [25 Punkte]*

(a) *[12 Punkte]* [Sensitivitäten] Es seien der folgende zweijährige Zahlungsstrom, die bewertungsrelevante Zero-Zinskurve (hier: flache Zinsstruktur) sowie die zugehörigen Diskontfaktoren gegeben. Die Zahlungen $c_1, c_2$ erfolgen jeweils am Ende des Jahres 1 bzw. 2.

*Hinweis: Nutzen Sie im Folgenden zur schnelleren Berechnung die gegebenen Diskontfaktoren.*

| **Jahr t** | **t = 1** | **t = 2** |
|---|---|---|
| Zahlung $c_t$ | 10 | 110 |
| Zins z | 1% | 1% |
| $q^t = (1+z)^{-t}$ | 0,990 | 0,980 |
| $\tilde{q}^t = (1+z+0{,}1\%)^{-t}$ | 0,989 | 0,978 |

(i) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den *heutigen Marktwert* des Zahlungsstroms.

(ii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Zins-Duration* des Zahlungsstroms, indem Sie eine Diskretisierung von +0,1% (=10 Basispunkte) verwenden.

(iii) *[4 Punkte]* Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Key Rate-Duration* zu Jahr 2 mithilfe der gleichen Diskretisierung von +0,1% (=10 Basispunkte).

(iv) *[2 Punkte]* Berechnen Sie die *approximierte relative effektive Key Rate-Duration* zu Jahr 1.

*Hinweis:* Es ist effizient, die vorhergehenden Ergebnisse einzubeziehen.

(b) *[8 Punkte]* [Risiken und Stabilität]

(i) *[4 Punkte]* Geben Sie jeweils zwei Beispiele für robuste Modelle sowie für instabile Modelle an. Skizzieren Sie jeweils *kurz*, inwiefern diese Modelle robust bzw. instabil sind.

(ii) *[3 Punkte]* Nennen Sie drei wesentliche Finanzrisiken von typischen deutschen Versicherungsunternehmen und begründen Sie jeweils stichpunkthaft, warum Sie das entsprechende Risiko als wesentlich betrachten.

(iii) *[1 Punkt]* Sie möchten ein Risikomodell aufbauen und wollen zur Kalibrierung historische Marktdaten verwenden. Erklären Sie, welche Problematik sich ggf. für die Risikomessung ergibt, wenn Sie nur Randverteilungen von einzelnen Risikofaktoren sowie deren allgemeine (Pearson-) Korrelation messen bzw. modellieren.

(c) *[5 Punkte]* [Krypto-Assets und Blockchain-Technologie]

Nennen Sie fünf Anwendungsbeispiele der Blockchain-Technologie.

*Lösungsskizze:*

(a) (i) Für den Zahlungsstrom mit Laufzeit von 2 Jahren und Zahlungen $c_1$ und $c_2$ sowie assoziiertem Diskontfaktor $q = (1 + \text{Zins})^{-1}$ ist der Marktwert gegeben durch

$$\begin{aligned} \text{MW} &= \sum_{t=1}^{2} \text{c}_\text{t} \cdot q^t \\ &\approx 9{,}90 + 107{,}80 \\ &= 117{,}70. \end{aligned}$$

(ii) Für den verändertem Diskontfaktor $\tilde{q} = (1 + \text{Zins} + 0{,}1\%)^{-1}$ beträgt der Marktwert

$$\begin{aligned} \widetilde{\text{MW}} &= \sum_{t=1}^{2} \text{c}_\text{t} \cdot \tilde{q}^t \\ &\approx 9{,}89 + 107{,}58 \\ &= 117{,}47. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich die approximierte effektive Zins-Duration

$$\begin{aligned} \text{D}_{eff} &= -\frac{\tilde{\text{MW}} - \text{MW}}{0{,}1\% \cdot \text{MW}} \\ &\approx -\frac{117{,}47 - 117{,}70}{0{,}001 \cdot 117{,}70} \\ &\approx 1{,}954. \end{aligned}$$

(iii) Berechnung der approximierten effektiven Key Rate-Duration zu Jahr 2:

$$\begin{aligned} \text{KRD}_{eff}^{(2)} &= -\frac{c_2 \cdot \tilde{q}^2 - c_2 \cdot q^2}{0{,}1\% \cdot \text{MW}} \\ &\approx -\frac{107{,}58 - 107{,}80}{0{,}001 \cdot 117{,}70} \\ &\approx 1{,}869 \end{aligned}$$

(iv) Berechnung der approximierten effektiven Key Rate-Duration zu Jahr 1:

$$\begin{aligned} \text{KRD}_{eff}^{(1)} &= \text{D}_{eff} - \text{KRD}_{eff}^{(2)} \\ &\approx 1{,}954 - 1{,}869 \\ &= 0{,}085 \end{aligned}$$

(b) [Risiken und Stabilität]

(i) *Instabil:*

- Black-Scholes-Formel für Swaptions bei negativen Zinsen
- Portfoliotheorie nach Markowitz für kleine Änderungen von Korrelationen deutlich verändertes optimales Portfolio

[*Weitere Nennungen sind möglich.*]

*Robust:*

- Hauptkomponentenanalyse bedingt anwendbar auch bei nicht normalverteilten Daten
- Smith-Wilson-Extrapolation funktioniert auch weiterhin bei negativen Zinsen

[*Weitere Nennungen sind möglich.*]

(ii)
- *Zinsänderungsrisiko:* Marktwerte von (langfristigen) Zahlungsströmen auf Aktiv- und Passivseite unterliegen Schwankungen bei Zinsänderungen
- *Kredit-/Spread-/Ausfallrisiko:* i. d. R. hoher Anteil von Bonds auf der Aktivseite, z. B. zum Hedging der Passivseite
- *Aktienpreisrisiko:* i. d. R. Teil des Kapitalanlageportfolios zur Steigerung des Kapitalanlageergebnisses und Diversifikation
- *Immobilienpreisrisiko:* i. d. R. Teil des Kapitalanlageportfolios zur Steigerung des Kapitalanlageergebnisses und Diversifikation

[*Gefragt waren drei Risiken; weitere Nennungen sind möglich.*]

(iii) Die Korrelation (in Verbindung mit den Randverteilungen) legt die Abhängigkeitsstruktur im Allgemeinen nicht eindeutig fest. Daher sind trotz gleicher Korrelation unterschiedliche Abhängigkeiten im Tail der gemeinsamen Verteilung und damit verbunden Risikokennzahlen sowie Diversifkationseffekte möglich, siehe z.B. Popsicle Verteilung oder Vergleich von Abhängigkeiten „Gauß-Copula vs. *t*-Copula“ mit identischer Korrelation.

(c) [Krypto-Assets und Blockchain-Technologie]

- Zahlungssysteme/ Transfer von Werten
- Automatisch erfüllende Verträge/ Smart Contracts

- Speicherung von Lieferketten für Produkte
- Non-Fungible Tokens (NFT) / digitale Kunstobjekte
- Digitale Identitäten
- Speicherung von Besitzverhältnissen
- Erwirtschaftung von Zinserträgen
- Stable Coins für Fiat Währungen
- Tokenisierung von Aktien oder Derivaten
- Dezentrale Börsen

[*Gefragt waren fünf Anwendungen; alternative Nennungen sind möglich.*]

**Aufgabe 2.** *[Anlageklassen und Finanztitel] [25 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Gemäß der BIZ (Bank für Internationalen Zahlungsausgleich) lag das weltweit ausstehende Nominalvolumen außerbörslich gehandelter Derivate per Ende Juni 2021 bei 609,996 Bill. US$.

(i) *[1 Punkt]* Nennen Sie diejenige (Derivate-)Kontraktart, die den überwiegenden Anteil an diesem ausstehenden Nominalvolumen ausmacht.

(ii) *[1 Punkt]* Wie hoch war der Anteil des ausstehenden Nominalvolumens dieser (Derivate-)Kontraktart an dem o. g. weltweit ausstehenden Nominalvolumen per Ende Juni 2021: ca. 40%, ca. 65% oder ca. 80%?

(iii) *[3 Punkte]* Vergleichen Sie Terminbörsen und Over-the-Counter-Märkte (OTC) anhand von drei charakteristischen Eigenschaften.

(b) *[8 Punkte]* Ein Investor geht am 15. Mai eine Long-Position mit zwei September-Gold-Futurekontrakten und folgenden Merkmalen ein:

- ein Kontrakt umfasst 100 Unzen,
- zum Kaufzeitpunkt beträgt der Futurepreis 200$ pro Unze,
- die Initial Margin beträgt 1500$ pro Kontrakt,
- die Maintenance Margin beträgt 1000$ pro Kontrakt.

(i) *[3 Punkte]* Erläutern Sie prägnant die Funktionsweise des Marginssystems bei Futurekontrakten.

(ii) *[5 Punkte]* Die relevanten Abrechnungskurse des Futures seien wie folgt gegeben:

| Datum | 15. Mai | 16. Mai | 17. Mai | 18. Mai |
|---|---|---|---|---|
| Abrechnungskurse pro Unze | 197$ | 189$ | 186$ | 191$ |

Zeigen Sie anhand eines Margin-Kontos, an welchen Tagen es zu einem Margin-Call kommt und wie hoch dieser ausfällt.

(c) *[5 Punkte]* Immobilien sind traditionell ein bedeutsames Anlageinstrument für Versicherungsunternehmen.

(i) *[2 Punkte]* Nennen Sie zwei Eigenschaften, welche diese Anlageklasse für Versicherer attraktiv machen.

(ii) *[3 Punkte]* Grenzen Sie in drei wesentlichen Punkten einen geschlossenen Immobilienfonds und einen REIT voneinander ab.

(d) *[7 Punkte]* Zum Zeitpunkt $t_0$ wird ein Plain-Vanilla-Swap abgeschlossen mit $n$ Zahlungszeitpunkten $t_1 = t_0 + \Delta t, \ldots, t_n = t_{n-1} + \Delta t$, Nominalbetrag $N$ und fixem Zins $K$%. Die festen und variablen Zinszahlungen werden jeweils zu gleichen Zeitpunkten getauscht. Im Folgenden sei $P(t_0, t_i)$, $i = 1, \ldots, n$, der Preis eines Zero-Coupon-Bonds mit normiertem Nennwert 1 und Fälligkeit $t_i$ in $t_0$.

(i) *[2 Punkte]* Geben Sie zunächst in allgemeiner Form den Wert des Swaps auf Basis der anfallenden Zahlungsströme zum Zeitpunkt $t_0$ an. Bestimmen Sie anschließend die Swap-Rate $K$, sodass der Swap zum Zeitpunkt $t_0$ einen Wert von null aufweist.

*Hinweise:*

(1) Verwenden Sie die Preise der Zero-Coupon-Bonds als Diskontierungsfaktoren.

(2) Die variablen Zinszahlungen werden auf Basis der in Zeitpunkt $t_0$ gültigen einfachen Terminzinssätzen $f^e_{t_0}(t_i, t_{i+1})$, $i = 0, \ldots, n-1$, bestimmt.

(ii) *[5 Punkte]* Zeigen Sie nun, dass sich diese Swap-Rate wie folgt darstellen lässt:

$$K = \frac{1 - P(t_0, t_n)}{\sum_{i=0}^{n-1} \Delta t \cdot P(t_0, t_{i+1})}$$

*Hinweis:* Für den einfachen Terminzins gilt $f^e_{t_0}(t_i, t_{i+1}) = \frac{1}{\Delta t}\left(\frac{P(t_0,t_i)}{P(t_0,t_{i+1})} - 1\right)$.

*Lösungsskizze:*

(a) Überblick Finanzmärkte und Abgrenzung Börsenhandel und OTC-Handel:

(i) Gemäß BIZ macht per Ende Juni 2021 die Kontraktart *Zinsderivate* den überwiegenden Anteil am weltweit ausstehenden Nominalvolumen der außerbörslich gehandelten Derivate aus.

(ii) Laut BIZ liegt der entsprechende Anteil der Zinsderivate per Ende Juni 2021 bei ca. 80%.

(iii) Eigenschaften des Börsenhandels und des OTC-Marktes:

| Terminbörsen | OTC-Märkte |
|---|---|
| standardisierte Ausstattungsmerkmale bzgl. Handelsobjekten, Laufzeit, Stückelung, etc. | grundsätzlich individuelle Vertragsausgestaltung bzgl. Zeitpunkt, Menge, etc. |
| Börsen unterliegen einer staatlichen Aufsicht (Börsengesetz; Wertpapierhandelsgesetz) | OTC-Märkte unterliegen keiner unmittelbaren staatlichen Aufsicht (*Hinweis:* Es gibt jedoch Aufsichtselemente (Central Counter Parties (CCPs), Transaktionsregister) im OTC-Handel, die in der EU-Verordnung *European Market Infrastructure Regulation* (EMIR) verankert sind.) |
| Existenz einer Clearingstelle, die stets zwischen kaufenden und verkaufenden Marktteilnehmern geschaltet ist (Clearingkonzept; Marginsystem); börsentägliche Abrechnung am Ende jedes Handelstages | Handel findet direkt zwischen Käufer und Verkäufer statt; keine tägliche Abrechnung; Abrechnung bei Fälligkeit |
| Präsenzbörse / Computerbörse (z. B. EUREX) | elektronisch / telefonisch |

[*Es waren nur drei Eigenschaften zu nennen.*]

(b) (i) Bei der Eröffnung und während der Laufzeit einer Futureposition muss nicht der gesamte Kontraktwert (Nominal) als Sicherheit bereitgestellt werden. Um das Erfüllungsrisiko maßgeblich zu reduzieren bzw. auszuschließen, werden von den Clearingmitgliedern jedoch Sicherheitsleistungen, sogenannte Margins, erhoben. Die Sicherheiten können dabei in Form von Geld und/oder durch die Hinterlegung von Wertpapieren geleistet werden. Die als Sicherheiten akzeptierten Wertpapiere müssen dabei eine hohe Qualität aufweisen. Hinsichtlich der Margins ist generell zu unterscheiden zwischen

- den bei der Eröffnung einer Position bereitzustellenden Sicherheitsleistungen und
- den während der Haltedauer einer Position (Bestehen von offenen Positionen) sukzessiv zu erbringenden Sicherheitsleistungen.

Für das Margin-Konto wird eine *Maintanance Margin* festgelegt, die unterhalb der *Initial Margin*, also der anfänglichen Margin, liegt. Fällt der Saldo des Margin-Kontos unter der Maintanace Margin kommt es zu einem sogenannten *Margin Call*, einer Nachschussforderung, d. h. das Margin-Konto muss auf das Niveau der Initial Margin aufgestockt werden.

(ii) Margin-Konto:

| Tag | Futures-preis (in $) | Tägl. Gew./ Verl. (in $) | Kumul. Gew./ Verl. (in $) | Margin Konto-stand (in $) | | Margin Call (in $) |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 15. Mai | 200,00 | | | 3000 | | |
| 15. Mai | 197,00 | -600 | -600 | 2400 | | 0 |
| 16. Mai | 189,00 | -1600 | -2200 | 800 | + | 1200 = 2000 |
| | | | | | ↘ ← | < 2000 |
| 17. Mai | 186,00 | -600 | -2800 | 1400 | + | 600 = 2000 |
| 18. Mai | 191,00 | 1000 | -1800 | 3000 | | 0 |
| ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | ⋮ | | ⋮ |

D. h. am 16. Mai und am 17. Mai kommt es zu einem Margin-Call in Höhe von 1200$ bzw. 600$.

(c) (i) Positive Eigenschaften der Anlageklasse *Immobilien*:

- Immobilien wird eine hohe reale Wertbeständigkeit (*Inflationsschutz!*) zugeschrieben.
- Es wird eine geringe Korrelation der Wertentwicklung von Immobilien mit andern Anlageklassen unterstellt (*Diversifikationspotential!*).
- Immobilien können attraktive laufende Einkommen (Mieten) abwerfen.

[*Zu nennen waren nur zwei EIgenschaften.*]

(ii) Abgrenzung von geschlossenen Immobilienfonds und REIT:

| geschlossener Immobilienfonds | REIT |
|---|---|
| i.d.R. kein geregelter Sekundärmarkt für die Fondsanteile | Kauf/Verkauf von Anteilen an der Börse |
| Investitionsobjekt/Finanzierungsplan stehen bei Auflage fest | Immobilienvermögen, welches sich im Zeitverlauf verändern kann/wird; grundsätzlich nicht nur Anlage in Immobilien, sondern auch Aktivitäten als Bauträger, Projektentwickler, Verwalter |
| geringe Nutzung von Risikodiversifikationspotentialen, da Fondsvermögen i.d.R. nur aus einem/wenigen Objekt(en) besteht | Risikotransformation durch diversifiziertes Immobilienvermögen |

(d) Betrachtet wird im Folgenden ein Payer-Swap.

(i) Darstellung der Zahlungsströme in den Zeitpunkten $t_1, \ldots, t_n$:
(tabellarische Darstellung der CFs hier nur informativ)

| ZP | fixed leg | floating leg | CF |
|---|---|---|---|
| $t_0$ | 0 | 0 | 0 |
| $t_1$ | $-\Delta t \cdot K \cdot N$ | $\Delta t \cdot f^e_{t_0}(t_0, t_1) \cdot N$ | $\Delta t \cdot N \cdot (f^e_{t_0}(t_0, t_1) - K)$ |
| $t_2$ | $-\Delta t \cdot K \cdot N$ | $\Delta t \cdot f^e_{t_0}(t_1, t_2) \cdot N$ | $\Delta t \cdot N \cdot (f^e_{t_0}(t_1, t_2) - K)$ |
| $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ | $\vdots$ |
| $t_n$ | $-\Delta t \cdot K \cdot N$ | $\Delta t \cdot f^e_{t_0}(t_{n-1}, t_n) \cdot N$ | $\Delta t \cdot N \cdot (f^e_{t_0}(t_{n-1}, t_n) - K)$ |

Der Wert des Payer-Swaps im Zeitpunkt $t_0$ ist

$$V^P(t_0) = \sum_{i=0}^{n-1} \Delta t \cdot N \cdot P(t_0, t_{i+1}) \cdot \{f^e_{t_0}(t_i, t_{i+1}) - K\}$$

Mit $V^P(t_0) = 0$ ergibt sich:

$$K = \frac{\sum_{i=0}^{n-1} P(t_0, t_{i+1}) \cdot f_{t_0}^e(t_i, t_{i+1})}{\sum_{i=0}^{n-1} P(t_0, t_{i+1})}$$

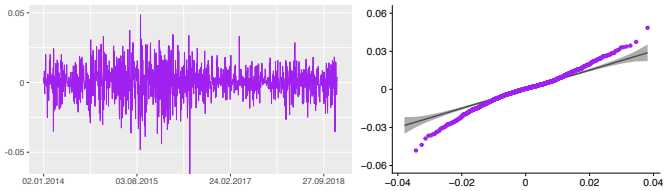
(ii) Mit dem Hinweis $f_{t_0}^e(t_i, t_{i+1}) = \frac{1}{\Delta t}(\frac{P(t_0,t_i)}{P(t_0,t_{i+1})} - 1)$ folgt

$$\begin{aligned}
K &= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} P(t_0, t_{i+1}) \cdot \frac{1}{\Delta t}(\frac{P(t_0,t_i)}{P(t_0,t_{i+1})} - 1)}{\sum_{i=0}^{n-1} P(t_0, t_{i+1})} \\
&= \frac{\sum_{i=0}^{n-1} \frac{1}{\Delta t}(P(t_0, t_i) - P(t_0, t_{i+1}))}{\sum_{i=0}^{n-1} P(t_0, t_{i+1})} \\
&= \frac{P(t_0, t_0) - P(t_0, t_n))}{\sum_{i=0}^{n-1} \Delta t \; P(t_0, t_{i+1})} \\
&= \frac{1 - P(t_0, t_n))}{\sum_{i=0}^{n-1} \Delta t \; P(t_0, t_{i+1})}.
\end{aligned}$$

**Aufgabe 3.** *[Konkrete Assetmodelle] [25 Punkte]*

Angenommen, Sie arbeiten im Asset Management und befassen sich mit der Analyse von Finanzmarktzeitreihen sowie der Modellierung von Kapitalmarktprodukten.

(a) *[9 Punkte]* Zur Ad-hoc-Analyse der täglichen Log-Renditen eines Aktienindizes haben Sie die historischen Log-Renditen visualisiert sowie einen Q-Q-Plot zum Vergleich der empirischen Renditeverteilung mit der Normalverteilung erstellt.




(i) *[2 Punkte]* Welche Schlussfolgerungen ziehen Sie aus diesen beiden Graphiken in Bezug auf wesentliche empirische Eigenschaften der vorliegenden Renditezeitreihe?

(ii) *[4 Punkte]* Geben Sie an, welche zentrale empirische Eigenschaft ARCH- und GARCH-Zeitreihenmodelle in Bezug auf die Volatilität abbilden, und beschreiben Sie für eines dieser beiden Zeitreihenmodelle die mathematische Struktur. Welchen Zusatzeffekt bildet das GARCH-Modell im Vergleich zum ARCH-Modell ab?

(iii) *[3 Punkte]* Ein*e Kolleg*in aus Ihrer Abteilung schlägt - in Kenntnis der obigen Analysen - vor, die Dynamik des Aktienindizes mit dem Black-Scholes-Modell zu modellieren. Beurteilen Sie diesen Vorschlag und begründen Sie Ihre Beurteilung anhand von zwei Fakten.

(b) *[7 Punkte]* Ihr Versicherungsunternehmen erwägt, in einen Immobilienfonds zu investieren. Die Auswertung historischer Zeitreihen der jährlich auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen $R$ des Immobilienfonds ergibt die erwartete Rendite $\mu(R) = 5\%$, die Volatilität $\sigma(R) = 5\%$ und die Autokorrelation 1. Ordnung in Höhe von $\alpha = 0{,}6$. Der risikofreie Zins $r$ beträgt 1% p. a..

(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie *kurz*, warum die Renditen des Immobilienfonds eine Autokorrelation aufweisen. Führen Sie zur Korrektur der Volatilität die Entglättung mit dem *Blundell-Ward-Verfahren* durch.

(ii) *[3 Punkte]* Berechnen Sie jeweils die Sharpe-Ratio der Renditen ohne und mit Entglättung. Erläutern Sie anhand Ihres Rechenergebnisses, welche Konsequenzen die Nicht-Berücksichtigung der Entglättung auf die Portfolioselektion Ihres Versicherungsunternehmens haben könnte.

(c) *[6 Punkte]*

(i) *[4 Punkte]* Erklären Sie *kurz*, was man im Rahmen des Black-Scholes-Modells unter der *impliziten Volatilität* versteht. Erläutern Sie anhand empirischer Beobachtungen für die implizite Volatilität den Kerngedanken der Weiterentwicklung des Black-Scholes-Modells durch *stochastische Volatilitätsmodelle*. Geben Sie dabei die Dynamik des diskontierten Aktienpreisprozesses $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ unter dem zugrunde liegenden risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ an.

(ii) *[2 Punkte]* Beschreiben Sie die mathematische Struktur des *Heston-Modells* aus der Klasse der stochastischen Volatilitätsmodelle.

(d) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie das *Merton-Sprungdiffusionsmodell* für Aktienpreisprozesse. Erläutern Sie *kurz* die Motivation für diese Modellerweiterung.

*Lösungsskizze:*

(a) (i) Die Visualisierung der Renditezeitreihe verdeutlicht, dass die Volatilität im Zeitverlauf variiert. Bei Finanzmarktzeitreihen treten extreme Renditen in Clustern auf (*Volatility Clustering*). Die Q-Q-Plots weisen eine „invertierte *S*-Form“ auf und weichen von einer Geraden ab. Dies bedeutet, dass die Normalverteilung kein geeignetes Modell für die Verteilung täglicher Renditen ist.

(ii) Das ARCH(p)-Modell und das GARCH(p,q)-Modell bilden Volatiltätscluster ab und weisen die folgende mathematische Struktur auf:

- Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt ARCH(p)-Prozess, falls für einen strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t\in T}$ folgende Gleichungen bestehen:

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \geq 0.$$

  Hierbei ist $(Z_t)_{t\in T}$ ein striktes Weißes Rauschen SWN$(0,1)$.

- Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt GARCH(p,q)-Prozess, falls für einen strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t\in T}$ folgende Gleichungen bestehen:

$$X_t = \sigma_t Z_t,$$
$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \geq 0.$$

[*Zu beschreiben war nur ein Zeitreihenmodell.*]

Sind beim ARCH-Modell $|X_{t-1}|, |X_{t-2}|, \ldots |X_{t-p}|$ groß, so ist auch die Volatilität $\sigma_t$ und damit - modulo Wirkung des Shocks $Z_t$ aus dem Rauschen

- $|X_t|$ hoch. Selbiges gilt für den GARCH-Prozess. Allerdings sind hier die Perioden hoher Volatilität persistenter als im ARCH-Modell, da $\sigma_t^2$ explizit auch von $\sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \ldots, \sigma_{t-q}^2$ abhängt.

(iii) Der Vorschlag ist nicht sachgerecht und daher abzulehnen. Im Widerspruch zu obigen Graphiken (bzw. den Schlussfolgerungen in (i)) weist das Black-Scholes-Modell

- eine konstante Volatilität
- sowie normalverteilte Log-Renditen auf.

(b) (i) Bei Zeitreihen im Immobilienbereich wird häufig eine Autokorrelation durch Verzerrungen im Bewertungsprozess induziert, u. a.:

- Ankerfunktion vorangegangener Wertgutachten,
- Vernachlässigung/Fehlen aktueller Marktdaten,
- zeitversetzte Bewertung einzelner Immobilien.

Das Blundell-Ward-Verfahren korrigiert die Varianz einer Zeitreihe von Renditen $R_t$, $t = 1, 2, \ldots$, gemäß $\mathrm{Var}(R_t^*) = \mathrm{Var}(R_t)\frac{1-a^2}{(1-a)^2}$, also

$$\sigma(R^*) = \sigma(R)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 0{,}05 \cdot \frac{\sqrt{1-0{,}6^2}}{1-0{,}6} = 0{,}1 \quad (10\%).$$

Der Erwartungswert bleibt unverändert, d. h. $\mu(R^*) = \mu(R) = 5\%$.

(ii) Für die Sharpe-Ratios SR der Einperiodenrenditen gilt

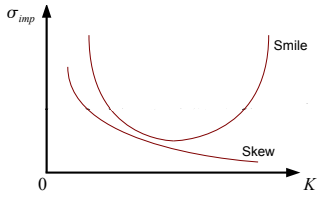
$$\mathrm{SR}(R) = \frac{\mu(R)-r}{\sigma(R)} = \frac{0{,}05-0{,}01}{0{,}05} = 0{,}8 \quad \text{bzw.} \quad \mathrm{SR}(R^*) = \frac{\mu(R^*)-r}{\sigma(R^*)} = \frac{0{,}05-0{,}01}{0{,}1} = 0{,}4.$$

Die Verwendung unbereinigter Immobilienzeitreihen führt zu einer Unterschätzung der Volatilität und damit ceteris paribus zu einer Überschätzung der Sharpe-Ratio, die insbesondere ein risikoadjustiertes Perfomancemaß darstellt. Damit können Risiko-Return-Analysen (z. B. im klassischen Markowitz-Modell, angewendet auf der Ebene der Hauptanlageklassen) ein verzerrtes Bild ergeben und zu einer suboptimalen Asset-Allokation führen.

(c) (i) Im Black-Scholes-Modell steigt ceteris paribus der Preis einer Europäischen Call-Option, wenn die Volatilität $\sigma$ erhöht wird. Aufgrund dieser Monotonie kann man für einen am Markt beobachteten Preis einer Call-Option die Volatilität $\sigma_{\mathrm{imp}}$ bestimmen, die im Black-Scholes-Modell vorliegen müsste, um diesen Preis zu generieren (wenn alle anderen Parameter gegeben sind). Diese Größe heißt *implizite Volatilität*.

Empirische Beobachtungen zeigen, dass die implizite Volatilität

- von der Restlaufzeit der Option (Term-Structure)
- sowie vom zugrunde liegenden Strike der Option abhängen (Smile, Skew), siehe Graphik.




Im Gegensatz dazu besitzt der diskontierte Aktienpreisprozess Im Black-Scholes-Modell unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ für einen $\mathbb{Q}$-Wiener-Prozess $(W_t^{\mathbb{Q}})_{t\geq 0}$ die Dynamik $d\widetilde{S}_t = \sigma \widetilde{S}_t \, dW_t^{\mathbb{Q}}$ mit einer konstanten Volatilität $\sigma > 0$. Stochastische Volatilitätsmodelle unterstellen als Erweiterung, dass die Volatilität selbst ein stochastischer Prozess $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ ist, d. h.

$$d\widetilde{S}_t = \sigma_t \widetilde{S}_t \, dW_t^{\mathbb{Q}}.$$

(ii) Für zwei korrelierte $\mathbb{Q}$-Wiener-Prozesse $W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}}$ mit Kovariation $\langle W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}} \rangle_t = \rho t$ sind im Heston-Modell der diskontierte Aktienpreisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ und die zugehörige Volatilität unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ modelliert durch:

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= \sigma_t \widetilde{S}_t \, dW_t^{\mathbb{Q}}, \\ \sigma_t &= \sqrt{v_t}. \end{aligned}$$

Der Prozess $v$ heißt „variance“ und ist definiert durch einen *Cox-Ingersoll-Ross-Prozess*

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\, dt + \xi \sqrt{v_t}\, dB_t^{\mathbb{Q}}.$$

(d) Im Merton-Sprungdiffusionsmodell ist der Preisprozess der Aktie $(S_t^M)_{t\geq 0}$ unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ modelliert durch

$$S_t^M = S_0^M \exp(\sigma W_t^{\mathbb{Q}} + (\mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2)t + \sum_{i=1}^{N_t} X_i) \quad (t \geq 0)$$

mit:

- Unter $\mathbb{Q}$ ist $(W_t^{\mathbb{Q}})_{t\geq 0}$ ein Wiener-Prozess und $(N_t)_{t\geq 0}$ ist ein Poisson-Prozess mit Intensität $\lambda > 0$. Beide Prozesse sind stochastisch unabhängig.
- $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ sind i. i. d. normalverteilte Zufallsvariablen.
- Die Parameter genügen der Bedingung $\mu - r + \lambda(\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\exp(X_1)] - 1) = 0$, die äquivalent zu $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rt} S_t^M] = S_0^M$ ist.

Im Black-Scholes-Modell (und anderen Diffusionsmodellen) sind die Pfade der Preisprozesse stetig, sodass abrupte, sprunghafte Kursänderungen (Kursanstieg, Kursverfall) nicht abgebildet werden. Das Merton-Sprungdiffusionsmodell modelliert Kurssprünge; zwischen den Sprüngen verhält sich der Preisprozess wie eine Geometrische Brownsche Bewegung.

**Aufgabe 4.** *[Verallgemeinerte real-world Zinsmodelle] [25 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Geben Sie ohne Rechnung, für jede der beiden Teilaufgaben, vier Punkte $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{R}^2$ an, sodass für die Hauptkomponentenanalyse (*Principal Component Analysis*, PCA) und die zugehörigen Hauptkomponenten (*Principal Components*, PC) basierend auf jeweils diesen vier Punkten gilt:

(i) *[2 Punkte]* Erklärte Varianz($PC_1$) = Erklärte Varianz($PC_2$),

(ii) *[2 Punkte]* Erklärte Varianz ($PC_2$) = 0.

*Hinweis:* Machen Sie sich vorab visuell klar, wie die zweidimensionalen Punkte liegen müssen, damit die jeweilige Bedingung erfüllt sein kann.

(b) *[10 Punkte]*

(i) *[3 Punkte]* Nennen Sie drei Gründe, die für eine Verwendung einer PCA bei der Zinskurvenmodellierung sprechen.

(ii) *[2 Punkte]* Schreiben Sie das allgemeine Optimierungsproblem (nicht die Lösung!) auf, um die Faktorladungen (PCs) einer zentrierten Datenmatrix $X$ (Zeilen: Datum der historischen Änderung) zu erhalten. Gehen Sie davon aus, dass Sie alle Eigenvektoren $EV_1, \dots EV_n$ der Kovarianzmatrix von $X$ vorliegen haben.

(iii) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie, was jede Variable in dem vorherigen Optimierungsproblem darstellt und ergänzen Sie die jeweiligen Dimensionen. Gehen Sie davon aus, dass Sie eine PCA auf historischen geshifteten relativen Änderungen durchgeführt haben.

(iv) *[2 Punkte]* Geben Sie die allgemeine Lösung des von Ihnen in (b) (ii) formulierten Optimierungsproblems an.

(c) *[5 Punkte]* Begründen Sie jeweils mit einem Argument, warum die folgenden Aussagen nicht korrekt sind:

(i) *[1 Punkt]* Wenn diskretisierte Zinskurvenänderungen normalverteilt sind, kann die PCA gut verwendet werden, um eine niedrigdimensionale Approximation vorzunehmen.

(ii) *[1 Punkt]* Die Lösung der Faktorladungen der PCA ist nicht eindeutig.

(iii) *[1 Punkt]* Eine erklärte kumulierte Varianz i.H.v. x% für die ersten $k$ Faktorladungen eines $n$-dimensionalen Raums bedeutet, dass lediglich $1 - x\%$ der historischen Daten nicht exakt erklärt werden können.

(iv) *[1 Punkt]* Selbst bei der Verwendung aller $n$ Faktorladungen zur Beschreibung eines $n$-dimensionalen Raums können nicht immer alle historischen Daten exakt beschrieben werden.

(v) *[1 Punkt]* Die erste Richtung (=erster Eigenvektor) der PCA bei der Beschreibung von Zinskurvenänderungen entspricht immer und exakt einer parallelen Änderung der Zinskurve.

(d) *[6 Punkte]* Nennen Sie jeweils drei Gemeinsamkeiten und Unterschiede zwischen der PCA und dem Nelson-Siegel-Modell.

*Lösungsskizze:*

(a) (i) Alle Punkte liegen auf den Ecken eines Quadrats.

*Beispiel:* $x_1 = (0,1), x_2 = (0,-1), x_3 = (1,0), x_4 = (-1,0)$ sowie alle Drehungen dieser Punkte um den Nullpunkt plus beliebiger anschließender Verschiebung der Punkte um einen Vektor $m$

(ii) Die Punkte breiten sich entlang genau einer Richtung aus, d. h. die vier Punkte liegen auf einer Geraden.

*Beispiel:* $x_1 = (0,0), x_2 = (0,1), x_3 = (0,2), x_4 = (0,3)$

(b) (i)
- Abbildung historischer Bewegungen
- Unkorreliertheit der Faktorladungen
- Einfache Berechnung der Faktorladungen
- Eindeutigkeit der Faktorladungen
- Großer Freiraum in der Gestaltung des Modells
- I. d. R. Dimensionsreduktion gut möglich

[*Gefragt waren drei Gründe; weitere Nennungen sind möglich.*]

(ii) Durch Lösung des folgenden Optimierungsproblems erhält man die ersten $k$ Vektoren für die Faktorladungen der Datenmatrix $X$:

$$\min_{[PC_1,\dots,PC_k]} ([EV_1,\dots,EV_k][PC_1,\dots,PC_k]^T - X^T) \quad \text{bzw. äquivalent}$$
$$\min_{[PC_1,\dots,PC_k]} ([PC_1,\dots,PC_k][EV_1,\dots,EV_k]^T - X).$$

(iii) $[PC_1,\dots,PC_k] \in \mathbb{R}^{m,k}$ ... Matrix der Vektoren der ersten $k$ Faktorladungen
$X \in \mathbb{R}^{m,n}$ ... Datenmatrix der zentrierten geshifteten relativen Änderungen (Zeile=Datum, Spalte=Dimension der geshifteten relativen Änderungen)
$[EV_1,\dots,EV_k] \in \mathbb{R}^{n,k}$ ... Matrix der ersten $k$ Eigenvektoren

(iv) $[PC_1,\dots,PC_k] = X[EV_1,\dots,EV_k]$

(c) *Begründungen für Inkorrektheit der Aussagen:*

(i) Die diskretisierten Zinskurvenänderungen müssen sich hauptsächlich in einem niedrigdimensionalen Unterraum bewegen.

(ii) Die Lösung der Faktorladungen der PCA ist eindeutig, weil die orthogonale Projektion eindeutig ist.

(iii) Die erklärte kumulierte Varianz gibt lediglich an, wie die Varianz im Verhältnis zur Gesamtvarianz getroffen wird.

(iv) Werden alle Eigenvektoren verwendet, stellen diese ein Orthonormalbasis im ursprünglichen Raum dar. Daher können alle Daten exakt beschrieben werden.

(v) Bei Zinskurven stellt die erste Richtung oftmals grob eine Parallelverschiebung dar. Das ist aber weder exakt, noch immer der Fall.

(d) *Gemeinsamkeiten:*

- Können beide zur Beschreibung von Zinskurven verwendet werden
- Kleinste-Quadrate-Minimierung zur Bestimmung der Modellparameter
- Grob ähnliche Interpretation der Parameter: Parallelverschiebung, Steigung, Krümmung

*Unterschiede:*

- PCA auch für beliebige Transformationen von Zinskurvenänderungen möglich
- Basisfunktionen sind diskret vs. stetig
- Extrapolation bei Nelson-Siegel automatisch gegeben, bei PCA nicht

[*Gefragt waren drei Gemeinsamkeiten bzw. Unterschiede; weitere Nennungen sind möglich.*]

**Aufgabe 5.** *[Bewertung von Optionen im Black-Scholes-Modell] [40 Punkte]*

Angenommen, das Portfolio Ihrer Versicherung enthält Aktien der Werkzeugfirma „Bohren & Sägen AG“, deren Aktien an der Börse gehandelt werden. Sie entscheiden sich, den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ zur Risikomessung unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift-Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilitätsparameter $\sigma > 0$ zu modellieren und verwenden in konsistenter Form das assoziierte Black-Scholes-Modell für Bewertungszwecke. Hierbei ist die Wertentwicklung des Geldmarktfonds bei stetiger Verzinsung mit Rate $r \geq 0$ gegeben durch $B_t = e^{rt}$, $t \geq 0$. Im Folgenden sei $T > 0$ der Zeithorizont des Modells.

(a) *[9 Punkte]*

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie die Dynamik des Aktienpreisprozesses $(S_t)_{t\in[0,T]}$ unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ an. Berechnen Sie anschließend mithilfe der Itô-Formel formal unter $\mathbb{P}$ die Dynamik des diskontierten Aktienpreisprozesses $\widetilde{S}_t := e^{-rt}S_t$, $t \in [0,T]$.

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie das eindeutige äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ mithilfe einer geeigneten Girsanov-Transformation. Erläutern Sie dabei *kurz* Ihr Vorgehen. Welche Dynamik besitzt der Aktienpreisprozess unter $\mathbb{Q}$?

(iii) *[3 Punkte]* Beschreiben Sie *kurz*, wie das Black-Scholes-Modell in der Praxis für Bewertungszwecke kalibriert wird. Nennen Sie zwei mögliche Grundansätze zur Kalibrierung.

(b) *[10 Punkte]* Ihnen wird ein Finanzderivat angeboten, das Ihnen zur Maturität $T > 0$ in Abhängigkeit des Aktienkurses $S_T$ der „Bohren & Sägen AG“ die Auszahlung $C_T := (S_T)^2 + 40$ liefert.

(i) *[5 Punkte]* Leiten Sie eine explizite Formel zur Berechnung des arbitragefreien Preises $C_t$ des Finanzderivats zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$ her. Zeigen Sie dabei insbesondere, dass $C_t = v(S_t, t)$ für eine geeignete Funktion $v$ gilt.

*Hinweis:* Für $X \sim \mathcal{N}(0,\gamma^2)$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[\exp(aX)] = \exp(\frac{1}{2}a^2\gamma^2)$.

(ii) *[5 Punkte]* Berechnen Sie eine dynamische Hedging-Strategie, mit der Ihre Gegenpartei die Auszahlung $C_T$ durch Handel von Geldmarktfonds und Aktie im Modell replizieren kann. Wie hoch sind die Kosten für die Implementierung der Hedging-Strategie?

(c) *[6 Punkte]* Der arbitrage-freie Preis einer Europäischen Call-Option auf die Aktie mit Maturität $T$ und Strike $K > 0$ ist zum Zeitpunkt $t \in [0,T]$ gegeben durch $C_t^{\text{call}} = v^{\text{call}}(S_t, t)$ für die Funktion

$$v^{\text{call}}(x,t) = x\Phi(d_+(x,t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(x,t)),$$

wobei $\Phi$ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet und folgende Konstanten verwendet werden:

$$d_{\pm}(x,t) = \frac{\ln(x/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Erläutern Sie inklusive Herleitung die *Put-Call-Parität* und nutzen Sie diese, um eine Formel für den Preis $C_t^{\text{put}}$ einer Europäischen Put-Option auf die Aktie mit Maturität $T$ und Strike $K > 0$ zum Zeitpunkt $t$ herzuleiten.

(d) *[6 Punkte]* Eine fondsgebundene Erlebensfallversicherung für eine bei Vertragsabschluss $x$-jährige versicherte Person mit Laufzeit $T$ liefert im Erlebensfall als Auszahlung das Maximum aus dem Fondsvermögen $N \cdot S_T$ ($N$=Anzahl der Aktien im Fonds) und einer vereinbarten deterministischen Garantie $G$.

Leiten Sie mithilfe des Formelwerks in (c) eine Formel zur Berechnung der Nettoeinmalprämie dieser Erlebensfallversicherung her. Begründen Sie gegebenenfalls Ihre Annahmen.

(e) *[9 Punkte]* Bei einer *Asiatischen Call-Option* auf die Aktie $(S_t)_{t\geq 0}$ mit Maturität $T > 0$ und Strike 60 ist das Auszahlungsprofil

$$C_T := \left(\frac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} S_k - 60\right)^+$$

abhängig vom Durchschnittswert der Aktie zu bestimmten Zeitpunkten. Ihnen steht ein Rechenprogramm zur Verfügung, mit dem Sie beliebig viele Zufallszahlen $z_1, z_2, \ldots$ aus einer Standardnormalverteilung generieren können.

(i) *[6 Punkte]* Erläutern Sie unter Angabe entsprechender Formeln, wie Sie zur Bewertung dieser Option in $t = 0$ mit *Monte-Carlo-Methoden* vorgehen.

(ii) *[3 Punkte]* Erläutern Sie, warum der Monte-Carlo-Ansatz nur ein approximatives Verfahren zur Bewertung ist, und geben Sie typische Verfahren zur Reduktion des Monte-Carlo-Fehlers an.

*Lösungsskizze:*

(a) (i) Der Preisprozess $(S_t)_{t\in[0,T]}$ der Aktie besitzt unter dem Maß $\mathbb{P}$ die Dynamik

$$dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{P}}), \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, S_0 = s > 0,$$

wobei der Zufall durch einen $\mathbb{P}$-Wiener-Prozess $(W_t^{\mathbb{P}})_{t\in[0,T]}$ getrieben wird.

Die Funktion $f(x,t) = e^{-rt}x$ erlaubt die Darstellung der diskontierten Aktienpreise $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, $t \geq 0$, in der Form $\widetilde{S}_t = f(S_t, t)$. Mit der Itô-Formel folgt für die Dynamik des Prozesses $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$

$$d\widetilde{S}_t = df(S_t,t) = \tfrac{\partial}{\partial x}f(S_t,t)\,dS_t + \tfrac{\partial}{\partial t}f(S_t,t)\,dt + \tfrac{1}{2}\tfrac{\partial^2}{(\partial x)^2}f(S_t,t)\,d\langle S\rangle_t.$$

Da die Ableitung $\frac{\partial^2}{(\partial x)^2} f$ verschwindet, erhält man somit

$$d\widetilde{S}_t = e^{-rt}\,dS_t - re^{-rt}S_t\,dt = \widetilde{S}_t\sigma(dW_t^{\mathbb{P}} + \tfrac{\mu-r}{\sigma}\,dt). \tag{1}$$

(ii) $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ ist nach (1) ein Martingal bezüglich eines Maßes $\mathbb{Q}$ (Martingalmaß), falls

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \tfrac{\mu-r}{\sigma}\,du, \quad t\in[0,T], \tag{2}$$

ein Wiener-Prozess unter $\mathbb{Q}$ ist. Zur Konstruktion des (eindeutig bestimmten!) äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ wird der Satz von Girsanov verwendet: Definiert man $\mathbb{Q}$ durch die Dichte

$$\tfrac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\big|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\int_0^T \frac{\mu-r}{\sigma}\,dW_u^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 du} = e^{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_T^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T},$$

d. h. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T} X]$, so ist der Prozess $(W_t^{\mathbb{Q}})_{\in[0,T]}$ ein $\mathbb{Q}$-Wiener-Prozess bis zur Zeit $T$. Für die Dynamik von $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ unter $\mathbb{Q}$ gilt

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t\sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}},$$

d. h. der diskontierte Preisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ ist in der Tat ein $\mathbb{Q}$-Martingal.

Für die Dynamik des Aktienpreises $(S_t)_{t\in[0,T]}$ unter $\mathbb{Q}$ erhält man via (2)

$$dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{P}}) = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}}), \tag{3}$$

d. h. $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ist unter $\mathbb{Q}$ eine Geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter $r$ und Volatilität $\sigma$.

(iii) Gemäß (3) ist zur Spezifikation des Black-Scholes-Modells für Bewertungszwecke nur die Volatilität $\sigma$ zu bestimmen; der Driftparameter ist durch den Zins gegeben. Zur Schätzung von $\sigma$ können grundsätzlich zwei Verfahren verwendet werden:

- Schätzung aus historischen Daten (führt zur sogenannten *historischen Volatilität*)
- Schätzung aus den Preisen bereits vorhandener Optionen für denselben Basistitel (führt zur sogenannten *impliziten Volatilität*)

(b) (i) Im Black-Scholes-Modell ist der Aktienpreisprozess unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter $r$ und Volatilität $\sigma$. Somit folgt für den arbitrage-freien

Preis im Zeitpunkt $t$ mit risikoneutraler Bewertung

$$\begin{aligned}
C_t &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T)^2+40|\mathcal{F}_t] \\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T)^2|\mathcal{F}_t]+40e^{-r(T-t)} \\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)})^2|\mathcal{F}_t]+40e^{-r(T-t)} \\
&= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t)^2 e^{2\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})}e^{2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}|\mathcal{F}_t]+40e^{-r(T-t)} \\
&= (S_t)^2 e^{(2(r-\frac{1}{2}\sigma^2)-r)(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{2\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})}]+40e^{-r(T-t)} \\
&= (S_t)^2 e^{(r-\sigma^2)(T-t)}e^{\frac{1}{2}4\sigma^2(T-t)}+40e^{-r(T-t)} \\
&= (S_t)^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}+40e^{-r(T-t)}.
\end{aligned}$$

Fazit: $C_t = v(S_t,t)$ mit $v(x,t) = x^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)}+40e^{-r(T-t)}$

(ii) Man berechnet via Delta-Hedging die dynamische Absicherungsstrategie:

- Einheiten Aktie:

$$\vartheta_t^S = \tfrac{\partial}{\partial x}v(S_t,t) = 2S_t e^{(r+\sigma^2)(T-t)}$$

- Einheiten Geldmarktfonds: Mit $V_t^\vartheta = C_t$ als Wertprozess der Handelsstrategie folgt

$$\vartheta_t^B = \tfrac{V_t^\vartheta - \vartheta_t^S S_t}{B_t} = -(S_t)^2 e^{(r+\sigma^2)(T-t)-rt}+40e^{-rT}.$$

Der arbitrage-freie Preis $C_t$ entspricht in jedem Zeitpunkt den Kosten der Replikation.

(c) Für $z\in\mathbb{R}$ gilt $(z-K)^+-(K-z)^+ = z-K$. Dies führt bei risikoneutraler Bewertung aufgrund der Martingaleigenschaft des diskontierten Aktienpreisprozesses unter $\mathbb{Q}$ zur Put-Call-Parität

$$\begin{aligned}
C_t^{\text{call}} - C_t^{\text{put}} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T-K)^+|\mathcal{F}_t]-\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(K-S_T)^+|\mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T-K)|\mathcal{F}_t] = S_t - e^{-r(T-t)}K,
\end{aligned}$$

d. h. die Preise von Aktie, Call- und Put-Option sind abhängig voneinander. Sind zwei dieser Preise bekannt, so kann der dritte mit der Put-Call-Parität berechnet werden. Insbesondere folgt $C_t^{\text{put}} = v^{\text{put}}(S_t,t)$ mit einer Preisfunktion, die $v^{\text{call}}(x,t)-v^{\text{put}}(x,t) = x-e^{-r(T-t)}K$ erfüllt. Umstellen liefert die Bewertungsformel

$$\begin{aligned}
v^{\text{put}}(x,t) &= x\Phi(d_+(x,t))-e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(x,t))-x+e^{-r(T-t)}K \\
&= -x[1-\Phi(d_+(x,t))]+e^{-r(T-t)}K[1-\Phi(d_-(x,t))] \\
&= -x\Phi(-d_+(x,t))+e^{-r(T-t)}K\Phi(-d_-(x,t)).
\end{aligned}$$

Hierbei verwendet: $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$ für alle $x\in\mathbb{R}$.

(d) Mit der Restlebensdauer $T_x$ der $x$-jährigen versicherten Person lässt sich die Auszahlung der Erlebensfallversicherung im Zeitpunkt $T$ schreiben als

$$1_{\{T_x>T\}} \max\{N \cdot S_T, G\} = 1_{\{T_x>T\}} \left(G + N \cdot \left(S_T - \tfrac{G}{N}\right)^+\right).$$

Nimmt man an, dass das biometrische Risiko unabhängig vom Marktrisiko ist, so gilt für die Nettoeinmalprämie $\text{NEP}_0$ zum Zeitpunkt 0

$$\begin{aligned} \text{NEP}_0 &= {}_Tp_x \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}\left(G + N \cdot \left(S_T - \tfrac{G}{N}\right)^+\right)\right] \\ &= {}_Tp_x \left(e^{-rT}G + N \cdot \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[e^{-rT}\left(S_T - \tfrac{G}{N}\right)^+\right]\right), \end{aligned}$$

wobei ${}_Tp_x$ die $T$-jährige Überlebenswahrscheinlichkeit der $x$-jährigen versicherten Person bezeichnet. Damit lässt sich die Berechnung der Nettoeinmalprämie auf die Bewertung einer Europäischen Call-Option mit Strike $K = G/N$ zurückführen, d. h. es gilt

$$\text{NEP}_0 = {}_Tp_x \left(e^{-rT}G + N v^{\text{call}}(S_0, 0)\right).$$

(e) (i) Der arbitrage-freie Preis der Asiatischen Call-Option in $t = 0$ entspricht dem Erwartungswert der diskontierten Auszahlung unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$:

$$C_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}C_T] = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\tfrac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} S_k - 60\right)^+\right].$$

Monte-Carlo-Schätzer:

Dieser Erwartungswert kann mithilfe einer „hinreichend“ großen Anzahl $n$ von unabhängig simulierten (diskretisierten) Pfaden des Aktienpreisprozesses $\{s_1(j), s_2(j), \ldots, s_T(j)\}$, $j = 1, \ldots, n$, approximiert werden:

$$C_0 = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\left(\tfrac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} S_k - 60\right)^+\right] \approx e^{-rT}\tfrac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\tfrac{1}{T}\sum_{k=1}^{T} s_k(j) - 60\right)^+.$$

Grundlage dieser Monte-Carlo-Approximation ist das starke Gesetz der großen Zahlen, das für $n \uparrow \infty$ die Konvergenz der rechten Seite gegen den gesuchten Erwartungswert impliziert.

Simulation der Pfade:

Bei der Simulation ist zu beachten, dass der Aktienpreisprozess unter $\mathbb{Q}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter $r$ und Volatilitätsparameter $\sigma$ ist. Zur Simulation der Pfade bietet sich die direkte Simulation ausgehend von der geschlossenen Lösung der Stochastischen Differentialgleichung an:

$$s_k(j) = S_0 \exp(\sigma \sum_{i=1}^{k} z_i(j) + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)k), \quad k = 1, \ldots, T, j = 1, \ldots, n.$$

Hierbei werden für jeden Pfad $j$ neue standardnormalverteilte Zufallszahlen $z_1(j), \ldots, z_T(j)$ verwendet. Denkbar (wenn auch weniger exakt) wäre auch ausgehend vom Startpreis $S_0$ und der SDE $dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}})$ eine Diskretisierung gemäß Euler-Verfahren mit hinreichend kleiner Schrittweite $h > 0$, sodass die Werte des Aktienpreisprozesses zu den relevanten Zeitpunkten inkludiert sind:

$$s_{kh}(j) = s_{(k-1)h}(j) + r s_{(k-1)h}(j) h + \sigma s_{(k-1)h}(j) \sqrt{h} z_k(j),\ k = 1, 2, \ldots.$$

(ii) Der Monte-Carlo-Ansatz wird durch das Gesetz der großen Zahlen gerechtfertigt und liefert bei einer endlichen Anzahl von Pfaden grundsätzlich nur eine Approximation des gesuchten Erwartungswerts. Da in Bewertungsmodellen die Anzahl der simulierten Pfade endlich (und oft der Rechengeschwindigkeit geschuldet zu klein) ist, kann eine bemerkenswerte Abweichung (Monte-Carlo-Fehler) bzw. Instabilität in Abhängigkeit des Seeds der Zufallszahlen vorliegen. In praktischen Anwendungen muss der Monte-Carlo-Fehler daher kontrolliert und limitiert werden: hinreichend hohe Anzahl von Simulationen und/oder Einsatz von Varianzreduktionstechniken (z. B. antithetische Zufallszahlen, Importance Sampling, Stratified Sampling).

**Aufgabe 6.** *[Bewertung im Zinsbereich] [40 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* [LMM und HJM-Modell]

Grenzen Sie das *LIBOR-Marktmodell* (LMM) und das *Heath-Jarrow-Morton-Modell* (HJM) in Hinblick auf die jeweils modellierte Größe gegeneinander ab. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen dar und geben Sie für die modellierten Größen jeweils den Zusammenhang zur Diskontkurve an.

(b) *[15 Punkte]* [1-Faktor Shortrate-Modelle]

(i) *[5 Punkte]* Vergleichen Sie die stochastischen Bewegungsgleichungen der Shortrate-Prozesse im *Vasicek-Modell* und im *Hull-White-Modell* miteinander. Beschreiben Sie hierbei, welche gemeinsamen Eigenschaften aus den zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen abzulesen sind und welche Unterscheidungsmerkmale diese aufweisen. Was können Sie über die Marktkonsistenz der beiden Modelle aussagen?

(ii) *[5 Punkte]* Für das *Hull-White-Modell* ist eine alternative Darstellung des Shortrate-Prozesses $(r_t)_{t\geq 0}$ gebräuchlich, bei der die Shortrate in einen stochastischen Prozess $(x_t)_{t\geq 0}$, der langfristig gegen Null strebt, und eine deterministische Verschiebung $\varphi(t)$ aufgeteilt wird.

Geben Sie die mathematische Formulierung dieses Alternativmodells an, und arbeiten Sie den Zusammenhang der deterministischen Verschiebung mit dem *Mean-Reversion-Level* der ursprünglichen Formulierung heraus.

(iii) *[5 Punkte]* Im *Hull-White-Modell* kann der Wert einer Nullkuponanleihe mit Laufzeit $S$ zur Simulationszeit $t$ als Funktion der am Markt beobachtbaren Startzinskurve $P^M(0, T_i)$ dargestellt werden. Wie lautet diese Darstellung und was impliziert dies für die notwendige maximale Laufzeit der Startzinskurve $T_n$?

(c) *[19 Punkte]* [2-Faktor Hull-White-Modell]

(i) *[5 Punkte]* Eine Erweiterung des einfachen Hull-White-Modells ist das sogenannte *2-Faktor Hull-White-Modell*. Dieses geht aus dem ursprünglichen 1-Faktor-Modell wie in (b)(i) hervor, indem das zeitabhängige Mean-Reversion-Level um einen zusätzlichen korrelierten stochastischen Term erweitert wird. Der zusätzliche stochastische Term ist ebenfalls ein Mean-Reversion-Prozess mit dem langfristigen Ziel Null.

Stellen Sie die mathematische Formulierung des 2-Faktor Hull-White-Modells auf.

(ii) *[10 Punkte]* Eine alternative Formulierung des 2-Faktor Hull-White-Modells ist das *G2++-Modell*, in dem die Shortrate als Summe von zwei korrelierten *Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen* und einer deterministischen Verschiebung folgt, d. h. $r_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)} + \varphi(t)$, wobei

$$dx_t^{(i)} = -\alpha_i x_t^{(i)}\,dt + \sigma_i\,dZ_t^{(i)} \text{ mit } d\langle Z^{(1)}, dZ^{(2)}\rangle_t = \rho\,dt \quad (|\rho| \le 1)$$

für zwei Wiener-Prozesse $(Z_t^{(1)})_{t\ge 0}$ und $(Z_t^{(2)})_{t\ge 0}$.

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden stochastischen Modelle, indem Sie die Parameter $\alpha_i$, $\sigma_i$, $\varphi(t)$ und $\rho$ in Abhängigkeit der Parameter darstellen, die Sie in der vorangegangenen Aufgabe für das 2-Faktor Hull-White-Modell gewählt haben.

*Hinweis:* Betrachten Sie die Differentialgleichung für $(r_t)_{t\ge 0}$ und nutzen Sie, dass der Prozess

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}}(\sigma_1 Z_t^{(1)} + \sigma_2 Z_t^{(2)}), \quad t \ge 0,$$

ebenfalls ein Wiener-Prozess ist.

(iii) *[4 Punkte]* Begründen Sie *qualitativ*, warum ein 2-Faktor Hull-White-Modell dem 1-Faktor Modell überlegen ist.

*Lösungsskizze:*

(a) Im LIBOR-Marktmodell wird die diskrete Forwardrate $f_t(T, T+\Delta T)$ modelliert, während das HJM-Modell die kontinuierliche Forwardrate $f_t(T)$ betrachtet. Letztere entspricht dem Grenzwert verschwindend kleiner Anlagehorizonte der diskreten Forwardrate, d. h. $f_t(T) = \lim_{\Delta T \downarrow 0} f_t(T, T+\Delta T)$.

Der Zusammenhang mit der Diskontkurve $T \mapsto P(t,T)$ für die beiden Größen stellt sich dar als

$$f_t(T, T+\Delta T) = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,T+\Delta T)} - 1\right),$$
$$f_t(T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}.$$

(b) (i) Für einen Wiener-Prozess $(W_t)_{t\ge 0}$, Konstanten $\alpha, \sigma, \theta$ sowie eine zeitabhängige Funktion $\theta(\cdot)$ lauten die beiden Bewegungsgleichungen:

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t \qquad \text{(Vasicek-Modell)}$$
$$dr_t = \alpha(\theta(t) - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t \qquad \text{(Hull-White-Modell)}$$

Beiden Prozessen ist gemein, dass sie ein „Mean-Reversion-Feature“ mit *Mean-Reversion-Geschwindigkeit* $\alpha$ aufweisen. Der Parameter $\alpha$ skaliert

dabei die relative Stärke dieser Asymptotik im Vergleich zum stochastischen Part. Das *Mean-Reversion-Level* $\theta$ bzw. $\theta(t)$ gibt an, gegen welchen Wert der deterministische Teil des Prozesses langfristig strebt. Der stochastische Teil wird in beiden Modellen durch den konstanten *Volatilitätsparameter* $\sigma$ bestimmt, der die Schwankungen des Wiener-Prozesses skaliert und in eine beliebige Richtung treibt, d. h. insbesondere weg vom Mean-Reversion-Level.

Das Hull-White-Modell unterscheidet sich vom Vasicek-Modell durch die Zeitabhängigkeit des Mean-Reversion-Levels. Dadurch ist es möglich, das Hull-White-Modell so zu kalibrieren, dass eine beliebige Startzinskurve reproduziert werden kann, also auch insbesondere eine marktkonsistente Kalibrierung durchzuführen. Im Gegensatz dazu kann im Vasicek-Modell die Startzinskurve nur an einzelnen Punkten repliziert werden. Die Marktkonsistenz ist also eingeschränkt.

(ii) Die im Seminar vorgestellte alternative Darstellung lautet

$$r_t = x_t + \varphi(t)$$
$$\text{mit } dx_t = -\alpha x_t\,dt + \sigma\,dW_t.$$

Zur Herleitung des Zusammenhangs zwischen $\varphi(t)$ und $\theta(t)$ betrachtet man das Differential $dx_t$:

$$\begin{aligned}
dx_t &= d(r_t - \varphi(t)) = dr_t - \varphi'(t)\,dt \\
&= \alpha\,(\theta(t) - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t - \varphi'(t)\,dt \\
&= \alpha\left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha}\varphi'(t) - r_t\right)dt + \sigma\,dW_t \\
&= \alpha\left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha}\varphi'(t) - x_t - \varphi(t)\right)dt + \sigma\,dW_t \\
&= -\alpha x_t\,dt + \sigma\,dW_t + \alpha\left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha}\varphi'(t) - \varphi(t)\right)dt.
\end{aligned}$$

Der Vergleich mit der oben dargestellten Bewegungsgleichung führt zur Beziehung

$$\theta(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\alpha}\varphi'(t).$$

(iii) Die Bondpreise sind im Hull-White-Modell gegeben als

$$P(t,S) = \frac{P^M(0,S)}{P^M(0,t)}\exp\left(-B(t,S)x_t + \frac{1}{2}\left(V(t,S) - V(0,S) + V(0,t)\right)\right).$$

Somit muss die maximale Laufzeit der Startzinskurve mindestens dem maximalen Wert für $T_n = t + S$ entsprechen.

(c) (i) Die Differentialgleichungen des 2-Faktor Hull-White-Modells lauten

$$dr_t = \bar{\alpha}_1(\theta + u_t - r_t)dt + \bar{\sigma}_1 dW_t^{(1)},$$
$$du_t = -\bar{\alpha}_2 u_t dt + \bar{\sigma}_2 dW_t^{(2)},$$

wobei der Zufall durch zwei Wiener-Prozesse $(W_t^{(1)})_{t\geq 0}$ und $(W_t^{(2)})_{t\geq 0}$ mit quadratischer Kovariation $\langle W^{(1)}, W^{(2)}\rangle_t = \bar{\rho} t$ getrieben wird.

(ii) Man betrachte die stochastische Differentialgleichungen für den Shortrate-Prozess im G2++ Modell:

$$\begin{aligned}
dr_t &= dx_t^{(1)} + dx_t^{(2)} + \varphi'(t)\,dt \\
&= -\alpha_1 x_t^{(1)}\,dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} - \alpha_2 x_t^{(2)}\,dt + \sigma_2 dZ_t^{(2)} + \varphi'(t)\,dt \\
&= \alpha_1\left(\tfrac{1}{\alpha_1}\varphi'(t) - x_t^{(1)} - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)}\right)dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} + \sigma_2\,dZ_t^{(2)} \\
&= \alpha_1\left(\tfrac{1}{\alpha_1}\varphi'(t) + \varphi(t) + \tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)} - r_t\right)dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} + \sigma_2\,dZ_t^{(2)} \\
&= \alpha_1\left(\theta(t) + u_t - r_t\right)dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} + \sigma_2\,dZ_t^{(2)} \\
&= \bar{\alpha}_1\left(\theta(t) + u_t - r_t\right)dt + \bar{\sigma}_1\,dW_t
\end{aligned}$$

mit den Identifikationen $\bar{\alpha}_1 = \alpha_1$, $\theta(t) = \frac{1}{\alpha_1}\varphi'(t) + \varphi(t)$ und $u_t = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)}$ sowie mit dem Wiener-Prozess

$$W_t^{(1)} := \tfrac{1}{\bar{\sigma}_1}(\sigma_1 Z_t^{(1)} + \sigma_2 Z_t^{(2)}) \quad \text{mit } \bar{\sigma}_1 := \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2},$$

vgl. Hinweis. Die Differentialgleichung für $u_t$ folgt mit $\bar{\alpha}_2 = \alpha_2$ als

$$\begin{aligned}
du_t &= d\left(\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)}\right) \\
&= -\bar{\alpha}_2 u_t\,dt + \bar{\sigma}_2\,dZ_t^{(2)} \quad \text{mit } \bar{\sigma}_2 = \tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}\sigma_2,
\end{aligned}$$

sodass sich mit der Identifikation $dW_t^{(2)} = dZ_t^{(2)}$ die Gleichung aus (c)(i) ergibt. Schlussendlich folgt für die quadratische Kovariation der beiden stochastischen Prozesse

$$\begin{aligned}
d\langle W_t^{(1)}, dW_t^{(2)}\rangle_t &= d\langle \tfrac{1}{\bar{\sigma}_1}(\sigma_1 Z_t^{(1)} + \sigma_2 Z_t^{(2)}), Z_t^{(2)}\rangle \\
&= \tfrac{\sigma_1}{\bar{\sigma}_1}\rho\,dt + \tfrac{\sigma_2}{\bar{\sigma}_1}\,dt.
\end{aligned}$$

Somit ist mit $\bar{\rho} = \frac{\sigma_1\rho+\sigma_2}{\bar{\sigma}_1}$ die Äquivalenz der beiden Prozesse nachgewiesen.

(iii) Im 1-Faktor Modell entsprechen die Zinsbewegungen im Wesentlichen einer Parallelverschiebung der Startzinskurve. Somit kann der Einfluss struktureller Änderungen der Zinskurve mit einem solchen Modell nicht angemessen berücksichtigt werden. Das 2-Faktor Modell führt zu deutlich variableren Zinskurven und kann derartige Effekte abbilden. Zudem ist (als Konsequenz der Variabilität) eine bessere Replikation einer vorgegebenen Swaptionvolatilitätsfläche und somit auch ein höherer Grad an Marktkonsistenz möglich.