Schriftliche Prüfung im CERA-Modul B

Klassifizierung und Modellierung und Transfer von Risiken

gemäß Prüfungsordnung 2.0
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 20.10.2023

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 16 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

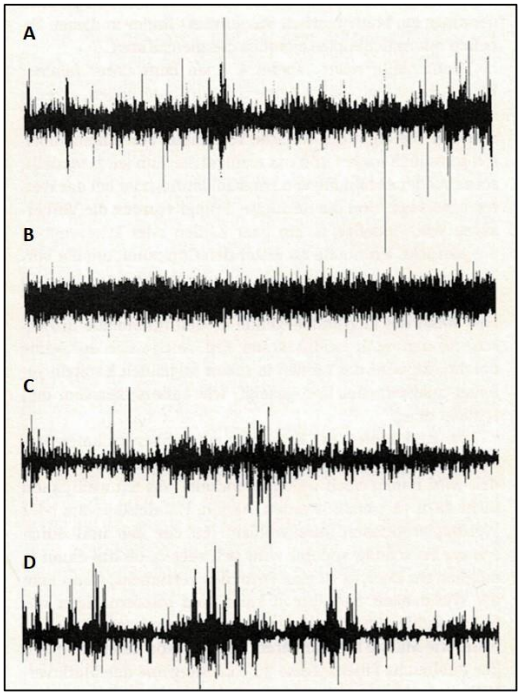
Prof. Dr. Hubert Bornhorn, Dr. Steve Brüske, Dr. Peter Henseler,
Dr. Ingo Kraus, Dr. Nils Langenberg, Dr. Michael Leitschkis

Aufgabe 1. *Aktienrisiken [18 Punkte]*

(a) (2 Punkte) Was versteht man bei Finanzmarktzeitreihen unter sogenannten stilisierten Fakten („stylised facts“)? Geben Sie eine Definition in eigenen Worten!

(b) (4 Punkte) Geben Sie vier Beispiele für stilisierte Fakten bei Finanzmarktzeitreihen und erläutern Sie diese!

(c) (6 Punkte) In den folgenden vier Abbildungen sind Zeitreihen von Renditen dargestellt (horizontal sind die Zeitschritte abgetragen, vertikal die Rendite pro Zeitschritt). Zwei Zeitreihen basieren auf empirischen Daten echter Finanzanlagen, die beiden anderen sind simuliert:



Welche beiden Zeitreihen basieren auf empirischen Daten? Welche beiden Zeitreihen sind simuliert? Stellen Sie begründete Vermutungen auf!
(Quelle der Abbildung: Mandelbrot, Fraktale und Finanzen)

(d) (6 Punkte) Beschreiben Sie eine Ähnlichkeit/einen Unterschied zwischen den Definitionsgleichungen der stochastischen Prozesse geometrische, brownsche Bewegung und Heston-Modell. Gehen Sie weiterhin auch beispielhaft auf einen stilisierten Fakt ein, den das eine Modell reproduzieren kann und das andere nicht.

Aufgabe 2. *Kreditrisiko [18 Punkte]*

(a) (3 Punkte) Analog zur Dollarduration DV01 betrachtet man bei kreditrisikobehafteten Assets die Spread-Duration CS01. Diese zeigt per definitionem an, um wie viele Geldeinheiten sich der Wert eines kreditrisikobehafteten Assets bei einer Parallelverschiebung der Spreads um einen Basispunkt verändert. Bitte schlagen Sie eine Formel zur Berechnung von CS01 mithilfe von zwei Sensitivitäten vor.

(b) (9 Punkte)

i) (3 Punkte) Betrachten Sie eine Anleihe mit einem Nominal von 1M EUR und einer Laufzeit von 5 Jahren. Die risikofreie Zinskurve sei 3% flach, der Spread sei 1% flach. Bestimmen Sie die Dollar-Duration dieser Anleihe.

ii) (3 Punkte) Bestimmen Sie die Spread-Duration der obigen Anleihe.

iii) (3 Punkte) Erläutern Sie kurz, wozu das Konzept der Spread-Duration nützlich sein könnte.

(c) (3 Punkte) Die Anleihe einer bekannten internationalen Fluglinie ist ausgefallen. In den letzten Monaten vor dem Ausfall befand sich der Spread schon klar außerhalb des Investment Grade – Bereichs. Woran wird das vermutlich gelegen haben? Bitte begründen Sie kurz.

(d) (3 Punkte) Die Anleihe eines bekannten internationalen Konsumgüter-Herstellers ist ausgefallen. Kurz vor dem Ausfall bewegte sich ihr Spread noch im Investment Grade – Bereich. Woran wird das vermutlich gelegen haben? Bitte begründen Sie kurz.

Aufgabe 3. *Versicherungstechnik Leben und Kranken [18 Punkte]*

Sie sind bei einem mittelgroßen Lebensversicherer beschäftigt, dessen Portfolio vor allem aus „klassischen" Risikolebensversicherungen (d.h. Einmalleistung bei Todesfall während der Deckungsdauer) besteht.

Nachdem die Pandemie nun -zumindest im Sinne dieser Aufgabe- vorbei ist, möchte Ihr Vorstand eine aktuarielle Analyse haben und stellt sich -d.h. Ihnen- folgende Fragen.

(a) (2 Punkte) Nennen und beschreiben Sie kurz die drei Komponenten des versicherungstechnischen Risikos (gemäß Skript). Welches Risiko wird üblicherweise nicht als Komponente des versicherungstechnischen Risikos betrachtet, wird jedoch im vorgestellten Ansatz für die Gesamtschadenschwankung in internen Modellen als vierter Treiber hinzugenommen? Beschreiben Sie auch dieses kurz.

(b) (4 Punkte) Erläutern Sie, wie sich die vier Komponenten des versicherungstechnischen Risikos durch die Covid-19 Pandemie verändert haben könnten, bzw. welche Aspekte für diese Fragestellung zu berücksichtigen sind. Nennen Sie pro Komponente mindestens einen Aspekt.

(c) (3 Punkte) Sie haben das Solvency II-Standardmodell implementiert. Nennen und erläutern Sie kurz drei Aspekte, die Sie bei einer Analyse der Risikotreiber im Life-Modul -z.B. in Ihrem ORSA-Bericht- vor dem Hintergrund der Covid-19-Pandemie besonders betrachten sollten.

(d) (6 Punkte) Sie interessieren sich nun für die Implementierung eines internen Modells und analysieren nun insbesondere das Änderungs- oder Trendrisiko. Welche drei grundlegenden Arten der Änderung betrachtet man üblicherweise, und wie können diese modelliert werden?

(e) (1 Punkt) Können Sie mit einer der drei Basis-Änderungen aus d) zukünftige Pandemien erfassen? Falls ja, mit welcher? Falls nein, wie dann?

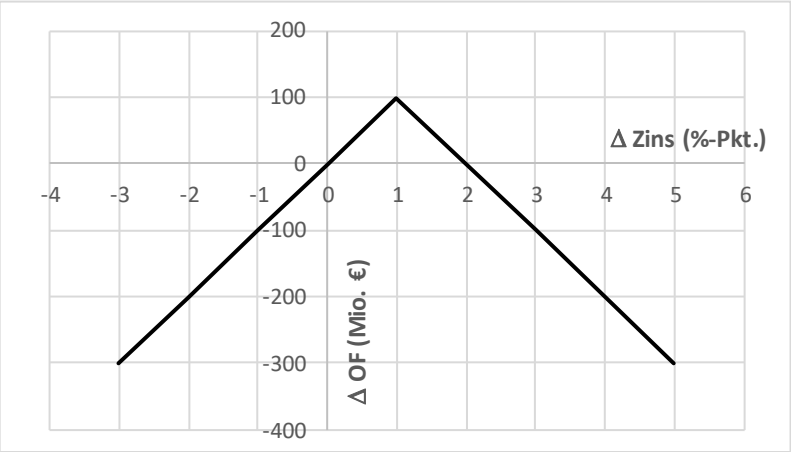
(f) (2 Punkte) Wie können Sie nach erfolgter Modellierung die Stichhaltigkeit Ihres Modells für das Änderungsrisiko prüfen und worauf ist dabei zu achten?

Aufgabe 4. *Risikoaggregation [18 Punkte]*

Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen, das ein komplexes, nicht-monotones Zinsrisikoprofil besitzt, d.h. sowohl (ausgeprägtere) Zinsrückgänge als auch (ausgeprägtere) Zinsanstiege führen zu Eigenmittelverlusten. Eine mögliche Ursache hierfür könnte die Wechselwirkung von Garantieprodukten im Portfolio, Überschussbeteiligungsmechanismen, die erforderliche Realisierung von Marktwertverlusten auf Anleihen bei Zinsanstieg sowie die Diskontierung von kapitalmarktunabhängigen Cashflows sein.

Nehmen Sie an, dass das Versicherungsunternehmen zum 31.12.2022 die folgende Eigenmittelveränderungen unter parallelen Zinskurvenänderungen besaß:

Δ Zins (%-Pkt.)	Δ OF (Mio. €)
-3	-300
-2	-200
-1	-100
0	0
1	100
2	0
3	-100
4	-200
5	-300



Die SCR-Berechnung erfolgt mittels eines internen Modells. Das Zinsrisiko wird darin als normalverteilte Parallelverschiebung modelliert. Neben dem Zinsrisiko liefern zum 31.12.2022 nur noch das Spreadrisiko und das Langlebigkeitsrisiko relevante Beiträge zum SCR. Die folgende Tabelle zeige die SCR-Beiträge sowie die verwendeten Korrelationsannahmen (Gauß-Copula).

SCR in Mio. €	Undiv.	Div.
Spreadrisiko	100	50
Zinsrisiko	300	200
Langlebigkeitsrisiko	100	50
Sonstige Risiken	40	5
SCR in Summe	**540**	**305**
Diversifikation	**-235**	**0**
SCR Gesamt	**305**	**305**

Korrelationen	Zins-anstieg	Spread-anstieg	Langlebig-keit	Sonstige Risiken
Zinsanstieg				
Spreadanstieg	-50%			
Langlebigkeit	-25%	25%		
Sonstige Risiken	0%	0%	0%	

(a) (7 Punkte) Nehmen Sie an, dass das Zinsniveau bis zum folgenden Berechnungsstichtag um 2%-Pkt. angestiegen sei. Nehmen Sie außerdem an, dass alle Modellannahmen sowie äußere Parameter (Portfolio, Kapitalanlagen, etc.) ggü. dem 31.12.2022 unverändert geblieben seien.

Skizzieren Sie die ergebende Eigenmittelveränderungen unter parallelen Zinskurvenänderungen zum neuen Stichtag. Warum geht das Unternehmen auf den ersten Blick davon aus, dass sich Zinsrisiko und SCR nicht materiell ändern?

(b) (4 Punkte) Die anschließende SCR-Berechnung zeigt, dass die erste Einschätzung falsch war, und dass das Gesamt-SCR sogar spürbar zurückgeht. Welcher Effekt ist hierfür ausschlaggebend, und warum sollte er sorgfältig validiert werden?

(c) (4 Punkte) Das Spread- und das Langlebigkeitsrisiko sinken zum neuen Stichtag, obwohl Kapitalanlagen und Portfolio gleichgeblieben sind. Welche Erklärung gibt es hierfür? Welches „Sonstige Risiko" könnte hingegen spürbar angestiegen sein, und betrifft dies evtl. auch ein Risiko, welches gar nicht in die SCR-Berechnung eingeht?

(d) (3 Punkte) Nehmen Sie an, dass das Unternehmen Teil einer Gruppe sei, und dass das interne Modell ein Gruppensimulationsmodell sei. Warum ist es schwierig, ohne explizite Gruppenberechnung die Auswirkung des Zinsanstiegs aus (b) auf das Gruppenergebnis zu übertragen?

Aufgabe 5. *Auswirkungen durch die Klimawandelrisiken auf das Wohngebäudeversicherungsportfolio der FFBK - Standardformel [18 Punkte]*

Auch die Feldafinger Brandkasse will sich mit dem Thema Nachhaltigkeit auseinandersetzen. Für den diesjährigen ORSA Bericht sollen die Auswirkungen durch die Klimawandelrisiken u.a. auf das Wohngebäudeversicherungsportfolio der FFBK ermittelt werden. Hierzu sollen unter Zuhilfenahme der GDV Hilfestellung „Klimawandelszenarien im ORSA" die Auswirkung auf die Ergebnisse in der Standardformel aufgezeigt und erläutert werden. Sie haben sich anhand des GDV Papiers schon einen Überblick über die Veränderung des Bruttoschadens gemacht, welche in der folgenden Tabelle dargestellt sind:

Gross Loss (m€)	**Status Quo**	**2030**	**2050**	**2100**
$L_{flood,germany}$	50	58	107	119
$L_{storm,germany}$	80	80	80	80
$L_{hail,germany}$	30	36	43	60

Die Schäden sind im Status Quo sowie in den Folgejahren mittels Schadenexzedentenvertrag gedeckt. Dieser Vertrag hat einen Selbstbehalt von €10 Mio. und eine Haftungsstrecke von €70 Mio.

(a) (10 Punkte) Berechnen Sie anhand der angegebenen Werte das Netto SCR pro Gefahr und in Summe für den Status Quo und das Jahr 2100. Verwenden Sie hierzu die Methodik der Standardformel für Naturgefahrenschäden.

<u>Hinweis:</u> Berücksichtigen Sie die Mehrfachereignisse 80%/40% bzw. 100%/20% für Sturm, 65%/45% bzw. 100%/10% für Flut und 70%/50% bzw. 100%/20% für Hagel gemäß Standardformel.

(b) (4 Punkte) Ihr CRO ist etwas beunruhigt, da er nicht mehr als €50 Mio. Netto NatCat SCR für Wohngebäudeversicherung im Portfolio der FFBK haben möchte. Machen Sie einen konkreten Vorschlag, wie der Schadenexzedentenvertrag angepasst werden könnte, um dieses zu ermöglichen?

(c) (4 Punkte) Ihr CRO fragt Sie außerdem, ob es noch andere Auswirkungen mit Bezug auf die Rückversicherungsstruktur geben kann, welche nicht hinreichend in Ihrer Analyse betrachtet wurden. Nennen Sie mindestens zwei mögliche Veränderungen, welche hier nicht in die Berechnung mit eingeflossen sind und erläutern Sie deren Auswirkung auf das Risiko und die Rückversicherungsstruktur.

Aufgabe 6. *Auswirkungen durch die Klimawandelrisiken auf das Wohngebäudeversicherungsportfolio der FFBK – Internes Modell [18 Punkte]*

Nun will FFBK auch die Ergebnisse der Klimarisiken auf ihre Risikoposition mithilfe des Internen Modell untersuchen. Dabei spielt ebenfalls der Risikotransfer eine wichtige Rolle.

(a) (10 Punkte) Auswirkungen vom Klima-Stressszenario auf das Netto-SCR der Sparte Wohngebäude.

Sie betrachten nun die aktuellen Ergebnisse aus den Risikomodul Naturkatastrophen der FFBK. Das SCR (Brutto und Netto) ergibt sich aus dem Simulationspfad mit folgenden vier Bruttoschäden €100 Mio., €60 Mio., €30 Mio. und €10 Mio. Die Naturgefahren-Spezialisten der FFBK haben eine neue Simulation mit den gestressten Parametern durchgeführt, wonach sich das SCR (Brutto und Netto) aus dem Pfad mit folgenden vier Bruttoschäden ergibt: €120 Mio., €80 Mio., €60 Mio. und €20 Mio. Es liegt folgende Rückversicherungsdeckung für die Sparte Wohngebäudeversicherung durch einen Schadenexzedentenvertrag vor:

1. Layer: €30 Mio. xs €10 Mio. Zwei Wiederauffüllungen zu 100% (2 WA @100%). Installment-Prämie €3 Mio.

2. Layer: €30 Mio. xs €40 Mio. 1 WA @ 150%. Installment-Prämie €2 Mio.

3. Layer: €30 Mio. xs €70 Mio. Keine WA. Installment-Prämie €2 Mio.

Bitte ermitteln Sie das Netto-SCR der Wohngebäude-Sparte in der nicht gestressten und in der gestressten Simulation. Was fällt Ihnen auf?

<u>Hinweis:</u> Rechnen Sie mit einem Erwartungswert von 0 und verwenden Sie direkt das Ergebnis aus dem Simulationspfad.

(b) (4 Punkte) Der Vorstand der FFBK ist durch die Ergebnisse aus der gestressten Simulation beunruhigt und möchte von Ihnen wissen, welche Möglichkeiten zur Risikoreduktion es sowohl im Brutto- als auch im Netto-Portfolio gibt. Nennen Sie hier zwei Vorschläge für Brutto und zwei Vorschläge für Netto.

(c) (4 Punkte) Nun überlegt der Vorstand der FFBK zusätzlich zu der bestehenden klassischen Rückversicherung, die Naturgefahren-Risiken auf

dem Kapitalmarkt zu platzieren. Welche Produkte zum alternativen Risikotransfer kennen Sie? Nennen Sie zwei Produkte und beschreiben Sie kurz deren Wirkungsweise.

Aufgabe 7. *Rückversicherung und Risikotransfer Leben [18 Punkte]*

Im Auftrag Ihres Vorstands arbeiten Sie an einer Optimierung der Solvency Ratio durch (geeignete) Rückversicherung.

Sie arbeiten bei einem Erstversicherer und haben einen Bestand von profitablen fondsgebundenen Risikolebensversicherungen, der konstant gute Risiko- und Kostengewinne erwirtschaftet.

Aus den letzten Solvency Reports wissen Sie: SCR_Mortality = 400, SCR_Lapse = 1000. Die übrigen Risikotreiber (wie Disability, Longevity etc.) innerhalb des Life-Moduls spielen für diese Aufgabe keine Rolle.

(a) (2 Punkte) Welche von beiden Komponenten (Mortality und Lapse) würden Sie warum eher als Ansatzpunkt in Betracht ziehen?

(b) (2 Punkte) Für Mortality kreisen Ihre Gedanken vor allem um eine hohe Quote, für die Sie vom Rückversicherer Ihres Vertrauens zwei verschiedene Ausgestaltungen vorgeschlagen bekommen:

i) Die RV-Prämien liegen 10% über Ihrem Best Estimate, aber der Rückversicherer behält sämtliche Gewinne aus dem Rückversicherungsvertrag.

ii) Die RV-Prämien liegen 30% über Ihrem Best Estimate, aber nach Abzug einer Kostendeckungsspanne von 3,85% der Prämie erstattet Ihnen der Rückversicherer die nach Abzug verbleibenden Gewinne aus dem Vertrag über eine Gewinnbeteiligung zu 80% wieder zurück.

Was sind Ihre Gedanken und Präferenzen im Hinblick auf die zu optimierende Solvency Ratio?

(c) (4 Punkte) Beim Transfer von Storno-Risiken haben Sie in Ihrem CERA-Seminar etwas über „Mass Lapse"-Absicherungen gehört. Beschreiben Sie diese strukturell und erläutern Sie eine notwendige Voraussetzung für deren Wirksamkeit, in dem Sie auf die Berechnung des SCR_Lapse eingehen.

(d) (insgesamt 6 Punkte) Sie wissen aus dem Risikomanagement, dass für Ihr Unternehmen derzeit das LapseUp-Risiko nur halb so stark ins Gewicht fällt wie das Massenstorno-Risiko, und LapseDown spielt gar keine Rolle für Ihr Unternehmen. Somit wissen Sie, dass Sie mit einer Mass-Lapse-Rückversicherung auf dem richtigen Weg sind und fragen sich, bis zu welchem maximalen Preis diese einen positiven Effekt hat.

Gemeinsam mit Ihrem Kollegen gehen Sie dabei iterativ vor:

i) (2 Punkte) Ihr Kollege argumentiert: *„Weil SCR_MassLapse = 1000 > 400 = SCR_Mortality könnte das SCR_MassLapse um 60% (d.h. bis auf 400) gesenkt werden.*"

Stimmen Sie zu? Wenn ja, warum; wenn nein, warum nicht?

ii) (2 Punkte) Nehmen Sie hier und im Folgenden an, die Aussage in i) ist richtig. Welche Parameter für das Design der Mass-Lapse-Rückversicherung (Attachment Point und Kapazität) müssten für die Realisierung des Vorschlags Ihres Kollegen gewählt werden?

iii) (2 Punkte) Für die Situation aus ii) -und somit weiterhin annehmend, dass die Aussage in i) richtig ist- hat Ihr Kollege errechnet: *„Eine Ersparnis von 600 Risikokapital (= 1000 – 400) und Risikokapitalkosten von 6% ergibt einen maximalen Preis von 36.*"

Ihr Kollege hat Glück und Ihr Rückversicherer bietet ihm diesen Vertrag sogar für 34 an, so dass Ihr Kollege sofort abschließen möchte. Was raten Sie ihm, und warum?

Hinweis: Es ist bei richtiger Antwort für die Begründung eine kurze Rechnung erforderlich. Sollten Sie einen dafür benötigten Parameter nicht auswendig wissen, treffen Sie bitte eine explizite Annahme und halten diese schriftlich fest.

(e) (4 Punkte) Schließlich fragt Ihr Kollege, ob man nicht auch durch eine Finanzierungsrückversicherung die Solvency Ratio verbessern kann. Erläutern Sie ihm die Grundideen der Finanzierungsrückversicherung und klären Sie ihn zuerst allgemein über die Wirkungsweise unter Solvency II auf. Erläutern Sie abschließend, welche spezielle Solvency II-Regelung einen besonders positiven Impact auf die Wirksamkeit von Finanzierungsrückversicherung unter SII hat.

Aufgabe 8. *Garantieprodukte und deren Risikotransfer [18 Punkte]*

(a) (2 Punkte) Was verbirgt sich hinter „Griechen / Greeks" allgemein?

(b) (4 Punkte) Definieren Sie Delta und Vega für eine europäische Put-Option auf eine Aktie. Welches Vorzeichen haben diese beiden Größen in diesem Fall? Begründen Sie Ihre Antwort (Sie können einen mathematischen Beweis führen, aber auch eine stichhaltige Argumentation reicht für die volle Punktzahl.)

Sie möchten nun ein neues Garantieprodukt an den Markt bringen, das dem Versicherungsnehmer nach Ablauf einer Zeit von 10 Jahren den Stand eines Investments in einen aktiv gemanagten Fonds auszahlt, zumindest aber den Sparbeitrag aus der gezahlten Einmalprämie.

Die Benchmark des Fonds hat zum Produktbeginn am Markt eine implizite Volatilität von 20% für jede Laufzeit bis einschließlich Jahr 10 und notiert bei 100 EUR. Für das Garantieprodukt ergibt sich insgesamt ein Delta von 0.9, und sofern Sie weitere Parameter benötigen, treffen Sie bitte geeignete Annahmen.

Das Bezugsverhältnis bei allen hier diskutierten Optionen ist grundsätzlich 1:1.

(c) (2 Punkte) Beschreiben Sie auf zwei Arten das (passivseitige) Portfolio, das durch den Verkauf einer Police mit einem Garantiebetrag von 50.000 EUR entsteht.

(d) (2 Punkte) Am regulierten Kapitalmarkt (z.B. EUREX) stehen keine derivativen Finanzinstrumente zur Benchmark zur Verfügung. Sie entscheiden, das Produkt selbst dynamisch zu hedgen. Welche der „Griechen" können Sie hedgen ohne auf weitere Handelspartner zurückzugreifen? Wie würden sie ihr Portfolio auf der Aktivseite zusammenstellen, wenn sie diese(n) vollständig hedgen würden?

(e) (3 Punkte) Sie haben eine Bank gefunden, die Ihnen OTC (Over the counter) Optionen mit bis zu 5-jähriger Laufzeit (Calls und Puts) verkaufen würde. Mittels einer Call Option mit 5 Jahren Laufzeit haben Sie Ihr Portfolio nun sowohl delta-, als auch gamma-neutral positioniert. Zwischen zwei Handelstagen hat sich dennoch ein deutlicher ALM-Missmatch ergeben, obwohl die Zinskurve und die Volatilitätssituation der Benchmark sich nicht geändert haben. Was könnte passiert sein und warum ist dadurch der Missmatch entstanden?

Was ist die mathematische Grundlage für diese Beobachtung?

(f) (2 Punkte) Das obige Produkt wird mit einem alternativen Produktfeature angeboten. Nach fünf Jahren Laufzeit wird der Stand des Fonds als neue Garantie gewährt, wenn dieser oberhalb der Garantie notiert. Ist es möglich dieses Produktfeature durch Hinzunahme einer weiteren 5-jährigen Putoption im Passivportfolio abzubilden? Begründen Sie Ihre Antwort.

(g) (2 Punkte) Welche Komplexität kommt hinzu, wenn die Garantieleistung (Sparbeitrag aus der gezahlten Einmalprämie) auch im Fall von entweder Storno oder Tod während der 10 Jahre Laufzeit geleistet werden soll?

(h) (1 Punkt) Aus Risikosicht: Würden Sie in g) die Garantie lieber für den Todesfall oder für Storno aussprechen? Warum?

Aufgabe 9. *Zinsrisiko [18 Punkte]*

(a) (6 Punkte) Zeigen Sie, dass bei stetiger Verzinsung für einen Bond B mit fixem Kupon gilt: MacDur(B) = ModDur(B). Dies gilt nicht für beliebige Zahlungsströme, welche Eigenschaft des Bonds kommt dabei zum Tragen? In welche Richtung verändert sich die Duration eines Standardbonds, wenn der Kupon erhöht würde? Begründen Sie ihre Antwort.

(b) (6 Punkte) Diskutieren Sie Definition, Vor- und Nachteile des Duration Gap als Indikation für das Zinsrisiko.

(c) (6 Punkte) Es gibt Konstellationen, in denen das Duration Gap nicht durch aktivseitige Maßnahmen zu schließen ist. Nennen Sie zwei Beispiele, in denen es stets negativ bzw. stets positiv bleibt. Wie kann dem in der Steuerung begegnet werden?

Aufgabe 10. *Operationelles Risiko [18 Punkte]*

Der Versicherer ABC AG hat für ein bestimmtes operationelles Risiko über Jahre hinweg folgende Statistik erhoben:

i. Das Risiko wird in 20% der Fälle, in denen es eintritt, durch Ursache $\mathbf{U_1}$ verursacht, in den restlichen Fällen wird das Risiko durch Ursache $\mathbf{U_2}$ schlagend.

ii. Die ABC AG hat drei risikomindernde Maßnahmen eingeführt, um das Risiko zu begrenzen.

   a. Maßnahme $\mathbf{M_1}$ greift in 20% der Schadenfälle.

   b. Maßnahme $\mathbf{M_2}$ greift in 35% der Schadenfälle.

   c. Maßnahme $\mathbf{M_3}$ greift in 45% der Schadenfälle.

   In keinem Schadenfall greifen mehrere Maßnahmen zugleich.

iii. Für die durch das Risiko verursachte Schadenhöhe hat die ABC AG eine Klassifizierung in kleine Schäden (≤500.000 €) und große Schäden (>500.000 €) vorgenommen.

iv. Für die klassifizierten Schadenhöhen verfügt die ABC AG weiterhin über folgende bedingte Verteilung:

Ursache	$\mathbf{U_1}$	$\mathbf{U_2}$	$\mathbf{U_1}$	$\mathbf{U_2}$	$\mathbf{U_1}$	$\mathbf{U_2}$
Maß-nahme	$\mathbf{M_1}$		$\mathbf{M_2}$		$\mathbf{M_3}$	
Schaden-höhe groß	0,9	0,2	0,25	0,85	0	0,95
Schaden-höhe klein	0,1	0,8	0,75	0,15	1	0,05

(a) (7 Punkte) Welcher Modellierungsansatz für das operationelle Risiko bietet sich für die ABC AG aufgrund der Datenlage an? Beschreiben Sie diesen Ansatz zur Risikomessung stichpunktartig in eigenen Worten!

(b) (5 Punkte) Berechnen Sie die (unbedingte) Wahrscheinlichkeit für eine große Schadenhöhe! Nehmen Sie dabei an, dass Ursache und Maßnahme unabhängig voneinander sind.

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie die a-posteriori Wahrscheinlichkeiten $P(M3 \cap Ui \mid \{\text{Schadenh. groß}\})$ für i=1,2!

(d) (3 Punkte) Berechnen und interpretieren Sie die a-posteriori Wahrscheinlichkeit $P(\mathbf{M_3} \mid \{\text{Schadenh. groß}\})$!

Schriftliche Prüfung im CERA-Modul B

Klassifizierung und Modellierung und Transfer von Risiken

gemäß Prüfungsordnung 2.0
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 20.10.2023

Lösungsvorschläge

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 16 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. Hubert Bornhorn, Dr. Steve Brüske, Dr. Peter Henseler,
Dr. Ingo Kraus, Dr. Nils Langenberg, Dr. Michael Leitschkis

Aufgabe 1. Aktienrisiken *[18 Punkte]*

Lösungsvorschlag

(a) Z.B.: Unter stilisierten Fakten in Finanzmarktzeitreihen versteht man gewisse abstrakte Grundstrukturen, die typisch für Finanzmarktzeitreihen sind/die in vielen Finanzmarktzeitreihen zu finden sind.

(b) Z.B. vier aus:

i. Es gibt Phasen hoher Volatilität und es gibt Phasen geringer Volatilität („Volatility Clustering").

ii. Die Daten enthalten diskrete Sprünge.

iii. Die Verteilung der Renditen ist asymmetrisch (Schiefe).

iv. Mittlere und große Renditen sind überrepräsentiert (leptokurtische Verteilung, „Fat Tails").

v. Selbstähnlichkeit, d.h. man kann die Daten auf unterschiedlichen Zeitskalen qualitativ nicht oder nur schwer voneinander unterscheiden (bei fehlender Achsenbeschriftung).

vi. Keine Autokorrelationen, d.h. lineare Autokorrelationen sind oft nicht signifikant (evtl. Ausnahme: kleine Intraday-Lags).

u.v.m. **(je 1P)**

(c) Zeitreihe B enthält kein Volatility-Clustering und auch keine Sprünge. Daher basiert diese Zeitreihe wohl nicht auf empirischen Daten, son-dern auf Simulation **(2P)**. Die Zeitreihen A, C und D hingegen zeigen ganz deutlich ein Volatility-Clustering. Auch verfügen alle drei über Sprünge **(2,5P)**. Diese sind aber in der Umgebung des Sprungzeit-punkts bei A und C ausgeprägter, was nahelegt, dass A und C auf empirischen Daten beruhen und D nicht **(1,5P)**.

(d) Die Prozessgleichung mit der die Rendite bei der geometrischen, brownschen Bewegung bzw. im Heston-Modell modelliert wird, ist bei beiden Modellen baugleich: ein konstanter Drift-Term plus ein mit der Volatilität skaliertes Inkrement einer brownschen Bewegung **(2P)**. Zentraler Unterschied ist, dass die Volatilität bei der geometrischen, brownschen Bewegung konstant ist, während sie beim Heston-Modell durch einen eigenen Mean-Reversion-Prozess modelliert wird. **(2P)**

Z.B.: Aufgrund der zeitabhängig modellierten Volatilität kann das Heston-Modell das Volatility-Clustering reproduzieren. Dies geht natürlich wegen der konstanten Volatilität bei der geometrischen, brownschen Bewegung nicht. **(2P)**

Aufgabe 2. *Kreditrisiko [18 Punkte]*

Lösungsvorschlag

(a) (3 Punkte) Die Berechnung von CS01 kann in Analogie zur bekannten Dollar-Duration wie folgt erfolgen:

CS01 = (MV(Spread-1bp) – MV(Spread+1bp)) / (10000 * 2bp)

= (MV(Spread-1bp) – MV(Spread+1bp)) / 2

(b) (9 Punkte)

(i) Die Dollar-Duration beträgt:

(MV(Zins – 1bp) – MV(Zins + 1bp) / 2

= 1M x (1/(1.04 – 0.0001)^5 - 1/(1.04 + 0.0001)^5) / 2 = 395.16.

- (ii) Die Spread-Duration der Anleihe beträgt ebenso 395.16, wie man auch ohne eine Berechnung unschwer feststellen kann.
- (iii) Die Spread-Duration zeigt dem Investor die Spreadrisiko – Exposure eines kreditrisikobehafteten Assets an und unterstützt ggf. beim Hedging, etwa mithilfe von CDS.

(c) (3 Punkte) Der Ausfall einer Anleihe einer bekannten internationalen Fluglinie wird nicht völlig überraschend gekommen sein. Vielmehr werden geschäftliche Schwierigkeiten in den Monaten vor dem Ausfall bekannt und somit von den Märkten eingepreist gewesen sein. Daher wird der Spread bereits in den Monaten vor dem Ausfall außerhalb des Investment Grade – Bereichs gewesen sein.

(d) (3 Punkte) Auch der Ausfall einer Anleihe eines bekannten internationalen Konsumgüterherstellers würde normalerweise nicht überraschend kommen. Schlechte geschäftliche Nachrichten würden üblicherweise nach und nach kommen und eingepreist werden. Wenn also der Spread noch kurz vor dem Ausfall im Investment Grade – Bereich gewesen sein soll, dann muss eine sehr wesentliche, für den Ausfall entscheidende Nachricht plötzlich und überraschend gekommen sein. Dies wäre vor allem bei einem Betrugsfall denkbar.

Aufgabe 3. *Versicherungstechnik Leben und Kranken [18 Punkte]*

Lösungsvorschlag

(a) Irrtums-, Zufalls- und Änderungs-/Trendrisiko. Cat-/Pandemierisiko ist die vierte Komponente der Gesamtschadenverteilung. (siehe Skript)

(b) Jeweils einer der folgenden Aspekte könnte genannt werden (weitere sind auch zulässig):

- Irrtum (auch Level-Risiko): Liegt nach der Pandemie ggf. schlicht ein anderes Level der Sterblichkeit vor? (Ist dann das im Seminar präsentierte Modell noch akkurat?) Es stellen sich z.B. Fragen nach Long Covid und damit einhergehender Sterblichkeit oder auch erhöhte Sterblichkeit durch nicht erfolgte / gestattete Vorsorgeuntersuchungen während der Pandemie, oder auch die Verschiebung nicht akut lebensnotwendiger Operationen.

- Zufall: Dies spiegelt bspw. wieder, dass besonders High-Net-Worth-Versicherte sterben könnten. Das war aber während Covid-19 so nicht zu beobachten (im Gegenteil: Abstandsgebote sind in Hochhaussiedlungen schwerer einzuhalten, Bsp. Köln-Chorweiler). Zufall könnte hingegen bei eher lokal operierenden Versicherern sein, dass in dieser Region besonders schwere Covid-Ereignisse vorgelegen haben und nun Long Covid dort weiter verbreitet ist.

- Trend/Änderung: Wie verändert sich die Sterblichkeitsverbesserung durch Covid? Temporär war dies eine Verschlechterung, die ca. 5-10 Jahre vorangegangene Sterblichkeitsverbesserung ausgeglichen haben. Rückkehr zur alten Sterblichkeit(sverbesserung)? Weitere Verbesserung? Medizinischer Fortschritt für Personen mit Vorerkrankungen? Deutlicher Fortschritt bei Impfstoffentwicklung wurde beobachtet – Krebsvakzine bald verfügbar?

- Cat/Pandemie: Welcher Wiederkehrperiode würden die in Covid-19 beobachteten Schäden entsprechen? Verhältnis zwischen „erwarteter" Pandemie und Covid-19, aus medizinischer und aktuarieller Sicht?

(c) i) Versicherungen und Sterblichkeit werden im Versichertenkollektiv wieder mehr ins Gedächtnis gerufen => Einfluss auf zukünftiges Storno, ggf. auch altersabhängig?

ii) War die Pandemie adäquat modelliert? Näherung z.B. via Backtesting Covid-19 vs. erwarteter Pandemie-Schaden

iii) Cat/Pandemie-Stress berücksichtigt nur erhöhte Sterblichkeit. Adäquate Berücksichtigung anderer Schäden (Long Covid? Psyche in der Berufsunfähigkeit?) oder verspäteter Todesfallschäden (während Pandemie mangels Vorsorgeuntersuchungen nicht erkannter oder spät behandelter Krebs und dgl.).

iv) Altersunabhängiger Pandemie-Shock: die Standardformel erhöht die Mortalität für alle alter gleich. Das war aber bei Covid-19 so nicht zu beobachten.

Hinweis: Es waren nur drei Aspekte gefragt, die überdies auch von den oben genannten Gedanken abweichen dürfen.

(d) Siehe Skript:

- Irrfahrten (mit oder ohne Drift), z.B. modelliert durch Brownsche Bewegungen
- Sprunghafte Änderungen, z.B. modelliert durch Sprung-Prozesse wie z.B. Poisson-Prozess mit zufällig Lognormal-verteilten Sprunghöhen.
- Zyklische Änderungen, z.B. modelliert durch zyklische Prozesse wie z.B. ARIMA-Prozesse ggf. auch mit Mean-Reverting.

(e) Pandemien sollten nicht im Risikotreiber „Änderungs-/Trend-Risiko" erfasst werden, sondern im separaten Risikotreiber „Cat/Pandemie".

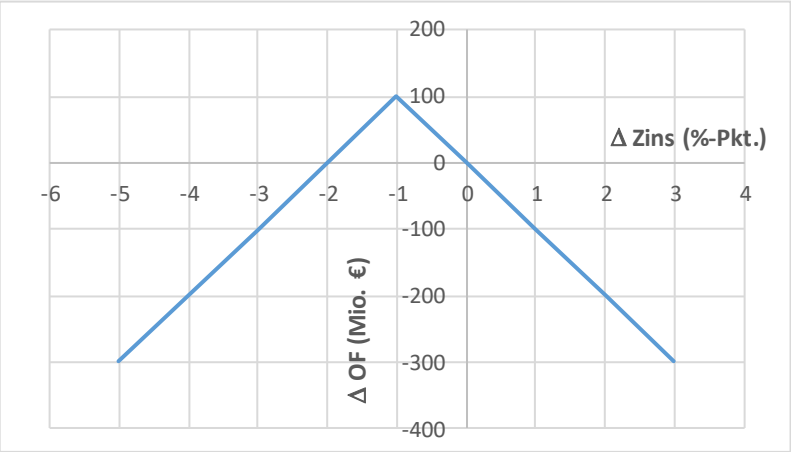
(f) Durch Backtesting kann das Modell mit vergangenheitsbezogenen Daten getestet werden. Sicherzustellen ist dann allerdings eine Vergleichbarkeit der Input-Daten; häufig zitiertes Beispiel ist eine zwischenzeitliche Verschiebung der Altersverteilung der Bevölkerung.

Aufgabe 4. *Risikoaggregation [18 Punkte]*

Lösungsvorschlag

(a) Nach einem Zinsanstieg von 2%-Pkt. und ansonsten unveränderten Randbedingungen ergibt sich zum neuen Stichtag die folgende Eigenmittelveränderungen unter parallelen Zinskurvenänderungen:

Δ Zins (%-Pkt.)	Δ OF (Mio. €)
-5	-300
-4	-200
-3	-100
-2	0
-1	100
0	0
1	-100
2	-200
3	-300



Dies entspricht einer Spiegelung (Zinsanstieg <-> Zinsrückgang) der ursprünglichen Verteilung, d.h. das undiversifizierte Zinsrisiko bleibt dasselbe, da für die Risikoberechnung eine (symmetrische) Normalverteilung verwendet wird. Auf den ersten Blick könnte man daher davon ausgehen, dass der Anstieg keine materielle Veränderung des SCR bewirkt.

(b) Das Zinsrisiko ist nicht unkorreliert mit den übrigen Risiken. Daher hat der Wechsel des Risikoprofils (Zinsanstieg <-> Zinsrückgang) einen spürbaren Einfluss auf die Diversifikation und das Gesamt-SCR. Am ursprünglichen Stichtag war vor allem der Zinsrückgang der dominierende Beitrag zum Zinsrisiko. Dieser war positiv mit Langlebigkeits- und Spreadrisiko korreliert. Der Wechsel zum dominierenden Zinsanstieg liefert nun einen überwiegend negativ korrelierten Beitrag. Daher steigt die Diversifikation und das Gesamt-SCR sinkt.

Aufgrund der Materialität dieser Annahme sollte überprüft werden, ob die ursprünglich unter anderen Marktbedingungen hergeleitete Korrelationsannahme immer noch valide ist.

(c) Das Spreadrisiko könnte sinken, da die Marktwerte der Anleihen und damit die Verluste bei Spreadanstieg sinken. Auch könnte bei höherem Zinsniveau die Risikotragfähigkeit des Unternehmens (z.B. aufgrund der

zukünftigen Überschussbeteiligung) gestiegen sein. Bei Langlebigkeitsrisiko könnte die höhere Diskontierung bzw. der höhere zukünftige Wiederanlagezins den Beitrag senken.

Hingegen könnte das Stornorisiko bei steigendem Marktzins an Bedeutung gewinnen: Realisierung von Marktwertverlusten oder Verlust an profitablerem Geschäft unter den neuen Marktbedingungen könnten die Ursache sein. Damit einhergehend muss die Entwicklung des Liquiditätsrisikos als nicht-quantifizierbares Risiko beobachtet werden.

(d) Da Risiken auf Einzelunternehmensebene und Gruppenebene in der Regel unterschiedlich diversifizieren, und der SCR-Rückgang des Einzelunternehmens vor allem auf eine Veränderung des Diversifikationsverhaltens zurückzuführen ist, ist es nahezu unmöglich, die Auswirkung auf das Gruppen-SCR vorherzusagen. Je nach Risikoprofil der Gruppe, kann der SCR-Rückgang stärker als auf Einzelebene ausfallen oder sogar ein deutlicher SCR-Anstieg auftreten.

Aufgabe 5. *Auswirkungen durch die Klimawandelrisiken auf das Wohngebäude-versicherungsportfolio der FFBK - Standardformel [18 Punkte]*

Lösungsvorschlag

(a) Zunächst berechnet man anhand der Mehrfachereignisse, die Grundlage für die anzuwendende Rückversicherung im Status Quo und im Jahr 2100:

Status Quo	**Scenario A**		**Scenario B**	
Gross Loss	**Loss 1**	**Loss 2**	**Loss 1**	**Loss 2**
$L_{flood,germany}$	33	23	50	5
$L_{storm,germany}$	64	32	80	16
$L_{hail,germany}$	21	15	30	6

Year 2100	**Scenario A**		**Scenario B**	
Gross Loss	**Loss 1**	**Loss 2**	**Loss 1**	**Loss 2**
$L_{flood,germany}$	77	54	119	12
$L_{storm,germany}$	64	32	80	16
$L_{hail,germany}$	42	30	60	12

Dann wird der Schadenexzedentenvertrag 70 xs 10 angewendet, die Summe pro Szenario gebildet und das Maximum genommen.

Status Quo	**Scenario A**			**Scenario B**			**Maximum**
Gross Loss	**Loss 1**	**Loss 2**	**Sum**	**Loss 1**	**Loss 2**	**Sum**	
$L_{flood,germany}$	10	10	20	10	5	15	20
$L_{storm,germany}$	10	10	20	10	10	20	20
$L_{hail,germany}$	10	10	20	10	6	16	20

Year 2100	Scenario A			Scenario B			Maximum
Gross Loss	**Loss 1**	**Loss 2**	**Sum**	**Loss 1**	**Loss 2**	**Sum**	
$L_{flood,germany}$	10	10	20	49	10	59	59
$L_{storm,germany}$	10	10	20	10	10	20	20
$L_{hail,germany}$	10	10	20	10	10	20	20

Zum Schluss wird in beiden Fällen über die Wurzelformel (rho=0) das Gesamt Netto SCR für die Wohngebäudeversicherung ermittelt. Im Status Quo werden €35 Mio. und im Jahr 2100 €66 Mio. Netto SCR benötigt.

(b) Der Summenexzendetenvertrag kann im Selbstbehalt und im Limit angepasst werden. Erhöht man beispielsweise das Limit auf €90 Mio. reduziert sich der Nettogesamtschaden aus dem Flutszenario von €59 Mio. auf €39 Mio. wodurch nach Wurzelformel das NatCat SCR für Wohngebäudeversicherung bei €48 Mio. liegt. Alternativ kann auch der Eigenbehalt auf €0 Mio. gesenkt werden, wodurch das SCR bei €50 Mio. liegt.

(c) Mögliche Antworten könnten sein:

- Änderung der Prämienrate

  → Höhere Wiederauffüllungsprämie, wodurch das Risiko steigt, außerdem wird die Rückversicherung teurer

- Änderung der Anzahl der Schäden pro Jahr

  → die Standardformel sieht maximal zwei Ereignisse pro Jahr, was das Risiko in Zukunft möglicherweise unterschätzt

- Verträge sind nicht mehr zu 100% platzierbar, oder müssen mit stärkeren Ausschlüssen (z.B. Einschränkung auf Region und/oder Peril) belegt werden

  → das Netto SCR steigt und die Rückversicherung wird teurer

Aufgabe 6. *Auswirkungen durch die Klimawandelrisiken auf das Wohngebäude-versicherungsportfolio der FFBK – Internes Modell [18 Punkte]*

Lösungsvorschlag

(a) Nicht gestresste Simulation

	Schäden				
	1	2	3	4	Summe
Brutto	100	60	30	10	200
zediert	90	50	20	0	160
Netto	16	13	10	10	49
WA	6	3			9

Gestresste Simulation

	Schäden				
	1	2	3	4	Total
Brutto	120	80	60	20	280
zediert	90	60	30	0	180
Netto	36	23	30	20	109
WA	6	3			9

Somit beträgt das Netto-SCR €49 Mio. vor dem Stressszenario und €109 Mio. in dem Stressszenario. Es fällt auf, dass im Stressszenario das Brutto SCR um 40% steigt, steigt das Netto SCR um mehr als 100%.

(b) Möglichkeiten zur Risikoreduktion wären:

- Besser geografische Diversifikation im Portfolio
- Besseres Underwriting-Management
- Platzierung eines 4. Layers um die Schäden über €100 Mio. abzudecken.
- Bei den bestehenden Layern die Anzahl der Wiederauffüllungen erhöhen
- Alternativen Risikotransfer: zum Beispiel Platzierung eines NatCat Bonds

(c) Produkte zum alternativen Risikotransfer:

- Cat Bonds

  Vergleichbar mit Schadenexzedenten in der Rückversicherung. Investoren erhalten einen festen Zinsaufschlag (Spread) und tragen das Risiko eines Teil- oder Totalverlustes ihres Kapitals, sollte der definierte Haftungsauslöser ("Trigger") überschritten werden

- Side Cars

  Vergleichbar mit gedeckelter Quote in der Rückversicherung. Investoren teilen das versicherungstechnische Ergebnis des abgesicherten Portfolios bis zum eingezahlten Kapital.

- Contigent Capital
  - Contigent Capital Surplus Note

    Ermöglicht Zugang zu Liquidität zur Bezahlung von Schäden und verschiebt die Zahlung über Zeit

  - Catastrophe Equity Put

    Möglichkeit, über Warrants nach einer Katastrophe oder allgemein bei Überschreitung eines bestimmten Schadens das Eigenkapital zu erhöhen

  - Stand-by Line of Credit

    Frühzeitige Sicherung von Zugang zu Kapital als Absicherung für Zeiten, in denen der Zugang schwerer ist

Aufgabe 7. *Rückversicherung und Risikotransfer Leben [18 Punkte]*

Lösungsvorschlag

(a) Der entscheidende Aspekt ist die Diversifikation in der Aggregation mit der Wurzelformel. Die Diversifikation ist „besser", wenn die zugrundeliegenden, diversifizierenden Risiken in etwa die gleiche Größe haben.

Es erscheint daher sinnvoller, das SCR_Lapse zu reduzieren, anstatt die Lücke zwischen SCR_Mortality und SCR_Lapse noch zu vergrößern.

(b) Die Solvency Ratio ist der Quotient aus Eligible Own Funds und dem SCR.

In Variante b. fließen deutlich mehr Prämien ab, die dafür mit hoher Wahrscheinlichkeit über die Gewinnbeteiligung auch wieder zurückfließen. Das bedeutet aber auch: tritt ein Stressszenario (z.B. ein Mortality Shock) ein, so wird der RV-Vertrag deutlich weniger Gewinne erwirtschaften und folglich wird deutlich weniger Gewinnbeteiligung ausgezahlt. Durch diesen sog. Risiko-Rücktransfer verbleibt dann ein beachtlicher Anteil des Risikos -gemessen am SCR- beim Erstversicherer.

Die Gewinnerwartung des Rückversicherers ist in beiden Fällen gleich: In Fall a. sind es 10% des Best Estimates (BE), nämlich 110% BE Prämie abzgl. 100% BE Schäden. In Variante b. verbleiben beim Rückversicherer 3,85% der Prämie (entspricht 3,85%*130% BE = ziemlich genau 5% des BE) zzgl. 20% der nicht ausgeschütteten Gewinne, d.h. 20% von (130% BE als Prämie abzgl. 5% des BE als Vorwegabzug abzgl. 100% BE als Schaden), also 20% von 25% des Best Estimate. Somit verbleiben insgesamt beim Rückversicherer ebenfalls 5% BE + 5% BE = 10% BE.

Im Best Estimate-Fall ist der Mittelabfluss daher (in etwa) identisch, und aufgrund des nicht vorhandenen Risiko-Rücktransfers erscheint Variante a. daher für das SCR und somit die Solvency Ratio günstiger.

Dabei wird stillschweigend davon ausgegangen, dass die vom Erstversicherer eingenommenen Prämien / Margen hoch genug sind, um die RV-Prämien zahlen zu können.

(c) Siehe Skript. In Kürze: Beim Massenstorno-RV-Vertrag übernimmt der Rückversicherer denjenigen Anteil, der eine vertraglich vereinbarte Schwelle (z.B. 30% Massenstorno) übersteigt. Tritt dann das Massenst-

orno-Szenario ein (40%), so steht der Erstversicherer nur für 30% Massenstorno im Risiko, da der Rückversicherer die verbleibenden 10% übernimmt. Sprechweise hier auch: 10% xs. 30%.

Dieses Konstrukt kann nur dann wirksam sein, wenn das Massenstorno-Szenario unter den drei das SCR_Lapse bestimmenden Szenarien das relevante Szenario ist, d.h. wenn SCR_MassLapse > max{SCR_LapseUp,SCR_LapseDown}. Um den Aufwand für einen RV-Vertrag zu rechtfertigen, sollte eigentlich sogar „>>" gelten.

(d) Die Aussage i) ist falsch. Es kommt in der Maximierung des SCR_Lapse zunächst darauf an, wie sehr SCR_MassLapse größer ist als SCR_LapseUp, der Vergleich mit SCR_Mortality spielt an dieser Stelle noch keine Rolle. [Somit könnte, weil SCR_LapseUp = 500, das SCR_Lapse von 1000 maximal auf 500 -anstatt auf 400- reduziert werden.]

Zu ii): Wenn die Aussage in i) richtig wäre, so würde man über eine Reduktion des gesamten MassLapse-Shocks (40% Shock) auf 40% des MassLapse Shocks sprechen (die beiden 40%-Größen sind unterschiedliche Größen!). Attachment Point also 40% von 40% = 16% und Kapazität 24% (= 40%-16%). Also 24% xs 16%.

Zu iii): Abgesehen davon, dass wie oben erläutert das SCR_Lapse nicht auf 400 reduziert werden kann: Ihr Unternehmen spart sich das Risikokapital nicht auf das SCR_Lapse, sondern höchstens auf SCR_Life nach Diversifikation. Die Korrelation von Lapse und Mortality -laut Aufgabenstellung kommt es nur auf diese beiden Risikotreiber an- ist 0%.

Somit ist <u>vor Rückversicherung</u>

SCR_Life = (SCR_Lapse^2 + SCR_Mortality^2)^(0.5) = (1.16mio)^(0.5) = 1077.03

und <u>nach der 24% xs 16% Rückversicherung</u> (die ohnehin so nicht sinnvoll wäre, siehe oben)

SCR_Life = (SCR_Lapse^2 + SCR_Mortality^2)^(0.5) = (0.32mio)^(0.5) = 565.69.

Sie würden also ca. 511.34 Risikokapital sparen, und mit 6% Kapitalkosten ergibt sich eine Kapitalkosten-Ersparnis von nur noch 30.68 < 34 = Preis der Rückversicherung. Dies alleine lässt die angebotene Rückversi-

cherung daher finanziell nicht lukrativ erscheinen, zumal in der Berechnung des Impacts auf die Solvency Ratio auch noch der Impact in den Own Funds (Abfluss der RV-Prämie) zu berücksichtigen wäre.

(Theoretisch sollte man darüber hinaus sogar das SCR_Total berechnen und die Diversifikation mit SCR_Market und anderen berücksichtigen, das war jedoch in der Aufgabe nicht verlangt.)

Der Aufwand für die Rückversicherung scheint in diesem Fall also die Ersparnis zu überwiegen und somit sollte -zumindest solange keine anderen Gründe ersichtlich sind- der Rückversicherungsvertrag so nicht abgeschlossen werden.

(e) Siehe Skript. Die gesuchte spezielle SII-Regelung sind die Contract Boundaries, bei deren Vorliegen mit einer Finanzierung der jenseits der CB liegende Wert zumindest partiell gehoben werden kann.

Aufgabe 8. *Garantieprodukte und deren Risikotransfer [18 Punkte]*

Lösungsvorschlag

(a) Innerhalb eines gegebenen (z.B. Black-Scholes-)Modells hängt üblicherweise der Preis eines Derivats von verschiedenen Inputfaktoren ab. Diese Preisfunktion ordnet einem Tupel an Inputfaktoren (wie Preis des Underlyings, Zins, Volatilität des Underlyings, Laufzeit,…) den monetären Preis des Derivats zu. Es ist also eine reellwertige Funktion mehrerer Veränderlicher.

Als Griechen / Greeks bezeichnet man die partiellen Ableitungen der Preisfunktion eines Derivats (am meisten ist der Begriff wohl gebräuchlich für Optionen).

(b) Das Delta ist die partielle Ableitung der Preisfunktion (nach a) oben) nach dem Preis des Underlyings, hier also der Aktie. Erhöht sich der Preis der Aktie, so ist das Recht, sie zu einem fixierten Preis verkaufen zu können (Put) weniger wertvoll. Das Delta einer europäischen Put-Option auf eine Aktie ist also negativ.

Das Vega ist die partielle Ableitung nach der Volatilität des Underlyings (hier der Aktie). Ist der Aktienkurs volatiler, kommt der asymmetrische Optionscharakter der Put-Option eher / stärker zum Tragen: die Verluste des Optionshalters sind begrenzt (auf den Optionspreis), wohin häufiger und wahrscheinlicher größere Gewinne erreicht werden können. Die Option ist daher werthaltiger geworden, sprich, das Vega ist positiv. [Selbige Argumentation gilt auch für einen Call.]

Anmerkung: Ein formelmäßiger Nachweis des Vorzeichens würde auch zur vollen Punktzahl führen.

(c) Das Portfolio kann entweder als ein Investment aus Fondsanteilen mit einer Putabsicherung at the Money beschrieben werden oder als diskontierter Garantiewert mit einem Call-Investment (Put-Call-Parität).

Die Garantiesumme von 50.000 EUR entspricht zu Laufzeitbeginn einem Investment in 500 Fondsanteilen. Erste Möglichkeit ist also ein Portfolio mit 500 Fondsanteilen plus 500 Put Optionen at-the Money.

Alternativ 500 Call-Optionen plus ein Investment in ein risikofreies Investment über die Laufzeit von 10 Jahren.

(d) Das Delta eines Portfolios kann mittels des Investments in das Underlyings vollständig gesteuert werden. Für das vorliegende Produkt gilt

ein Delta von 0.9. Somit sollte 90% des Portfolios im Underlying investiert sein und 10 % in einer risikofreien Anleihe.

(e) Zwischen den Handelstagen kann es zu einer größeren Kursbewegung gekommen sein. Der Deltahedge sichert nur gegen (unendlich-)kleine Kursänderungen ab (Steigung der Preiskurve). Der Gammahedge verbessert die Situation zwar (Steigung, der Steigung der Preiskurve), aber bei großen Kursbewegungen reicht auch das nicht aus.

Mathematisch gesprochen handelt es sich das Problem der ungenauen Approximation im Satz von Taylor, welche erst mit höheren Ableitungen eine größere Genauigkeit bei weiterer Entfernung vom Entwicklungsmittelpunkt der Taylorreihe erzielt.

(f) Das Hinzufügen dieses Produktfeatures entspricht einer sogenannten Rachet-Option. Sie ist durch einfache Derivate nicht zu replizieren. Zu Laufzeitbeginn ist es unklar, zu welchem Strikelevel die einfache Putoption abgeschlossen wäre.

(g) Tod oder Storno können jederzeit eintreten, so dass die Garantieleistung keine endfällige Leistung mehr sein muss, sondern auch vorher schon eintreten kann. Beim Hedgen mit „nur" europäischen Optionen kann es daher zu größeren Gewinnen oder Verlusten kommen, wenn zum Garantieleistungszeitpunkt andere Fondswerte als die gehedgten Werte am Ende der Laufzeit beobachtet werden.

(h) Die Garantie sollte eher für den Todesfall ausgesprochen werden. Im Vergleich zu Storno dürfte das Antiselektionsrisiko deutlich geringer sein.

Ist es zum Beispiel zu einem größeren Verfall des Fonds gekommen, würde ein finanzrationaler Kunde kündigen, die Garantieleistung erhalten und für den gleichen Geldbetrag mehr Fondseinheiten als Arbitrage erhalten können.

Aufgabe 9. *Zinsrisiko [18 Punkte]*

Lösungsvorschlag

(a) (6 Punkte)

Wir verwenden dir Notation aus dem Vorlesungsskript:

- $CF = (CF_i)_{i= 1, 2,\dots}$ ist ein Cashflow und $r = (r_i)_{i= 1, 2,\dots}$ eine Zinskurve zu den Zeitpunkten $(t_i)_{i= 1, 2,\dots}$
- $PV_i(r, CF)$ ist der Barwert von CF_i mit Zinskurve r
- $DD_i(r, CF) := -\delta PV_i(r, CF)/\delta r$ ist die i-te Dollar-Duration

Zur Lösung der Aufgabe:

- $DD_i(r, CF) = -\delta PV_i(r, CF)/\delta r = -CF_i * (\delta \exp(-t_i*r_i) /\delta r)$ (weil CF unabhängig von r) $= -CF_i * (-t_i * \exp(-t_i*r_i)) = t_i * PV_i(r, CF)$
- Deshalb $ModDur(r, CF) = \Sigma_i DD_i(r, CF)/PV(r, CF) = \Sigma_i t_i * PV_i(r, CF)/PV(r, CF) = MacDur(r, CF)$

Der erste Schritt in der Umformung benutzt, dass CF nicht von r abhängt. Dies ist gegeben, weil es sich um einen fixed Kupon Bond handelt. Für einen Floater wäre das falsch.

Erhöht man den Kupon, so wird die Duration kleiner, weil kürzere Laufzeiten ein höheres Gewicht erhalten und dadurch MacDur kleiner wird. Bei stetiger Verzinsung ist MacDur = ModDur. Die Schlussfolgerung hängt nicht von der Wahl der Zinsmethode ab.

(b) (6 Punkte) DG steht für Duration Gap.

- Definition: naiv wird das DG oft als Differenz der Durationen der Aktiv- und Passivseite bestimmt. Dabei wird meistens angenommen, dass ein kleineres DG ein kleineres Zinsrisiko bedeutet. Das ist falsch, denn das Zinsrisiko richtet sich nach der Dollar-Duration des Surplus / Eigenkapitals. Deshalb sollte zuerst die „neutrale Duration" bestimmt werden und das DG als Differenz zwischen Aktivduration und neutraler Duration definiert werden. Die neutrale Duration ist Dur(Liabilities) * Marktwert(Liabilities)/Marktwert(Assets).

- Vor-&Nachteile: Grundsätzlich bedeutet Zinsrisiko den potentiellen Verlust unter dem Faktor Zins. Weil ein höheres DG eine höhere Zinssensitivität des Surplus bedeutet, ist der Begriff grundsätzlich geeignet. Er hat außerdem den Vorteil, dass er einfach zu berechnen und weit verbreitet ist. Allerdings misst die Duration nur die Exponierung gegenüber kleinen Parallelverschiebungen der Zinskurve. Obwohl die Parallelverschiebung ein sehr wichtiger Faktor der Zinskurvenveränderung, ist etwa die Twist-Exponierung gar nicht berücksichtigt. Je größer die (parallele) Zinsveränderung ist, desto weniger Information enthält der Durationsbegriff über das Preisverhalten. Insbesondere kann ein 99.5% Quantil der Zinsänderung damit nicht gut approximiert werden, ist also etwa für das SII-Zinsrisiko kein zuverlässiger Indikator.

(c) (6 Punkte)

- Wenn die Passiv-CF zinsunabhängige Bestandteile mit sehr langer Laufzeit haben, dann kann es sein, dass es am Kapitalmarkt keine Instrumente mit entsprechend langer Laufzeit gibt. Typische solche Bestandteile sind etwa die Garantie-CF von klassischen aufgeschobenen Rentenversicherungen. Das Problem kann verstärkt werden durch aufgeschobene Prämienzahlung, weil die Duration der Passiva sich dadurch weiter vergrößert. Eine aktivseitige Reaktion über Forward-Instrumente kann bilanziell problematisch sein.

- Es kann Situationen geben, in dem die Zinsüberschüsse kaum Einfluss auf die Jahresüberschüsse haben. Dies kann durch Produkteigenschaften kommen oder durch die Aussteuerung des Geschäfts. Dann sind die Jahresüberschüsse annähernd zinsunabhängige Zahlungen und das Eigenkapital hat den Charakter eines Bond-Portfolios. Dann ist das Duration Gap positiv, unabhängig von der Kapitalanlage. Kosten- und versicherungstechnische Überschüsse sind oft wenig zinsabhängig. In der Regel ist ein Zusammenspiel von Produkteigenschaften und Managementregeln hier ursächlich. Wenn sie die Überschüsse dominieren, kann es zu solchen Konstellationen kommen. Ebenso kann es die Intention des Managements sein, den Jahresüberschuss möglichst stabil zu halten. Wenn dies entsprechend modelliert ist, trägt dies ebenfalls zu dieser Situation bei.

- In der Steuerung gibt es nur die Möglichkeit, auf Ebene des Produktmix und der Überschussstrategie zu reagieren. Eventuelle Änderungen müssen natürlich in das Bewertungsmodell übernommen werden, sonst ändern sich die Zahlen nicht.

Aufgabe 10. *Operationelles Risiko [18 Punkte]*

Lösungsvorschlag

(a) Z.B.:

i. Die ABC AG könnte ein Bayessches Netz verwenden (0,5P).

ii. Das ist ein gerichteter, azyklischer Graph (0,5P).

iii. Die Kanten des Graphs modellieren die Abhängigkeiten zwischen Risikoursachen und operationellem Risiko (1P).

iv. Die Knoten des Graphs entsprechen Zufallsvariablen. Anfangsknoten ≙ Risikoursachen, Endknoten ≙ Risiko (1P).

v. Parametrisierung: man benötigt die (unbedingten) Verteilungen der Anfangsknoten und die bedingten Wahrscheinlichkeiten der restlichen Knoten (2P).

vi. Bayessches Theorem: nach und nach können alle unbedingten Wahrscheinlichkeiten in den Knoten berechnet werden (schlussendlich auch für den Endknoten/das Risiko) (2P).

(b) $\{\mathbf{M_i} \cap \mathbf{U_j} : \text{i=1,2,3 und j=1,2}\}$ ist eine Zerlegung der Ereignismenge in disjunkte Ereignisse. Die Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit ergibt:

$$P(\{Schadenh.\,groß\}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} P\big(\{Schadenh.\,groß\}|\boldsymbol{M_i} \cap \boldsymbol{U_j}\big) \cdot P\big(\boldsymbol{M_i} \cap \boldsymbol{U_j}\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} P\big(\{Schadenh.\,groß\}|\boldsymbol{M_i} \cap \boldsymbol{U_j}\big) \cdot P(\boldsymbol{M_i}) \cdot P\big(\boldsymbol{U_j}\big)$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}2 + 0{,}85 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}8 + 0 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}2 + 0{,}95 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}8 = 0{,}6655$$

(c) Das Bayessche Theorem ergibt

$$P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_1}|\{Schadenh.\,groß\}) = \frac{P(\{Schadenh.\,groß\}|\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_1}) \cdot P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_1})}{P(\{Schadenh.\,groß\})} = 0$$

und

$$P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_2}|\{Schadenh.\,groß\}) = \frac{P(\{Schadenh.\,groß\}|\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_2}) \cdot P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_2})}{P(\{Schadenh.\,groß\})}$$

$$= \frac{0{,}95 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}8}{0{,}6655} \approx 0{,}5139$$

(d) $$P(\boldsymbol{M_3}|\{Schadenh.\,groß\}) = P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_1}|\{Schadenh.\,groß\})$$

$$+P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_2}|\{Schadenh.\,groß\})$$

$$\approx 0 + 0{,}5139 = 0{,}5139$$

Unter den Fällen mit großer Schadenhöhe gibt es ca. 51,39% Fälle, bei denen Maßnahme **M_3** gegriffen hat. Die Maßnahme scheint nicht besonders risikoreduzierend zu sein.

CERA
Certified Enterprise Risk Actuary

DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Written Examination CERA Module B

Taxonomy and Modelling and Transfer of Risks

in accordance with Examination Regulations 2.0
of the *Deutsche Aktuarvereinigung* e. V.
to obtain the additional qualification CERA

Date:20.10.2023

Please note:

- You may use a calculator.
- The examination has a total of 180 marks. The pass mark is 90 marks.
- Please check that your examination paper is complete. The paper consists of 16 pages.
- Give reasons for your answers. You must show your working out for any questions that involve calculations.

Members of the Examination Committee:

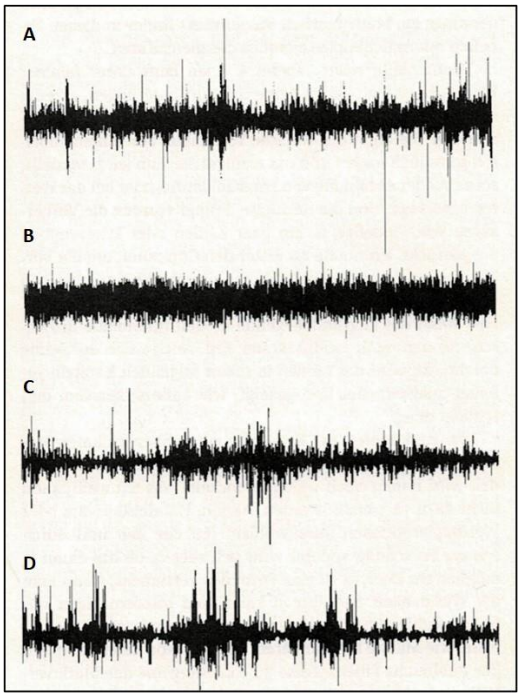
Prof. Dr Hubert Bornhorn, Dr Steve Brüske, Dr Peter Henseler,
Dr Ingo Kraus, Dr Nils Langenberg, Dr Michael Leitschkis

Question 1. *Equity risk [18 marks]*

(a) (2 marks) In a financial market time series, what is meant by so-called stylised facts? Give a definition using your own words.

(b) (4 marks) Give four examples of stylised facts in financial market time series and explain these examples.

(c) (6 marks) The following four illustrations show time series of returns (the time steps are displayed horizontally and the returns per time step are displayed vertically). Two time series are based on empirical data of real financial investments, the other two are simulated:



Which two time series are based on empirical data? Which two time series are simulated? Make justified assumptions! *(Source of the illustrations: Mandelbrot, Fraktale und Finanzen)*

(d) (6 marks) Describe one similarity / one difference between the equation of the stochastic processes of geometric Brownian motion and Heston model. Furthermore, refer, by way of example, to one stylised fact that one model can reproduce and the other not.

Question 2. *Credit risk [18 marks]*

(a) (3 marks) Similar to the dollar duration DV01 in the case of assets with credit risk exposure one considers the spread duration CS01. By definition, this shows by how many monetary units the value of an asset with credit risk exposure will change if there is a parallel shift of the spread by one basis point. Propose a formula to calculate CS01 using two sensitivities.

(b) (9 marks)

i) (3 marks) Consider a bond with a nominal of 1m EUR and a term of 5 years. The risk free curve is flat at 3%, the spread is flat at 1%. Determine the dollar duration of this bond.

ii) (3 marks) Determine the spread duration of the above bond.

iii) (3 marks) Briefly explain why the concept of spread duration could be useful.

(c) (3 marks) The bond of a renowned international airline has defaulted. In the months prior to the default the spread was clearly outside investment grade. What could be the possible reason for this? Give a brief explanation.

(d) (3 marks)) The bond of a renowned international manufacturer of consumer goods has defaulted. Just before the default its spread was still within investment grade. What could be the possible reason for this? Give a brief explanation.

Question 3. *Underwriting Life and Health [18 marks]*

You work for a medium-sized life insurer whose portfolio consists primarily of "classic' term insurance policies (i.e., one single payout at death during the term of the policy).

Now that the pandemic is over -- at least for the purposes of this question -- your Management Board wants an actuarial analysis and asks -- i.e., asks you -- the following questions.

(a) (2 marks) Name and briefly describe the three components of underwriting risk (in line with the course / lecture notes). What risk is not usually considered as a component of the underwriting risk but is considered to be a fourth driver for the overall loss distribution in internal models? Describe this briefly as well.

(b) (4 marks) Explain how the four components of underwriting risk could have changed because of the Covid-19 pandemic and/or which aspects need to be considered for this request by the Board. For each component name at least one aspect.

(c) (3 marks) You have implemented the Solvency II standard model. Name and briefly explain three aspects to which you should, given the Covid-19 pandemic, pay particular attention when analysing risk drivers in the Life Module -- e.g., in your ORSA report.

(d) (6 marks) You are now interested in implementing an internal model and are closely analysing change or trend risk in particular. Which three fundamental types of change are usually considered and how can these be modelled?

(e) (1 mark) Can you capture future pandemics with any of the three basic changes from (d)? If so, which one? If not, how then?

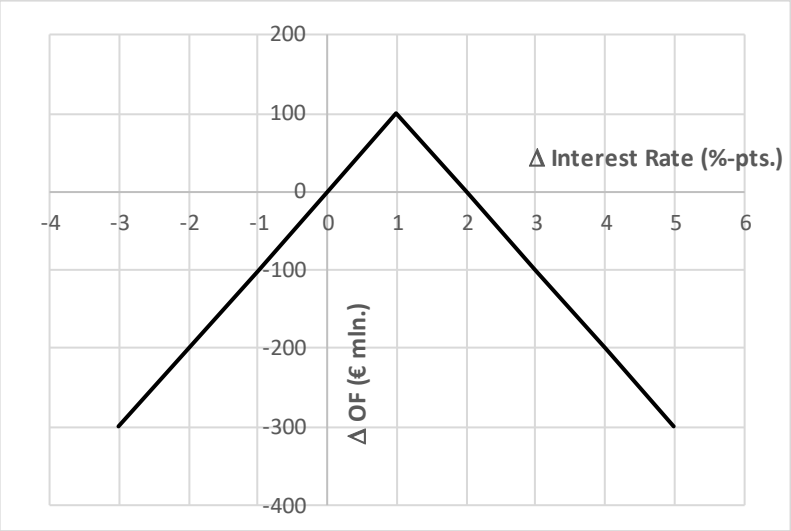
(f) (2 marks) Once you have modelled the validity of your model, how can you check for change risk and what must be considered when doing so?

Question 4. *Risk aggregation [18 marks]*

Consider an insurance company that has a complex, non-monotone interest risk profile, i.e., both (marked) interest rate decreases and marked) interest rate increases lead to losses in own funds. One possible cause could be the interdependency of guaranteed products in the portfolio, with-profit surplus sharing mechanisms, the required realisation of market value losses on bonds if interest rates rise as well as the discounting of capital market independent cash flows.

Assume that, on 31.12.2022, the insurance company had the following changes in its own funds with parallel changes to yield curves:

Δ Interest Rate (%-pts.)	Δ OF (€ mln)
-3	-300
-2	-200
-1	-100
0	0
1	100
2	0
3	-100
4	-200
5	-300



The SCR calculation is performed using an internal model. In the model the interest rate risk is modelled as a normally distributed parallel shift. In addition to interest rate risk on 31.12.2022 only spread risk and longevity risk make relevant contributions to the SCR. The following table shows the contributions to the SCR as well as the correlation assumptions used (Gauß copula).

SCR in € mln.	non-div.	div.
Spread risk	100	50
Interest Rate Risk	300	200
Longevity Risk	100	50
Other Risks	40	5
SCR as sum	**540**	**305**
Diversification	**-235**	**0**
SCR Total	**305**	**305**

Correlations	Interest Rate Up	Spread Up	Longevity	Other Risks
Interest Rate Up				
Spread Up	-50%			
Longevity	-25%	25%		
Other Risks	0%	0%	0%	

(a) (7 marks) Assume that, until the following valuation date for calculation, the interest rate has risen by 2 percentage points. Furthermore, assume that all model assumptions as well as external parameters (portfolio, investments, etc.) have remained unchanged since 31.12.2022.

Outline the resulting changes to own funds with parallel yield curve changes on the new valuation date. Why does the company seem, initially, to assume that there is no material change to the interest rate risk and the SCR?

(b) (4 marks) The resulting SCR calculation shows that the first estimation was not correct and that the overall SCR will even decrease considerably. What effect is crucial here and why should it be carefully validated?

(c) (4 marks) At the new valuation date the spread and longevity risk decrease although the investments and portfolio have remained the same. How can this be explained? Which "other risk" could, on the other hand, have increased considerably, and might this also affect a risk that is not even included in the SCR calculation?

(d) (3 marks) Assume that the company is part of a Group and that the internal model is a Group simulation. Why is it difficult, without performing an explicit calculation for the Group, to transfer the impact of the rise in interest rates from Question 4 (b) to the Group results?

Question 5. *Impact of climate change risks on FFBK's residential real estate insurance portfolio -- Standard formula [18 marks]*

Feldafing Brandkasse (FFBK) is also addressing the issue of sustainability. For this year's ORSA report the impact of climate change risks, on its residential real estate insurance portfolio, for example, has to be determined. With the help of the GDV's (German Insurance Association) documentation on "Climate Change Scenarios in the ORSA" the impact on the company's results should be shown and explained in the Standard Formula.

Thanks to the GDV paper, you already have an overview of the changes to gross losses, which are shown in the following table:

Gross Loss (€ m)	**Status Quo**	**2030**	**2050**	**2100**
$L_{flood,Germany}$	50	58	107	119
$L_{storm,Germany}$	80	80	80	80
$L_{hail,Germany}$	30	36	43	60

In the status quo and in the following years the losses are covered by an excess of loss contract. This contract has an excess of €10 million and cover of €70 million.

(a) (10 marks) Using the values provided, calculate the net SCR per peril and in total for the status quo and for 2100. To do so, use the methodology from the Standard Formula for Natural Catastrophe losses.

NB: Consider the multiple events 80%/40% and/or 100%/20% for storm, 65%/45% and/or 100%/10% for flood and 70%/50% and/or 100%/20% for hail as per the Standard Formula.

(b) (4 marks) Your CRO is somewhat concerned because he does not want to have more than €50 million net NatCat SCR for residential real estate insurance in FFBK's portfolio. Make a concrete proposal how the excess of loss contract could be adjusted in order to enable this?

(c) (4 marks) Furthermore, your CRO asks you whether there can be any other impact with regard to the reinsurance arrangements that have not been sufficiently considered in your analysis. Name at least two possible changes that have not been included in the calculation and explain their impact on risk and the reinsurance arrangements.

Question 6. *Impact of climate change risks on FFBK's residential real estate insurance portfolio – Internal Model [18 marks]*

FFBK now wants to investigate the results of climate risks on its risk position using the internal model. Risk transfer also plays an important role when doing this.

(a) (10 marks) Impact of climate stress scenario on the net SCR for the LoB residential real estate.

You are now looking at FFBK's latest results from the risk module natural catastrophes. The SCR (gross and net) is derived from the simulation path with the following four gross losses €100 million, €60 million, €30 million und €10 million. FFBK's natural catastrophe specialists have performed a simulation with the stressed parameters which states that the SCR (gross and net) results from the path with the following four gross losses: €120 million, €80 million, €60 million and €20 million There is reinsurance cover for the LoB residential real estate in an excess of loss contract as follows:

1st layer: €30 million xs €10 million. Two 100% reinstatements. Instalment premium €3 million.

2nd layer: €30 million. xs €40 million. 1 reinstatement @ 150%. Instalment premium €2 million.

3rd layer: €30 million xs €70 million. No reinstatement. Instalment premium €2 million.

Calculate the net SCR for the LoB residential real estate in the non-stressed and stressed simulation. What do you notice?

NB: Calculate using an expected value of 0 and use the result directly from the simulation path.

(b) (4 marks) The FFBK Management Board is concerned by the results from the stress test simulation and asks you what options there are to reduce the risk in both the gross and net portfolio. Make two proposals for the gross portfolio and two for the net portfolio.

(c) (4 marks) The FFBK Management Board is now considering, in addition to the company's existing classic reinsurance cover, placing the natural catastrophe risks on the capital markets. What products for alterna-

tive risk transfer are you familiar with? Name two products and briefly describe how they work.

Question 7. *Reinsurance and Transfer of Risk: Life [18 marks]*

On behalf of your Management Board you are working on optimising the solvency ratio using (suitable) reinsurance.

You work for a primary insurer and have an in-force portfolio of profitable unit-linked term policies that consistently earns good risk and cost profits.

You know from the last solvency report that s: SCR_Mortality = 400, SCR_Lapse = 1000. The remaining cost drivers (such as disability, longevity etc.) in the life module are not important for this question.

(a) (2 marks) Which of the two components (Mortality and Lapse) would you rather consider as an approach and why?

(b) (2 marks) For Mortality you are primarily thinking of a high quota for which you have received two different design proposals from a trusted reinsurer:

i) The reinsurance premiums are 10% over your best estimate but the reinsurer retains all profits from the reinsurance contract.

ii) The reinsurance premiums are 30% over your best estimate but after deducting a margin of 3.85% of the premium to cover its costs the reinsurer will reimburse 80% of the profit after deduction of these costs in the form of a profit-sharing agreement.

What are your thoughts and preferences with regard to optimising the solvency ratio?

(c) (4 marks) With regard to the transfer of lapse risks you have learned something in your CERA seminars about mass lapse reinsurance contracts. Describe the structure of these and explain one condition necessary for them to be effective by referring to the calculation of SCR lapse.

(d) (6 marks in total) You know from risk management that, for your company, lapse up risk only carries half as much weight as mass lapse risk at present and that lapse down risk is of no importance for your company. Thus you are aware that you have made the right choice with mass lapse reinsurance and you wonder what is the maximum price for this to have a positive effect.

Together with your colleague you decide to proceed in an iterative fashion:

i) (2 marks) Your colleague argues: "*Because SCR_MassLapse = 1000 > 400 = SCR_Mortality, the SCR_MassLapse cold be reduced by 60% (i.e., to 400).*"

Do you agree? If so, why; if not, why not?

ii) (2 marks) Assume that here and in the following that the statement in i) above is correct. Which parameters for the design of the mass-lapse reinsurance (attachment point and capacity) would have to be selected to implement your colleague's proposal?

iii) (2 marks) For the situation in ii) - and thus assuming that the statement in i) above is correct - your colleague has calculated: "*A saving of 600 risk capital (= 1000 – 400) and risk capital costs of 6% produces a maximum price of 36.*"

Your colleague is lucky and your reinsurer even offers a contract at 34, which your colleague wishes to sign immediately. What would you advise him or her and why?

Note: To answer correctly you will need a short calculation when giving a reason for your answer. If you do not know the required parameters by heart then make an explicit assumption and write this assumption in your answer.

(e) (4 marks) Finally, your colleague asks whether the solvency ratio can also be improved by using financial reinsurance. Explain the basic principles of financial reinsurance and how, in general, it works under Solvency II. Finally, explain which special Solvency II rule has a particularly positive impact on the effectiveness of financial reinsurance under Solvency II.

Question 8. *Guaranteed products and transferring their risk [18 marks]*

(a) (2 marks) What is generally meant by Greeks?

(b) (4 marks) Define the delta and vega for a European put option on a share. What signs do these two values have in this case? Give reasons for your answer (you can use a mathematical proof but valid argumentation is also sufficient to obtain the full marks.)

You wish to launch a new guaranteed product that will pay out, after 10 years, the fund balance of an investment in an actively managed fund or as a minimum payout the savings component from the single premium invested.

The fund benchmark at the launch has an implicit volatility of 20% for each term up to and including year 10 and is issued at EUR 100. The total delta for the guaranteed product is 0.9, and, if you require further parameters make appropriate assumptions.

The subscription ratio for all options discussed here is principally 1:1.

(c) (2 marks) Describe in two ways the (liabilities) portfolio that would arise from selling a policy with a guaranteed sum of EUR 50,000.

(d) (2 marks) On the regulated capital market (e.g., EUREX) there are no derivative financial instruments for benchmarking available. You decide to hedge the product yourself dynamically. Which "Greek" can you hedge without resorting to using further trading partners? How would you make up your assets portfolio if you were to hedge it completely?

(e) (3 marks) You have found a bank that would sell you OTC (over the counter) options with a maturity of up to 5 years (calls and puts). Using a call option with a 5-year maturity you have taken up a position that is both delta and gamma neutral. Between two trading days there is, however, a clear ALM mismatch, although the yield curve and the volatility of the benchmark have not changed. What could have happened and why has it led to the mismatch?

What is the mathematical basis for this observation?

(f) (2 marks) The above product is now being offered with an alternative feature. After five years the fund balance is offered as a new guarantee if this is above the guarantee. Is it possible to represent this product feature in the liabilities portfolio by adding a further 5-year put option? Give reasons for your answer.

(g) (2 marks) What additional complexity arises if the guarantee payment (savings component from the single premium invested) is also to be paid out in the event of either cancellation or death during the 10-year term?

(h) (1 mark) From a risk perspective: in Question 8 (g) would you advocate the guarantee for death or for lapse/cancellation? Why?

Question 9. *Interest rate risk [18 marks]*

(a) (6 marks) Show that, with a constant interest rate, the following applies for a bond B with a fixed coupon: MacDur(B) = ModDur(B). This does not apply for all cash flows, which property of the bond would hardly come into effect in this case? In what direction does the duration of a standard bond move in the coupon was increased? Give reasons for your answer.

(b) (6 marks) Discuss the definition, and the pros and cons of the duration gap as an indication of interest rate risk.

(c) (6 marks) There are situations in which the duration gap cannot be closed by measures on the assets side of the balance sheet. Give two examples in which the duration gap constantly remains negative or constantly remains positive. How can this be countered in management and steering?

Question 10. *Operational Risk [18 marks]*

Insurer ABC AG has captured the following statistics for a specific operational risk over years:

i. In 20% of the cases in which it occurs the risk is caused by $\mathbf{U_1}$, in the remaining cases, the risk is caused by $\mathbf{U_2}$.

ii. ABC AG has introduced three risk-mitigating measures to reduce the risk.

   a. Measure $\mathbf{M_1}$ takes effect in 20% of loss events.

   b. Measure $\mathbf{M_2}$ takes effect in 35% of loss events.

   c. Measure $\mathbf{M_3}$ takes effect in 45% of loss events.

   In no loss events do several measures take effect at the same time.

iii. For the loss amounts caused by the risk ABC AG has classified the risk into minor losses (≤ €500,000) and large losses (> €500,000).

iv. For the classified loss amounts ABC AG has the following conditional distribution:

Cause	$\mathbf{U_1}$	$\mathbf{U_2}$	$\mathbf{U_1}$	$\mathbf{U_2}$	$\mathbf{U_1}$	$\mathbf{U_2}$
Measure	$\mathbf{M_1}$		$\mathbf{M_2}$		$\mathbf{M_3}$	
Loss amount large	0.9	0.2	0.25	0.85	0	0.95
Loss amount minor	0.1	0.8	0.75	0.15	1	0.05

(a) (7 marks) Based on the data which modelling method would be appropriate for ABC AG to use for its operational risk? Describe the key points of this method of measuring risk using your own words!

(b) (5 marks) Calculate the (unconditional) probability for a large loss amount! Assume that the cause and measure are independent of one another.

(c) (3 marks) Calculate the a-posteriori probabilities $P(M3 \cap Ui \mid \{\text{loss amount large}\})$ for i=1,2!

(d) (3 marks) Calculate and interpret the a-posteriori probability $P(\mathbf{M_3} \mid \{\text{ loss amount large}\})$!

CERA
Certified Enterprise Risk Actuary

DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Written Examination CERA Module B

Taxonomy and Modelling and Transfer of Risks

in accordance with Examination Regulations 2.0
of the *Deutsche Aktuarvereinigung* e. V.
to obtain the additional qualification CERA

Date:20.10.2023

Model Answers

Please note:

- You may use a calculator.
- The examination has a total of 180 marks. The pass mark is 90 marks.
- Please check that your examination paper is complete. The paper consists of 16 pages.
- Give reasons for your answers. You must show your working out for any questions that involve calculations.

Members of the Examination Committee:

Prof. Dr Hubert Bornhorn, Dr Steve Brüske, Dr Peter Henseler,
Dr Ingo Kraus, Dr Nils Langenberg, Dr Michael Leitschkis

Question 1. *Equity risk [18 marks]*

Model answer

(a) For example: In financial market time series stylised facts refers to certain abstract basic structures that are typical for financial market time series / that can be found in many financial market time series.

(b) For example: four from:

i. There are phases of high volatility and there are phases of low volatility (volatility clustering).

ii. The data contain discrete leaps.

iii. The distribution of the yields is asymmetrical (skew).

iv. Medium and high yields are over-represented (leptokurtic distribution, fat tails).

v. Self-similarity, i.e., the data on different timescales cannot be qualitatively distinguished from one another or it is difficult to do so (if the axes are not labelled).

vi. No autocorrelations, i.e., linear autocorrelations are often not significant (possible exception: small intraday lags).

and many more **(1 mark for each)**

(c) Time series B has no volatility clustering and no leaps. Therefore, this time series is not based on empirical data but on a simulation **(2 marks)**. Time series A, C and D on the other hand quite clearly display volatility clustering. Moreover, all three have leaps **(2 marks)**. However, in the case of A and C these are more marked around the time of the leap, which suggests that A and C are based on empirical data and D is not **(2 marks)**.

(d) The process equation with which the yield with the geometrical Brownian motion or the Heston model is modelled is identical in construction in both models: a constant drift term plus an increment of a Brownian motion scaled with the volatility **(2 marks)**. The core difference is that the volatility in the geometrical Brownian motion is constant whereas with the Heston model it is modelled by means of an own mean-reversion process. **(2 marks)**

For example: because of the time-dependent modelled volatility the Heston model can reproduce the volatility-clustering. This is of course not possible because of the constant volatility in the case of the geometrical Brownian motion. **(2 marks)**

Question 2. *Credit risk [18 marks]*

Model answer

(a) (3 marks) The calculation of CS01 can be performed as follows by analogy with the known dollar duration:

CS01 = (MV(Spread-1bp) – MV(Spread+1bp)) / (10000 * 2bp)

= (MV(Spread-1bp) – MV(Spread+1bp)) / 2

(b) (9 marks)

(i) The dollar duration is:

(MV(interest – 1bp) – MV(interest + 1bp) / 2

= 1M x (1/(1.04 – 0.0001)^5 - 1/(1.04 + 0.0001)^5) / 2 = 395.16.

- (ii) The spread duration of the bond is also 395.16, as can be easily seen without performing a calculation.
- (iii) The spread duration shows the investor the spread risk exposure of an asset with credit risk and may help with hedging, for example, with the help of CDS.

(c) (3 marks) The default of a bond of a well-known international airline will not have come as a complete surprise. It is more likely that business problems will have been known about in the months prior to the default and will thus have been priced in by the markets. Therefore, in the months leading up to the default, the spread will have already been outside the investment grade range.

(d) (3 marks) Likewise, the default of a bond issued by a renowned international manufacturer of consumer goods would normally not come as a surprise. Poor business results would normally emerge gradually and be priced in. If the spread was still investment grade just before the default then some very important information that was critical for the default must have emerged surprisingly and out of the blue. This would be conceivable in the event of fraud, for example.

Question 3. *Underwriting Life and Health [18 marks]*

Model answer

(a) Error risk, random risk, change/trend risk. Cat/pandemic risk is the fourth component, see course/lecture notes.

(b) Any of the following aspects could be listed (others are also permitted):

- Error (also level risk): Following the pandemic is there simply another level of mortality? (Is the model presented in the seminar still accurate?) There may, for example, be issues surrounding long covid and related mortality or higher mortality due to medical examinations not having been done or been permitted during the pandemic, or non-acute operations having been postponed.

- Random: This reflects, for example, the fact that insured persons with a high net worth could die. However, this was not observed during the covid-19 pandemic (on the contrary: social distancing rules are harder to maintain in areas of high population density such as Cologne Chorweiler). Random risk may arise in locally active insurers in whose region there were particularly serious covid-19 cases and where long covid is now more widespread.

- Trend/Change: How do improvements in mortality change because of covid? Temporarily this was a deterioration, that may have offset the previous 5-10 years or so of improvements. Return to the old (improvements in) mortality? Further improvement? Medical progress for people with pre-existing conditions? Clear progress in the development of vaccines has been observed – could a cancer vaccine soon be available?

- Cat/Pandemic: Which return period would equate to the losses observed during the covid-19 pandemic? Relation between "expected" pandemic and covid-19 from a medical and actuarial perspective?

(c) i) Policyholders will once again be more aware of insurance companies and mortality => impact on future lapse / cancellations, possibly also depending on age?

ii) Was the pandemic modelled appropriately? Approximation for example via back testing covid-19 vs. expected pandemic losses

iii) Cat/Pandemic stress only considers increased mortality. Appropriate consideration of other losses (long covid? mental health in income protection insurance?) or deferred deaths (during the pandemic as a result of missed medical examinations, missed cancer diagnosis or delays in cancer treatment or similar).

iv) Age-independent pandemic shock: the standard formula increases mortality for all ages equally. This was not observed with covid-19, however.

Note: Candidates were only asked to list three aspects; other aspects may have been mentioned that are not listed above and would be permissible.

(d) See course / lecture notes:

- Random walks (with or without drift), e.g., modelled using Brownian motion
- Abrupt changes, e.g., modelled by jump processes such as, e.g., the Poisson process with random lognormal-distributed jumps.
- Cyclical changes, e.g., modelled using cyclical processes such as ARIMA processes if necessary, also with mean reverting.

(e) Pandemics should not be captured in the risk driver Change/Trend risk but rather in the separate risk driver Cat/Pandemic risk.

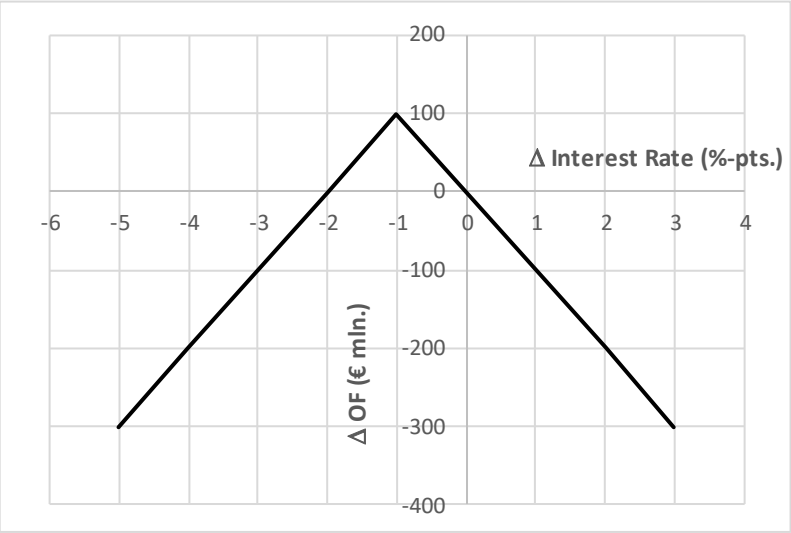
(f) Back testing can be used to test the model using historical data. It is important, however, to ensure the comparability of the input data; an oft-cited example is a shift in the age distribution of the population that may have happened in the meantime.

Question 4. *Risk aggregation [18 marks]*

Model answer

(a) Following a rise in interest rates of 2%-points and otherwise unchanged conditions on the new valuation date there would be the following changes in own funds with parallel changes to the yield curve:

Δ Interest Rate (%-pts.)	Δ OF (€ mln.)
-5	-300
-4	-200
-3	-100
-2	0
-1	100
0	0
1	-100
2	-200
3	-300



This corresponds to a reflection (interest rate rise <-> interest rate fall) of the original distribution, i.e., the undiversified interest rate risk remains the same since a (symmetrical) normal distribution is used to calculate the risk. At first glance one could thus assume that the increase does not bring about any material change to the SCR.

(b) The interest rate risk is not uncorrelated with the other risks. Therefore, the change to the risk profile (interest rate rise <-> interest rate fall) has a marked impact on the diversification and the SCR as a whole. On the original valuation date, it was primarily the fall in interest rates that made the dominant contribution to the interest rate risk. This was positively correlated with the longevity and spread risk. The change to the dominating rise in interest rates now delivers a predominantly negative correlated contribution. Therefore, the diversification rises and the SCR as a whole reduces.

Because of the materiality of this assumption, it should be examined whether the original correlation assumption, derived under different market conditions, is still valid.

(c) The spread risk could decrease since the market value of the bonds and thus the losses in the event of an increase in the spread falls. Also, at a higher interest rate the risk-bearing capacity of the company (e.g., because of the future with-profits surplus sharing) could be higher. In terms of longevity risk the higher discounting and/or the higher future reinvestment interest rate could reduce the contribution.

On the other hand, a rising market interest rate could mean that lapse risk becomes more important: realising market value losses or losing more profitable business under the new market conditions could be the cause. As a result, the development of the liquidity risk as a non-quantifiable risk has to be observed.

(d) Since risks at single company level and at Group level usually diversify differently and the drop in the SCR of the single company is mainly due to a change in diversification behaviour it is almost impossible to predict the impact on the Group SCR. Depending on the Group's risk profile the drop in the SCR may be greater than at single company level or there may even be a marked rise in the SCR.

Question 5. *Impact of climate change risks on FFBK's residential real estate insurance portfolio -- Standard formula [18 marks]*

Model answer

(a) First of all one uses the multiple events to calculate the basis for the reinsurance to be applied in the status quo and in the year 2100:

Status Quo	**Scenario A**		**Scenario B**	
Gross Loss	**Loss 1**	**Loss 2**	**Loss 1**	**Loss 2**
$L_{flood,germany}$	33	23	50	5
$L_{storm,germany}$	64	32	80	16
$L_{hail,germany}$	21	15	30	6

Year 2100	**Scenario A**		**Scenario B**	
Gross Loss	**Loss 1**	**Loss 2**	**Loss 1**	**Loss 2**
$L_{flood,germany}$	77	54	119	12
$L_{storm,germany}$	64	32	80	16
$L_{hail,germany}$	42	30	60	12

Then the excess of loss contract 70 xs 10 is applied, the sum per scenario calculated and the maximum taken.

Status Quo	**Scenario A**			**Scenario B**			**Maximum**
Gross Loss	**Loss 1**	**Loss 2**	**Sum**	**Loss 1**	**Loss 2**	**Sum**	
$L_{flood,germany}$	10	10	20	10	5	15	20
$L_{storm,germany}$	10	10	20	10	10	20	20
$L_{hail,germany}$	10	10	20	10	6	16	20

Year 2100	**Scenario A**	**Scenario B**	**Maximum**

Gross Loss	**Loss 1**	**Loss 2**	**Sum**	**Loss 1**	**Loss 2**	**Sum**	
$L_{flood,germany}$	10	10	20	49	10	59	59
$L_{storm,germany}$	10	10	20	10	10	20	20
$L_{hail,germany}$	10	10	20	10	10	20	20

Finally in both cases using the root formula (rho=0) the overall net SCR for residential real estate insurance is determined. In the status quo €35 million net SCR is required and in the year 2100 €66 million.

(b) The excess and the limit in the excess of loss contract can be adjusted. If, for example, the limit is increased to €90 million the net total loss from the flood scenario reduces from €59 million to €39 million with the NatCat SCR for residential real estate insurance being €48 million according to the root formula. Alternatively, the retention can be reduced to €0 million which would make the SCR €50 million.

(c) Possible answers could be:

- Change in the premium rate

  → Higher reinstatement premium thus increasing the risk, moreover this would make the reinsurance more expensive

- Change to the number of losses per year

  → The standard formula provides for a maximum of two loss events per year, which may possibly underestimate the risk in the future

- Contracts can no longer be placed 100% or must contain stronger exclusions (e.g., restriction to a region and/or a peril)

  → The net SCR increases, and the reinsurance becomes more expensive

Question 6. *Impact of climate change risks on FFBK's residential real estate insurance portfolio – Internal Model [18 marks]*

Model answer

(a) Non stressed simulation

	Losses				
	1	2	3	4	Sum
Gross	100	60	30	10	200
Ceded	90	50	20	0	160
Net	16	13	10	10	49
Reinstatement	6	3			9

Stressed simulation

	Losses				
	1	2	3	4	Total
Gross	120	80	60	20	280
Ceded	90	60	30	0	180
Net	36	23	30	20	109
Reinstatement	6	3			9

This makes the net SCR €49 million before the stress scenario and €109 million in the stress scenario. It is striking that in the stress scenario the gross SCR rises by 40%, the net SCR rises by more than 100%.

(b) Possibilities to reduce the risk would be:

- Better geographical diversification in the portfolio
- Better underwriting management
- Placing a 4th layer in order to cover the losses over €100 million.
- Increasing the number of reinstatements for the existing layers
- Alternative risk transfer: for example placing a NatCat bond

(c) Products suitable for alternative risk transfer:

- Cat Bonds

Comparable with excess of loss in reinsurance. Investors receive a fixed spread and bear the risk of a partial or total loss of their capital if the defined trigger is exceeded

- Side Cars

  Comparable with capped quota in reinsurance. Investors share in the underwriting results of the insured portfolio up to the amount of capital paid in.

- Contingent Capital

  - Contingent Capital Surplus Note

    Enables access to liquidity to settle losses and defers payment over time

  - Catastrophe Equity Put

    Possibility to increase equity capital using warrants after a catastrophe or in general if a particular loss is exceeded

  - Stand-by Line of Credit

    Early assurance of access to capital as a means of protection for times in which access will be more difficult

Question 7. *Reinsurance and Transfer of Risk: Life [18 marks]*

Model answer

(a) The crucial aspect is the diversification in the aggregation with the root formula. The diversification is better if the underlying diversifying risks are of the same size.

Therefore, it appears more sensible to reduce the SCR_Lapse instead of increasing the gap between SCR_Mortality and SCR_Lapse.

(b) The solvency ratio is the quotient from Eligible Own Funds and the SCR.

In variant b there is a much greater outflow of premiums, which will, with high probability, will be recouped via profit-sharing. This means in addition: if a stress scenario (e.g., a mortality shock) occurs, the reinsurance contract will earn considerably lower profits and, as a result, a lower profit-sharing sum will be paid out. This so-called risk re-transfer will mean that a considerable portion of the risk -- measured in terms of the SCR -- will remain with the primary insurer.

The reinsurer's expected profit is the same in both cases: In case a. it is 10% of the Best Estimate (BE), namely 110% BE premium less 100% BE losses. In variant b. 3.85% of the premium will remain with the reinsurer (equals 3.85%*130% BE = almost exactly 5% of the BE) plus 20% of the non-disbursed profits, i.e., 20% of (130% BE as premium less 5% of the BE of the advance deduction less 100% BE as loss), namely 20% of 25% of the Best Estimate. Thus 5% BE + 5% BE = 10% BE will also remain with the reinsurer.

In the Best Estimate case the outflow of funds is thus (more or less) identical, and because of the non-existent risk re-transfer variant a. seems better for the SCR and hence for the solvency ratio.

The implicit assumption is that the premiums / margins earned by the primary insurer are high enough to be able to pay the reinsurance premiums.

(c) See course / lecture notes. Briefly: In the case of mass lapse reinsurance contract the reinsurer takes on the portion that exceeds a contractually agreed threshold (e.g., 30% mass lapse). If the mass lapse scenario occurs (40%), the primary insurer is only at risk for 30% of

the mass lapse, since the reinsurer takes on the remaining 10%. One can say here too: 10% xs. 30%.

This design can only then be effective if the mass lapse scenario among the three scenarios that determine the SCR_Lapse is the relevant scenario, i.e., if SCR_MassLapse > max{SCR_LapseUp,SCR_LapseDown}. In order to justify the expense for a reinsurance contract, in actual fact ">>" ought to apply.

(d) Statement i) is incorrect. When maximising SCR_Lapse it initially depends on how much bigger SCR_MassLapse is than SCR_LapseUp, in this case the comparison with SCR_Mortality is irrelevant. [Thus, because SCR_LapseUp = 500, the SCR_Lapse of 1000 could be reduced to a maximum of 500 -instead of to 400.]

Concerning ii): If the statement in i) were correct, one would thus refer to a reduction of the entire Mass Lapse shock (40% shock) to 40% of the Mass Lapse shock (the two 40% figures are different!). Attachment Point is thus 40% of 40% = 16% and capacity 24% (= 40%-16%). Thus 24% xs 16%.

Concerning iii): Apart from the fact that, as explained above, the SCR_Lapse cannot be reduced to 400: Your company does not save the risk capital on SCR_Lapse, but, at most, on SCR_Life after diversification. The correlation of Lapse and Mortality -- according to the question it only depends on these two risk drivers -- is 0%.

Thus, <u>before reinsurance</u>

SCR_Life = (SCR_Lapse^2 + SCR_Mortality^2)^(0.5) = (1.16 million)^(0.5) = 1077.03

and <u>after the 24% xs 16% reinsurance</u> (which would not make much sense in any case, see above)

SCR_Life = (SCR_Lapse^2 + SCR_Mortality^2)^(0.5) = (0.32 million)^(0.5) = 565.69.

You would thus save around 511.34 risk capital, and with costs of capital of 6% this means a cost of capital saving of only 30.68 < 34 = price of the reinsurance. This fact alone makes the reinsurance offered appear not financially lucrative, particularly since in the calculation of the impact on the solvency ratio the impact on the own funds (outflow of

the reinsurance premium) would also have to be taken into consideration.

(Theoretically one should also even calculate the SCR_Total in addition and consider the diversification with SCR_Market and others but this was not part of the question.)

Therefore, in this case, the cost of the reinsurance appears to outweigh the saving and thus -- at least provided that no other reasons are apparent -- the reinsurance contract should not be signed in its present format.

(e) See course / lecture notes. The special SII arrangements sought are the contract boundaries (CB). If CB are in place, the value outside the CB can be raised, at least partially, by financial reinsurance.

Question 8. *Guaranteed products and transferring their risk [18 marks]*

Model answer

(a) Within a given (e.g., Black-Scholes) model the price of a derivative usually depends on various input factors. This price function allocates the monetary price of the derivative to a tuple of input factors (such as the price of the underlying, interest, volatility of the underlying, maturity,…). It is thus a real-valued function of several variables.

Greeks refers to the partial derivations of the price function of a derivative (in most cases the term is commonly used for options).

(b) The delta is the partial derivation of the price function (according to a) above) after the price of the underlying, in this case the equity. If the equity price rises then the right to be able to sell it at a fixed price (put) becomes less valuable. The delta of a European put-option on an equity is thus negative.

The vega is the partial derivation after the volatility of the underlying (in this case the equity). If the equity price is more volatile then the asymmetrical option character of the put option takes effect more / more strongly: the losses of the holder of the option are limited (to the option price), where profits can be made more frequently and will probably be higher. The option has thus become more valuable, in other words, the vega is positive. [The same argumentation applies to a call.]

Note: Evidence in the form of a formula will also score full marks.

(c) The portfolio can either be described as an investment made up of fund units hedged with a put at the money or as a discounted guarantee value with a call investment (put-call parity).

The guaranteed sum of EUR 50,000 corresponds at the beginning of the term to an investment in 500 units. The first possibility is thus a portfolio with 500 units plus 500 put options at the money.

Alternatively, 500 call options plus an investment in a risk-free investment over the term of 10 years.

(d) The delta of a portfolios can be fully manage / steered by means of the investment in the underlying. For the product in question the delta is 0.9. Thus, 90% of the portfolios should be invested in the underlying and 10 % in a risk-free bond.

(e) There may have been a larger price movement between the trading days. The delta hedge only protects against (infinitely) small price movements (rise in the price curve). The gamma hedge may improve the situation (rise, the rise in the price curve), but it is not sufficient in the event of large price movements.

Mathematically speaking, the problem is the imprecise approximation in Taylor's theorem, which only achieves greater precision using higher derivations for greater distance from the point of expansion in the Taylor series.

(f) Adding this product feature equates to a so-called ratchet option. It cannot be replicated by simple derivatives. At the beginning of the term it is not clear at which strike level the simple put option would be purchased.

(g) Death or lapse/cancellation can occur at any time so that the guarantee payment no longer needs to be a maturity payment but may also be made earlier. If hedging is done "only" with European options this could result in higher profits or losses if, at the time of the payment of the guarantee, different fund values to the hedged values at the end of the term are considered.

(h) The guarantee should rather be given for death. Compared to lapse or cancellation the anti-selection risk ought to be much lower.

If, for example, the fund value declines considerably a financially savvy customer would surrender (i.e., cancel), collect the guarantee payment and, for the same amount, then be able, as arbitrage, to purchase more units.

Question 9. *Interest rate risk [18 marks]*

Model answer

(a) (6 marks)

We use the notation from the course / lecture notes:

- $CF = (CF_i)_{i= 1, 2,\dots}$ is a cash flow and $r = (r_i)_{i= 1, 2,\dots}$ a yield curve at the moments $(t_i)_{i= 1, 2,\dots}$
- $PV_i(r, CF)$ is the present value of CF_i with yield curve r
- $DD_i(r, CF) := -\delta PV_i(r, CF)/\delta r$ is the i-th dollar duration

To answer the question:

- $DD_i(r, CF) = -\delta PV_i(r, CF)/\delta r = -CF_i * (\delta \exp(-t_i*r_i) /\delta r)$ (because CF independent of r) $= -CF_i * (-t_i * \exp(-t_i*r_i)) = t_i * PV_i(r, CF)$
- Therefore $ModDur(r, CF) = \Sigma_i DD_i(r, CF)/PV(r, CF) = \Sigma_i t_i * PV_i(r, CF)/PV(r, CF) = MacDur(r, CF)$

The first step in the transformation uses that CF does not depend on r. This is given because it is a fixed coupon bond. For a floater this would be incorrect.

If the coupon is increased the duration becomes smaller because shorter maturities receive a higher weighting and thus MacDur becomes smaller. With steady interest rates MacDur = ModDur. The conclusion does not depend on the choice of interest rate method.

(b) (6 marks) DG stands for duration gap.

- Definition: naively the DG is often denoted as the difference between the asset and liability durations. In doing so it is usually assumed that a smaller DG means a smaller interest rate risk. This is not correct because the interest rate risk is geared towards the dollar duration of the surplus / equity capital. Therefore, one should first determine the "neutral duration" and the DG should be defined as the difference between asset duration and neutral duration. The neutral duration is Dur(liabilities) * market value (liabilities)/market value (assets).

- Pros & Cons: Basically, interest rate risk means potential loss because of the interest rate factor. Because a higher DG means higher interest rate sensitivity of the surplus the term is basically appropriate. Moreover, it has the advantage that it is simple to calculate and is widespread. However, the duration only measures exposure to small parallel shifts in the yield curve. Although parallel shifts are a very important factor in changes in the yield curve the twist exposure, for example is not considered at all. The greater the (parallel) change in the interest rate is, the less information about price behaviour is contained in the concept of the duration. In particular, a 99.5% quantile of interest rate change cannot be well approximated using it, meaning that it is not a reliable indicator for SII interest rate risk, for example.

(c) (6 marks)

- If the liability CF have interest-rate independent components with very long maturities then it may be that there are no instruments on the capital market with a corresponding long maturity. Typical such components are, for example, the guarantee CF of classic deferred annuities. The problem can be exacerbated by deferred premium payment because the duration of the liability extends further as a result. An asset-related response using forward instruments can cause balance sheet problems.

- There may be situations where interest surpluses hardly impact on annual surpluses. This can be due to product features or to managing the business. In such cases, annual surpluses almost have the character of interest-independent payments and the equity capital has the character of a bond portfolio. Then the duration gap is positive regardless of the investment. Cost and underwriting surpluses are often not so dependent on interest rates. As a rule the interaction between product features and management rules is the cause of this. If they dominate the surpluses then such constellations are possible. It may also be the intention of management to keep annual surpluses as stable as possible. If this is modelled accordingly this will also contribute to this situation.

- In steering and management there is only the possibility to react at product mix level and at the level of surplus sharing strategy. Any changes must of course be incorporated in the valuation model; otherwise the figures will not change.

Question 10. *Operational Risk [18 marks]*

Model answer

(a) For example:

i. ABC AG could use a Bayesian network (0.5 marks).

ii. That is a directed, acyclical graph (0.5 marks).

iii. The edges of the graph model the dependencies between risk causes and operational risk (1 mark).

iv. The nodes of the graph correspond to random variables. initial nodes ≙ risk causes, end nodes ≙ risk (1 mark).

v. Parameterisation: one needs the (unconditional) distributions of the initial nodes and the conditional probabilities of the remaining nodes (2 marks).

vi. Bayesian theorem: over time all unconditional probabilities in the nodes can be calculated (ultimately for the end nodes / the risk too) (2 marks).

(b) $\{\mathbf{M_i} \cap \mathbf{U_j} : \text{i=1,2,3 and j=1,2}\}$ is a decomposition of the set of events in disjunctive events. The total probability formula states:

$$P(\{Schadenh.\,groß\}) = \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} P\big(\{Schadenh.\,groß\}|\boldsymbol{M_i} \cap \boldsymbol{U_j}\big) \cdot P\big(\boldsymbol{M_i} \cap \boldsymbol{U_j}\big)$$

$$= \sum_{i=1}^{3}\sum_{j=1}^{2} P\big(\{Schadenh.\,groß\}|\boldsymbol{M_i} \cap \boldsymbol{U_j}\big) \cdot P(\boldsymbol{M_i}) \cdot P\big(\boldsymbol{U_j}\big)$$

$$= 0{,}9 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}2 + 0{,}2 \cdot 0{,}2 \cdot 0{,}8 + 0{,}25 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}2 + 0{,}85 \cdot 0{,}35 \cdot 0{,}8 + 0 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}2 + 0{,}95 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}8 = 0{,}6655$$

(c) Bayesian theorem states

$$P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_1}|\{Schadenh.\,groß\}) = \frac{P(\{Schadenh.\,groß\}|\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_1}) \cdot P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_1})}{P(\{Schadenh.\,groß\})} = 0$$

and

$$P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_2} | \{Schadenh.\, groß\}) = \frac{P(\{Schadenh.\, groß\} | \boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_2}) \cdot P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_2})}{P(\{Schadenh.\, groß\})}$$

$$= \frac{0{,}95 \cdot 0{,}45 \cdot 0{,}8}{0{,}6655} \approx 0{,}5139$$

(d) $$P(\boldsymbol{M_3} | \{Schadenh.\, groß\}) = P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_1} | \{Schadenh.\, groß\})$$

$$+P(\boldsymbol{M_3} \cap \boldsymbol{U_2} | \{Schadenh.\, groß\})$$

$$\approx 0 + 0{,}5139 = 0{,}5139$$

Among the cases with high loss amounts there are around 51.39% of cases where measure $\mathbf{M_3}$ has had an effect. This measure does not seem to be particularly effective when it comes to reducing risk.