DAV
Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

Schriftliche Prüfung im Fach

Investment und Finanzmathematik I

gemäß Prüfungsordnung 5 & 6
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 29. Mai 2026

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 23 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.
- Alle Antworten sind in deutscher Sprache zu erstellen (fremdsprachige Fachbegriffe ausgenommen).

Mitglieder der Prüfungskommission:

Carolin Apfel, Dr. Mario Hörig,
Prof. Dr. Thomas Knispel, Dr. Marcus Scheffer,
Philipp Wolters, Dr. Mario Zacharias

Aufgabe 1. *[Grundlegende Denkfiguren der Finanzmathematik] [25 Punkte]*

(a) *[20 Punkte]* [Allgemeine Modelle] Begründen Sie mit jeweils einem Argument, warum die folgenden Aussagen nicht korrekt sind.

(i) *[2 Punkte]* Besitzen zwei Paare von Zufallsvariablen (X_1, Y_1) und (X_2, Y_2) die gleichen Randverteilungen und (Pearson-)Korrelationen, so ist ihr Risikoprofil identisch.

(ii) *[2 Punkte]* Beträgt die relative Zinsduration eines Finanztitels gleich null, dann besitzt dieser kein Zinsänderungsrisiko.

(iii) *[2 Punkte]* Die Problematik der Beschaffung von Modell-Inputs eines inaktiven Marktes kann gelöst werden, indem die Inputs von geeigneten Datenanbietern besorgt werden, die Einblick in den Markt haben.

(iv) *[2 Punkte]* Es sei ein fixer positiver Zahlungsstrom gegeben. Dann kann je nach Ausgestaltung die Zinsduration positiv sowie auch negativ sein.

(v) *[2 Punkte]* Die Begriffe „Aktienpreisrisiko“ und „Aktienvolatilitätsrisiko“ sind synonym verwendbar und beschreiben das gleiche Risiko.

(vi) *[2 Punkte]* Es sei ein fixer positiver Zahlungsstrom gegeben. Dann kann die effektive Key-Rate-Duration zu einer bestimmten Laufzeit größer als die effektive Duration sein.

(vii) *[2 Punkte]* Das Black-Scholes-Modell zur Bewertung von Swaptions ist auch in einem negativen Zinsumfeld gut anwendbar und liefert sinnvolle Marktpreise.

(viii) *[2 Punkte]* Um eine +100 BP Zinssensitivität eines Zinstitels zu berechnen, kann immer einfach eine +10 BP Sensitivität mit dem Faktor 10 multipliziert werden und ergibt eine gute Näherung.

(ix) *[2 Punkte]* Modelle, die zukünftige Parameterrealisierungen aus historischen Datenbewegungen ableiten, sind immer sehr gut geeignet, um Risiken einzuschätzen.

(x) *[2 Punkte]* Es sei eine feste einmalige Zahlung nach 2,5 Jahren gegeben. Dann gilt für die Key Rates {1Y, 2Y, 3Y, 4Y, …}: Die 2-jährige Key-Rate-Duration ist ungleich der 3-jährigen Key-Rate-Duration.

(b) *[5 Punkte]* [Geld] Nennen Sie die drei durch die Deutsche Bundesbank formulierten Anforderungen an Geld. Begründen Sie *kurz*, warum insbesondere eine der Anforderungen in den letzten Jahren in Deutschland bzw. der Europäischen Währungsunion weniger gut erfüllt wurde.

Lösungsskizze:

(a) (i) Falsch, denn die (Pearson-)Korrelation beschreibt nur in Spezialfällen die Abhängigkeitsstruktur eindeutig; man benötigt hierzu die Copula. Deshalb kann das Risikoprofil unterschiedlich sein.

(ii) Falsch, es könnte sich um eine lokale Eigenschaft handeln. Weiterhin beschreiben Durationen nur Änderungen bzgl. paralleler Zinsbewegungen.

(iii) intransparenter Markt: keine öffentlichen Daten verfügbar
inaktiver Markt: kein Handel, also generell keine Daten verfügbar

(iv) Falsch, denn diese kann nur positiv sein. Das leitet sich direkt aus der Definition her.

(v) Das Aktienpreisrisiko beschreibt das Risiko bei Änderung des Aktienkurses (beispielsweise relevant für alle normalen Aktientitel), hingegen umfasst das Aktienvolatilitätsrisiko das Risiko bei Änderung der Aktienvolatilität (insbesondere relevant für Finanztitel mit eingebetteten Aktienoptionen).

(vi) Für einen fixen positiven Zahlungsstrom gilt: Die Summe der Key-Rate-Durationen entspricht der effektiven Duration, wobei alle einzelnen Key-Rate-Durationen und die effektive Duration positiv sind. Damit kann die Key-Rate-Duration zu einer bestimmten Laufzeit nicht größer als die effektive Duration sein.

(vii) Falsch, generell ist das Modell für positive Zinsen gebaut (Inputs sowie in der Projektion). Beispiele: Sind Strike und Forward Rate als Inputs positiv, werden in der Projektion niemals negative Zinsen erzeugt. Sind die Vorzeichen von Strike und Forward Rate unterschiedlich, erzeugt das Modell gar keine Lösung, da die Logarithmusfunktion nur für nicht-negative Werte definiert ist.

(viii) Falsch, die historischen Daten könnten unzureichend das zukünftige Verhalten beschreiben. Beispielsweise könnten mögliche disruptive Ereignisse unzureichend berücksichtigt sein.

(ix) Falsch, eine Linearisierung ist nur gut möglich, falls der Marktwertverlauf des Zinstitels bzgl. paralleler Zinskurvenänderungen in dem Bereich bis +100 BP annähernd linear verläuft.

(x) Falsch, für die feste einmalige Zahlung nach 2,5 Jahren gilt nach Konstruktion wegen linearer Interpolation: KRD(2 Jahre) = KRD(3 Jahre).

(b) Es handelt sich bei den Anforderungen um die Sparmittelfunktion, Tauschmittelfunktion und Wertmessfunktion. Die Stützung der Wirtschaft mit Geld sowie stark gestiegenen Kosten für Lieferketten während und nach der Corona-Krise bewirkten eine stärkere Inflation, die die Sparmittelfunktion des Euros weniger gut erfüllte.

Aufgabe 2. *[Anlageklassen und Finanztitel] [25 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* [Forwards/Futures] Grenzen Sie *Forwards* und *Futures* voneinander ab. Gehen Sie dabei auf Gemeinsamkeiten und Unterschiede ein.

(b) *[14 Punkte]* [Swaps/Swaptions]

(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie allgemein den Begriff des *Swap-Kontrakts*.

(ii) *[7 Punkte]* Ein Kollege von Ihnen hat vor kurzem das Seminar „Investment und Finanzmathematik“ besucht und erinnert sich noch gut an folgende Formel:

$$N \cdot P(t, T_\alpha) \left(\sum_{i=\alpha+1}^{\beta} (K - f^e_{T_\alpha}(T_{i-1}, T_i)) \cdot \Delta t \cdot P(T_\alpha, T_i) \right)^+$$

Leider kann sich Ihr Kollege nicht mehr genau an die Bedeutung der Formel sowie die Bezeichnungen N, K, $f^e_{T_\alpha}(T_{i-1}, T_i)$, Δt und $P(T_\alpha, T_i)$ erinnern. Helfen Sie Ihrem Kollegen, indem Sie die genannten Bezeichnungen definieren und beschreiben, welche Bedeutung die Formel hat.

(iii) *[3 Punkte]* Erläutern Sie für *Swaptions* prägnant die Begriffe *Maturität* und *Tenor*.

(c) *[6 Punkte]* [Immobilien] In einem Gespräch mit einem Assetmanager der Versicherungs-AG über Immobilienanlagen tätigt dieser Ihnen gegenüber die nachfolgend angeführten Aussagen (1)-(6). Geben Sie für jede dieser Aussagen an, ob diese für die pro Aussage angeführten Immobilienanlagearten **jeweils zutrifft bzw. nicht zutrifft**.

(1) *Offene Immobilienfonds, geschlossene Immobilienfonds:* Diese Immobilienanlage nutzt i. d. R. Risikodiversifikationspotentiale, weil das Fondsvermögen aus vielen Objekten besteht.

(2) *Geschlossene Immobilienfonds, REITs:* Die Bewertung der Immobilienanlage erfolgt über den Sekundärmarkt (Börsenhandel).

(3) *Offene Immobilienfonds, REITs:* Ein Kauf und Verkauf dieser Immobilienanlageart an der Börse ist grundsätzlich möglich.

(4) *Direktanlage, REITs:* Die beim Kauf dieser Immobilienanlageart anfallende Grunderwerbsteuer ist i. d. R. ein wesentlicher Treiber der Transaktionskosten.

(5) *Direktanlage, geschlossene Immobilienfonds:* Es handelt sich bei der Immobilienanlage um ein rechtlich eigenständiges Sondervermögen mit Schwerpunkt Immobilien, die von Kapitalanlagegesellschaften im Sinne des Investmentgesetzes (InvG) initiiert und verwaltet werden.

(6) *Immobilien-Derivate, REITs:* Der Handel dieser Immobilienanlageart erfolgt meist über OTC-Märkte.

Lösungsskizze:

(a) Forwards und Futures:

- *Gemeinsamkeiten:* Bei beiden Geschäften handelt es sich um Terminfixgeschäfte. Beide Vertragspartner verpflichten sich, zu einem vorab festgesetzten zukünftigen Termin Leistung und Gegenleistung zu erbringen. Die Konditionen für Leistung und Gegenleistung werden dabei bei Vertragsabschluss festgelegt:
  - die bei der Eröffnung einer Position bereitzustellenden Sicherheitsleistungen und
  - die während der Haltedauer einer Position (Bestehen von offenen Positionen) sukzessiv zu erbringenden Sicherheitsleistungen.
- *Unterschiede:*

Merkmal	**Forward**	**Future**
Vertragsgestaltung	individuell (nicht standardisiert)	standardisiert in Lieferterminen und -mengen, Handelseinheiten etc.
Börsenhandel	nicht börsengehandelt	börsengehandelt
Abrechnung	Abrechnung bei Fälligkeit	börsentägliche Abrechnung über „marking to market“ (Einschuss- und Nachschusspflichten)

(b) Swaps/Swaptions:

(i) *„Plain-Vanilla“-Zinsswap:* Ein Swap (engl. ≙ Tausch) ist eine Vereinbarung zwischen zwei Vertragspartnern, bei der heute festgelegt wird, zu welchen Bedingungen in der Zukunft getauscht wird. In der Regel handelt es sich dabei um Zahlungsströme und es existieren mehrere Termine, an denen ein Tausch stattfindet.

- Bei Swaps handelt es sich um OTC-gehandelte Derivate, da die Konditionen an die individuellen Bedürfnisse der Vertragspartner angepasst werden.
- Swaps sind in der Regel Terminfixgeschäfte. Es existieren aber durchaus Swaps, die einen Optionscharakter enthalten. (→ Swaptions)

(ii) *Formel und Bezeichnungen:*
Es handelt sich um den Pay-Off einer Receiver-Swaption diskontiert vom Zeitpunkt T_α zum aktuellen Zeitpunkt t. Dabei sind:

- N Nominalbetrag,
- K fixer Zins,
- $f^e_{T_\alpha}(T_{i-1}, T_i)$) variable Zinszahlungen, die auf Basis der zum Zeitpunkt des Vertragsschlusses gültigen einfachen Terminzinssätze bestimmt werden,
- Δt Zeitraum zwischen den äquidistanten Zahlungszeitpunkten $T_{\alpha+1}, \ldots, T_\beta$,

- $P(T_\alpha, T_i), i = \alpha + 1, \ldots, \beta$, der Preis eines Zero-Coupon-Bonds mit normiertem Nennwert 1 und Fälligkeit T_i zum Zeitpunkt T_α.

(iii) *Maturität und Tenor:*

- Der Inhaber einer Swaption hat das Recht, zu einem zukünftigen Zeitpunkt, der Swaption-**Maturität**, einen Swap-Kontrakt zu einem vereinbarten Strike einzugehen.
- Zum Zeitpunkt des Vertragsschlusses einer Swaption auf einen Swap mit Zeitintervall $[T_\alpha, T_\beta]$ wird ein Strike K und eine Swaption-Maturität T mit $T \leq T_\alpha$ festgelegt.
- Die Länge $T_\beta - T_\alpha$ wird **Tenor** genannt.
- Zum Zeitpunkt T hat der Inhaber dann das Recht den vereinbarten Payer-Swap einzugehen

(c) Immobilien:

(1) nur offene Immobilienfonds

(2) nur REITs

(3) beides

(4) nur Direktanlage

(5) gar nichts

(6) nur Immobilien-Derivate

Aufgabe 3. *[Konkrete Assetmodelle] [25 Punkte]*

Angenommen, Sie arbeiten im Asset Management und befassen sich mit der Analyse von Finanzmarktzeitreihen sowie der Modellierung von Kapitalmarktprodukten.

(a) *[9 Punkte]* Geben Sie – **jeweils mit Begründung** – an, ob die folgenden Aussagen **insgesamt** „wahr“ oder „falsch“ sind.

(i) *[3 Punkte]* ARCH- und GARCH-Zeitreihenmodelle bilden beide Volatilitätscluster ab; jedoch sind beim GARCH-Modell die Perioden hoher Volatilität persistenter als im ARCH-Modell.

(ii) *[3 Punkte]* Bezeichnet $(W_t)_{t\geq 0}$ einen Wiener-Prozess unter dem Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathbb{Q}$, so ist der stochastische Prozess

$$X_t = 5(W_t)^2 + 10t, \quad t \geq 0,$$

ein nicht-negatives $\mathbb{Q}$-Martingal und kann daher als Modell für einen diskontierten Aktienpreisprozess in Bewertungsmodellen verwendet werden.

(iii) *[3 Punkte]* Lokale Volatilitätsmodelle beschreiben die Volatilität des Aktienpreisprozesses als Funktion der Zeit und des aktuellen Aktienkurses. Ein typisches Beispiel ist das Heston-Modell.

(b) *[7 Punkte]* Ihr Versicherungsunternehmen erwägt, in einen Immobilienfonds zu investieren. Die Auswertung historischer Zeitreihen der jährlich auf kontinuierlicher Basis berechneten (Log-)Renditen R des Immobilienfonds ergibt die erwartete Rendite $\mu(R) = 5\%$, die Volatilität $\sigma(R) = 4\%$ und die Autokorrelation 1. Ordnung in Höhe von $a = 0{,}8$. Der risikofreie Zins r beträgt 2% p. a..

(i) *[4 Punkte]* Erläutern Sie *kurz*, warum die Renditen des Immobilienfonds eine Autokorrelation aufweisen können. Führen Sie zur Korrektur der Volatilität die Entglättung mit dem *Blundell-Ward-Verfahren* durch.

(ii) *[3 Punkte]* Berechnen Sie jeweils die Sharpe-Ratio der Renditen ohne und mit Entglättung. Erläutern Sie anhand Ihres Rechenergebnisses, welche Konsequenzen die Nicht-Berücksichtigung der Entglättung auf die Portfolioselektion Ihres Versicherungsunternehmens haben könnte.

(c) *[9 Punkte]* In der Finanzmathematik ist der *Ornstein-Uhlenbeck-Prozess*, auch *Vasicek-Prozess* genannt, (hier zur Vereinfachung mit Mean-Reversion-Level 0)

$$X_t = x_0 e^{-at} + be^{-at} \int_0^t e^{as}\, dW_s, \quad a, b > 0, t \geq 0,$$

ein beliebter Modellbaustein, wobei $(W_t)_{t\geq 0}$ einen Wiener-Prozess auf $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ bezeichnet.

(i) *[4 Punkte]* Begründen Sie, warum der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ein *Gauß'scher Prozess* ist. Geben Sie inklusive *kurzer* Herleitung explizit die Verteilung der Zufallsvariable X_t, $t > 0$, unter $\mathbb{P}$ an.

(ii) *[2 Punkte]* Welche Implikation hat diese Verteilungseigenschaft bei Verwendung von $(X_t)_{t\geq 0}$ zur Modellierung der Short-Rate und welche Herausforderung ergibt sich dadurch?

(iii) *[3 Punkte]* Begründen Sie, warum der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess ein *Markov-Prozess* ist. Was bedeutet die Markov-Eigenschaft anschaulich?

Lösungsskizze:

(a) (i) **wahr:** Ein strikt stationärer Prozess $(X_t)_{t\in T}$ heißt ARCH(p)-Prozess, falls für einen strikt positiven Prozess $(\sigma_t)_{t\in T}$ folgende Gleichungen bestehen:

$$X_t = \sigma_t Z_t, \quad \sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p \geq 0.$$

Hierbei ist $(Z_t)_{t\in T}$ ein striktes Weißes Rauschen SWN(0, 1). Gilt

$$\sigma_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{p} \alpha_i X_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^{q} \beta_j \sigma_{t-j}^2, \quad \alpha_0 > 0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p, \beta_1, \ldots, \beta_q \geq 0,$$

so handelt es sich um einen GARCH(p,q)-Prozess.

Sind beim ARCH-Modell $|X_{t-1}|, |X_{t-2}|, \ldots |X_{t-p}|$ groß, so ist auch die Volatilität σ_t und damit – modulo Wirkung des Shocks Z_t aus dem Rauschen – $|X_t|$ hoch. Selbiges gilt für den GARCH-Prozess, sodass beide Zeitreihenmodelle in der Tat Volatilitätscluster abbilden. Dabei sind die Perioden hoher Volatilität beim GARCH-Modell wie behauptet persistenter als im ARCH-Modell, da σ_t^2 explizit auch von $\sigma_{t-1}^2, \sigma_{t-2}^2, \ldots, \sigma_{t-q}^2$ abhängt.

(ii) **falsch:** Die Anwendung der Itô-Formel (Version 2) auf $X_t = 5(W_t)^2 + 10t = f(W_t, t)$ mit $f(w, t) = 5w^2 + 10t$ und den partielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial w} f(w,t) = 10w, \ \frac{\partial}{\partial t} f(w,t) = 10, \ \frac{\partial^2}{(\partial w)^2} f(w,t) = 10$$

ergibt

$$\begin{aligned} dX_t = df(W_t, t) &= \frac{\partial}{\partial w} f(W_t, t)\, dW_t + \left(\frac{\partial}{\partial t} f(W_t, t) + \frac{1}{2} \frac{\partial^2}{(\partial w)^2} f(W_t, t)\right) dt \\ &= 10 W_t\, dW_t + 15\, dt. \end{aligned}$$

Da der Drift-Term in der SDE nicht verschwindet, ist $(X_t)_{t\geq 0}$ kein Martingal und damit kein Kandidat für einen diskontierten Preisprozess.

Hinweis: Alternativ kann das Fehlen der Martingaleigenschaft $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_t|\mathcal{F}_s] = X_s$ für alle $0 \leq s < t$ direkt nachgerechnet werden.

(iii) **falsch:** Im Heston-Modell sind der diskontierte Aktienpreisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ und die zugehörige Volatilität unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ für zwei korrelierte $\mathbb{Q}$-Wiener-Prozesse $W^{\mathbb{Q}}, B^{\mathbb{Q}}$ modelliert durch:

$$\begin{aligned} d\widetilde{S}_t &= \sigma_t \widetilde{S}_t \, dW_t^{\mathbb{Q}}, \\ \sigma_t &= \sqrt{v_t}. \end{aligned}$$

Der Prozess v heißt „variance“ und ist definiert durch einen *Cox-Ingersoll-Ross-Prozess*

$$dv_t = \kappa(\theta - v_t)\, dt + \xi \sqrt{v_t}\, dB_t^{\mathbb{Q}}.$$

Insofern ist die Volatiltät $(\sigma_t)_{t\geq 0}$ ein eigenständiger stochastischer Prozess und nicht wie behauptet eine Funktion der Zeit und des aktuellen Aktienpreises.

(b) (i) Bei Zeitreihen im Immobilienbereich wird häufig eine Autokorrelation durch Verzerrungen im Bewertungsprozess induziert, u. a.:

- Ankerfunktion vorangegangener Wertgutachten,
- Vernachlässigung/Fehlen aktueller Marktdaten,
- zeitversetzte Bewertung einzelner Immobilien.

Das Blundell-Ward-Verfahren korrigiert die Varianz einer Zeitreihe von Renditen R_t, $t = 1, 2, \ldots$, gemäß $\mathrm{Var}(R_t^*) = \mathrm{Var}(R_t)\frac{1-a^2}{(1-a)^2}$, also

$$\sigma(R^*) = \sigma(R)\sqrt{\frac{1-a^2}{(1-a)^2}} = 0{,}04 \cdot \frac{\sqrt{1-0{,}8^2}}{1-0{,}8} = 0{,}12 \quad (12\%).$$

Der Erwartungswert bleibt unverändert, d. h. $\mu(R^*) = \mu(R) = 5\%$.

(ii) Für die Sharpe-Ratios SR der Einperiodenrenditen gilt

$$\mathrm{SR}(R) = \frac{\mu(R)-r}{\sigma(R)} = \frac{0{,}05-0{,}02}{0{,}04} = 0{,}75, \quad \mathrm{SR}(R^*) = \frac{\mu(R^*)-r}{\sigma(R^*)} = \frac{0{,}05-0{,}02}{0{,}12} = 0{,}25.$$

Die Verwendung unbereinigter Immobilienzeitreihen führt zu einer Unterschätzung der Volatilität und damit ceteris paribus zu einer Überschätzung der Sharpe-Ratio, die insbesondere ein risikoadjustiertes Perfomancemaß darstellt. Damit können Risiko-Return-Analysen (z. B. im klassischen Markowitz-Modell, angewendet auf der Ebene der Hauptanlageklassen) ein verzerrtes Bild ergeben und zu einer suboptimalen Asset-Allokation führen.

(c) (i) Die Itô-Integrale $(\int_0^t e^{as}\, dW_s)_{t\geq 0}$ der deterministischen Funktion $t \mapsto f(t) = e^{at}$ stellen einen Gauß'schen Prozess mit eindimensionalen Randverteilungen

$$\int_0^t e^{as}\, dW_s \sim \mathcal{N}\left(0, \int_0^t (e^{as})^2\, ds\right) = \mathcal{N}\left(0, \tfrac{1}{2a}(e^{2at}-1)\right)$$

dar. Aus der expliziten Darstellung des Ornstein-Uhlenbeck-Prozesses (Skalierung des Itô-Integrals mit dem deterministischen Faktor be^{-at} sowie Verschiebung um die deterministische Größe $x_0 e^{-at}$) folgt daher, dass auch der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess selbst ein Gauß'scher Prozess ist. Insbesondere folgt mit den Rechenregeln für Erwartungswert und Varianz

$$X_t \sim \mathcal{N}\left(x_0 e^{-at}, \frac{b^2}{2a}(1 - e^{-2at})\right).$$

(ii) Da X_t normalverteilt ist, nimmt X_t Werte unterhalb jeder negativen Schranke mit positiver Wahrscheinlichkeit an. Die Verwendung des OU-Prozesses als Modell für die Short-Rate (Vasicek-Modell) führt daher zu negativen Zinsen. Dies war im Niedrig- bzw. sogar Negativzinsumfeld, das bis 2022 vorlag, grundsätzlich sinnvoll. Gleichwohl können die Zinsen im Modell beliebig negativ werden, was bei stark negativen Zinsen ggf. unrealistisch und zudem aufgrund der „Bargeldhaltungsoption" kritisch zu sehen ist.

(iii) Die explizite Darstellung zeigt zugleich für $0 \leq s < t$

$$X_t = e^{-a(t-s)} X_s + be^{-at} \int_s^t e^{au}\, dW_u.$$

Da die Inkremente des Wiener-Prozesses in $\int_s^t e^{au}\, dW_u$ unabhängig von der Information $\mathcal{F}_s$ sind und X_s $\mathcal{F}_s$-messbar ist, ergibt sich unmittelbar die Markov-Eigenschaft:

$$\mathbb{E}[h(X_t)|\mathcal{F}_s] = g(X_s, s).$$

Diese bedeutet, dass der Prozess „gedächtnislos" ist, d. h. die zukünftige Entwicklung ab dem Zeitpunkt s hängt nur vom aktuellen Wert X_s des Prozesses ab, während die Historie bis zum Zeitpunkt s irrelevant für die weitere Entwicklung ist.

Hinweis: Alternativ kann argumentiert werden, dass der Ornstein-Uhlenbeck-Prozess als Lösung der SDE $dX_t = -aX_t\, dt + b\, dW_t$ ein Diffussionsprozess ist und alle Diffussionsprozesse die Markov-Eigenschaft besitzen.

Aufgabe 4. *[Verallgemeinerte real-world Zinsmodelle] [25 Punkte]*

(a) *[13 Punkte]* [Allgemeines] Angenommen, Sie sind damit beauftragt, ein Zinsmodell für eine Währung zu entwickeln, das mögliche sinnvolle zukünftige Zinsentwicklungen nach einem Jahr generieren kann. Das Modell soll später zur Risikomessung verwendet werden. Sie machen sich Gedanken, ob eine Hauptkomponentenanalyse (*Principal Component Analysis, PCA*) sinnvoll sein könnte. Da das betreffende Land vor einem Jahr eine neue Währung herausgebracht hat, liegen Ihnen für die aktuelle Währung nur tägliche Zinsdaten vor, die innerhalb des letzten Jahres auftraten.

(i) *[3 Punkte]* Nennen Sie drei generelle Gründe, die für eine Verwendung einer PCA bei der Zinskurvenmodellierung sprechen.

(ii) *[3 Punkte]* Nennen Sie Ihre Erwartung, welche Gestalt die ersten drei Basisfunktionen besitzen werden.

(iii) *[2 Punkte]* Nennen Sie zwei Gründe, die in diesem Fall gegen eine Verwendung einer PCA auf den gegebenen Daten sprechen könnten.

(iv) *[2 Punkte]* Skizzieren Sie *kurz* einen Ansatz in zwei Stichpunkten, wie Sie ein einfaches Zinsmodell mithilfe der PCA basierend auf den genannten Daten aufbauen könnten.

(v) *[3 Punkte]* Nennen Sie zwei unterschiedliche Möglichkeiten, wie Sie das Problem der kurzen Datenhistorie sinnvoll lösen könnten, wenn Ihnen Zinsdaten von weiteren Währungen mit unterschiedlichen längeren Zeitfenstern vorliegen. Begründen Sie, welche Lösung Sie vorziehen würden.

(b) *[6 Punkte]* [Rechnung] Es sei Ihnen nur der erste Eigenvektor EV_1 einer PCA zu gegebenen zweidimensionalen Datenpunkten bekannt mit $EV_1^T := [\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]^T \approx [0{,}707; 0{,}707]^T$. Sei $x := [7; -7]^T$ aus der zentrierten Punktwolke, die Sie modellieren.

(i) *[1 Punkt]* Berechnen Sie PC_1 von x.

(ii) *[1 Punkt]* Begründen Sie anschaulich das Ergebnis aus (i).

(iii) *[3 Punkte]* Schreiben Sie EV_2 auf und berechnen anschließend PC_2 von x.

(iv) *[1 Punkt]* Begründen Sie *kurz*, warum die Faktorladungen eines Punktes in einer PCA zu gegebenen Eigenvektoren eindeutig sind.

(c) *[6 Punkte]* Nennen Sie drei Gemeinsamkeiten und drei Unterschiede zwischen der PCA und dem Nelson-Siegel-Modell.

Lösungsskizze:

(a) (i)
- Gute Abbildung historischer Zinskurvenbewegungen mit wenigen Parametern
- Dimensionsreduktion
- Einfache Berechnung der Faktorladungen durch Matrixmultiplikation
- Unkorreliertheit der historischen Faktorladungen

[*Weitere Nennungen sind möglich.*]

(ii) Parallelshift, Steigung, Krümmung

(iii)
- Da das Zeitfenster nur ein Jahr beträgt, können keine jährlichen Änderungen gebildet werden.
- Das Datenfenster beträgt nur ein Jahr und ist damit sehr kurz, um sinnvolle Aussagen über die zukünftige Gestalt von Zinsänderungen wie auch die Verteilung von Faktorladungen zu tätigen.

[*Andere Antworten sind möglich, sofern diese sinnvoll sind.*]

(iv)
- Betrachtung von unterjährigen Änderungen
- Anschließende Annualisierung der Verteilungen der Faktorladungen zur Generierung von Szenarien zukünftiger Zinskurven

[*Andere Antworten sind möglich, sofern diese sinnvoll sind.*]

(v)
- Verwendung einer anderen Währung mit längerer Datenhistorie, die in dem gegebenen Zeitfenster eine hohe Korrelation zu dieser Währung aufweist und Sie erwarten, dass dies auch zukünftig der Fall sein wird.
- Verwendung der Währung dieses Landes mit einem Zeitfenster bis zur Währungsumstellung, also vor dem gegebenen Zeitfenster. Ggf. Korrektur oder Streichung der Zinsdaten kurz vor der Währungsumstellung, da die Bewegungen extrem aussehen könnten.
- Wahl: Nutzung einer anderen Währung mit voraussichtlich ähnlichem zukünftigen Verhalten, um manuelle Datenkorrekturen zu vermeiden.

[*Andere Antworten sind möglich, sofern diese sinnvoll sind.*]

(b) (i) $PC_1 = x^T EV_1 = [7;-7]\left[\frac{1}{\sqrt{2}};\frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T = \frac{7}{\sqrt{2}} - \frac{7}{\sqrt{2}} = 0$

(ii) Der Punkt x besitzt keine Ausbreitung in Richtung EV_1. Deshalb ist die Faktorladung PC_1 in diese Richtung gleich null.

(iii) Es wird eine normierte und orthogonale Ergänzung mit Länge 1 von EV_1 gesucht. Da EV_1 auf der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten liegt, liegt $EV_2 := [-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}]^T$ auf der Winkelhalbierenden des zweiten Quadranten und erfüllt die Orthogonalitäts- und Normierungsbedingung. Es muss nur das Vorzeichen des zweiten Eintrags des Vektors EV_1 umgedreht werden. (Alternativ hätte auch das Vorzeichen des zweiten Eintrags des Vektors EV_1 umgedreht werden können.) Damit kann PC_2 berechnet werden:

$$PC_2 = x^T EV_2 = [7; -7]\left[-\frac{1}{\sqrt{2}}; \frac{1}{\sqrt{2}}\right]^T = -\frac{7}{\sqrt{2}} - \frac{7}{\sqrt{2}} = -\frac{14}{\sqrt{2}} \approx -9{,}899$$

Da die EVs bis auf das Vorzeichen eindeutig sind, hätte auch $EV_2 := [\frac{1}{\sqrt{2}}; -\frac{1}{\sqrt{2}}]^T]$ gewählt werden können. Damit wäre $PC_2 \approx 9{,}899$.

(iv) Mögliche Antworten:

- Die PCA stellt nach Konstruktion eine injektive Koordinatentransformation des ursprünglichen Raumes dar.
- Die Eigenvektoren sind linear unabhängig.

[*Weitere Antworten sind möglich.*]

(c) Gemeinsamkeiten:

- Können beide zur Beschreibung von Zinskurven verwendet werden
- Kleinste-Quadrate-Minimierung zur Bestimmung der Modellparameter
- Grob ähnliche Interpretation der Basisfunktionen möglich: Parallelverschiebung, Steigung, Krümmung

Unterschiede:

- PCA auch für beliebige Transformationen von Zinskurvenänderungen möglich
- Basisfunktionen sind diskret vs. stetig
- Extrapolation bei Nelson-Siegel automatisch gegeben, bei PCA nicht

[*Weitere Nennungen sind möglich.*]

Aufgabe 5. *[Bewertung von Optionen im Black-Scholes-Modell] [40 Punkte]*

Angenommen, das Portfolio Ihrer Versicherung enthält Aktien des nachhaltigen Wohnungsbauunternehmens „Green Living AG“, dessen Aktien an der Börse gehandelt werden. Sie entscheiden sich, den Aktienpreisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ zur Risikomessung unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ durch eine geometrische Brownsche Bewegung mit Drift-Parameter $\mu \in \mathbb{R}$ und Volatilitätsparameter $\sigma > 0$ zu modellieren, wobei der Zufall unter $\mathbb{P}$ durch einen Wiener-Prozess $(W_t^{\mathbb{P}})_{t\geq 0}$ getrieben ist, der die Informationsfiltration $(\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}$ erzeugt. In konsistenter Form verwenden Sie das assoziierte Black-Scholes-Modell mit Zeithorizont T für Bewertungszwecke. Hierbei ist die Wertentwicklung des Geldmarktfonds bei stetiger Verzinsung mit Zinsrate $r \geq 0$ gegeben durch $B_t = e^{rt}$, $t \geq 0$.

(a) *[4 Punkte]* Geben Sie *mit kurzer Begründung* zwei Kritikpunkte an, die Kolleg*innen aus empirischer Sicht an Ihrem Modellierungsansatz bemängeln könnten. Unterscheiden Sie dabei zwischen der real-world und der risikoneutralen Perspektive.

(b) *[9 Punkte]*

(i) *[3 Punkte]* Geben Sie die Dynamik des Aktienpreisprozesses $(S_t)_{t\geq 0}$ unter dem real-world Maß $\mathbb{P}$ an. Berechnen Sie anschließend mithilfe der Itô-Formel formal unter $\mathbb{P}$ die Dynamik des diskontierten Aktienpreisprozesses $\widetilde{S}_t := e^{-rt}S_t$, $t \geq 0$.

(ii) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie das eindeutige äquivalente Martingalmaß $\mathbb{Q}$ mithilfe einer geeigneten Girsanov-Transformation. Erläutern Sie dabei *kurz* Ihr Vorgehen. Welche Dynamik besitzt der Aktienpreisprozess unter $\mathbb{Q}$?

(iii) *[3 Punkte]* Begründen Sie, dass unter dem äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ für die Aktie $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t] = S_0 e^{rt}$, $t \in [0, T]$, gilt. Interpretieren Sie diese Gleichung *ökonomisch*.

(c) *[10 Punkte]* Ihnen wird ein Finanzderivat angeboten, das Ihnen zur Maturität $T > 0$ in Abhängigkeit des Aktienkurses S_T die Auszahlung $C_T := 10(S_T)^4 + 50$ liefert.

(i) *[5 Punkte]* Leiten Sie eine explizite Formel zur Berechnung des arbitrage-freien Preises C_t des Finanzderivats zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ her. Zeigen Sie dabei insbesondere, dass $C_t = v(S_t, t)$ für eine geeignete Funktion v gilt.

Hinweis: Für $X \sim \mathcal{N}(0, \gamma^2)$ und $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathbb{E}[\exp(aX)] = \exp(\frac{1}{2}a^2\gamma^2)$.

(ii) *[5 Punkte]* Berechnen Sie eine dynamische Hedging-Strategie, mit der Ihre Gegenpartei die Auszahlung C_T durch Handel von Geldmarktfonds und Aktie theoretisch perfekt absichern kann. Wie hoch sind die Kosten für die Implementierung der Hedging-Strategie?

(d) *[5 Punkte]* Der arbitrage-freie Preis einer Europäischen Call-Option auf die Aktie mit Maturität T und Strike $K > 0$ ist zum Zeitpunkt $t \in [0, T]$ gegeben durch $C_t^{\text{call}} = v^{\text{call}}(S_t, t)$ für die Funktion

$$v^{\text{call}}(x, t) = x\Phi(d_+(x, t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(x, t)),$$

wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet und folgende Konstanten verwendet werden:

$$d_{\pm}(x,t) = \frac{\ln(x/K) + (r \pm \frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}{\sigma\sqrt{T-t}}.$$

Erläutern Sie inklusive Herleitung die *Put-Call-Parität* und nutzen Sie diese, um eine Formel für den Preis C_t^{put} einer Europäischen Put-Option auf die Aktie mit Maturität T und Strike $K > 0$ zum Zeitpunkt t herzuleiten.

Hinweis: Es gilt $\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(e) *[8 Punkte]* Bei einer *Lookback-Put-Option* auf die Aktie $(S_t)_{t\geq 0}$ mit Maturität $T > 0$ ist das Auszahlungsprofil

$$C_T^{\text{LP}} := \max_{t\in[0,T]} S_t - S_T$$

abhängig vom gesamtem Kursverlauf bis zum Zeitpunkt T. Ihnen steht ein Rechenprogramm zur Verfügung, mit dem Sie beliebig viele Zufallszahlen $z_1, z_2, \ldots$ aus einer Standardnormalverteilung generieren können.

(i) *[5 Punkte]* Erläutern Sie, wie Sie zur Bewertung dieser Option in $t = 0$ mit *Monte-Carlo-Methoden* vorgehen.

(ii) *[3 Punkte]* Geben Sie an, warum der Monte-Carlo-Ansatz grundsätzlich eine Approximation darstellt, und erklären Sie, wie man dem Approximationsfehler in der praktischen Anwendung Rechnung tragen kann.

(f) *[4 Punkte]* Betrachten Sie ein Teilportfolio, das aus 100 Aktien der „Green Living AG“ und 20 ausfallfreien Nullkuponanleihen (Nennwert pro Anleihe: 1000 €, Restlaufzeit: 1 Jahr) besteht. Stellen Sie für den Aktienkurs $S_0 = 200$ € am Jahresanfang – in Abhängigkeit der Parameter μ, σ, r – Formeln für die Werte V_0, V_1 dieses Teilportfolios zu den Zeitpunkten 0 und 1 auf.

Leiten Sie auf Basis der Verteilungsfunktion Φ der Standardnormalverteilung eine explizite Berechnungsformel für die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}[V_1 < V_0]$ her, dass der Portfoliowert V_1 in einem Jahr unter den Startportfoliowert V_0 fällt.

Lösungsskizze:

(a) Empirische Kritikpunkte am Black-Scholes-Modell:

- *real-world:* Q-Q-Plots zum Vergleich der empirischen Verteilung historischer, täglicher Log-Renditen von Aktien mit der Normalverteilung weisen typischerweise eine „invertierte S-Form“ auf und weichen von einer Geraden ab. Dies bedeutet, dass die Normalverteilung kein geeignetes Modell für die Verteilung täglicher Log-Renditen ist, während Log-Renditen im Black-Scholes-Modell normalverteilt sind. Weiterhin zeigen Zeitreihengraphen historischer Log-Renditen von Aktien, dass die Volatilität

im Zeitverlauf variiert und extreme Renditen in Clustern auftreten (Volatility Clustering), im Widerspruch zur konstanten Volatilität im Black-Scholes-Modell.

- *risikoneutral:* Berechnet man aus Marktpreisen für z. B. Call-Optionen die *Implizite Volatilität*, so zeigen sich Abhängigkeiten von der Maturität und dem Strike. Dies ist ein Widerspruch zum konstanten Volatilitätsparameter σ im Black-Scholes-Modell.

Hinweis: Kritisch angemerkt werden kann grundsätzlich auch, dass die Zinsrate des Sparbuchs konstant ist (im Gegensatz zur Modellierung eines Geldmarktfonds mithilfe eines stochastischen Short-Rate-Prozesses) sowie dass der Aktienpreisprozess stetige Pfade besitzt und damit Kurssprünge nicht modelliert werden.

(b) (i) Der Preisprozess $(S_t)_{t\geq 0}$ der Aktie besitzt unter dem Maß $\mathbb{P}$ die Dynamik

$$dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{P}}), \quad \mu \in \mathbb{R}, \sigma > 0, S_0 = s > 0.$$

Die Funktion $f(x,t) = e^{-rt}x$ erlaubt die Darstellung der diskontierten Aktienpreise $\widetilde{S}_t = e^{-rt}S_t$, $t \geq 0$, in der Form $\widetilde{S}_t = f(S_t, t)$. Mit der Itô-Formel folgt für die Dynamik des Prozesses $(\widetilde{S}_t)_{t\geq 0}$ daher

$$d\widetilde{S}_t = df(S_t,t) = \frac{\partial}{\partial x}f(S_t,t)\,dS_t + \frac{\partial}{\partial t}f(S_t,t)\,dt + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{(\partial x)^2}f(S_t,t)\,d\langle S\rangle_t.$$

Da die Ableitung $\frac{\partial^2}{(\partial x)^2}f$ verschwindet, erhält man somit

$$d\widetilde{S}_t = e^{-rt}\,dS_t - re^{-rt}S_t\,dt = \widetilde{S}_t\sigma(dW_t^{\mathbb{P}} + \tfrac{\mu-r}{\sigma}\,dt). \tag{1}$$

(ii) $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ ist nach (1) ein Martingal bezüglich eines Maßes $\mathbb{Q}$ (Martingalmaß), falls

$$W_t^{\mathbb{Q}} = W_t^{\mathbb{P}} + \int_0^t \frac{\mu-r}{\sigma}\,du, \quad t \in [0,T], \tag{2}$$

ein Wiener-Prozess unter $\mathbb{Q}$ ist. Zur Konstruktion des (eindeutig bestimmten!) äquivalenten Martingalmaßes $\mathbb{Q}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}_T)$ wird der Satz von Girsanov verwendet: Definiert man $\mathbb{Q}$ durch die Dichte

$$\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_T} = e^{-\int_0^T \frac{\mu-r}{\sigma}\,dW_u^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\int_0^T\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 du} = e^{-\frac{\mu-r}{\sigma}W_T^{\mathbb{P}} - \frac{1}{2}\left(\frac{\mu-r}{\sigma}\right)^2 T},$$

d. h. $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}}|_{\mathcal{F}_T}X]$, so ist der Prozess $(W_t^{\mathbb{Q}})_{\in[0,T]}$ ein $\mathbb{Q}$-Wiener-Prozess bis zur Zeit T. Für die Dynamik von $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ unter $\mathbb{Q}$ gilt

$$d\widetilde{S}_t = \widetilde{S}_t\sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}},$$

d. h. der diskontierte Preisprozess $(\widetilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ ist in der Tat ein $\mathbb{Q}$-Martingal.

Für die Dynamik des Aktienpreises $(S_t)_{t\in[0,T]}$ unter $\mathbb{Q}$ erhält man via (2)

$$dS_t = S_t(\mu\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{P}}) = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}}), \tag{3}$$

d. h. $(S_t)_{t\in[0,T]}$ ist unter $\mathbb{Q}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilitätsparameter σ.

(iii) Da der diskontierte Aktienpreisprozess $(\tilde{S}_t)_{t\in[0,T]}$ unter $\mathbb{Q}$ ein Martingal ist, gilt $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_t] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\tilde{S}_0] = \tilde{S}_0$ bzw. nach Multiplikation mit e^{rt} wie behauptet $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[S_t] = S_0 e^{rt}$. Dies bedeutet, dass sich unter dem Martingalmaß $\mathbb{Q}$ der Wert einer Aktie im Mittel wie eine Anlage im Sparbuch mit risikofreiem Zins r entwickelt. Man nennt daher $\mathbb{Q}$ auch risikoneutrales Maß.

(c) (i) Im Black-Scholes-Modell ist der Aktienpreisprozess unter dem eindeutigen äquivalenten Martingalmaß $\mathbb{Q}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilitätsparameter σ, siehe (b) (ii). Somit folgt für den arbitrage-freien Preis im Zeitpunkt t mit risikoneutraler Bewertung

$$\begin{aligned}
C_t &= e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[10(S_T)^4 + 50|\mathcal{F}_t] \\
&= 10e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_T)^4|\mathcal{F}_t] + 50e^{-r(T-t)} \\
&= 10e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t e^{\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})+(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)})^4|\mathcal{F}_t] + 50e^{-r(T-t)} \\
&= 10e^{-r(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[(S_t)^4 e^{4\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})}e^{4(r-\frac{1}{2}\sigma^2)(T-t)}|\mathcal{F}_t] + 50e^{-r(T-t)} \\
&= 10(S_t)^4 e^{(4(r-\frac{1}{2}\sigma^2)-r)(T-t)}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{4\sigma(W_T^{\mathbb{Q}}-W_t^{\mathbb{Q}})}] + 50e^{-r(T-t)} \\
&= 10(S_t)^4 e^{(3r-2\sigma^2)(T-t)}e^{\frac{1}{2}16\sigma^2(T-t)} + 50e^{-r(T-t)} \\
&= 10(S_t)^4 e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)} + 50e^{-r(T-t)}.
\end{aligned}$$

Fazit: $C_t = v(S_t, t)$ mit $v(x,t) = 10x^4 e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)} + 50e^{-r(T-t)}$

(ii) Man berechnet via Delta-Hedging die dynamische Absicherungsstrategie:

- *Einheiten Aktie:*
$$\vartheta_t^S = \tfrac{\partial}{\partial x} v(S_t, t) = 40 S_t^3 e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)}$$
- *Einheiten Geldmarktfonds:* Mit $V_t^{\vartheta} = C_t$ als Wertprozess der Handelsstrategie folgt
$$\vartheta_t^B = \tfrac{V_t^{\vartheta} - \vartheta_t^S S_t}{B_t} = -30(S_t)^4 e^{(3r+6\sigma^2)(T-t)-rt} + 50e^{-rT}.$$
Der arbitrage-freie Preis C_t entspricht in jedem Zeitpunkt den Kosten der Replikation.

(d) Für $z \in \mathbb{R}$ gilt $(z-K)^+ - (K-z)^+ = z-K$. Dies führt bei risikoneutraler Bewertung aufgrund der Martingaleigenschaft des diskontierten Aktienpreisprozesses unter $\mathbb{Q}$ zur Put-Call-Parität

$$\begin{aligned}
C_t^{\text{call}} - C_t^{\text{put}} &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T-K)^+|\mathcal{F}_t] - \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(K-S_T)^+|\mathcal{F}_t] \\
&= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T-K)|\mathcal{F}_t] = S_t - e^{-r(T-t)}K,
\end{aligned}$$

d. h. die Preise von Aktie, Call- und Put-Option sind abhängig voneinander. Sind zwei dieser Preise bekannt, so kann der dritte mit der Put-Call-Parität berechnet werden. Insbesondere folgt $C_t^{\text{put}} = v^{\text{put}}(S_t, t)$ mit einer Preisfunktion, die $v^{\text{call}}(x,t) - v^{\text{put}}(x,t) = x - e^{-r(T-t)}K$

erfüllt. Umstellen liefert zusammen mit dem Hinweis $\Phi(-x) = 1-\Phi(x)$ die Bewertungsformel

$$\begin{aligned} v^{\text{put}}(x,t) &= x\Phi(d_+(x,t)) - e^{-r(T-t)}K\Phi(d_-(x,t)) - x + e^{-r(T-t)}K \\ &= -x[1-\Phi(d_+(x,t))] + e^{-r(T-t)}K[1-\Phi(d_-(x,t))] \\ &= -x\Phi(-d_+(x,t)) + e^{-r(T-t)}K\Phi(-d_-(x,t)). \end{aligned}$$

(e) (i) Der arbitrage-freie Preis der Lookback-Put-Option in $t = 0$ entspricht dem Erwartungswert der diskontierten Auszahlung unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$:

$$C_0^{\text{LP}} = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}C_T^{\text{LP}}] = e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\max_{t\in[0,T]} S_t - S_T\right].$$

Monte-Carlo-Schätzer:

Für eine Zerlegung $0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_k$, $k \in \mathbb{N}$ (o. B. d. A. $t_k = T$), des Zeitintervalls $[0, T]$ mit hinreichend klein gewählter äquidistanter Schrittweite $h > 0$ gilt aufgrund der Stetigkeit der Pfade der geometrischen Brownschen Bewegung $\max_{t\in[0,T]} S_t - S_T \approx \max_{i=1,\ldots,k} S_{t_i} - S_T$ und damit

$$C_0^{\text{LP}} \approx e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\max_{i=1,\ldots,k} S_{t_i} - S_T\right].$$

Dieser Erwartungswert kann mithilfe einer „hinreichend“ großen Anzahl n von unabhängig simulierten (diskretisierten) Pfaden des Aktienpreisprozesses $\{s_{t_1}(j), s_{t_2}(j), \ldots, s_{t_k}(j)\}$, $j = 1, \ldots, n$, approximiert werden:

$$C_0^{\text{LP}} \approx e^{-rT}\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left[\max_{i=1,\ldots,k} S_{t_i} - S_T\right] \approx e^{-rT}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\max_{i=1,\ldots,k} s_{t_i}(j) - s_{t_k}(j)\right). \tag{4}$$

Simulation der Pfade:

Bei der Simulation ist zu beachten, dass der Aktienpreisprozess unter $\mathbb{Q}$ eine geometrische Brownsche Bewegung mit Driftparameter r und Volatilitätsparameter σ ist. Zur Simulation der Pfade bietet sich die direkte Simulation ausgehend von der geschlossenen Lösung der Stochastischen Differentialgleichung an:

$$s_{t_i}(j) = S_0 \exp(\sigma\sqrt{h}\sum_{l=1}^{i} z_l(j) + (r - \tfrac{1}{2}\sigma^2)hi), \quad i = 1, \ldots, k, j = 1, \ldots, n.$$

Hierbei werden für jeden Pfad j neue (unabhängig gezogene) standardnormalverteilte Zufallszahlen $z_1(j), \ldots, z_k(j)$ verwendet. Denkbar (wenn auch weniger exakt und damit eine weitere Approximation) wäre auch ausgehend vom Startpreis S_0 und der SDE $dS_t = S_t(r\,dt + \sigma\,dW_t^{\mathbb{Q}})$ eine Diskretisierung gemäß Euler-Verfahren mit Schrittweite $h > 0$, sodass die Werte des Aktienpreisprozesses zu den relevanten Zeitpunkten inkludiert sind:

$$s_{t_i}(j) = s_{t_{i-1}}(j) + r s_{t_{i-1}}(j)h + \sigma s_{t_{i-1}}(j)\sqrt{h}z_i(j), \; i = 1, \ldots, k.$$

(ii) Der Monte-Carlo-Ansatz wird durch das starke Gesetz der großen Zahlen gerechtfertigt, das für $n \uparrow \infty$ die Konvergenz der rechten Seite in (4) gegen den gesuchten Erwartungswert impliziert. Bei einer endlichen Anzahl von Pfaden liefert es grundsätzlich jedoch nur eine Approximation des gesuchten Erwartungswerts. Da in Bewertungsmodellen die Anzahl der simulierten Pfade endlich (und oft der Rechengeschwindigkeit geschuldet zu klein) ist, kann eine bemerkenswerte Abweichung (Monte-Carlo-Fehler) bzw. Instabilität in Abhängigkeit des Seeds der Zufallszahlen vorliegen. In praktischen Anwendungen muss der Monte-Carlo-Fehler daher kontrolliert (z. B. Konfidenzintervalle) und limitiert werden: hinreichend hohe Anzahl von Simulationen und/oder Einsatz von Varianzreduktionstechniken (z. B. antithetische Zufallszahlen, Importance Sampling, Stratified Sampling).

(f) Das Teilportfolio hat zu den Zeitpunkten 0 bzw. 1 die Werte

$$\begin{aligned} V_0 &= 100 \cdot S_0 + 20 \cdot 1000 e^{-r} = 20000(1 + e^{-r}) \\ V_1 &= 100 \cdot S_1 + 20 \cdot 1000 \\ &= 100 \cdot S_0 \exp(\sigma W_1^{\mathbb{P}} + \mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) + 20000 \\ &= 20000(\exp(\sigma W_1^{\mathbb{P}} + \mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2) + 1) \end{aligned}$$

wobei der Zufall bei V_1 nur durch die stetige Zufallsvariable $W_1^{\mathbb{P}} \sim \mathcal{N}(0,1)$ getrieben wird. Damit berechnet man:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[V_1 < V_0] &= \mathbb{P}[20000(e^{\sigma W_1^{\mathbb{P}} + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2} + 1) < 20000(1 + e^{-r})] \\ &= \mathbb{P}[e^{\sigma W_1^{\mathbb{P}} + \mu - \frac{1}{2}\sigma^2} < e^{-r}] \\ &= \mathbb{P}[\sigma W_1^{\mathbb{P}} + \mu - \tfrac{1}{2}\sigma^2 < -r] \\ &= \mathbb{P}[W_1^{\mathbb{P}} < \tfrac{1}{\sigma}\left(-\mu - r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)] \\ &= \Phi\left(\tfrac{1}{\sigma}\left(-\mu - r + \tfrac{1}{2}\sigma^2\right)\right). \end{aligned}$$

Aufgabe 6. *[Bewertung im Zinsbereich] [40 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* [LMM und HJM-Modell]

Grenzen Sie das *LIBOR-Marktmodell* (LMM) und das *Heath-Jarrow-Morton-Modell* (HJM) in Hinblick auf die jeweils modellierte Größe gegeneinander ab. Stellen Sie den Zusammenhang zwischen diesen beiden Größen dar und geben Sie für die modellierten Größen jeweils den Zusammenhang zur Diskontkurve an.

(b) *[15 Punkte]* [1-Faktor Shortrate-Modelle]

(i) *[5 Punkte]* Vergleichen Sie die stochastischen Bewegungsgleichungen der Shortrate-Prozesse im *Vasicek-Modell* und im *Hull-White-Modell* miteinander. Beschreiben Sie hierbei, welche gemeinsamen Eigenschaften aus den zugrunde liegenden Bewegungsgleichungen abzulesen sind und welche Unterscheidungsmerkmale diese aufweisen. Was können Sie über die Marktkonsistenz der beiden Modelle aussagen?

(ii) *[5 Punkte]* Für das *Hull-White-Modell* ist eine alternative Darstellung des Shortrate-Prozesses $(r_t)_{t\geq 0}$ gebräuchlich, bei der die Shortrate in einen stochastischen Prozess $(x_t)_{t\geq 0}$, der langfristig gegen Null strebt, und eine deterministische Verschiebung $\varphi(t)$ aufgeteilt wird.

Geben Sie die mathematische Formulierung dieses Alternativmodells an, und arbeiten Sie den Zusammenhang der deterministischen Verschiebung mit dem *Mean-Reversion-Level* der ursprünglichen Formulierung heraus.

(iii) *[5 Punkte]* Im *Hull-White-Modell* kann der Wert einer Nullkuponanleihe mit Laufzeit S zur Simulationszeit t als Funktion der am Markt beobachtbaren Startzinskurve $P^M(0, T_i)$ dargestellt werden. Wie lautet diese Darstellung und was impliziert dies für die notwendige maximale Laufzeit der Startzinskurve T_n?

(c) *[19 Punkte]* [2-Faktor Hull-White-Modell]

(i) *[5 Punkte]* Eine Erweiterung des einfachen Hull-White-Modells ist das sogenannte *2-Faktor Hull-White-Modell*. Dieses geht aus dem ursprünglichen 1-Faktor-Modell wie in (b)(i) hervor, indem das zeitabhängige Mean-Reversion-Level um einen zusätzlichen korrelierten stochastischen Term erweitert wird. Der zusätzliche stochastische Term ist ebenfalls ein Mean-Reversion-Prozess mit dem langfristigen Ziel Null.

Stellen Sie die mathematische Formulierung des 2-Faktor Hull-White-Modells auf.

(ii) *[10 Punkte]* Eine alternative Formulierung des 2-Faktor Hull-White-Modells ist das *G2++-Modell*, in dem die Shortrate als Summe von zwei korrelierten *Ornstein-Uhlenbeck-Prozessen* und einer deterministischen Verschiebung folgt, d. h. $r_t = x_t^{(1)} + x_t^{(2)} + \varphi(t)$, wobei

$$dx_t^{(i)} = -\alpha_i x_t^{(i)}\, dt + \sigma_i\, dZ_t^{(i)} \text{ mit } d\langle Z^{(1)}, dZ^{(2)}\rangle_t = \rho\, dt \quad (|\rho| \leq 1)$$

für zwei Wiener-Prozesse $(Z_t^{(1)})_{t\geq 0}$ und $(Z_t^{(2)})_{t\geq 0}$.

Zeigen Sie die Äquivalenz der beiden stochastischen Modelle, indem Sie die Parameter α_i, σ_i, $\varphi(t)$ und ρ in Abhängigkeit der Parameter darstellen, die Sie in der vorangegangenen Aufgabe für das 2-Faktor Hull-White-Modell gewählt haben.

Hinweis: Betrachten Sie die Differentialgleichung für $(r_t)_{t\geq 0}$ und nutzen Sie, dass der Prozess

$$\frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2+2\rho\sigma_1\sigma_2+\sigma_2^2}}(\sigma_1 Z_t^{(1)} + \sigma_2 Z_t^{(2)}), \quad t \geq 0,$$

ebenfalls ein Wiener-Prozess ist.

(iii) *[4 Punkte]* Begründen Sie *qualitativ*, warum ein 2-Faktor Hull-White-Modell dem 1-Faktor Modell überlegen ist.

Lösungsskizze:

(a) Im LIBOR-Marktmodell wird die diskrete Forwardrate $f_t(T, T+\Delta T)$ modelliert, während das HJM-Modell die kontinuierliche Forwardrate $f_t(T)$ betrachtet. Letztere entspricht dem Grenzwert verschwindend kleiner Anlagehorizonte der diskreten Forwardrate, d. h. $f_t(T) = \lim_{\Delta T \downarrow 0} f_t(T, T+\Delta T)$.

Der Zusammenhang mit der Diskontkurve $T \mapsto P(t,T)$ für die beiden Größen stellt sich dar als

$$f_t(T, T+\Delta T) = \frac{1}{\Delta T}\left(\frac{P(t,T)}{P(t,T+\Delta T)} - 1\right),$$
$$f_t(T) = -\frac{\partial \ln P(t,T)}{\partial T}.$$

(b) (i) Für einen Wiener-Prozess $(W_t)_{t\geq 0}$, Konstanten α, σ, θ sowie eine zeitabhängige Funktion $\theta(\cdot)$ lauten die beiden Bewegungsgleichungen:

$$dr_t = \alpha(\theta - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t \qquad \text{(Vasicek-Modell)}$$
$$dr_t = \alpha(\theta(t) - r_t)\,dt + \sigma\,dW_t \qquad \text{(Hull-White-Modell)}$$

Beiden Prozessen ist gemein, dass sie ein „Mean-Reversion-Feature“ mit *Mean-Reversion-Geschwindigkeit* α aufweisen. Der Parameter α skaliert dabei die relative Stärke dieser Asymptotik im Vergleich zum stochastischen Part. Das *Mean-Reversion-Level* θ bzw. $\theta(t)$ gibt an, gegen welchen Wert der deterministische Teil des Prozesses langfristig strebt. Der stochastische Teil wird in beiden Modellen durch den konstanten *Volatilitätsparameter* σ bestimmt, der die Schwankungen des Wiener-Prozesses skaliert und in eine beliebige Richtung treibt, d. h. insbesondere weg vom Mean-Reversion-Level.

Das Hull-White-Modell unterscheidet sich vom Vasicek-Modell durch die Zeitabhängigkeit des Mean-Reversion-Levels. Dadurch ist es möglich, das Hull-White-Modell

so zu kalibrieren, dass eine beliebige Startzinskurve reproduziert werden kann, also auch insbesondere eine marktkonsistente Kalibrierung durchzuführen. Im Gegensatz dazu kann im Vasicek-Modell die Startzinskurve nur an einzelnen Punkten repliziert werden. Die Marktkonsistenz ist also eingeschränkt.

(ii) Die im Seminar vorgestellte alternative Darstellung lautet

$$r_t = x_t + \varphi(t)$$
$$\text{mit } dx_t = -\alpha x_t\,dt + \sigma\,dW_t.$$

Zur Herleitung des Zusammenhangs zwischen $\varphi(t)$ und $\theta(t)$ betrachtet man das Differential dx_t:

$$\begin{aligned} dx_t &= d(r_t - \varphi(t)) = dr_t - \varphi'(t)\,dt \\ &= \alpha\left(\theta(t) - r_t\right)dt + \sigma\,dW_t - \varphi'(t)\,dt \\ &= \alpha\left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha}\varphi'(t) - r_t\right)dt + \sigma\,dW_t \\ &= \alpha\left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha}\varphi'(t) - x_t - \varphi(t)\right)dt + \sigma\,dW_t \\ &= -\alpha x_t\,dt + \sigma\,dW_t + \alpha\left(\theta(t) - \frac{1}{\alpha}\varphi'(t) - \varphi(t)\right)dt. \end{aligned}$$

Der Vergleich mit der oben dargestellten Bewegungsgleichung führt zur Beziehung

$$\theta(t) = \varphi(t) + \frac{1}{\alpha}\varphi'(t).$$

(iii) Die Bondpreise sind im Hull-White-Modell gegeben als

$$P(t,S) = \frac{P^M(0,S)}{P^M(0,t)}\exp\left(-B(t,S)x_t + \frac{1}{2}\left(V(t,S) - V(0,S) + V(0,t)\right)\right).$$

Somit muss die maximale Laufzeit der Startzinskurve mindestens dem maximalen Wert für $T_n = S$ entsprechen.

(c) (i) Die Differentialgleichungen des 2-Faktor Hull-White-Modells lauten

$$dr_t = \bar{\alpha}_1(\theta + u_t - r_t)dt + \bar{\sigma}_1 dW_t^{(1)},$$
$$du_t = -\bar{\alpha}_2 u_t dt + \bar{\sigma}_2 dW_t^{(2)},$$

wobei der Zufall durch zwei Wiener-Prozesse $(W_t^{(1)})_{t\geq 0}$ und $(W_t^{(2)})_{t\geq 0}$ mit quadratischer Kovariation $\langle W^{(1)}, W^{(2)}\rangle_t = \bar{\rho}t$ getrieben wird.

(ii) Man betrachte die stochastische Differentialgleichungen für den Shortrate-Prozess im G2++ Modell:

$$\begin{aligned} dr_t &= dx_t^{(1)} + dx_t^{(2)} + \varphi'(t)\,dt \\ &= -\alpha_1 x_t^{(1)}\,dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} - \alpha_2 x_t^{(2)}\,dt + \sigma_2 dZ_t^{(2)} + \varphi'(t)\,dt \\ &= \alpha_1\left(\tfrac{1}{\alpha_1}\varphi'(t) - x_t^{(1)} - \tfrac{\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)}\right)dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} + \sigma_2\,dZ_t^{(2)} \\ &= \alpha_1\left(\tfrac{1}{\alpha_1}\varphi'(t) + \varphi(t) + \tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)} - r_t\right)dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} + \sigma_2\,dZ_t^{(2)} \\ &= \alpha_1\left(\theta(t) + u_t - r_t\right)dt + \sigma_1\,dZ_t^{(1)} + \sigma_2\,dZ_t^{(2)} \\ &= \bar\alpha_1\left(\theta(t) + u_t - r_t\right)dt + \bar\sigma_1\,dW_t \end{aligned}$$

mit den Identifikationen $\bar\alpha_1 = \alpha_1$, $\theta(t) = \frac{1}{\alpha_1}\varphi'(t) + \varphi(t)$ und $u_t = \frac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)}$ sowie mit dem Wiener-Prozess

$$W_t^{(1)} := \tfrac{1}{\bar\sigma_1}(\sigma_1 Z_t^{(1)} + \sigma_2 Z_t^{(2)}) \quad \text{mit } \bar\sigma_1 := \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + 2\rho\sigma_1\sigma_2},$$

vgl. Hinweis. Die Differentialgleichung für u_t folgt mit $\bar\alpha_2 = \alpha_2$ als

$$\begin{aligned} du_t &= d\left(\tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}x_t^{(2)}\right) \\ &= -\bar\alpha_2 u_t\,dt + \bar\sigma_2\,dZ_t^{(2)} \quad \text{mit } \bar\sigma_2 = \tfrac{\alpha_1-\alpha_2}{\alpha_1}\sigma_2, \end{aligned}$$

sodass sich mit der Identifikation $dW_t^{(2)} = dZ_t^{(2)}$ die Gleichung aus (c)(i) ergibt. Schlussendlich folgt für die quadratische Kovariation der beiden stochastischen Prozesse

$$\begin{aligned} d\langle W_t^{(1)}, dW_t^{(2)}\rangle_t &= d\langle \tfrac{1}{\bar\sigma_1}(\sigma_1 Z_t^{(1)} + \sigma_2 Z_t^{(2)}), Z_t^{(2)}\rangle \\ &= \tfrac{\sigma_1}{\bar\sigma_1}\rho\,dt + \tfrac{\sigma_2}{\bar\sigma_1}\,dt. \end{aligned}$$

Somit ist mit $\bar\rho = \frac{\sigma_1\rho+\sigma_2}{\bar\sigma_1}$ die Äquivalenz der beiden Prozesse nachgewiesen.

(iii) Im 1-Faktor Modell entsprechen die Zinsbewegungen im Wesentlichen einer Parallelverschiebung der Startzinskurve. Somit kann der Einfluss struktureller Änderungen der Zinskurve mit einem solchen Modell nicht angemessen berücksichtigt werden. Das 2-Faktor Modell führt zu deutlich variableren Zinskurven und kann derartige Effekte abbilden. Zudem ist (als Konsequenz der Variabilität) eine bessere Replikation einer vorgegebenen Swaptionvolatilitätsfläche und somit auch ein höherer Grad an Marktkonsistenz möglich.