CERA
Certified Enterprise Risk Actuary

DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

Quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 3.0
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 29. Mai 2026

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 11 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Aufgabe 1. Risikomaße und Parameterrisiko. *[30 Punkte]* Ein Versicherungsunternehmen führt eine Police zur Versicherung eines neuartigen Risikos ein. Da keine Beobachtungsdaten vorliegen, zieht das Unternehmen für die Kalkulation ein Bayesianisches Modell heran und macht dabei die folgenden Annahmen:

- Die Schadenhöhe X, gegeben den Wert θ des unbekannten Parameters Θ, sei $LN(\theta, 4)$-verteilt.
- Auf Basis eines naturwissenschaftlichen Simulationsmodells wird a priori $\Theta \sim \mathcal{N}(2, 1)$ angenommen.

Hinweis.

- Die Lognormalverteilung $LN(\theta, \sigma^2)$ hat die Dichte

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0.$$

  und den Erwartungswert $\exp(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)$.
- Gilt $X \mid \Theta = \theta \sim LN(\theta, \sigma^2)$ und $\Theta \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$, so hat X die unbedingte Verteilung $LN(\mu, \sigma^2 + \tau^2)$.
- Quantil der Standardnormalverteilung: $\Phi^{-1}(0.97) = 1.880794$

(a) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie jeweils zum Niveau 0.97 den Value at Risk der unbedingten Verteilung von X und der bedingten Verteilung von X, gegeben $\Theta = 2$. Geben Sie eine ökonomische Interpretation der Differenz $VaR_{0.97}(X) - VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2)$ an.

(b) *[10 Punkte]* Zeigen Sie: Die a posteriori Verteilung von Θ, gegeben die beobachteten Schadenhöhen $x_1, \ldots, x_n$, ist $\mathcal{N}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), \frac{4}{4+n}\right)$.

(c) *[2 Punkte]* Begründen Sie kurz, weshalb die Vorhersageverteilung von X, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, gleich $LN\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), 4 + \frac{4}{4+n}\right)$ ist.

(d) *[12 Punkte]* Im ersten Jahr nach Einführung der neuen Police wird ein Schaden x_1 in Höhe des dreifachen Erwartungswerts der unbedingten Verteilung von X, d.h. von $LN(2, 5)$ beobachtet (also $x_1 = 3 \cdot \exp(2 + 0.5 \cdot 5) = 270.05$). Zudem liegen die Einschätzungen $\delta_1 = 4$ und $\delta_2 = 3$ von zwei unabhängigen Experten für den Parameter θ vor, die mit der Annahme $\delta_i \mid \Theta = \theta \sim \mathcal{N}(\theta, 2)$ modelliert werden sollen. Die Experten verweisen auf Änderungen in der Rechtssprechung, die deutlich höhere Schadenregulierungskosten zur Folge haben.

  (i) *[4 Punkte]* Geben Sie den Ansatz zur Bestimmung der a posteriori Verteilung von Θ, gegeben x_1, δ_1, δ_2 an und erläutern Sie qualitativ die Bedeutung der Verteilungsannahme über die Experteneinschätzungen.

(ii) *[8 Punkte]* Im Versicherungsunternehmen wird diskutiert, ob der Bayesianische Updateschritt gemäß d) (i) durchgeführt werden soll oder ob das Bayesianische Modell mit der a priori Verteilung $\Theta \sim \mathcal{N}(3.5, 1)$ und unveränderter Beobachtungsverteilung neu gestartet werden soll. Welche Argumente sprechen aus Ihrer Sicht für die eine und welche für die andere Alternative?

Aufgabe 2. Risikomaße und Steuerung. *[30 Punkte]*

Ein Rückversicherer berechne seine Prämie P als das 1.2-fache der erwarteten Rückversicherungsleistung und verwende die Kennzahl RORAC zur Unternehmenssteuerung. Zur Vereinfachung nehmen wir an, dass keine Kosten beim Rückversicherer anfallen.

(a) *[10 Punkte]* Der Rückversicherer hat bereits die Zahlungsverpflichtung $Y_1 := \max(0, X_1 - 1000)$ übernommen, wobei die Schadengröße X_1 die folgende Verteilung hat:

$$\mathbb{P}(X_1 = 500) = 0.8, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(X_1 = 2000) = 0.02.$$

Berechnen Sie jeweils zum Niveau 0.97 den Value at Risk, Tail Value at Risk und Expected Shortfall von Y_1.

(b) *[6 Punkte]* Berechnen Sie die risikoadjustierte Performance-Kennzahl RORAC für den Verlust $Y_1 - P$ des Rückversicherers auf zwei Weisen, zum einen den $RORAC_1$, indem Sie das Risikokapital mit Hilfe des Risikomaßes $VaR_{0.97}$ bestimmen, und zum anderen den $RORAC_2$, indem Sie das Risikokapital mit Hilfe des Risikomaßes $ES_{0.97}$ bestimmen.

(c) *[14 Punkte]* Der Rückversicherer hat die Möglichkeit, zusätzlich das Risiko $Y_2 := \max(0, X_2 - 1000)$ zu zeichnen, wobei die Schadengröße X_2 unabhängig von X_1 ist und dieselbe Verteilung wie X_1 hat. Prüfen Sie für beide Varianten, $RORAC_1$ bzw. $RORAC_2$, jeweils, ob er diese Möglichkeit wahrnimmt, d.h. ob er die Verteilung von $Y_1 + Y_2$ der Verteilung von Y_1 vorzieht? Erklären Sie, welche Eigenschaften der verwendeten Größen die unterschiedlichen Entscheidungen des Rückversicherers ausgelöst hat, und beurteilen Sie die Auswirkungen der Entscheidungen aus Risiko- und Ertragssicht.

Aufgabe 3. Extremwerttheorie und Randverhalten von Risiken *[25 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* "Extremwerttheorie ist ein nützliches Werkzeug im aktuariellen Risikomanagement". Diskutieren Sie diese Aussage anhand eines selbst gewählten Beispiels aus dem aktuariellen Risikomanagement.

(b) *[12 Punkte)]* Betrachten Sie einen Versicherungsvertrag mit zufälliger Schadenshöhe X. Die Verteilung der Zufallsgröße X wird durch eine Exponentialverteilung mit potentiell zufälligem Parameter Λ modelliert, so dass $P(X > x) = E(e^{-\Lambda x})$. Wir betrachten die folgenden 2 Szenarien:

(i) $\Lambda = \lambda_0$ (deterministischer Parameter), so dass $P(X > x) = e^{-\lambda_0 x}$.

(ii) Λ hat eine Gamma Verteilung mit Parametern $\alpha, \beta > 0$ und Dichte $g(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}$. Hier ist $\Gamma(\alpha) > 0$ die Gamma Funktion (die genaue Form ist für die Lösung der Aufgabe unwichtig) und der Vorfaktor $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}$ ist die Normierungskonstante der Gamma-Dichte. In diesem Fall gilt

$$P(X > x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g(\lambda) d\lambda \,.$$

Zeigen Sie, dass in Szenario (ii) die Schadensgröße X eine Pareto Verteilung mit Überlebensfunktion

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^\alpha$$

hat und folgern Sie, dass der tail von X polynomial abfällt mit Parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$. Vergleichen Sie dieses Randverhalten mit dem Verhalten der Überlebensfunktion von X in Szenario (i) und diskutieren Sie den Unterschied unter Modellierungsgesichtspunkten.

(c) Datenanalyse

(i) *[3 Punkte]* Sie haben n unabhängige Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ von X gegeben. Beschreiben Sie eine grafische Methode, um Szenario (i) von Szenario (ii) zu unterscheiden.

(ii) *[7 Punkte]* Erklären Sie kurz, wie der tail von X und speziell der Parameter $\xi = 1/\alpha$ mittels der POT-Methode geschätzt werden kann. Welchen Schätzwert $\hat{\xi}$ würden Sie in etwa für die beiden Szenarien erwarten (unter der Voraussetzung, dass die Beobachtungsanzahl n ausreichend groß ist, so dass Schätzfehler vernachlässigt werden können).

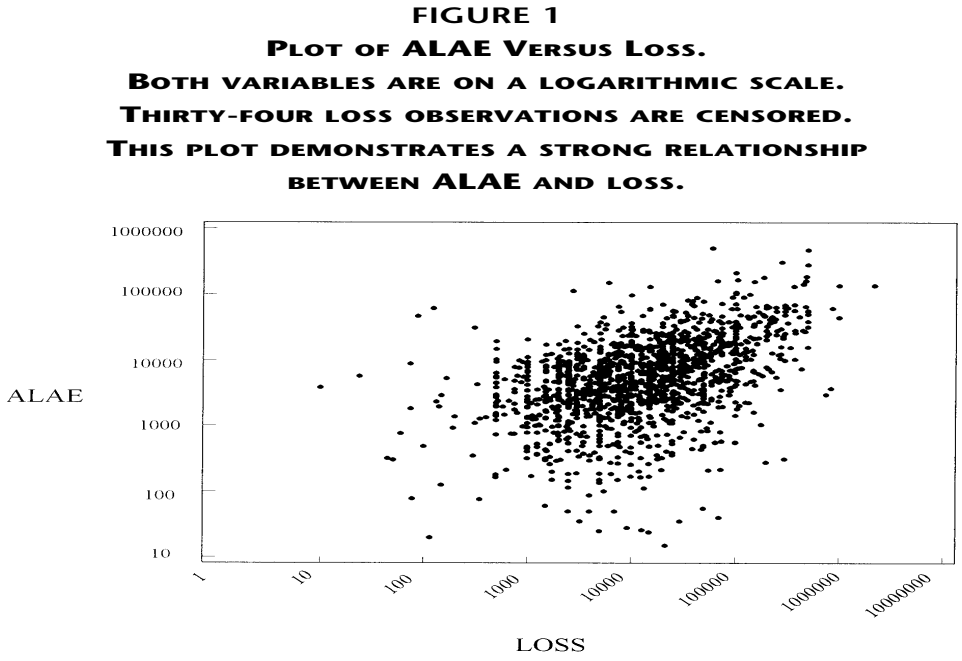

Abbildung 1: Scatter plot der Schadendaten; (aus Frees-Valdez (97)).

Aufgabe 4. Anwendung von copulas auf Schadendaten. *[25 Punkte]*

Ein Versicherungsunternehmen verfüge über Schadendaten der Form $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, wobei X_i die Höhe und Y_i die sogenannten *allocated loss adjustment expenses* (ALAE) beschreibt. (Die ALAE umfassen beispielsweise Anwalts- und Gutachterkosten im Zusammenhang mit der Schadensabwicklung). Ein scatter Plot der losses findet sich in der obigen Abbildung 1.

(a) *[3 Punkte]* Erläutern Sie kurz, warum man Abhängigkeiten zwischen Schadenshöhe X und ALAE Y erwarten sollte.

(b) *[9 Punkte]* Zur Modellierung der gemeinsamen Verteilung von X und Y wird eine Gumbel copula mit Parameter θ verwendet; es gilt

$$C_\theta^{\mathrm{Gu}}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad 1 \le \theta < \infty.$$

Zur Modellierung der Verteilung von X und Y werde eine Pareto Verteilung mit Parametern λ_X, α_X bzw. λ_Y, α_Y verwendet mit $\lambda_X, \lambda_Y > 0$, $\alpha_X, \alpha_Y > 1$, d.h.

$$P(X > x) = \left(1 + \frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}, \quad x \ge 0,$$

und analog für Y.

Begründen Sie qualitativ, warum die Gumbel copula gut zur Beschreibung der in Bild 1 dargestellten Daten geeignet ist und geben Sie die gemeinsame Verteilungsfunktion $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$ an. Was passiert für $\theta = 1$ bzw. $\theta \to \infty$?

(c) *[3 Punkte]* Ihnen steht ein Algorithmus zur Verfügung, der Zufallsvariablen $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ generiert, die gemäß der Gumbel copula verteilt sind. Erläutern Sie, wie mit Hilfe dieses Algorithmus eine Realisation des Paares (X, Y) erzeugt wird.

(d) (i) *[4 Punkte]* Skizzieren Sie zwei Methoden zur Schätzung von θ.

(ii) *[6 Punkte]* Sie haben die folgenden 4 Beobachtungen von X und Y.

data point	1	2	3	4
X	15.4	0.6	122.2	107.1
Y	9.1	0.7	2.8	16.7

Berechnen Sie Kendalls τ und einen Schätzer für θ. Hinweis: Für die Gumbel copula gilt $\rho_\tau = 1 - 1/\theta$

Aufgabe 5. Risikomaße und Kapitalallokation. *[20 Punkte]*

Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftseinheiten mit zugehörigem Verlust gegeben durch die Zufallsvariablen L_i, $1 \leq i \leq d$. Der Verlust des Gesamtunternehmens ist also $L := \sum_{i=1}^{d} L_i$. Sei ϱ ein translationsinvariantes und positiv homogenes Risikomaß wie etwa VaR_α oder ES_α und sei $\varrho(L)$ das Risikokapital für das Gesamtunternehmen. In diesem Zusammenhang ordnet ein Kapitalallokationsprinzip den einzelnen Geschäftsbereichen das ökonomische Kapital $\mathrm{AC}_1, \ldots, \mathrm{AC}_d$ zu.

(a) *[8 Punkte]* Warum sind *RORAC Kompatibilität* und die Existenz eines *diversification benefit* ökonomisch wünschenswerte Eigenschaften des Euler Kapitalallokationsprinzips? Diskutieren Sie beide Punkte kurz.

(b) *[9 Punkte]* Die Zufallsvariablen $(L_1, \ldots, L_d)$ seien multivariat normalverteilt mit Mittelwert $\mu = 0$ und Kovarianzmatrix Σ. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Euler Kapitalallokationen für ϱ durch den Ausdruck

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\mathrm{var}(L)}} \varrho(\tilde{X}) \tag{1}$$

gegeben sind, wobei $\varrho(\tilde{X})$ das Risikomaß einer $N(0,1)$ verteilten Zufallsvariable $\tilde{X}$ bezeichnet.

(c) *[3 Punkte]* Geben Sie für den Fall $\varrho = \mathrm{ES}_\alpha$ eine alternative Darstellung für die Kapitalallokation aus (1) an, die allgemein gilt (nicht nur für elliptische Verteilungen).

Aufgabe 6. Counterparty Risk. *[20 Punkte]*

Zwei Vertragsparteien S und B haben einen Vertrag abgeschlossen, bei dem der protection seller S dem protection buyer B gegen Prämienzahlung Schutz gegen ein adverses Ereignis gewährt. Der Marktwert dieses Vertrags zum Zeitpunkt t aus Sicht von B sei mit V_t bezeichnet; die Fälligkeit sei T. (Beispiele für einen derartigen Vertrag sind credit default swaps und Rückversicherungsverträge).

(a) *[6 Punkte]* Erläutern Sie, was man in diesem Zusammenhang unter counterparty risk versteht, und diskutieren Sie kurz zwei verschiedene Techniken zum Management dieser Risikokategorie.

(b) In der oben skizzierten Situation ist die Bewertungskorrektur für den Vertrag aus Sicht des protection buyers B durch

$$\mathrm{CVA} = \delta_S \, \mathbb{E}^Q\big(1_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau_S} (V_{\tau_S})^+\big)$$

gegeben. Hier ist $r \geq 0$ der risikofreie Zinssatz, τ_S die Ausfallzeit und δ_S der als deterministisch angenommene loss given default von S.

(i) *[5 Punkte]* Nehmen Sie an, dass der Marktwert V_t des Vertrags und der Ausfallzeitpunkt τ_S unabhängig sind. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen das CVA durch

$$\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt$$

gegeben ist, wobei f_S die Dichte der Ausfallzeit τ_S bezeichnet.

(ii) *[5 Punkte]* Werten Sie die Formel für den Fall aus, dass $E^Q(V_t^+)$ konstant gleich 100 und τ_S unter Q exponentialverteilt mit Parameter γ_S ist. Kann der Parameter γ_S aus am Markt beobachteten CDS spreads auf S kalibriert werden?

(iii) *[4 Punkte]* Bei der Herleitung der Formel für das $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ wird angenommen, dass der Marktwert V_t des Vertrags und der Ausfallzeitpunkt τ_S unabhängig sind. Diskutieren Sie am Beispiel eines Rückversicherungsvertrags, warum die bei der Herleitung von der Formel für $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ gemachte Unabhängigkeitsannahme in der Praxis problematisch sein kann.

Aufgabe 7. Zinsstrukturmodelle und Bewertung. *[30 Punkte]*

Im Gauß-Zinsmodell wird die Dynamik der Forwardzinsen $f(t,T)$ unter dem T^*-forward Maß für $t \leq \min(T,T^*)$ durch die folgende stochastische Differentialgleichung beschrieben:

$$df(t,T) = \sigma_f(t,T)\left[\sigma_P(t,T) - \sigma_P(t,T^*)\right] dt + \sigma_f(t,T)\, dW_t$$

Dabei ist W eine Brownsche Bewegung unter dem T^*-forward Maß, $\sigma_f(t,T)$ eine deterministische reelle Funktion, die die Volatilitätsstruktur der Fowardzinsen beschreibt, und $\sigma_P(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sigma_f(t_1,s)\, ds$.

(a) *[8 Punkte]*

(i) *[4 Punkte]* Begründen Sie kurz, weshalb im Gauß-Zinsmodell unter dem T^*-forward Maß die Forward-Zinsen normalverteilt und die Zerobondpreise lognormalverteilt sind.

(ii) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie im Spezialfall, dass $\sigma_f(t,T) \equiv \sigma_f$ konstant ist, die Parameter der Normalverteilung von $f(t,T)$ unter dem T^*-forward Maß.

(b) *[10 Punkte]* Betrachten Sie eine Europäische Call Option mit Strike K und Fälligkeit T auf einen Zerobond mit Fälligkeit $S > T$. Leiten Sie eine Bewertungsformel für den Preis der Option zur Zeit $t = 0$ her, die ausschließlich auf Preisen von Zerobonds zum Zeitpunkt $t = 0$ und Wahrscheinlichkeiten unter den T- und S-forward Maßen fußt.

(c) *[12 Punkte]* Betrachten Sie eine Aktie S, deren Preis unter dem risikoneutralen Maß im Black-Scholes Modell durch die stochastische Differentialgleichung

$$dS(t) = S(t)\left[r(t)\, dt + \sigma_S(t)\, d\tilde{W}_t\right]$$

modelliert wird, wobei $r(t)$ den risikofreien Zins, σ_S eine deterministische Funktion und $\tilde{W}$ eine Brownschen Bewegung bezeichnen. Der Preis einer Call-Option auf die Aktie mit Strike K und Fälligkeit T ist dann gegeben durch

$$c = S(0)\cdot\Phi(d_1) - K\cdot\exp\left(-\int_0^T r(s)\, ds\right)\cdot\Phi(d_2)$$

mit der Standardnormalverteilungsfunktion Φ und

$$d_{1/2} = \frac{\ln(S(0)/K) + \int_0^T r(t)\, dt \pm \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_S^2(t)\, dt}{\sqrt{\int_0^T \sigma_S^2(t)\, dt}}.$$

Nun soll der Preis der Call-Option auf die Aktie zum Zeitpunkt $t = 0$ unter Zinsunsicherheit im Gauß- Zinsmodell bestimmt werden. Unter dem T-forward Maß folgen die Zerobondpreise der stochastischen Differentialgleichung

$$dP(t,T) = P(t,T)\left[f(t,t) + \sigma_P^2(t,T)\right] dt - \sigma_P(t,T)\, dW_t$$

mit einer Brownschen Bewegung W.

(i) *[3 Punkte]* Stellen Sie den Preis der Call-Option auf die Aktie zum Zeitpunkt 0 als diskontierter Erwartungswert unter dem T-forward Maß dar.

(ii) *[9 Punkte]* Leiten Sie argumentativ die Preisformel vom Black-Scholes Typ für den Preis der Call-Option auf die Aktie zum Zeitpunkt 0 her. Dabei können Sie ohne Nachweis benutzen, dass der stochastische Prozess $\tilde{S}(t) := \frac{S(t)}{P(t,T)}$ unter der Annahme, dass Zins und Aktienkurs unabhängig sind, unter dem T-forward Maß der stochastischen Differentialgleichung

$$d\tilde{S}(t) = \tilde{S}(t)\left[\sigma_S(t) dW_t^{1,T} + \sigma_P(t)\, dW_t^{2,T}\right]$$

mit unabhängigen Brownschen Bewegungen $W^{1,T}$ und $W^{2,T}$ folgt.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Risikomaße und Parameterrisiko.

(a) Die bedingte Verteilung von $X \mid \Theta = 2$ ist $LN(2, 4)$. Ihr Value at Risk ist gegeben durch $VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2) = \exp(2 + 2 \cdot \Phi^{-1}(0.97)) = 317.85$.

Die unbedingte Verteilung von X ist nach dem Hinweis $LN(2, 4 + 1)$. Ihr Value at Risk ist gegeben durch $VaR_{0.97}(X) = \exp(2 + \sqrt{5} \cdot \Phi^{-1}(0.97)) = 495.51$.

Die Differenz $VaR_{0.97}(X) - VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2) = 177.66$ reflektiert eine Schätzung des Parameterrisikos, da die Unsicherheit bezüglich des Parameterwertes nur in die unbedingte Verteilung einfließt.

(b) Bis auf eine Konstante ist die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$, gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\pi(\theta | x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n) \\
&\quad \propto \quad f_\Theta(\theta) \cdot \prod_{i=1}^{n} f_{X|\Theta}(x_i|\theta) \\
&\quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta - 2)^2\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{(\ln(x_i) - \theta)^2}{2 \cdot 4}\right) \\
&\quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\theta^2 + \frac{n\theta^2}{4}\right) - 2\theta\left(2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)\right]\right) \\
&\quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2\frac{4}{4+n}}\left(\theta^2 - 2\theta\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)\right)\right) \\
&\quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2\frac{4}{4+n}}\left(\theta - \left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Dies ist bis auf eine Konstante die Dichte von $\mathcal{N}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), \frac{4}{4+n}\right)$.

(c) Die Vorhersageverteilung von X ergibt sich durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a posteriori Dichte des Parameters. Daher folgt das Resultat unmittelbar aus b) und dem Hinweis.

(d) (i) Bis auf eine Konstante ist die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtungen x_1, δ_1, δ_2, gegeben durch

$$\begin{aligned}
&\pi(\theta | x_1, \delta_1, \delta_2) \\
&\quad \propto \quad f_\Theta(\theta) \cdot f_{X|\Theta}(x_1|\theta) \cdot \prod_{i=1}^{2} f_{\delta_i|\Theta}(\delta_i|\theta) \\
&\quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta - 2)^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(x_1) - \theta)^2}{2 \cdot 4}\right) \cdot \prod_{i=1}^{2} \exp\left(-\frac{(\delta_i - \theta)^2}{2 \cdot 2}\right).
\end{aligned}$$

Die Verteilungsannahme über die Experteneinschätzungen impliziert, dass sie erwartungstreu schätzen und unabhängig sind. Da die Varianz der Experteneinschätzungen geringer ist als die der logarithmierten Beobachtungsdaten, erhalten die Expertenschätzungen im Update-Schritt ein höheres Gewicht als die Beobachtungsdaten.

(ii) Für den Bayesianischen Update-Schritt gemäß dem Ansatz in i) spricht, dass die Ergebnisse des naturwissenschaftlichen Simulationsmodells weiter in die Modellierung einfließen und die neue Information in Gestalt des Beobachtungswertes sowie der Expertenschätzungen einbezogen werden, ohne dass weitere Annahmen über die Gewichtungen der verschiedenen Informationsquellen getroffen werden müssen. Die Schadenhistorie ist mit nur einem Beobachtungswert sehr kurz und es haben sich keine neuen Erkenntnisse ergeben, die gegen die Methodik des Simulationsmodells sprechen. Der Bayesianische Updateschritt bezieht kontinuierlich neue Informationen mit ein, ohne die bisherigen Annahmen auszublenden, und ist daher gut geeignet, einen Produkteinführungsprozess zu begleiten.

Für die Alternative eines Neustarts des Bayesianischen Modells auf Basis der a priori Verteilung $\mathcal{N}(3.5, 1)$, der Verteilung des Mittels der Expertenschätzungen, spricht, dass x_1 sehr hoch ausgefallen ist, die Expertenschätzungen ebenfalls ein deutlich höheres Schadenniveau erwarten und die Experten eine veränderte Rechtssprechung als Ursache nennen. Dies deutet auf einen Strukturbruch hin.

Aufgabe 2. Risikomaße und Steuerung.

(a) Die Leistung des Rückversicherers hat die Verteilung

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 0.8, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 1000) = 0.02.$$

Wegen $\mathbb{P}(Y_1 < 200) = 0.8 < 0.97 < 0.98 = \mathbb{P}(Y_1 \leq 200)$ gilt $VaR_{0.97}(Y_1) = 200$. Ferner ist

$$ES_{0.97}(Y_1) = \frac{1}{1-0.97} \int_{0.97}^{1} VaR_z(Y_1)\, dz = \frac{200 \cdot 0.01 + 1000 \cdot 0.02}{0.03} = 733.33$$

und

$$TVaR_{0.97}(Y_1) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y_1 > 200)} \cdot \mathbb{E}\left(Y_1 \cdot 1_{Y_1 > 200}\right) = \frac{1}{0.02} \cdot 1000 \cdot 0.02 = 1000.$$

Alternativ kann der Expected Shortfall aus den Werten von Value at Risk und Tail Value at Risk wie folgt bestimmt werden:

$$\begin{aligned} ES_{0.97}(Y_1) &= \frac{\mathbb{P}(Y_1 > VaR_{0.97}(Y_1))}{1-0.97} \cdot TVaR_{0.97}(Y_1) + \left(1 - \frac{0.02}{0.03}\right) \cdot VaR_{0.97}(Y_1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 1000 + \frac{1}{3} \cdot 200 = 733.33 \end{aligned}$$

(b) Die erwartete Rückversicherungsleistung beträgt $\mathbb{E}(Y_1) = 200 \cdot 0.18 + 1000 \cdot 0.02 = 56$, die Prämie $P = 1.2 \cdot 56 = 67.2$. Daraus folgt

$$\begin{aligned} RORAC_1 &= \frac{P - \mathbb{E}(Y_1)}{VaR_{0.97}(Y_1 - P)} = \frac{67.2 - 56}{200 - 67.2} = 0.0843, \\ RORAC_2 &= \frac{P - \mathbb{E}(Y_1)}{ES_{0.97}(Y_1 - P)} = \frac{67.2 - 56}{733.33 - 67.2} = 0.0168, \end{aligned}$$

(c) Wird zusätzlich X_2 rückversichert, so wird die Gesamtleistung des Rückversicherers $Y_1 + Y_2$ durch folgende Verteilung beschrieben:

z	$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = z)$
0	$0.8^2 = 0.64$
200	$2 \cdot 0.8 \cdot 0.18 = 0.288$
400	$0.18^2 = 0.0324$
1000	$2 \cdot 0.8 \cdot 0.02 = 0.032$
1200	$2 \cdot 0.18 \cdot 0.02 = 0.0072$
2000	$0.02^2 = 0.0004$

Mit Hilfe der Definitionen bestimmen wir $VaR_{0.97}(Y_1+Y_2) = 1000$ und $ES_{0.97}(Y_1+Y_2) = \frac{1}{0.03}(1000 \cdot (0.9924 - 0.97) + 1200 \cdot 0.0072 + 2000 \cdot 0.0004) = 1061.33$. Daraus folgen die neuen Kennzahlen $RORAC_1 = \frac{2 \cdot 11.2}{1000 - 2 \cdot 67.2} = 0.0259$, der niedriger ausfällt als vorher, und $RORAC_2 = \frac{2 \cdot 11.2}{1061.33 - 2 \cdot 67.2} = 0.0242$, der höher ausfällt als vorher.

Bei Verwendung von $RORAC_1$ wird der Rückversicherer auf die neue Geschäftsmöglichkeit und damit auf zusätzlichen Ertrag und auf die Diversifikation durch ein unabhängiges neues Risiko verzichten.

Die Steuerung durch den $RORAC_1$ schafft also hier einen falschen Anreiz. Grund dafür ist, dass sich das Risikomaß $VaR_{0.97}$ in dieser Situation als nicht subadditiv erweist.

Im Gegensatz dazu ist der Expected Shortfall subadditiv, so dass die Steuerung durch den $RORAC_2$ die Gelegenheit zur Diversifikation ergreift und mit der Versicherung von Y_2 einen zusätzlichen Ertrag erwirtschaftet.

Aufgabe 3. Extremwerttheorie und Randverhalten von Risiken.

(a) Eine mögliche Anwendung ist die Bewertung von Rückversicherungsverträgen mit hohem attachment point im Bereich Naturkatastrophen. Hier hat man meist nur wenige Beobachtungen, eine gute Schätzung des Randverhaltens ist aber wichtig. EVT bietet eine theoretisch fundierten Methode, um dieses Problem anzugehen.

Andere mögliche Anwendungsgebiete sind etwa bestimmte Bereiche des operational risk.

(b) Es gilt

$$P(X > x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^\infty e^{-\lambda(\beta+x)} \lambda^{\alpha-1} d\lambda \,.$$

Nach Definition der Normierungskonstante der Gamma Verteilung ist das letzte Integral gleich $\frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\beta+x)^\alpha}$, insgesamt erhalten wir also

$$P(X > x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\beta+x)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha.$$

Es folgt

$$P(X > x) = x^{-\alpha} \frac{\beta}{1+\beta/x} = x^{-\alpha} L(x),$$

und $L(x) = \frac{\beta}{1+\beta/x}$ ist slowly varying (für großes x annähernd konstant). Im Fall $\Lambda = \lambda_0$ erhalten wir $P(X > x) = e^{-\lambda_0 x}$ und somit einen exponentiell schnell abfallenden tail. Interpretation: die Unsicherheit über den Parameter Λ macht also aus einem exponentiell schnell abfallenden tail. (light-tailed distribution) einen polynomial abfallenden tail (heavy-tailed distribution).

(c) (i) Die einfachste Methode ist ein QQ Plot der Daten gegen die Exponentialverteilung. Alternativ könnte man den mean excess Plot ansehen, der im Szenario (ii) linear ansteigen sollte, während er im Szenario (i) etwa konstant ist.

(ii) Zunächst wählt man eine hohe Schranke u, etwa das 95% Quantil der Daten. Für $x > u$ gilt $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u)$, wobei F_u die excess distribution von F bezüglich u bezeichnet. Anschließend modelliert man F_u durch eine GPD und fitted die Parameter ξ und β (etwa via Maximum Likelihood) an die beobachteten Überschreitungen der Schwelle u; dies ergibt die Parameter $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$ und einen tail Schätzer durch die POT Methode.
In Szenario (i) (Λ konstant) würde man einen Wert $\hat{\xi} \approx 0$ erwarten, in Szenario (ii) erwartet man $\hat{\xi} \approx 1/\alpha > 0$ (heavy tailed Szenario).

Aufgabe 4. Anwendung von copulas auf Schadendaten.

(a) Gründe für Abhängigkeit: Gebühren sind oft proportional zum Streitwert; bei größeren Schadensummen wird man mehr Aufwand bei der Schadenhöhenermittlung treiben etc.

(b) Die Daten deuten auf eine starke obere Randabhängigkeit aber auf keine starke Abhängigkeit im unteen Rand hin; dieses Verhalten kann durch die Gumbel copula modelliert werden, da für die Gumbel copula $\lambda_u > 0$ (für $\theta > 1$) und $\lambda_l = 0$ gilt. Nach Sklar gilt

$$\begin{aligned} F(x,y) &= C_\theta^{\mathrm{Gu}}(F_X(x), F_y(x)) \\ &= \exp\left(-\left(\left(-\log\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}\right)\right)^\theta + \left(-\log\left(1-\left(1+\frac{y}{\lambda_Y}\right)^{-\alpha_Y}\right)\right)^\theta\right)^{1/\theta}\right). \end{aligned}$$

Für $\theta = 1$ erhalten wir Unabhängigkeit, für $\theta \to \infty$ Komonotonie.

(c) Zur Erzeugung einer Realisierung von (X, Y) verwendet man den 2. Teil des Satzes von Sklar. Bezeichne mit $F^{-1}_{\alpha,\lambda}(u)$ die Quantilfunktion der Pareto Verteilung mit Parametern α, λ und mit (u_1, u_2) eine Realisierung der Gumbel copula. Dann liefert

$$x = F^{-1}_{\alpha_X,\lambda_X}(u_1), \quad y = F^{-1}_{\alpha_Y,\lambda_Y}(u_2))$$

eine Realisierung von (X, Y). Eine explizite Rechnung zeigt, dass

$$F^{-1}_{\alpha,\lambda}(u) = \lambda\left((1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right).$$

(d) (i) Zwei mögliche Verfahren zur Schätzung von θ sind Maximum likelihood und ein Momentenschätzer basierend auf Kendalls τ.

(ii) Wir haben 4 Beobachtungen und somit $\binom{4}{2} = 6$ Beobachtungen. Der Schätzer für ρ_τ berechnet sich zu $\rho_\tau = \frac{1}{6}\left(1-1+1+1+1-1\right) = 1/3$; damit ist $\hat{\theta} = (1-\hat{\rho_\tau})^{-1} = 1.5$.

Aufgabe 5. Risikomaße und Kapitalallokation

(a) RORAC Kompatibilität bedeutet, dass der RORAC des Gesamtportfolios wächst, wenn das Gewicht einer subunit L_i, deren RORAC $(-E(L_i)/\,\mathrm{AC}_i)$ höher ist als der RORAC des Gesamtunternehmens, erhöht wird. In diesem Sinn gibt das Euler Prinzip also korrekte Signale für die Unternehmenssteuerung. Ein diversification benefit ist insbesondere relevant für subadditive Risikomaße, bei denen $\varrho(L) \leq \sum_{i=1}^d \varrho(L_i)$. Der diversification benefit stellt sicher, dass jede business unit von der Subadditivität profitiert ($\mathrm{AC}_i \leq \varrho(L_i)$); andernfalls gäbe es Anreize für Untereinheiten, das Unternehmen zu verlassen.

(b) Da $(L_1, \dots, L_d) \sim N(0, \Sigma)$ folgt, dass

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i L_i \sim N(0, \sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$$

mit $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. Da ϱ positiv homogen ist, folgt dass

$$\varrho(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}\varrho(X)\,.$$

Daher erhalten wir für das Euler Prinzip

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\varrho(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\mathrm{SD}(L)} = \varrho(X)\frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\mathrm{SD}(L)}.$$

(c) Im Fall dass $\varrho = \mathrm{ES}$ erhält man für die sogenannten expected shortfall contributions; diese haben die allgemeine Darstellung $\mathrm{AC}_i = E(L_i \,|\, L \geq \mathrm{VaR}_\alpha)$.

Aufgabe 6. Counterparty Risk.

(a) Counterparty risk ist das Risiko, dass einer der Vertragsparteien, beispielsweise S vor Fälligkeit des Vertrags ausfällt; falls der Vertrag im Ausfallszeitpunkt τ_S aus Sicht von B einen positiven Wert hat, erleidet B einen Verlust. Mögliche Ansätze zum Management von counterparty risk: collateralization, netting, hedging mit CDS (jeweils kurze Erläuterung).

(b) (i) Es gilt

$$\mathrm{CVA} = \delta_S E^Q\big(I_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau} V_\tau^+\big) = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) f_S(t) dt$$

Unter der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt $E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) = E^Q(V_t^+)$ und somit die Behauptung.

(ii) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} &= \delta_S \int_0^T e^{-rt} 100\gamma_S e^{-\gamma_S t}\, dt \\ &= 100\delta_S\gamma_S\Big[-\frac{1}{r+\gamma_S} e^{-(r+\gamma_S)t}\Big]_0^T \\ &= \frac{100\delta_S\gamma_S}{r+\gamma_S}\Big(1 - e^{-(r+\gamma_S)T}\Big)\end{aligned}$$

Das CVA ist eine Bewertungskorrektur und somit eine risikoneutrale Größe; daher kann der Parameter γ_S an Marktpreisen (im vorliegenden Fall CDS Kontrakte) kalibriert werden.

(iii) Die Unabhängigkeitsannahme ist problematisch. Falls S ein großer Rückversicherer ist, so würde man erwarten, dass $E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+)$ gilt: ein Ausfall von S könnte durch ein Katastrophenereignis ausgelöst worden sein, in Folge dessen alle Prämien für Rückversicherungskontrakte steigen. Es ist sogar denkbar, dass das Katastrophenereignis, das zum Ausfall von S geführt hat, direkt in dem Rückversicherungsvertrag zwischen S und B abgesichert war, so dass B nicht die ihm zustehende Zahlung erhält.

Aufgabe 7. Zinsstrukturmodelle und Bewertung.

(a) (i) Unter dem T^*-forward Maß ist die Dynamik der Forwardzinsen gegeben durch

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma_f(s,T)\left[\sigma_P(s,T) - \sigma_P(s,T^*)\right] ds + \int_0^t \sigma_f(s,T)\, dW_s.$$

Die beiden ersten Summanden sind deterministisch, der dritte Summand ist als stochastische Integral einer deterministischen Funktion bezüglich der Brownschen Bewegung eine normalverteilte Zufallsgröße.

Die Preise der Nullkouponanleihen $P(t,T) = \exp\left(-\int_t^T f(t,s)\, ds\right)$ sind lognormal, da das Integral über den Gaußschen Prozess der Forward-Zinsen normalverteilt ist.

(ii) Ist σ_f eine Konstante, so ist $\sigma_P(t_1,t_2) = \sigma_f(t_1 - t_2)$. Dann hat $f(t,T)$ unter dem T^*-forward Maß die Darstellung

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T) + \int_0^t \sigma_f^2\left[(T-s) - (T^*-s)\right] ds + \sigma_f \cdot dW_t \\ &= f(0,T) + \sigma_f^2\,(T-T^*)\,t + \sigma_f \cdot dW_t. \end{aligned}$$

Folglich gilt $f(t,T) \sim \mathcal{N}\left(\sigma_f^2\,(T-T^*)\,t,\, \sigma_f^2 t\right)$.

(b) Die zum Zeitpunkt T fällige Auszahlung der Call-Option lässt sich zerlegen in

$$(P(T,S) - K)^+ = P(T,S) \cdot 1_{P(T,S)\geq K} - K \cdot 1_{P(T,S)\geq K},$$

wobei $P(T,S)$ den Preis des Zero Coupon Bonds mit Fälligkeit S zur Zeit T bezeichnet.

Wir nutzen die Bewertungsformel unter dem S-forward Maß Q^S und führen im zweiten Summanden einen Numeraire-Wechsel durch, um mit dem T-forward Maß Q^T weiterzurechnen. Damit erhalten wir den Preis der Call-Option wie

folgt:

$$\begin{aligned}\pi &= P(0,S)\cdot\mathbb{E}_{Q^S}\left(\frac{P(T,S)\cdot 1_{P(T,S)\geq K}}{P(T,S)}\right) - K\cdot P(0,S)\cdot\mathbb{E}_{Q^S}\left(\frac{1_{P(T,S)\geq K}}{P(T,S)}\right)\\ &= P(0,S)\cdot\mathbb{E}_{Q^S}\left(1_{P(T,S)\geq K}\right) - K\cdot P(0,T)\cdot\mathbb{E}_{Q^T}\left(\frac{1_{P(T,S)\geq K}}{P(T,T)}\right)\\ &= P(0,S)\cdot Q^S\left(P(T,S)\geq K\right) - K\cdot P(0,T)\cdot Q^T\left(P(T,S)\geq K\right).\end{aligned}$$

(c) (i) Unter dem T-forward Maß Q^T ist der Preis c_0 der Call-Option auf die Aktie zum Zeitpunkt $t=0$ gegeben durch

$$c = P(0,T)\cdot\mathbb{E}_{Q^T}\left(\frac{(S(T)-K)^+}{P(T,T)}\right) = P(0,T)\cdot\mathbb{E}_{Q^T}\left((S(T)-K)^+\right).$$

(ii) Der mit dem Zerobondpreis diskontierte Aktienpreis $\tilde{S}(t)=\frac{S(t)}{P(t,T)}$, $0\leq t\leq T$, ist unter Q^T ein Martingal, wird also durch eine stochastische Differentialgleichung ohne Drift beschrieben, die mit Hilfe der Itô-Formel hergeleitet werden kann. Gemäß dem Hinweis lautet sie unter der Annahme, dass Zins und Aktienkurs unabhängig sind,

$$d\tilde{S}(t) = \tilde{S}(t)\left[\sigma_S(t)dW_t^{1,T} + \sigma_P(t)\,d\tilde{W}_t^{2,T}\right]$$

mit unabhängigen Brownschen Bewegungen $W^{1,T}$ und $W^{2,T}$. Dies ist eine stochastische Differentialgleichung vom Black-Scholes Typ. Sie hat keinen Driftterm, sodass der Zins gleich Null ist. Aufgrund der Unabhängigkeitsannahme beträgt die quadratische Volatilität $v^2(t)=\sigma_S^2(t)+\sigma_P^2(t)$. Einsetzen in die Black-Scholes Preisformel aus dem Hinweis liefert nun

$$\begin{aligned}c &= P(0,T)\cdot\left(\tilde{S}(0)\cdot\Phi(d_1) - K\cdot\Phi(d_2)\right)\\ &= S(0)\cdot\Phi(d_1) - K\cdot P(0,T)\cdot\Phi(d_2)\end{aligned}$$

mit der Standardnormalverteilungsfunktion Φ und

$$d_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K\cdot P(0,T)}\right) \pm \frac{1}{2}\int_0^T v^2(t)\,dt}{\sqrt{\int_0^T v^2(t)\,dt}}.$$

CERA
Certified Enterprise Risk Actuary

DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Written exam CERA module A

Quantitative Methods of ERM

in accordance with the examination regulations no. 3.0
of Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
for the acquisition of the CERA qualification

29 May 2026

Please note:

- The use of a pocket calculator is permitted.
- The maximum score is 180 points. The examination is passed if the total score is at least 90 points.
- Please check the exam sheets for completeness. The exam has 11 pages.
- All answers shall be justified. For computational tasks it is required to provide the solution approach.
- Please enter your answers only in the designated sheets.

Examination board members:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Question 1. Risk Measures and Parameter Risk. *[30 points]* An insurance company introduces a policy protecting against an emerging risk. Since there is no claims experience available, the company opts for a Bayesian model to price the policy. It makes the following assumptions.

- The claim size X, given the value θ of the unknown parameter Θ, is supposed to be $LN(\theta, 4)$-distributed.
- Based on a simulation model from the natural sciences, the prior distribution of the parameter Θ is supposed to be $\mathcal{N}(2, 1)$.

Hint.

- The lognormal distribution $LN(\theta, \sigma^2)$ has the density

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} \exp\left(-\frac{(\ln(x)-\theta)^2}{2\sigma^2}\right), \quad x > 0,$$

  and the expected value $\exp(\theta + \frac{1}{2}\sigma^2)$.
- If $X|\Theta = \theta \sim LN(\theta, \sigma^2)$ and $\Theta \sim \mathcal{N}(\mu, \tau^2)$, then the unconditional distribution of X is $LN(\mu, \sigma^2 + \tau^2)$.
- quantile of the standard normal distribution: $\Phi^{-1}(0.97) = 1.880794$

(a) *[6 points]* For the confidence level 0.97, determine the Value at Risk of the unconditional distribution of X and the Value at Risk of the conditional distribution of X, given $\Theta = 2$. Explain the difference $VaR_{0.97}(X) - VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2)$ from an economic perspective.

(b) *[10 points]* Show that the posterior distribution of Θ, given the observed claim sizes $x_1, \ldots, x_n$, is given by $\mathcal{N}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), \frac{4}{4+n}\right)$.

(c) *[2 points]* Give a short explanation why the predictive distribution of X, given $x_1, \ldots, x_n$, is equal to $LN\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), 4 + \frac{4}{4+n}\right)$.

(d) *[12 points]* In the first year following the introduction of the new policy, a claim size x_1 is observed which is three times the expected value of the unconditional distribution of X, i.e. $LN(2, 5)$. (That means $x_1 = 3 \cdot \exp(2+0.5 \cdot 5) = 270.05$). Furthermore two indedendent experts provide their estimates of the parameter θ which are $\delta_1 = 4$ and $\delta_2 = 3$, respectively. These expert judgements are modeled based on the assumption $\delta_i \mid \Theta = \theta \sim \mathcal{N}(\theta, 2)$. The experts point to changes in court decisions resulting in significantly higher costs for claims settlement.

  (i) *[4 points]* Describe shortly how to determine the posterior distribution of Θ, given x_1, δ_1, δ_2 and explain, in qualitative terms, the significance of the assumption on the probability distribution of the expert judgements.

(ii) *[8 points]* Within the insurance company, a discussion arises about whether to carry through the Bayesian update according to d) (i) or to start a new Bayesian model with prior distribution $\Theta \sim \mathcal{N}(3.5, 1)$ and unchanged sample distribution. Please provide arguments for both proposals.

Question 2. Risk Measures and Management. *[30 points]* Suppose that a reinsurer calculates its premium P as 1.2 times the expected claim payments and uses the performance measure RORAC for steering its business activities. For simplification, assume that the reinsurer incurs no costs.

(a) *[10 points]* The reinsurer has already assumed the payment obligation $Y_1 := \max(0, X_1 - 1000)$, where the claim variable X_1 has the following distribution:

$$\mathbb{P}(X_1 = 500) = 0.8, \quad \mathbb{P}(X_1 = 1200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(X_1 = 2000) = 0.02.$$

Choosing the confidence level 0.97, compute the Value at Risk, the Tail Value at Risk and the Expected Shortfall of Y_1.

(b) *[6 points]* For the loss variable $Y_1 - P$, compute the performance measure RORAC in two ways, first $RORAC_1$ by determining the risk capital with the help of the risk measure $VaR_{0.97}$ and second $RORAC_2$ by determining the risk capital with the help of the risk measure $ES_{0.97}$.

(c) *[14 points]* The reinsurer has the opportunity of writing a second risk $Y_2 := \max(0, X_2 - 1000)$, where the claim variable X_2 is independent of X_1 and has the same distribution as X_1. For each of the two variants, i.e. for $RORAC_1$ and $RORAC_2$, examine whether the reinsurer takes this opportunity, i.e. whether it prefers the distribution of $Y_1 + Y_2$ to the distribution of Y_1. Analyze the decision of the reinsurer arguing both from the perspectives of risk and yield and explain, what property of the quantities involved leads to this decision.

Question 3. Extreme Value Theory and Tail Behavior of Risks *[25 points]*

(a) *[3 points]* "Extreme value theory is a useful tool in actuarial risk management." Discuss this statement using a self-chosen example from actuarial risk management.

(b) *[12 points)]* Consider an insurance contract with random claim size X. The distribution of the random variable X is modeled by an exponential distribution with potentially random parameter Λ, such that $P(X > x) = E(e^{-\Lambda x})$. We consider the following 2 scenarios:

(i) $\Lambda = \lambda_0$ (deterministic parameter), such that $P(X > x) = e^{-\lambda_0 x}$.

(ii) Λ has a Gamma distribution with parameters $\alpha, \beta > 0$ and density $g(\lambda) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}\lambda^{\alpha-1}e^{-\beta\lambda}$. Here $\Gamma(\alpha) > 0$ is the Gamma function (the exact form is not important for solving the exercise) and the factor $\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)}$ is the normalization constant of the Gamma density. In this case,

$$P(X > x) = \int_0^\infty e^{-\lambda x} g(\lambda) d\lambda \,.$$

Demonstrate that in scenario (ii), the claim size X has a Pareto distribution with survival function

$$\bar{F}(x) = \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^\alpha$$

and conclude that the tail of X decays polynomially with parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$. Compare this tail behavior with the behavior of the survival function of X in scenario (i) and discuss the difference from a modeling perspective.

(c) Data analysis

(i) *[3 points]* Suppose you are given n independent observations $x_1, \ldots, x_n$ of X. Describe a graphical method to distinguish scenario (i) from scenario (ii).

(ii) *[7 points]* Briefly explain how the tail of X, and in particular the parameter $\xi = 1/\alpha$, can be estimated using the POT method. What estimate $\hat{\xi}$ would you approximately expect for the two scenarios (under the assumption that the number of observations n is sufficiently large so that estimation errors can be neglected)?

FIGURE 1
PLOT OF ALAE VERSUS LOSS.
BOTH VARIABLES ARE ON A LOGARITHMIC SCALE.
THIRTY-FOUR LOSS OBSERVATIONS ARE CENSORED.
THIS PLOT DEMONSTRATES A STRONG RELATIONSHIP BETWEEN ALAE AND LOSS.

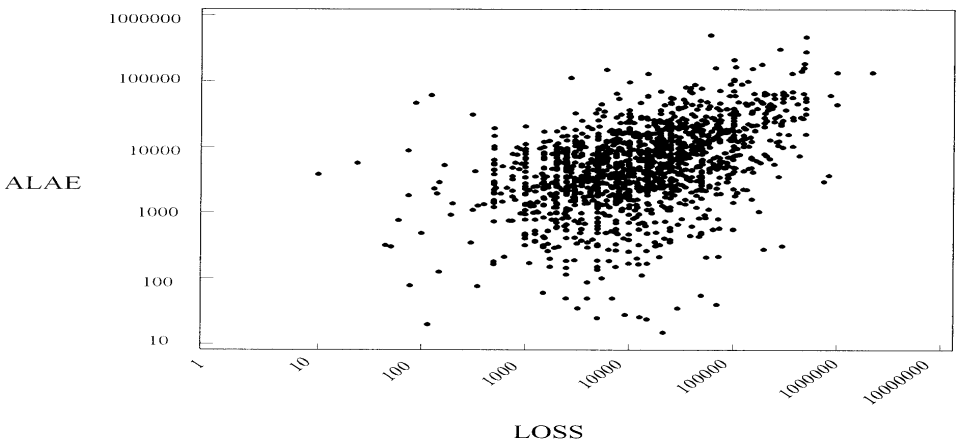

Abbildung 1: Scatter plot of the claim data for Exercise 4; Source: Frees-Valdez (1997).

Question 4. Application of copulas to claims data. *[25 points]*

An insurance company has insurance claim data of the form $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$, where X_i denotes the claim size and Y_i describes the so-called *allocated loss adjustment expenses* (ALAE). (The ALAE include, for example, legal and expert costs related to claims settlement.) A scatter plot of the losses is shown in Figure 1 above.

(a) *[3 points]* Briefly explain why one should expect dependence between claim size X and ALAE Y.

(b) *[9 points]* To model the joint distribution of X and Y, a Gumbel copula with parameter θ is used; namely,

$$C_\theta^{\mathrm{Gu}}(u_1, u_2) = \exp\left(-\left((-\log u_1)^\theta + (-\log u_2)^\theta\right)^{1/\theta}\right), \quad 1 \le \theta < \infty.$$

To model the distribution of X and Y, a Pareto distribution with parameters λ_X, α_X and λ_Y, α_Y, respectively, is used with $\lambda_X, \lambda_Y > 0$, $\alpha_X, \alpha_Y > 1$, i.e.

$$P(X > x) = \left(1 + \frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}, \quad x \ge 0,$$

and analogously for Y.

Explain qualitatively why the Gumbel copula is well suited to describe the data shown in Figure 1, and give the joint distribution function $F(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$. What happens for $\theta = 1$ and for $\theta \to \infty$?

(c) *[3 points]* You are given an algorithm that generates random variables $\mathbf{U} = (U_1, U_2)$ distributed according to the Gumbel copula. Explain how, using this algorithm, a realization of the pair (X, Y) can be generated.

(d) (i) *[4 points]* Outline two methods for estimating θ.

(ii) *[6 points]* You are given the following 4 observations of X and Y.

data point	1	2	3	4
X	15.4	0.6	122.2	107.1
Y	9.1	0.7	2.8	16.7

Compute Kendall's τ and an estimator for θ. Hint: For the Gumbel copula, $\rho_\tau = 1 - 1/\theta$

Question 5. Risk Measures and Capital Allocation. *[20 points]*

Consider an insurance company with d business units with associated losses given by the random variables L_i, $1 \leq i \leq d$. The loss of the overall company is thus $L := \sum_{i=1}^{d} L_i$. Let ϱ be a translation-invariant and positively homogeneous risk measure such as VaR_α or ES_α, and let $\varrho(L)$ be the risk capital for the overall company. In this context, a capital allocation principle assigns economic capital $\mathrm{AC}_1, \ldots, \mathrm{AC}_d$ to the individual business units.

(a) *[8 points]* Why are *RORAC compatibility* and the existence of a *diversification benefit* economically desirable properties of the Euler capital allocation principle? Briefly discuss both points.

(b) *[9 points]* Let the random variables $(L_1, \ldots, L_d)$ be multivariate normally distributed with mean $\mu = 0$ and covariance matrix Σ. Show that in this case the Euler capital allocations for ϱ are given by

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\mathrm{var}(L)}} \varrho(\tilde{X}) \tag{1}$$

where $\varrho(\tilde{X})$ denotes the risk measure of a random variable $\tilde{X}$ distributed as $N(0, 1)$.

(c) *[3 points]* For the case $\varrho = \mathrm{ES}_\alpha$, give an alternative representation for the capital allocation in (1) that holds generally (not only for elliptical distributions).

Question 6. Counterparty Risk. *[20 points]*

Two counterparties S and B have entered into a contract in which the protection seller S provides the protection buyer B protection against an adverse event in exchange for premium payments. Denote the market value of this contract at time t from B's perspective by V_t; the maturity is T. (Examples of such a contract are credit default swaps and reinsurance contracts.)

(a) *[6 points]* Explain what is meant by counterparty risk in this context, and briefly discuss two different techniques for managing this category of risk.

(b) In the situation outlined above, the valuation adjustment for the contract from the perspective of the protection buyer B is given by

$$\text{CVA} = \delta_S \, \mathbb{E}^Q\big(1_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau_S} (V_{\tau_S})^+\big)$$

Here $r \geq 0$ is the risk-free interest rate, τ_S is the default time, and δ_S is the loss given default of S, assumed deterministic.

(i) *[5 points]* Assume that the market value V_t of the contract and the default time τ_S are independent. Show that under these assumptions the CVA is given by

$$\text{CVA}^{\text{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt$$

where f_S denotes the density of the default time τ_S.

(ii) *[5 points]* Evaluate the formula for the case where $E^Q(V_t^+)$ is constant and equal to 100 and τ_S is exponentially distributed under Q with parameter γ_S. Can the parameter γ_S be calibrated from CDS spreads on S observed in the market?

(iii) *[4 points]* In deriving the formula for $\text{CVA}^{\text{indep}}$, it is assumed that the market value V_t of the contract and the default time τ_S are independent. Discuss, using the example of a reinsurance contract, why the independence assumption made in deriving the formula for $\text{CVA}^{\text{indep}}$ may be problematic in practice.

Question 7. Term Structure Models and Valuation of Options. *[30 points]*

In the Gaussian interest rate model, the dynamics of the forward rates $f(t,T)$ under the T^*-forward measure for $t \leq \min(T, T^*)$ are described by the following stochastic differential equation:

$$df(t,T) = \sigma_f(t,T)\left[\sigma_P(t,T) - \sigma_P(t,T^*)\right] dt + \sigma_f(t,T)\, dW_t$$

Here, W denotes a Brownian motion under the T^*-forward measure, $\sigma_f(t,T)$ a deterministic real function describing the volatility structure of the forward rates and $\sigma_P(t_1,t_2) = \int_{t_1}^{t_2} \sigma_f(t_1,s)\, ds$.

(a) *[8 points]*

(i) *[4 points]* Explain shortly why in the Gaussian interest rate model, the forward rates are normally distributed and the zero bond prices are log-normally distributed under the T^*-forward measure.

(ii) *[4 points]* In the special case that $\sigma_f(t,T) \equiv \sigma_f$ is constant, determine the parameters of the normal distribution of $f(t,T)$ under the T^*-forward measure.

(b) *[10 points]* Consider a European call option with strike K and maturity T on a zero bond with maturity $S > T$. Derive a formula for pricing the option at time $t = 0$ that is based solely on prices of zero bonds at time $t = 0$ and probabilities under the T- and S-forward measures.

(c) *[12 points]* Consider a stock S whose price is modeled in the Black-Scholes model under the risk neutral measure by the stochastic differential equation

$$dS(t) = S(t)\left[r(t)\, dt + \sigma_S(t)\, d\tilde{W}_t\right],$$

where σ_S is a deterministic function. $\tilde{W}$ a Brownian motion and $r(t)$ denotes the risk free interest rate. Then, the price of a call option on the stock with strike K and maturity T is given by

$$c = S(0)\cdot\Phi(d_1) - K\cdot\exp\left(-\int_0^T r(s)\, ds\right)\cdot\Phi(d_2)$$

with the cumulative distribution function Φ of the standard normal distribution and

$$d_{1/2} = \frac{\ln(S(0)/K) + \int_0^T r(t)\, dt \pm \frac{1}{2}\int_0^T \sigma_S^2(t)\, dt}{\sqrt{\int_0^T \sigma_S^2(t)\, dt}}.$$

Now, the goal is to price the call option on the stock at time $t = 0$ under interest rate uncertainty in the Gaussian interest rate model. Under the T-forward measure, the prices of zero bonds follow the stochastic differential equation

$$dP(t,T) = P(t,T)\left[f(t,t) + \sigma_P^2(t,T)\right] dt - \sigma_P(t,T)\, dW_t$$

with a Brownian motion W.

(i) *[3 points]* Represent the price of the call option on the share at time 0 as a discounted expected value under the T-forward measure.

(ii) *[9 points]* In qualitative terms, derive a pricing formula of Black-Scholes type for the price of the call option on the stock a time $t = 0$. In doing so, you may use the following result without proof. Under the assumption that interest rate and stock price are independent, the stochastic process $\tilde{S}(t) := \frac{S(t)}{P(t,T)}$ follows the stochastic differential equation

$$d\tilde{S}(t) = \tilde{S}(t)\left[\sigma_S(t)dW_t^{1,T} + \sigma_P(t)\,dW_t^{2,T}\right]$$

under the T-forward measure with independent Brownian motions $W^{1,T}$ and $W^{2,T}$.

Proposal for solution

Question 1. Risk Measures and Parameter Risk.

(a) The conditional distribution of $X \mid \Theta = 2$ is $LN(2, 4)$. Its Value at Risk is given by $VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2) = \exp(2 + 2 \cdot \Phi^{-1}(0.97)) = 317.85$.

Die unconditional distribution of X is $LN(2, 4+1)$ according to the hint. Its Value at Risk is given by $VaR_{0.97}(X) = \exp(2 + \sqrt{5} \cdot \Phi^{-1}(0.97)) = 495.51$.

The difference $VaR_{0.97}(X) - VaR_{0.97}(X \mid \Theta = 2) = 177.66$ reflects an estimation of the parameter risk, since the uncertainty about the parameter value is only captured by the unconditional distribution.

(b) Up to a constant, the posterior density of Θ, given the observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$, is given by

$$\begin{aligned}
&\pi(\theta | x_1, x_2, x_2, \ldots, x_n) \\
&\quad \propto \quad f_\Theta(\theta) \cdot \prod_{i=1}^{n} f_{X|\Theta}(x_i|\theta) \\
&\quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta - 2)^2\right) \cdot \prod_{i=1}^{n} \exp\left(-\frac{(\ln(x_i) - \theta)^2}{2 \cdot 4}\right) \\
&\quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2}\left[\left(\theta^2 + \frac{n\theta^2}{4}\right) - 2\theta\left(2 + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)\right]\right) \\
&\quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2\frac{4}{4+n}}\left(\theta^2 - 2\theta\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)\right)\right) \\
&\quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2\frac{4}{4+n}}\left(\theta - \left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i)\right)\right)^2\right).
\end{aligned}$$

Up to a constant, this is the density of $\mathcal{N}\left(\frac{8}{4+n} + \frac{1}{4+n}\sum_{i=1}^{n} \ln(x_i), \frac{4}{4+n}\right)$.

(c) The predictive distribution of X is obtained by averaging the sample density over the posterior density of the parameter. Therefore, the result immediately follows from part b) and the hint.

(d) (i) Up to a constant, the posterior density of Θ, given the observations x_1, δ_1, δ_2, is given by

$$\begin{aligned}
&\pi(\theta | x_1, \delta_1, \delta_2) \\
&\quad \propto \quad f_\Theta(\theta) \cdot f_{X|\Theta}(x_1|\theta) \cdot \prod_{i=1}^{2} f_{\delta_i|\Theta}(\delta_i|\theta) \\
&\quad \propto \quad \exp\left(-\frac{1}{2}(\theta - 2)^2\right) \cdot \exp\left(-\frac{(\ln(x_1) - \theta)^2}{2 \cdot 4}\right) \cdot \prod_{i=1}^{2} \exp\left(-\frac{(\delta_i - \theta)^2}{2 \cdot 2}\right).
\end{aligned}$$

The assumption on the distribution of the expert judgements implies that the experts are independent and provide unbiased estimates of the parameter. Since the variance of the expert judgements is lower than the variance of the logarithmic observed values, the expert judgements are assigned a higher weight in the Bayesian update process.

(ii) One argument in favor of the Bayesian update process according to part i) is that on the one hand, the results of the simulation model from the natural sciences continue to be incorporated into the modelling and on the other hand, the new pieces of information provided by the observed value and the expert opinions are taken into account without having to make further assumptions on the weights of the different sources of information. The claims history consisting of only one observed value is very short, and we are not aware of any new insights that might cast doubt on the methodology of the simulation model. Since the Bayesian update process continuously takes into account new information without ignoring the previous assumptions it appears to be well-suited to support the launch of the new policy.

The proposal to start a new Bayesian model based on the prior distribution $\mathcal{N}(3.5, 1)$, which is the distribution of the mean of the expert opinions may be supported by the following arguments hinting at a change point. First, x_1 turns out to be very high. Furthermore the expert opinions suggest a higher level of claims. According to the experts, changes in court decisions might be a cause of this.

Question 2. Risk Measures and Management.

(a) The claim payment of the reinsurer has the distribution

$$\mathbb{P}(Y_1 = 0) = 0.8, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 200) = 0.18, \quad \mathbb{P}(Y_1 = 1000) = 0.02.$$

Because of $\mathbb{P}(Y_1 < 200) = 0.8 < 0.97 < 0.98 = \mathbb{P}(Y_1 \leq 200)$, it holds that $VaR_{0.97}(Y_1) = 200$. Furthermore, we get

$$ES_{0.97}(Y_1) = \frac{1}{1-0.97}\int_{0.97}^{1} VaR_z(Y_1)\,dz = \frac{200 \cdot 0.01 + 1000 \cdot 0.02}{0.03} = 733.33$$

and

$$TVaR_{0.97}(Y_1) = \frac{1}{\mathbb{P}(Y_1 > 200)} \cdot \mathbb{E}\left(Y_1 \cdot 1_{Y_1 > 200}\right) = \frac{1}{0.02} \cdot 1000 \cdot 0.02 = 1000.$$

Alternatively, the Expected Shortfall can be derived from the values of Value at Risk and Tail Value at Risk as follows.

$$\begin{aligned} ES_{0.97}(Y_1) &= \frac{\mathbb{P}(Y_1 > VaR_{0.97}(Y_1))}{1-0.97} \cdot TVaR_{0.97}(Y_1) + \left(1 - \frac{0.02}{0.03}\right) \cdot VaR_{0.97}(Y_1) \\ &= \frac{2}{3} \cdot 1000 + \frac{1}{3} \cdot 200 = 733.33 \end{aligned}$$

(b) The expected claim payment equals $\mathbb{E}(Y_1) = 200 \cdot 0.18 + 1000 \cdot 0.02 = 56$, the premium $P = 1.2 \cdot 56 = 67.2$. It follows that

$$\begin{aligned} RORAC_1 &= \frac{P - \mathbb{E}(Y_1)}{VaR_{0.97}(Y_1 - P)} = \frac{67.2 - 56}{200 - 67.2} = 0.0843, \\ RORAC_2 &= \frac{P - \mathbb{E}(Y_1)}{ES_{0.97}(Y_1 - P)} = \frac{67.2 - 56}{733.33 - 67.2} = 0.0168. \end{aligned}$$

(c) If, in addition, the reinsurer enters the contract on the risk X_2, its total claim payment $Y_1 + Y_2$ has the distribution:

z	$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = z)$
0	$0.8^2 = 0.64$
200	$2 \cdot 0.8 \cdot 0.18 = 0.288$
400	$0.18^2 = 0.0324$
1000	$2 \cdot 0.8 \cdot 0.02 = 0.032$
1200	$2 \cdot 0.18 \cdot 0.02 = 0.0072$
2000	$0.02^2 = 0.0004$

Using the definition, we determine $VaR_{0.97}(Y_1 + Y_2) = 1000$ and $ES_{0.97}(Y_1 + Y_2) = \frac{1}{0.03}(1000 \cdot 0.9924 + 1200 \cdot 0.0072 + 2000 \cdot 0.0004) = 1061.33$. This entails the new figures $RORAC_1 = \frac{2 \cdot 11.2}{1000 - 2 \cdot 67.2} = 0.0259$ that turns out to be lower than before, and $RORAC_2 = \frac{2 \cdot 11.2}{554.67 - 2 \cdot 67.2} = 0.0242$, that turns out to be higher than before.

When using $RORAC_1$, the reinsurer abstains from the new business opportunity, thus renouncing the additional profit and the diversification effect arising from the new independent risk.

Management based on $RORAC_1$ follows a wrong incentive in this situation. The reason for that is that the risk measure $VaR_{0.97}$ fails to be subadditive.

On the contrary, Expected Shortfall is subadditive. When using $RORAC_2$, the management seizes the opportunity of gaining an additional profit and achieving a higher degree of diversification by entering the new contract Y_2.

Question 3. Extreme Value Theory and Tail Behavior of Risks.

(a) One possible application is the valuation of reinsurance contracts with high attachment points in the area of natural catastrophes. In this setting, one usually has only few observations, but a good estimate of the tail behavior is crucial. EVT provides a theoretically well-founded method to address this problem. Other possible fields of application include certain areas of operational risk.

(b) We have

$$P(X > x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^\infty e^{-\lambda x} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda} d\lambda = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \int_0^\infty e^{-\lambda(\beta+x)} \lambda^{\alpha-1} d\lambda.$$

By the definition of the normalization constant of the Gamma distribution, the last integral equals

$$\frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\beta+x)^\alpha},$$

and therefore

$$P(X > x) = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha-1)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{(\beta+x)^\alpha} = \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha.$$

It follows that

$$P(X > x) = x^{-\alpha} \frac{\beta}{1+\beta/x} = x^{-\alpha} L(x),$$

and

$$L(x) = \frac{\beta}{1+\beta/x}$$

is slowly varying (for large x, approximately constant).

In the case $\Lambda = \lambda_0$, we obtain

$$P(X > x) = e^{-\lambda_0 x},$$

and thus an exponentially decaying tail.

Interpretation: uncertainty about the parameter Λ turns an exponentially decaying tail (light-tailed distribution) into a polynomially decaying tail (heavy-tailed distribution).

(c) (i) The simplest method is a QQ-plot of the data against the exponential distribution. Alternatively, one could consider the mean excess plot, which in scenario (ii) should increase linearly, whereas in scenario (i) it should be approximately constant.

(ii) First, one chooses a high threshold u, for example the 95% quantile of the data. For $x > u$ one has

$$\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u),$$

where F_u denotes the excess distribution of F relative to u. Then one models F_u by a GPD and fits the parameters ξ and β (for example by maximum likelihood) to the observed threshold exceedances; this yields parameter estimates $\hat{\xi}$ and $\hat{\beta}$, and a tail estimator via the POT method.

In scenario (i) (Λ constant), one would expect $\hat{\xi} \approx 0$, whereas in scenario (ii) one expects $\hat{\xi} \approx \frac{1}{\alpha} > 0$ (heavy-tailed scenario).

Question 4. Application of Copulas to Claims Data.

(a) Reasons for dependence: fees are often proportional to the amount in dispute; for larger claim amounts, greater effort is typically devoted to loss assessment, etc.

(b) The data indicate strong upper tail dependence, but no significant lower tail dependence; this behavior can be modeled using the Gumbel copula, since for the Gumbel copula

$$\lambda_u > 0 \quad (\text{for } \theta > 1), \qquad \lambda_l = 0.$$

By Sklar's theorem,

$$\begin{aligned} F(x,y) &= C_\theta^{\mathrm{Gu}}(F_X(x), F_Y(y)) \\ &= \exp\left(-\left(\left(-\log\left(1-\left(1+\frac{x}{\lambda_X}\right)^{-\alpha_X}\right)\right)^\theta + \left(-\log\left(1-\left(1+\frac{y}{\lambda_Y}\right)^{-\alpha_Y}\right)\right)^\theta\right)^{1/\theta}\right). \end{aligned}$$

For $\theta = 1$, we obtain independence; for $\theta \to \infty$ we obtain comonotonicity.

(c) To generate a realization of (X, Y), one uses the second part of Sklar's theorem. Let $F^{-1}_{\alpha,\lambda}(u)$ denote the quantile function of the Pareto distribution with parameters α, λ, and let (u_1, u_2) be a realization from the Gumbel copula. Then

$$x = F^{-1}_{\alpha_X,\lambda_X}(u_1), \quad y = F^{-1}_{\alpha_Y,\lambda_Y}(u_2))$$

produces a realization of (X, Y). An explicit calculation shows that

$$F^{-1}_{\alpha,\lambda}(u) = \lambda\left((1-u)^{-\frac{1}{\alpha}} - 1\right).$$

(d) (i) Two possible methods for estimating θ are maximum likelihood and a method-of-moments estimator based on Kendall's τ.

(ii) We have 4 observations and hence $\binom{4}{2} = 6$ pairs. The estimator for ρ_τ is given by

$$\rho_\tau = \frac{1}{6}\big(1 - 1 + 1 + 1 + 1 - 1\big) = 1/3;$$

hence $\hat{\theta} = (1 - \hat{\rho_\tau})^{-1} = 1.5$.

Question 5. Risk Measures and Capital Allocation

(a) RORAC compatibility means that the RORAC of the overall portfolio increases when the weight of a subunit L_i, whose RORAC $(-E(L_i)/\mathrm{AC}_i)$ exceeds the RORAC of the overall firm, is increased. In this sense, the Euler principle provides correct signals for risk-sensitive performance management. A diversification benefit is particularly relevant for subadditive risk measures satisfying $\varrho(L) \leq \sum_{i=1}^{d} \varrho(L_i)$. The diversification benefit ensures that each business unit benefits from subadditivity

$$\mathrm{AC}_i \leq \varrho(L_i),$$

otherwise there would be incentives for individual business units to leave the firm.

(b) Since $(L_1, \ldots, L_d) \sim N(0, \Sigma)$, it follows that

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i L_i \sim N(0, \sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$$

with $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. Since ϱ is positively homogeneous, it follows that $\varrho(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}\varrho(X)$. Hence, under the Euler principle, we obtain

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\varrho(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\mathrm{SD}(L)} = \varrho(X)\frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\mathrm{SD}(L)}.$$

(c) In the case where $\varrho = \mathrm{ES}$, one obtains the so-called expected shortfall contributions, which have the general representation

$$\mathrm{AC}_i = E(L_i \mid L \geq \mathrm{VaR}_\alpha).$$

Question 6. Counterparty Risk.

(a) Counterparty risk is the risk that one of the contractual counterparties, for example S, defaults prior to the maturity of the contract; if the contract has a positive value from the perspective of B at the default time τ_S, then B incurs a loss. Possible approaches to managing counterparty risk include collateralization, netting, and hedging using CDS (each with a brief explanation).

(b) (i) We have

$$\text{CVA} = \delta_S E^Q\big(I_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau} V_\tau^+\big) = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) f_S(t) dt$$

Under the assumed independence, we have $E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) = E^Q(V_t^+)$, and the result follows.

(ii) We obtain

$$\begin{aligned}\text{CVA}^{\text{indep}} &= \delta_S \int_0^T e^{-rt} 100\gamma_S e^{-\gamma_S t}\, dt \\ &= 100\delta_S\gamma_S\Big[-\frac{1}{r+\gamma_S} e^{-(r+\gamma_S)t}\Big]_0^T \\ &= \frac{100\delta_S\gamma_S}{r+\gamma_S}\big(1 - e^{-(r+\gamma_S)T}\big)\end{aligned}$$

CVA is a valuation adjustment and therefore a risk-neutral quantity; accordingly, the parameter γ_S can be calibrated from market prices (in this case, CDS contracts).

(iii) The independence assumption is problematic. If S is a large reinsurer, one would expect that

$$E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+).$$

A default of S could have been triggered by a catastrophe event, following which all premiums for reinsurance contracts increase. It is even conceivable that the catastrophe event that caused the default of S was directly covered under the reinsurance contract between S and B, such that B does not receive the payment owed to it.

Question 7. Term Structure Models and Valuation of Options.

(a) (i) Under the T^*-forward measure, the dynamics of the forward rates are given by

$$f(t,T) = f(0,T) + \int_0^t \sigma_f(s,T)\,[\sigma_P(s,T) - \sigma_P(s,T^*)]\, ds + \int_0^t \sigma_f(s,T)\, dW_s.$$

The first two summands are deterministic. Being the stochastic integral of a deterministic function with respect to a Brownian motion, the third summand is a normally distributed random variable.

The prices of the zero coupon bonds $P(t,T) = \exp\big(-\int_t^T f(t,s)\, ds\big)$ are log-normally distributed, since the integral of the normally distributed forward rates is again normally distributed.

(ii) If σ_f is constant then it holds that $\sigma_P(t_1,t_2)=\sigma_f(t_1-t_2)$. It follows that under the T^*-forward measure, $f(t,T)$ admits the representation

$$\begin{aligned} f(t,T) &= f(0,T)+\int_0^t \sigma_f^2\left[(T-s)-(T^*-s)\right]ds+\sigma_f\cdot dW_t \\ &= f(0,T)+\sigma_f^2\,(T-T^*)\,t+\sigma_f\cdot dW_t. \end{aligned}$$

Consequently, it holds that $f(t,T)\sim\mathcal{N}\left(\sigma_f^2\,(T-T^*)\,t,\sigma_f^2 t\right)$.

(b) The pay-off of the call option which is due at time T can be expressed as

$$(P(T,S)-K)^+=P(T,S)\cdot 1_{P(T,S)\geq K}-K\cdot 1_{P(T,S)\geq K},$$

where $P(T,S)$ denotes the price of the zero coupon bond with maturity S at time T.

We use the pricing formula under the S-forward measure Q^S and change the numeraire in the second summand in order to continue the computation under the T-forward measure Q^T. Thus, we obtain the price of the call option:

$$\begin{aligned} \pi &= P(0,S)\cdot\mathbb{E}_{Q^S}\left(\frac{P(T,S)\cdot 1_{P(T,S)\geq K}}{P(T,S)}\right)-K\cdot P(0,S)\cdot\mathbb{E}_{Q^S}\left(\frac{1_{P(T,S)\geq K}}{P(T,S)}\right) \\ &= P(0,S)\cdot\mathbb{E}_{Q^S}\left(1_{P(T,S)\geq K}\right)-K\cdot P(0,T)\cdot\mathbb{E}_{Q^T}\left(\frac{1_{P(T,S)\geq K}}{P(T,T)}\right) \\ &= P(0,S)\cdot Q^S\left(P(T,S)\geq K\right)-K\cdot P(0,T)\cdot Q^T\left(P(T,S)\geq K\right). \end{aligned}$$

(c) (i) Under the T-forward measure Q^T, the price c_0 of the call option on the stock at time $t=0$ is given by

$$c=P(0,T)\cdot\mathbb{E}_{Q^T}\left(\frac{(S(T)-K)^+}{P(T,T)}\right)=P(0,T)\cdot\mathbb{E}_{Q^T}\left((S(T)-K)^+\right).$$

(ii) The stock price discounted by the zero bond price $\tilde{S}(t)=\frac{S(t)}{P(t,T)}$, $0\leq t\leq T$, is a martingale under Q^T. Consequently, it is described by a stochastic differential equation without drift, that can be derived with the help of Itô's formula. According to the hint, assuming that interest rate and stock price are independent, this stochastic differential equation is given by

$$d\tilde{S}(t)=\tilde{S}(t)\left[\sigma_S(t)dW_t^{1,T}+\sigma_P(t)\,d\tilde{W}_t^{2,T}\right]$$

with independent Brownian motions $W^{1,T}$ und $W^{2,T}$. This stochastic differential equation is of the Black-Scholes type. It has no drift such that the interest rate is equal to zero. Because of the independence assumption,

the quadratic volatility is given by $v^2(t) = \sigma_S^2(t) + \sigma_P^2(t)$. Inserting into the Black-Scholes pricing formula from the hint, we obtain

$$\begin{aligned} c &= P(0,T) \cdot \left(\tilde{S}(0) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot \Phi(d_2)\right) \\ &= S(0) \cdot \Phi(d_1) - K \cdot P(0,T) \cdot \Phi(d_2) \end{aligned}$$

with the cumulative distribution function Φ of the standard normal distribution and

$$d_{1/2} = \frac{\ln\left(\frac{S(0)}{K \cdot P(0,T)}\right) \pm \frac{1}{2}\int_0^T v^2(t)\,dt}{\sqrt{\int_0^T v^2(t)\,dt}}.$$