CERA
Certified Enterprise Risk Actuary

DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

Quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 2.1
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 24. Mai 2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 12 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen, und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Alle Antworten sind ausschließlich auf den dafür vorgesehenen Lösungsblättern zu notieren. Lösungen, die auf dem Aufgabensatz eingetragen werden, können nicht in die Bewertung einbezogen werden.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Aufgabe 1. Risikomaße und Abhängigkeitsstrukturen. *[29 Punkte]*

Gegeben seien die komonotonen Verlustgrößen X_1 und X_2 mit den Verteilungsfunktionen F_1 bzw. F_2:

$$F_1(x_1) = \begin{cases} 0 & ; \quad x_1 < 0 \\ 0,8 & ; \quad 0 \le x_1 < 3 \\ 1 - \frac{1}{x_1^2} & ; \quad x_1 \ge 3, \end{cases}$$

$$F_2(x_2) = \begin{cases} 0 & ; \quad x_2 < 1, \\ 1 - \frac{1}{x_2^4} & ; \quad x_2 \ge 1. \end{cases}$$

a) *[9 Punkte]* Berechnen Sie Value at Risk, Tail Value at Risk und Expected Shortfall von X_1 zum Niveau 0,85.

b) *[9 Punkte]* Definieren Sie Komonotonie und geben Sie eine ökonomische Interpretation an. Stellen Sie sodann $X_1 = V_1(U)$ und $X_2 = V_2(U)$ als Funktion einer auf $[0, 1]$ gleichverteilten Zufallsgröße U dar.

c) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie den Value at Risk von $X_1 + X_2$ zum Niveau $0,9$ unter Verwendung der Darstellungen aus b).

d) *[8 Punkte]* Ihnen steht ein Zufallszahlengenerator für die Gleichverteilung auf $[0, 1]$ zur Verfügung. Geben Sie unter Verwendung der Darstellungen aus b) einen Algorithmus an, der mit Hilfe von 10000 Simulationen den Expected Shortfall von $X_1 + X_2$ zum Niveau 0,99 und die Shortfallwahrscheinlichkeit von $X_1 + X_2$ zur Schwelle 3 approximativ bestimmt.

Aufgabe 2. Risikomaße und Axiomatik. *[14 Punkte]*

Die Verlustgröße X sei Pareto-verteilt mit den Parametern b, c, d.h. mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c}{c+x}\right)^b, \quad b > 2, c > 0, \quad x \geq 0.$$

(a) *[4 Punkte]* Verifizieren Sie, dass der Schätzer für $VaR_\alpha(X)$ unter Verwendung der Momentenschätzer für die Parameter gegeben ist durch

$$T_1(\hat{b}, \hat{c}) = \hat{c}(1-\alpha)^{-\frac{1}{\hat{b}}} - \hat{c}.$$

(b) *[2 Punkte]* Geben Sie den empirischen Quantilschätzer T_2 für $VaR_\alpha(X)$ an.

(c) *[8 Punkte]* Beschreiben Sie ein Verfahren, wie die beiden Schätzverfahren aus a) und b) im Backtesting mit Hilfe einer Scoring-Funktion miteinander verglichen werden könnten.

Aufgabe 3. Extremwerttheorie (EVT) und Risikomaße. *[20 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* In der folgenden Grafik 1 finden Sie simulierte Schadendaten (4000 Datenpunkte) und den zugehörigen mean excess plot. Erläutern Sie, wie Sie mittels der peaks over threshold Methode den tail der Verteilung der Daten schätzen können. Welchen Wert würden Sie etwa für den Parameter ξ erwarten: $\xi \approx 0$; $0 < \xi < 1$; $\xi \approx 1$. Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort.

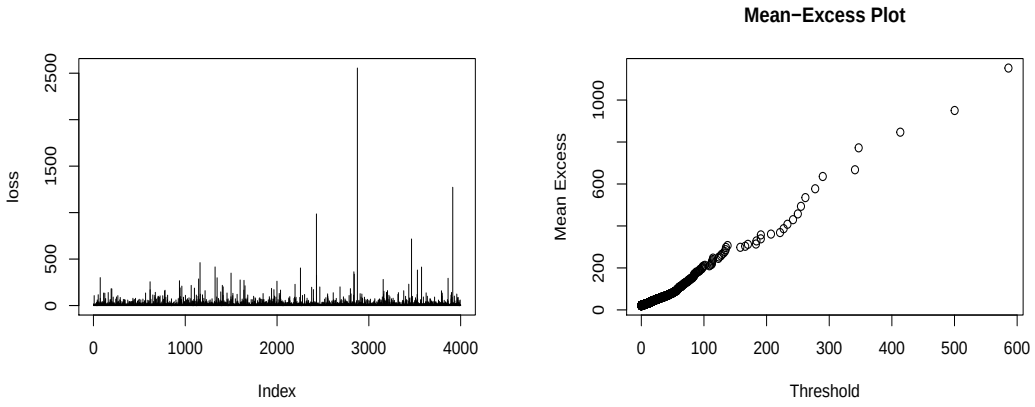

Abbildung 1: Links: loss data; rechts: zugehöriger mean excess plot.

(b) *[10 Punkte]* Betrachten Sie eine Pareto-verteilte Zufallsvariable X mit der Verteilungsfunktion $F(x) = 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a}$.

(i) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Überlebensfunktion der Pareto-Verteilung polynomial mit Parameter $\xi = \frac{1}{a}$ abfällt.

(ii) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie unter Verwendung allgemeiner Aussagen aus der EVT das asymptotische Verhältnis $\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}$. Berechnen Sie dieses Verhältnis für die Spezialfälle $a = 11$, $a = 1.1$ und diskutieren Sie anhand des Ergebnisses kurz Vor- und Nachteile von VaR und ES bei der Risikomessung für heavy-tailed risks.

Aufgabe 4. Risikomaße und Kapitalallokation. *[17 Punkte]*

Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftseinheiten mit zugehörigem Verlust gegeben durch die Zufallsvariablen L_i, $1 \leq i \leq d$. Der Verlust des Gesamtunternehmens ist also $L := \sum_{i=1}^{d} L_i$. Sei ϱ ein translationsinvariantes und positiv homogenes Risikomaß wie etwa VaR_α oder ES_α und sei $\varrho(L)$ das Risikokapital für das Gesamtunternehmen. In diesem Zusammenhang ordnet ein Kapitalallokationsprinzip den einzelnen Geschäftsbereichen das ökonomische Kapital $\mathrm{AC}_1, \ldots, \mathrm{AC}_d$ zu.

(a) *[8 Punkte]* Warum sind *RORAC Kompatibilität* und die Existenz eines *diversification benefit* ökonomisch wünschenswerte Eigenschaften des Euler Kapitalallokationsprinzips? Diskutieren Sie beide Punkte.

(b) *[9 Punkte]* Die Zufallsvariablen $(L_1, \ldots, L_d)$ seien multivariat normal verteilt mit Mittelwert $\mu = 0$ und Kovarianzmatrix Σ. Zeigen Sie, dass in diesem Fall die Euler Kapitalallokationen für ϱ durch den Ausdruck

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\mathrm{var}(L)}} \varrho(\tilde{X})$$

gegeben sind, wobei $\varrho(\tilde{X})$ das Risikomaß einer $N(0,1)$ verteilten Zufallsvariable $\tilde{X}$ bezeichnet.

Aufgabe 5. Copulas und Kreditrisiko. *[15 Punkte]*

Aus der Analyse von Marktdaten sei bekannt, dass die Verteilung der Ausfallzeiten τ_1, τ_2 von zwei Firmen einer Exponentialverteilung mit Parameter $\lambda_i > 0$ genügt, d.h. für $t > 0$ gilt $P(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}$, $i = 1, 2$. Um die gemeinsame Verteilung zu beschreiben, nehmen wir an, dass die gemeinsame Verteilung des Zufallsvektors (τ_1, τ_2) eine Gauss Copula C_ρ^{Ga} mit Parameter $\rho \in (0, 1]$ hat.

(a) *[7 Punkte]* Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige $N(0, 1)$-verteilte Zufallsvariablen generieren kann. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der eine Realisierung von (τ_1, τ_2) generiert.

(b) *[8 Punkte]* Betrachten Sie einen kleinen Zeithorizont T und nehmen Sie an, dass $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$.

i) (5 Punkte) Welchen Einfluss hat eine Erhöhung des Parameters ρ qualitativ auf die Wahrscheinlichkeit $P\big((\tau_1 \le T) \cap (\tau_2 \le T)\big)$ (das Ereignis bei dem beide Firmen vor dem Zeitpunkt T ausfallen)? Wirkt sich eine Änderung von ρ auch auf die Wahrscheinlichkeit $P(\tau_1 \le T)$ aus? Begründen Sie Ihre Antworten.

ii) (3 Punkte) Berechnen Sie $P\big((\tau_1 \le T) \cap (\tau_2 \le T)\big)$ für den Fall $\rho = 1$.

Aufgabe 6. Stornooption und Zinsrisiko in der Lebensversicherung. *[30 Punkte]*

Es bezeichne $P(t,T)$ den Preis eines ausfallfreien Zerobonds mit Nominal 1 und Fälligkeit T zum Zeitpunkt t. Ferner sei r_G der Garantiezins, der sich durch Investition in den ausfallfreien Zerobond mit Laufzeit 2 realisieren lässt, d.h. es gelte $P(0,2) = (1+r_G)^{-2}$.

(a) *[16 Punkte]* Betrachten Sie die folgende Investitionsmöglichkeit zum Zeitpunkt 0: Ein ausfallfreier Bond der Laufzeit 2 sieht die reguläre Rückzahlung einer Geldeinheit zum Zeitpunkt 2 vor und räumt dem Investor zudem ein Kündigungsrecht zum Zeitpunkt 1 ein. Bei Ausübung des Kündigungsrechts wird anstelle der regulären Zahlung zum Zeitpunkt 2 der Betrag $K := (1+r_G)^{-1}$ zum Zeitpunkt 1 ausgezahlt.

(i) *[8 Punkte]* Ein finanzrationaler Investor verfolgt die Strategie, im Fall der Ausübung des Kündigungsrechts den erhaltenen Betrag in einen ausfallfreien Bond der Laufzeit 1 zu reinvestieren. Erklären Sie, dass diese Strategie zu dem Cashflow führt, der aus der Zahlung

$$c_1 = \left((1+r_G)^{-1} - P(1,2)\right) \cdot 1_{\{(1+r_G)^{-1} > P(1,2)\}}$$

zum Zeitpunkt 1 und der Zahlung $c_2 = 1$ zum Zeitpunkt 2 besteht. Erläutern Sie die Wirkung dieser Investitionsstrategie im Vergleich zur Investition in einen ausfallfreien Zerobond mit Laufzeit 2 ohne Kündigungsrecht.

(ii) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie den Wert des Bonds mit Kündigungsrecht zum Zeitpunkt 0 durch Replikation mit Hilfe eines geeigneten Portfolios, das aus Zerobonds, Optionen auf Zerobonds und Swaptions zusammengestellt werden kann.

(b) *[10 Punkte]* Betrachten Sie eine Erlebensfallversicherung mit Stornooption für eine x-jährige Person, die die folgenden Zahlungen c_i zum Zeitpunkt i leistet:

$$\begin{aligned} c_1 &= K \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot 1_{\{S \geq 1\}}, \\ c_2 &= 1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot 1_{\{S \geq 2\}}, \end{aligned}$$

wobei K den Rückkaufswert im Stornofall und S die Restlebensdauer der versicherten Person bezeichnen. Wir setzen ${}_1p_x = \mathbb{P}(S \geq 1)$ und ${}_2p_x = \mathbb{P}(S \geq 2)$. Es bezeichnen Q das risikoneutrale Maß und $r(t)$ die Short-Rate.

(i) *[4 Punkte]* Zeigen Sie:

$$\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot \exp\left(-\int_0^2 r(s)\,ds\right)\right) = \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot \exp\left(-\int_0^1 r(s)\,ds\right)\right)$$

(ii) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie den Wert der Versicherungsleistungen zum Zeitpunkt 0. Nehmen Sie dabei an, dass Biometrie und Finanzmarkt unabhängig sind. Verwenden Sie in der Darstellung des Ergebnisses Preise geeigneter Zerobonds und Optionen auf Zerobonds sowie die Überlebenswahrscheinlichkeiten ${}_1p_x$ und ${}_2p_x$, dass die versicherte Person ein bzw. zwei Jahre überlebt.

(c) *[4 Punkte]* Bildet man die Differenz des korrekten Ergebnisses aus b) ii) für $K = (1 + r_G)^{-1}$ und der mit den jeweiligen Erlebensfallwahrscheinlichkeiten multiplizierten Preise der in a) (ii) verwendeten Zerobonds und Optionen auf Zerobonds, so entsteht der Term

$$({}_1p_x - {}_2p_x) \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K>P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)$$

Analysieren Sie, auf welche Weise versicherungstechnisches Risiko und Zinsrisiko interagieren.

Aufgabe 7. Counterparty Risk. *[22 Punkte]*

Zwei Vertragsparteien S und B haben einen Vertrag abgeschlossen, bei dem der protection seller S dem protection buyer B gegen Prämienzahlung Schutz gegen ein adverses Ereignis gewährt. Der Marktwert dieses Vertrags zum Zeitpunkt t aus Sicht von B sei mit V_t bezeichnet; die Fälligkeit sei T. (Beispiele für einen derartigen Vertrag sind credit default swaps und Rückversicherungsverträge).

(a) *[6 Punkte]* Erläutern Sie, was man in diesem Zusammenhang unter counterparty risk versteht und diskutieren Sie kurz zwei verschiedene Techniken zum Management dieser Risikokategorie.

(b) *[16 Punkte]* In der oben skizzierten Situation ist die Bewertungskorrektur für den Vertrag aus Sicht des protection buyers B durch

$$\mathrm{CVA} = \delta_S \mathbb{E}^Q\big(1_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau_S}(V_{\tau_S})^+\big)$$

gegeben. Hier ist $r \geq 0$ der risikofreie Zinssatz, τ_S die Ausfallzeit und und δ_S der loss given default von S.

(i) *[5 Punkte]* Nehmen Sie an, dass δ_S deterministisch ist und dass der Marktwert V_t des Vertrags und der Ausfallzeitpunkt τ_S unabhängig sind. Zeigen Sie, dass unter diesen Annahmen das CVA durch

$$\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt$$

gegeben ist, wobei f_S die Dichte der Ausfallzeit τ_S bezeichnet.

(ii) *[6 Punkte]* Werten Sie die Formel für den Fall aus, dass $E^Q(V_t^+)$ konstant gleich 100 und τ_S unter Q exponentialverteilt mit Parameter γ_S ist. Kann der Parameter γ_S aus am Markt beobachteten CDS spreads auf S kalibriert werden?

(iii) *[5 Punkte]* Bei der Herleitung der Formel für das $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ wird angenommen, dass der Marktwert V_t des Vertrags und der Ausfallzeitpunkt τ_S unabhängig sind. Diskutieren Sie am Beispiel eines Rückversicherungsvertrags, warum die bei der Herleitung von der Formel für $\mathrm{CVA}^{\mathrm{indep}}$ gemachte Unabhängigkeitsannahme in der Praxis problematisch sein kann.

Aufgabe 8. Portfolio Credit Risk. *[16 Punkte]*

Betrachten Sie einen Erstversicherer, der Versicherungen gegen den Ausfall von Konsumentenkrediten anbietet. Das Versicherungsportfolio umfasst m Verträge gegen den Ausfall von m verschiedenen Krediten mit Ausfallsindikatoren $Y^1, \dots, Y^m$. Falls der i-te Kredit ausfällt ($Y^i = 1$), erleidet das VU einen Verlust in Höhe von e_i. Wir nehmen im folgenden an, dass e_i deterministisch ist.

Bei der Berechnung des ökonomischen Kapitals für das Kreditversicherungsgeschäft verwendet das VU ein probit-normal Bernoulli mixture model, um die gemeinsame Verteilung der Ausfälle der m Kredite zu modellieren. Es gelte für die bedingte Ausfallswahrscheinlichkeit

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ für } \psi \sim N(0,1), \quad 1 \le i \le m\,, \tag{1}$$

wobei ϕ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung bezeichnet.

(a) *[4 Punkte]* Erläutern Sie, warum man Abhängigkeit zwischen den Ausfällen der Kredite erwarten sollte, und geben Sie eine intuitive Motivation für das Modell (1) an.

(b) *[5 Punkte]* Stellen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}_i = P(Y^i = 1)$ und die Wahrscheinlichkeit für genau einen Ausfall als Integral bezüglich der Verteilung von ψ dar.

(c) *[7 Punkte]* Nehmen Sie im folgenden an, dass das Modell homogen ist ($\mu_i \equiv \mu, e_i \equiv e$) und definieren Sie die Mischvariable $Q = \phi(\mu + \sigma\psi)$. Für großes m gilt

$$\text{VaR}_\alpha(L) \approx me\,\text{VaR}_\alpha(Q) \tag{2}$$

Erläutern Sie die Herleitung dieser Formel und benutzen Sie (2), um approximativ $\text{VaR}_\alpha(L)$. zu berechnen. Wie wirkt sich für $\alpha > 0.5$ ein höheres σ auf $\text{VaR}_\alpha(L)$ aus?

Aufgabe 9. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement. *[17 Punkte]*

Eine Asset Management Gesellschaft managet das Portfolio $A(t)$, $t \in [0,T]$, eines Investors mit dem Anfangswert $A(0) = P$ zum Zeitpunkt 0, so dass stets der Anteil β in das ausfallfreie Geldmarktkonto und der Anteil $1-\beta$ in den Aktienindex investiert ist. Nehmen Sie an, dass die risikofreie Short Rate $r(t)$ im Vasicek-Modell und der Aktienindex im Black-Scholes-Modell mit dem risikofreien Zins $r(t)$ sowie einem konstanten Drift- und einem konstanten Volatilitätskoeffizienten beschrieben wird.

(a) *[4 Punkte]* Geben Sie die stochastische Differentialgleichung unter dem realen Maß $\mathbb{P}$ und die stochastische Differentialgleichung unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$ an, die die Wertentwicklung des Portfolios $A(t)$ beschreibt.

(b) *[3 Punkte]* Ermitteln Sie die faire Schlussüberschussbeteiligungsrate γ für den Investor, so dass der Marktwert zum Zeitpunkt 0 des zur Zeit T fälligen Auszahlungsprofils

$$L(T) := G(T) + \gamma \cdot \max(A(T) - G(T), 0)$$

gleich P ist, wobei $G(T) = P \cdot (1+i)^T$ die Mindestablaufleistung auf Grund der garantierten Verzinsung mit dem konstanten Zinssatz i ist. Stellen Sie Ihr Ergebnis mit Hilfe geeigneter Preise von Zero-Bonds und Optionen auf A dar, siehe Hinweis unten.

(c) *[2 Punkte]* Begründen Sie, weshalb $A(t)$ unter $\mathbb{P}$ und $\mathbb{Q}$ lognormalverteilt ist.

(d) *[5 Punkte]* Die Asset Management Gesellschaft verwendet zur Unternehmenssteuerung das Risikomaß VaR_α. Bestimmen Sie das benötigte Risikokapital für die Übernahme der garantierten Mindestverzinsung mit dem Zinssatz i in Abhängigkeit der Parameter μ_T, σ_T^2 der Lognormalverteilung von $A(T)$ dar. Welchen maximalen Kapitalkostensatz könnte die Asset Management Gesellschaft auf das Risikokapital zahlen unter der Annahme, dass keine Verwaltungskosten und keine Transaktionskosten anfallen?

(e) *[3 Punkte]* Ist es möglich, durch Erwerb von Receiver Swaps zum Zeitpunkt 0 das Zinsrisiko vollständig zu eliminieren? Begründen Sie Ihre Antwort.

Hinweis. Zum Zeitpunkt 0 ist der Wert einer europäischen Call-Option auf A mit Strike K und Fälligkeitszeitpunkt T im Black-Scholes-Modell mit stochastischem Zins gegeben durch

$$C_A(0,K,T) = A(0) \cdot \Phi(d_1(0,K,T)) - K \cdot P(0,T) \cdot \Phi(d_2(0,K,T)),$$

wobei

$$\begin{aligned} d_{1/2}(0,K,T) &= \frac{\ln\left(\frac{A(0)}{K \cdot P(0,T)}\right) \pm \int_0^T \frac{v^2(s,T)}{2}\, ds}{\sqrt{\int_0^T v^2(s,T)\, ds}}, \\ v^2(s,T) &= (1-\beta)^2\sigma_S^2 + 2\frac{\varrho(1-\beta)\sigma_S\sigma_r}{a}(1-\exp(-a(T-s))) + \frac{\sigma_r^2}{a^2}(1-\exp(-a(T-s)))^2 \end{aligned}$$

und $P(0,T) = \exp(-A(0,T) - B(0,T) \cdot r(0))$ mit

$$\begin{aligned} A(0,T) &= (b_\lambda - \frac{\sigma_r^2}{2a^2})(T - B(0,T) + \frac{\sigma_r^2}{4a} B(0,T)^2, \\ B(0,T) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-aT)). \end{aligned}$$

der Preis des Zero-Bonds mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt 0 im Vasicek-Modell ist.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Risikomaße und Abhängigkeitsstrukturen.

a) Wegen $F(3-) = 0,8 < 0,85 < \frac{8}{9} = F(3)$ erhalten wir

$$\mathrm{VaR}_{0,85}(X_1) = \inf\{x_1 \mid F_1(x_1) \geq 0,85\} = 3.$$

Mit der Definition berechnen wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{TVaR}_{0,85}(X_1) &= \mathbb{E}(X_1 \mid X_1 > \mathrm{VaR}_{0,85}(X_1)) \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 > 3)} \int_3^\infty x_1 \cdot \frac{2}{x_1^3}\, dx_1 \\
&= 9 \cdot \left[-\frac{2}{x_1}\right]_3^\infty \\
&= 6.
\end{aligned}$$

Mit $\frac{\mathbb{P}(X_1 > VaR_{0,85}(X_1))}{1-0,85} = \frac{20}{27}$ ergibt sich der Expected Shortfall zu

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_{0,85}(X_1) &= \frac{20}{27} \cdot \mathrm{TVaR}_{0,85}(X_1) + \frac{7}{27} \cdot \mathrm{VaR}_{0,85}(X_1) \\
&= \frac{47}{9} \approx 5,22.
\end{aligned}$$

b) Zwei Zufallsvariablen X_1 und X_2 sind komonoton, falls es eine Zufallsvariable U und wachsende Funktionen V_1, V_2 mit $X_i = V_i(U)$, $i = 1, 2$, gibt. Komonotonie stellt eine perfekte Abhängigkeit dar. Insbesondere ist bei komonotonen Risiken keine Diversifikation möglich.

Wir können U gleichverteilt auf $[0, 1]$ und $V_i = F_i^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \mid F_i(x) \geq u\}$ als Pseudoinverse der Verteilungsfunktion wählen. Es gilt

$$\begin{aligned}
F_1^{\leftarrow}(u) &= \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq u \leq 0,8 \\ 3 & ; \quad 0,8 < u \leq \frac{8}{9} \\ (1-u)^{-\frac{1}{2}} & ; \quad \frac{8}{9} < u \leq 1, \end{cases} \\
F_2^{\leftarrow}(u) &= (1-u)^{-\frac{1}{4}}; \quad 0 \leq u \leq 1.
\end{aligned}$$

c) Mit Hilfe der Darstellung unter b) erhalten wir

$$\begin{aligned}
\mathrm{VaR}_{0,9}(X_1 + X_2) &= \mathrm{VaR}_{0,9}\left((F_1^{\leftarrow} + F_2^{\leftarrow})(U)\right) = (F_1^{\leftarrow} + F_2^{\leftarrow})(0,9) \\
&= F_1^{\leftarrow}(0,9) + F_2^{\leftarrow}(0,9) = 0,1^{-0,5} + 0,1^{-0,25} = 4,94.
\end{aligned}$$

d) (i) Für $i = 1, \ldots, 10000$ wiederhole:

- Ziehe eine Zufallszahl u_i aus der Gleichverteilung auf $[0,1]$.
- Berechne $z_i := F_1^{\leftarrow}(u_i) + F_2^{\leftarrow}(u_i)$.

(ii) Berechne die Shortfallwahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{10000}\sum_{i=1}^{10000} 1_{z_i>3}$.

(iii) Ordne die z_i der Größe nach und berechne den Expected Shortfall $ES_{0,99}(X_1+X_2) = \frac{1}{100}\sum_{i=1}^{100} z_{(i)}$, wobei $z_{(i)}$ den i-größten Wert bezeichnet.

Aufgabe 2. Risikomaße und Axiomatik.

(a) Wegen

$$F\Big(c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - c\Big) = 1 - \left(\frac{c}{c + c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - c}\right)^b = 1-(1-\alpha) = \alpha$$

gilt $\text{VaR}_\alpha(X) = c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - c$. Den Momentenschätzer für $\text{VaR}_\alpha(X)$ erhält man nun durch Einsetzen der Momentenschätzer $\hat{b}$, $\hat{c}$ für die Parameter.

(b) Der empirische Quantilschätzer ist der $\lfloor (1-\alpha)m \rfloor + 1$-größte Beobachtungswert:

$$T_2(X_1,\dots,X_m) = X_{(\lfloor (1-\alpha)m \rfloor + 1)}$$

(c) Der Value at Risk ist elizitierbar. Daher können die beiden Schätzverfahren anhand der streng konsistenten Scoring-Funktion

$$S_\alpha^q(y,x) = \begin{cases} (1-\alpha)\cdot|y-x|; & x \le y \\ \alpha\cdot|y-x| \quad\quad ; & x > y \end{cases}$$

verglichen werden. Liegt eine Beobachtungszeitreihe der Länge n vor und werden die Schätzer für eine Periode auf Basis der m vorangegangenen Perioden ermittelt, so wird das Schätzverfahren mit dem kleinsten Score

$$S_i := \sum_{k=1}^{n-m-1} S(T_i[x_k, x_{k+1},\dots,x_{k+m}], x_{k+m+1}),\ i = 1,2,$$

vorgezogen.

Aufgabe 3. Extremwerttheorie (EVT) und Risikomaße.

(a) Zunächst wählt man eine hohe Schranke u, etwa das 95% Quantil der Daten. Für $x > u$ gilt $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u)$, wobei F_u die excess distribution von F bezüglich u bezeichnet. Anschließend modelliert man F_u durch eine GPD und fitted die Parameter ξ und β (etwa via Maximum Likelihood) an die beobachteten Überschreitungen der Schwelle u; dies ergibt die Parameter $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$

und einen tail Schätzer durch die POT Methode. Bei den vorgegebenen Daten ist der mean excess Plot annähernd linear wachsendend mit einer positiven aber endlichen Steigung. Da die excess function der GPD (und somit die asymptotische Steigung des mean excess Plots bei ausreichend vielen Daten) eine Steigung von $\frac{\xi}{1-\xi}$ hat, deutet der mean excess Plot klar auf den Fall $0 < \xi < 1$ hin.

(b) (i) Es gilt

$$\overline{F}(x) = \frac{b^\alpha}{(b+x)^\alpha} = x^{-\alpha}\frac{b^\alpha}{b/x^\alpha + 1},$$

und für $x \to \infty$ konvergiert dies gegen $x^{-\alpha}b^\alpha$.

(ii) Da die Überlebensfunktion der Pareto-Verteilung nach Aufgabenteil i) polynomial mit Parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$ abfällt, gilt asymptotisch

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_X(\alpha)} = \frac{1}{1-\xi} = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Wir erhalten also für $\alpha = 11$ (grosses α), dass $\mathrm{ES}_\alpha(X) \approx 1.1\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, d.h. VaR und ES sind fast gleich. Für $\alpha = 1.1$ (kleines α ergibt sich $\mathrm{ES}_\alpha(X) \approx 11\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, d.h. es gibt einen drastischen Unterschied zwischen beiden Risikomaßen. Allgemein gilt, dass der Unterschied zwischen VaR und ES umso größer ist, je größer ξ (bzw. je kleiner $\alpha = 1/\xi$) ist, d.h. je mehr Gewicht der tail von X hat. Es folgt, dass speziell für heavy-tailed risks (ξ relativ nahe an 1) der VaR das tail Risiko unterschätzt. Auf der anderen Seite ist der tail parameter ξ unter Umständen schwer zu schätzen, so dass Schätzungen für ES ein hohes Maß an Parameterunsicherheit und Modellrisiko aufweisen.

Aufgabe 4. Risikomaße und Kapitalallokation

(a) RORAC Kompatibilität bedeutet, dass der RORAC des Gesamtportfolios wächst, wenn das Gewicht einer subunit L_i, deren RORAC $(-E(L_i)/\,\mathrm{AC}_i)$ höher ist als der RORAC des Gesamtunternehmens, erhöht wird. In diesem Sinn gibt das Euler Prinzip also korrekte Signale für die Unternehmenssteuerung. Ein diversification benefit ist insbesondere relevant für subadditive Risikomaße, bei denen $\varrho(L) \le \sum_{i=1}^d \varrho(L_i)$. Der diversification benefit stellt sicher, dass jede business unit von der Subadditivität profitiert ($\mathrm{AC}_i \le \varrho(L_i)$); andernfalls gäbe es für Untereinheiten Anreize, das Unternehmen zu verlassen.

[Klassifikation: Learning objective ww; Bloom's taxonomy: 3]

(b) Da $(L_1, \ldots, L_d) \sim N(0, \Sigma)$ folgt, dass

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^{d} \lambda_i L_i \sim N(0, \sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$$

mit $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. Da ϱ positiv homogen ist, folgt dass

$$\varrho(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}\varrho(X).$$

Daher erhalten wir für das Euler Prinzip

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\varrho(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\mathrm{SD}(L)} = \varrho(X)\frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\mathrm{SD}(L)}.$$

Aufgabe 5. Copulas und Kreditrisiko.

(a) Schritt 1: Konstruktion von normalverteilten Realisierungen x_1, x_2: Setze $x_1 = z_1$, $x_2 = (\rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2}z_2)$, wobei z_1, z_2 aus $\mathcal{N}(0,1)$ gezogen werden.
Schritt 2: Konstruktion von $(u_1, u_2) \sim C^{\mathrm{Ga}}_{\rho,}$: Setze $(u_1, u_2) = (\phi(x_1), \phi(x_2))$.
Schritt 3: Die Quantilfunktion der Exponentialverteilung mit Parameter λ ist durch $u \mapsto -\ln(1-u)/\lambda$ gegeben. Nach dem 2. Teil des Satzes von Sklar sind dann

$$(\tau_1, \tau_2) = \big(-\ln(1-u_1)/\lambda_1, -\ln(1-u_2)/\lambda_2\big)$$

die gewünschten Realisierungen.

(b) i) Eine Erhöhung von ρ führt zu einer stärkeren Abhängigkeit . Das Ereignis $\{\tau_1 \le T\} \cap \{\tau_2 \le T\}$ bedeutet, dass τ_1 und τ_2 und somit u_1 und u_2 sehr kleine Werte annehmen; die Wahrscheinlichkeit für dieses Ereignis steigt bei stärkerer Korrelation und somit bei einer Erhöhung von ρ. Die Wahrscheinlichkeit $P(\tau_1 \le T)$ hängt nur von der Randverteilung von τ_1 ab und ist somit unabhängig von ν.

ii) Für $\rho = 1$ liegt Komonotonie vor. Es gilt nach Sklar

$$P\big((\tau_1 \le T) \cap (\tau_2 \le T)\big) = \min(1 - e^{-\lambda_1 T}, 1 - e^{-\lambda_2 T}) = 1 - e^{-\lambda T}$$

Aufgabe 6. Stornooption und Zinsrisiko in der Lebensversicherung.

(a) (i) Das Kündigungsrecht wird genau dann ausgeübt, wenn zum Zeitpunkt 1 $(1 + r_G)^{-1} > P(1,2)$ gilt. Dann erhält der Investor zum Zeitpunkt 1 den Betrag $(1 + r_G)^{-1}$ und kauft einen Zerobond mit Laufzeit 1. Folglich ist

$$c_1 = \big((1 + r_G)^{-1} - P(1,2)\big) \cdot 1_{\{(1+r_G)^{-1} > P(1,2)\}}.$$

Zum Zeitpunkt 2 erhält der Investor den Betrag 1, entweder als Auszahlung des ursprünglichen Bonds oder im Falle der Kündigung als Zahlung des zum Zeitpunkt 1 gekauften Zerobonds. Also gilt $c_2 = 1$.

Während die Investition in den Zerobond der Laufzeit 2 die jährliche Rendite r_G sichert, ermöglicht das Kündigungsrecht, durch Reinvestition an einem steigenden Marktzins zu partizipieren. Die Bedingung $P(0,2) \cdot (1 + r_G) = (1 + r_G)^{-1} > P(1,2)$ besagt, dass in der Periode $[1,2]$ der Marktzins höher als r_G ausfällt.

(ii) Es ist $K = P(0,2)(1 + r_G) = (1 + r_G)^{-1}$. Der Cashflow des Bonds mit Kündigungsrecht besteht aus den Zahlungen $c_1 = K \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}}$ und $c_2 = 1_{\{K \leq P(1,2)\}}$.

Das Kündigungsrecht ermöglicht es bei gestiegenem Marktzins, die Auszahlung 1 zum Zeitpunkt 2 durch Kauf des Zerobonds mit Laufzeit 1 zum Zeitpunkt 1 zu dem geringeren Preis $P(1,2) < K$ sicherzustellen und die Differenz $K - P(1,2) > 0$ zum Zeitpunkt 1 zu vereinnahmen. Dies motiviert die folgende Wahl des Replikationsportfolios.

Kaufe zum Zeitpunkt 0 einen Zerobond mit Laufzeit 2 und eine Put-Option mit Fälligkeitszeitpunkt 1 und Strike K auf den Zerobond mit Laufzeit 1. Der Wert dieses Portfolios beträgt

$$P(0,2) + \mathbb{E}_Q\left((K - P(1,2))^+ \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).$$

Das Portfolio repliziert den Cashflow; denn:

- 1. Fall: $K > P(1,2)$. Übe zum Zeitpunkt 1 die Put-Option aus und verkaufe den Zerobond mit der Restlaufzeit 1 zum Preis von K.
- 2. Fall: $K \leq P(1,2)$. Die Put-Option ist wertlos. Der Zerobond zahlt zum Zeitpunkt 2 den Betrag 1 aus.

Somit ist der Wert V des Cashflows (c_1, c_2) zum Zeitpunkt 0 tatsächlich gleich dem Wert des Replikationsportfolios.

Alternative. Die Kündigungsoption ermöglicht die Partizipation an einem gestiegenen Marktzins. Dies kann durch eine Payer-Swaption abgebildet werden.

Kaufe zum Zeitpunkt 0 einen Zerobond mit Laufzeit 2 und eine Payer-Swaption mit Nominal K, fixed leg r_G und einzigem Zahlungstermin 2. D.h., zum Zeitpunkt 2 erfolgt eine Zahlung der Höhe $(L(1,2) - r_G)^+$. Der Wert des Portfolios beträgt

$$P(0,2) + K \cdot \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds) \cdot (L(1,2) - r_G)^+ \cdot P(1,2)\right).$$

Das Portfolio repliziert den Cashflow; denn:

- 1. Fall: $K > P(1,2)$. Dann ist $(1+r_G)^{-1} > (1+L(1,2)^{-1}$ also $r_G < L(1,2)$. Zum Zeitpunkt 1 verkaufe $\frac{K}{P(1,2)}$ Einheiten des Zerobonds mit Laufzeit 1 (leer) und übe die Swaption aus. Dadurch entsteht eine Zahlung von K zum Zeitpunkt 1 und eine Zahlung von

  $$1-\frac{K}{P(1,2)}+K\cdot(L(1,2)-r_G) = 1-K(1+L(1,2))+K(L(1,2)+1-K^{-1}) = 0$$

  zum Zeitpunkt 2.

- 2. Fall: $K \leq P(1,2)$. Dann ist $(1+r_G)^{-1} \leq (1+L(1,2)^{-1}$ also $r_G \geq L(1,2)$. Die Swaption ist wertlos. Der Zerobond zahlt zum Zeitpunkt 2 den Betrag 1 aus.

Somit ist der Wert V des Cashflows (c_1, c_2) zum Zeitpunkt 0 tatsächlich gleich dem Wert des Replikationsportfolios.

Anmerkung. Die beiden Replikationsportfolios haben tatsächlich denselben Wert, wie die folgende Rechnung außerhalb der Aufgabenstellung zeigt.

$$\begin{aligned}
&K\cdot\mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(L(1,2)-r_G)^+\cdot P(1,2)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K\cdot L(1,2)+K-1)^+\cdot P(1,2)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K\cdot(1+L(1,2))\cdot P(1,2)-P(1,2))^+\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K-P(1,2))^+\right)
\end{aligned}$$

(b) (i) Der Preis des Zero-Bonds zum Zeitpunkt 1 ist gegeben durch

$$P(1,2) = \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_1^2 r(s)\,ds)\mid\mathcal{F}_1\right)$$

und bekannt auf Basis der vefügbaren Marktinformation zum Zeitpunkt 1.

Durch Bedingen auf $\mathcal{F}_1$ erhalten wir

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\mid\mathcal{F}_1\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot\mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_1^2 r(s)\,ds)\mid\mathcal{F}_1\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).
\end{aligned}$$

(ii) Auf Grund der Unabhängigkeit von Finanzmarkt und Biometrie ergibt sich der Wert V der Versicherungsleistungen zu

$$\begin{aligned}
V &= {}_2p_x\cdot\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + {}_1p_x\cdot\mathbb{E}_Q\left(K\cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\overset{(i)}{=} {}_2p_x\cdot\mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + {}_1p_x\cdot\mathbb{E}_Q\left(K\cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&= {}_2p_x\cdot\mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + {}_1p_x\cdot\mathbb{E}_Q\left((K-P(1,2))\cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + ({}_1p_x-{}_2p_x)\cdot\mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&= {}_2p_x\cdot P(0,2) + {}_1p_x\cdot\mathbb{E}_Q\left((K-P(1,2))^+\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)\\
&\quad + ({}_1p_x-{}_2p_x)\cdot\mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).
\end{aligned}$$

(c) Der dritte Summand unter b) ii) berücksichtigt, dass in dem Fall, dass der Tod im 2. Jahr eintritt, der vorgezogene Zahlungstermin bei Ausübung der Stornooption eine Erlebensfallleistung überhaupt erst ermöglicht.

Der Wert der Stornooption hängt von dem kombinierten Einfluss von Biometrie und Zins ab. Liegt der Zins in Periode $[1,2]$ über r_G, beträgt die Wahrscheinlichkeit für eine Auszahlung des Vertrags ${}_1p_x$. Anderenfalls beträgt die Auszahlungswahrscheinlichkeit ${}_2p_x$, ist also gleich der Wahrscheinlichkeit, dass die

Versicherungssumme in einer reinen Erlebensfallversicherung ohne Stornooption ausgezahlt wird. Die Höhe der zusätzlichen Auszahlung zum Zeitpunkt 1 hängt vom Zinsniveau ab.

Aufgabe 7. Counterparty Risk.

(a) Counterparty risk ist das Risiko, dass einer der Vertragsparteien, beispielsweise S vor Fälligkeit des Vertrags ausfällt; falls der Vertrag im Ausfallszeitpunkt τ_S aus Sicht von B einen positiven Wert hat, so erleidet B einen Verlust. Mögliche Ansätze zum Management von counterparty risk: collateralization, netting, hedging mit CDS (jeweils kurze Erläuterung).

(b) (i) Es gilt

$$\text{CVA} = \delta_S E^Q\big(I_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau} V_\tau^+\big) = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) f_S(t) dt$$

Unter der vorausgesetzten Unabhängigkeit gilt $E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) = E^Q(V_t^+)$ und somit die Behauptung.

(ii) Wir erhalten

$$\begin{aligned}\text{CVA}^{\text{indep}} &= \delta_S \int_0^T e^{-rt} 100\gamma_S e^{-\gamma_S t}\, dt \\ &= 100\delta_S\gamma_S\Big[-\frac{1}{r+\gamma_S} e^{-(r+\gamma_S)t}\Big]_0^T \\ &= \frac{100\delta_S\gamma_S}{r+\gamma_S}\big(1 - e^{-(r+\gamma_S)T}\big)\end{aligned}$$

(iii) Die Unabhängigkeitsannahme ist problematisch. Falls S ein großer Rückversicherer ist, so würde man erwarten, dass $E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+)$ gilt: ein Ausfall von S könnte durch ein Katastrophenereignis ausgelöst worden sein, in Folge dessen alle Prämien für Rückversicherungskontrakte steigen. Es ist sogar denkbar, dass das Katastrophenereignis, das zum Ausfall von S geführt hat, direkt in dem Rückversicherungsvertrag zwischen S und B abgesichert war, so dass B nicht die ihm zustehende Zahlung erhält.

Aufgabe 8. Portfolio Credit Risk

(a) Abhängigkeit ensteht insbesondere dadurch, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit von unterschiedlichen Konsumentenkrediten stark durch die wirtschaftliche Entwicklung (insbesondere auch Arbeitslosigkeit) getrieben wird. Diese Phänomen wird durch die Zufallsvariable ψ modelliert, die alle Ausfallswahrscheinlichkeiten treibt.

(b) Es gilt $\bar{p}_i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\varphi(x)\,dx$, wobei φ die Dichte der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit für genau einen Ausfall berechnet sich zu

$$\sum_{i=1}^{m} \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x) \prod_{j=1, j\neq i}^{m} (1 - \phi(\mu_j + \sigma x))\, \varphi(x)\,dx$$

(c) Gegeben $Q = q$ sind die Ausfallindikatoren Y_i unabhängig mit Mittelwert q; nach dem Gesetz der großen Zahlen gilt also, dass gegeben $Q = q$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{L^{(m)}}{m} = eq,$$

oder $L^{(m)} \approx meQ$. Hieraus ergibt sich die Formel. Die Formel zeigt direkt, dass der tail der Verteilung der Anzahl an Ausfällen proportional zum tail von Q ist, so dass der tail von Q der wesentliche Risikotreiber ist. Wir erhalten unter Verwendung von (2) dass

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) \approx em\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q) = \mathrm{VaR}_\alpha(Q)\phi(\mu + \sigma\phi^{-1}\alpha);$$

für $\alpha > 0.5$ ist $\Phi^{-1}(\alpha) > 0$ und $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ ist somit wachsend in σ.

Aufgabe 9. Zinsrisiko und Zinsrisikomanagement.

(a) Wertentwicklung des Portfolios

- unter dem realen Maß $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} A(0) &= P \\ dA(t) &= A(t)\cdot(\beta r(t) + (1-\beta)\mu)\,dt + (1-\beta)\sigma_S\,dW_S(t)) \end{aligned}$$

- unter dem risikoneutralen Maß $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} A(0) &= P \\ dA(t) &= A(t)\cdot(r(t)\,dt + (1-\beta)\sigma_S\,d\tilde{W}_S(t)) \end{aligned}$$

(b) Der Wert des zum Zeitpunkt T fälligen Auszahlungsprofils ist die Summe des Wertes der garantierten Ablaufleistung und des Anteils γ am Wert einer Call-Option auf A mit Strike $G(T)$. Er muss zum Zeitpunkt 0 gleich P sein:

$$P = G(T)\cdot P(0,T) + \gamma\cdot C_A(0, G(T), T),$$

wobei $P(0,T)$ und $C_A(0, G(T), T)$ sich mit den Angaben im Hinweis bestimmen lassen.

Daraus ergibt sich die faire Überschussbeteiligungsrate als Funktion der Modellparameter – insbesondere auch des Mischungsparameters β – der Kapitalanlagestrategie als

$$\gamma = \frac{P - G(T)\cdot P(0,T)}{P\cdot\Phi(d_1(0,G(T),T)) - G(T)\cdot P(0,T)\cdot\Phi(d_2(0,G(T),T))}.$$

(c) Es gilt

$$dA(t) = A(t)\cdot(\beta r(t) + (1-\beta)\mu)\,dt + (1-\beta)\sigma_S\,dW_S(t)).$$

Da $W_S(t)$ und im Vasicek-Modell $r(t)$ und $\int_0^t r(s)\,ds$ normalverteilt sind, ist $\ln(A(t))$ normalverteilt, also $A(t)$ lognormalverteilt.

(d) Mit den Parametern μ_T, σ_T^2 der Lognormalverteilung von $A(T)$ erhalten wir den Value at Risk

$$\begin{aligned}
&\mathrm{VaR}_\alpha(G(T) - A(T)) \\
&= G(T) + \mathrm{VaR}_\alpha[-\exp(\ln(A(T)))] \\
&= G(T) - \exp\left(\mu_T + \sigma_T\cdot\Phi^{-1}(1-\alpha)\right).
\end{aligned}$$

Das benötigte Risikokapital beträgt daher

$$RK = \left(G(T) - \exp\left(\mu_T + \sigma_T\cdot\Phi^{-1}(1-\alpha)\right)\right)\cdot P(0,1),$$

wobei $P(0,1)$ den Preis des Zero-Bonds mit Fälligkeit 1 bezeichnet und den Marktdiskontierungsfaktor darstellt.

Der höchste Kapitalkostensatz k, den die Asset Management Gesellschaft zahlen könnte, ist dadurch gekennzeichnet, dass die Kapitalkosten gleich dem Wert des Anteils der Asset Management Gesellschaft am Überschuss sind. Wir erhalten

$$k = \frac{(1-\gamma)\cdot C_A(0,G(T),T)}{RK}.$$

(e) Da die Kapitalanlagestrategie auf Umschichtungen zwischen Geldmarktkonto und Aktienindex basiert, kann ein Receiver Swap über einen festen Nominalbetrag das Zinsrisiko nicht vollständig eliminieren.

CERA
Certified Enterprise Risk Actuary

DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Written exam CERA module A

Quantitative Methods of ERM

in accordance with the examination regulations no. 2.1
of Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
for the acquisition of the CERA qualification

24 May 2024

Please note:

- The use of a pocket calculator is permitted.
- The maximum score is 180 points. The examination is passed if the total score is at least 90 points.
- Please check the exam sheets for completeness. The exam has 12 pages.
- All answers shall be justified. For computational tasks it is required to provide the solution approach.
- Please enter your answers only in the designated sheets.

Examination board members:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Question 1. Risk Measures and Dependence Structures *[29 points]*

Suppose that the loss variables X_1 and X_2 are comonotonic. Their cumulative distribution functions F_1 and F_2 are given by:

$$F_1(x_1) = \begin{cases} 0 & ; \quad x_1 < 0 \\ 0.8 & ; \quad 0 \le x_1 < 3 \\ 1 - \frac{1}{x_1^2} & ; \quad x_1 \ge 3, \end{cases}$$

$$F_2(x_2) = \begin{cases} 0 & ; \quad x_2 < 1, \\ 1 - \frac{1}{x_2^4} & ; \quad x_2 \ge 1. \end{cases}$$

a) *[9 points]* Compute Value at Risk, Tail Value at Risk and Expected Shortfall of X_1 at the confidence level of 0.85.

b) *[9 points]* Define comonotonicity and give an economic interpretation. Represent $X_1 = V_1(U)$ and $X_2 = V_2(U)$ as a function of a random variable U which is uniformly distributed on $[0, 1]$.

c) *[3 points]* Determine the Value at Risk of $X_1 + X_2$ at the confidence level of 0.9 using the representations from part b).

d) *[8 points]* Suppose you are given a random number generator for the uniform distribution on $[0, 1]$. Using the representations from part b), develop an algorithm determining approximatively the Expected Shortfall of $X_1 + X_2$ at the confidence level of 0.99 and the shortfall probability of $X_1 + X_2$ for the threshold 3 by means of 10000 simulations.

Question 2. Risk Measures and Axiomatics. *[14 points]*

Assume that the loss variable X is Pareto-distributed with parameters b, c, i.e. its cumulative distribution function is given by

$$F(x) = 1 - \left(\frac{c}{c+x}\right)^b, \quad b > 2, c > 0, \quad x \geq 0.$$

(a) *[4 points]* Verify that the estimator for $VaR_\alpha(X)$ based on the moment estimators $\hat{b}$, $\hat{c}$ for the parameters is given by

$$T_1(\hat{b}, \hat{c}) = \hat{c}(1-\alpha)^{-\frac{1}{\hat{b}}} - \hat{c}.$$

(b) *[2 points]* State the empirical quantile estimator T_2 for $VaR_\alpha(X)$.

(c) *[8 points]* Describe how to compare the two estimators from parts a) and b) using a scoring function when backtesting.

Question 3. Extreme Value Theory (EVT) and Risk Measures. *[20 points]*

(a) *[10 points]* In Figure 1 below simulated claim data (4000 data points) and the corresponding mean excess plot are displayed. Discuss how the peaks over threshold (POT) method can be used to estimate the tail of the distribution of the claim data. Which value would you expect for the estimated value of the parameter ξ: $\xi \approx 0$; $0 < \xi < 1$; $\xi \approx 1$. Give a short justification for your choice.

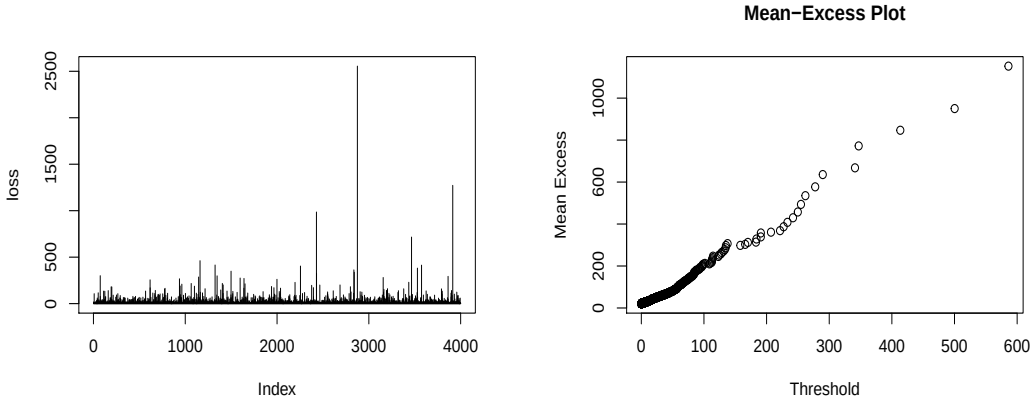

Abbildung 1: Left: loss data; right: corresponding mean excess plot.

(b) *[10 points]* Consider a random variable X which has a Pareto distribution with distribution function $F(x) = 1 - \frac{b^a}{(b+x)^a}$.

(i) *[4 points]* Demonstrate that the survival function of X decays polynomially with parameter $\xi = \frac{1}{a}$.

(ii) *[6 points]* Use general results from EVT to determine the asymptotic ratio $\lim_{\alpha \to 1} \frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_\alpha(X)}$. Compute this asymptotic ratio for the special cases $a = 11$, $a = 1.1$ and use the result to discuss pros and cons of VaR and ES for measuring the risk of heavy-tailed losses.

Question 4. Risk Measures and Capital Allocation. *[17 points]*

Consider an insurance company with d business units and associated loss given by the random variables L_i, $1 \leq i \leq d$. The company-wide loss is thus $L := \sum_{i=1}^{d} L_i$. Consider a translation invariant and positive homogeneous risk measure ϱ such as VaR_α or ES_α and denote by $\varrho(L)$ the risk capital for the entire company. In this context a capital allocation principle allocates the economic capital $\mathrm{AC}_1, \ldots, \mathrm{AC}_d$ to the individual business units.

(a) *[8 points]* Why are *RORAC compatibility* and the existence of a *diversification benefit* reasonable economic properties of the Euler capital allocation principle? Please discuss both points.

(b) *[9 points]* Assume that $(L_1, \ldots, L_d)$ are multivariate normal with mean $\mu = 0$ and covariance matrix Σ. Show that in this case the Euler capital allocations for ϱ are given by the expression

$$\mathrm{AC}_i = \frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\sqrt{\mathrm{var}(L)}} \varrho(\tilde{X}),$$

where $\varrho(\tilde{X})$ denotes the risk measure for a random variable $\tilde{X} \sim N(0, 1)$.

Question 5. Copulas and Credit Risk *[15 points]*

Suppose that an analysis of market data shows that the distribution of the default times τ_1, τ_2 of two firms is exponentially distributed with parameter $\lambda_i > 0$, $i = 1, 2$, that is $P(\tau_i > t) = e^{-\lambda_i t}$, $t \geq 0$. In order to model the joint distribution we assume that the random vector (τ_1, τ_2) has a Gauss copula C_ρ^{Ga} with parameters $\rho \in (0, 1]$.

(a) *[7 points]* Assume that you have a random number generator at your disposal that is able to generate $N(0, 1)$-distributed random variables. Develop an algorithm for generating a realisation of (τ_1, τ_2).

(b) *[8 points]*

Consider a short time horizon T and assume that $\lambda_1 = \lambda_2$.

i) (5 points) What is the qualitative impact of an increase in ρ on the probability $P\big((\tau_1 \leq T) \cap (\tau_2 \leq T)\big)$ (the event where both firms default before Zeitpunkt T)? Does a change in ρ affect the probability $P(\tau_1 \leq T)$ as well? Justify your answers.

ii) (3 Punkte) Compute $P\big((\tau_1 \leq T) \cap (\tau_2 \leq T)\big)$ for the case where $\rho = 1$.

Question 6. Lapse Option and Interest Rate Risk in Life Insurance *[30 points]* Let $P(t,T)$ denote the price of a default free zero bond with nominal 1 and maturity T at time t. Further let r_G be the guaranteed interest rate that can be earned by investing in the default free zero bond with maturity 2, i.e. assume that $P(0,2) = (1+r_G)^{-2}$.

(a) *[16 points]* Consider the following investment opportunity at time 0: A callable default free bond with maturity 2 regularly pays 1 unit of currency at time 2 and, in addition, grants the investor the right to call the bond at time 1. If the investor opts to exercise this right then the surrender value of $K := (1+r_G)^{-1}$ is paid at time 1 instead of the regular payment of 1 at time 2.

(i) *[8 points]* In case of the exercise of the surrender option, a rational investor decides to reinvest the surrender value in a default free zero bond with duration 1. Explain why this strategy leads to the cash-flow consisting of the payment

$$c_1 = \left((1+r_G)^{-1} - P(1,2)\right) \cdot 1_{\{(1+r_G)^{-1} > P(1,2)\}}$$

at time 1 and the payment $c_2 = 1$ at time 2. Explain the effect of this investment strategy in comparison with the investment in a default free zero bond due at time 2 without surrender option.

(ii) *[8 points]* Determine the value of the callable bond at time 0 by replication. The replicating portfolio may consist of zero bonds, options on zero bonds and swaptions.

(b) *[10 points]* Consider a pure endowment policy with surrender option for a x-year old person giving rise to the following payments c_i due at time i:

$$\begin{aligned} c_1 &= K \cdot 1_{\{K > P(1,2)\}} \cdot 1_{\{S \geq 1\}}, \\ c_2 &= 1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot 1_{\{S \geq 2\}}, \end{aligned}$$

where K denotes the surrender value and S the remaining life time of the insured person. We set ${}_1p_x = \mathbb{P}(S \geq 1)$ and ${}_2p_x = \mathbb{P}(S \geq 2)$. Let Q denote the risk neutral measure and $r(t)$ the short-rate.

(i) *[4 points]* Show that the following equality holds:

$$\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot \exp\left(-\int_0^2 r(s)\,ds\right)\right) = \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K \leq P(1,2)\}} \cdot \exp\left(-\int_0^1 r(s)\,ds\right)\right)$$

(ii) *[6 points]* Determine the value of the insurance benefits at time 0 assuming that insurance risk and financial risk are independent. Represent your result using prices of suitable zero bonds and options on zero bonds as well as the probabilities of survival ${}_1p_x$ and ${}_2p_x$ that the insured person survives one and two years, respectively.

(c) *[4 points]* Multiplying the prices of the zero bonds and options on zero bonds used in part a) (ii) by the appropriate survival probabilities and then subtracting them from the correct result under b) ii) for $K = (1 + r_G)^{-1}$ yields

$$({}_1p_x - {}_2p_x) \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K>P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right)$$

Analyze the interplay between the effects of insurance risk and interest rate risk.

Question 7. Counterparty Risk. *[22 points]* Two parties S and B have agreed on a contractual arrangement where the protection seller S offers the protection buyer B protection against some adverse event in return for premium payments. Denote by V_t the market value of the contract at time t from the point of view of B; the maturity is denoted by T. (Examples of such an arrangement are credit default swaps and reinsurance contracts).

(a) *[6 points]* Explain what is meant by counterparty risk in this context and discuss briefly two different techniques for managing this risk category.

(b) *[16 points]* In the above context the valuation adjustment for the protection buyer B is given by

$$\text{CVA} = \delta_S \mathbb{E}^Q\big(1_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau_S}(V_{\tau_S})^+\big).$$

Here $r \geq 0$ is the risk-free interest rate, τ_S and δ_S are the default time and the loss given default of S.

(i) *[5 points]* Assume that δ_S is deterministic and that the market value V_t of the contract and the default time τ_S are independent. Show that under these assumptions the CVA is equal to the simpler expression

$$\text{CVA}^{\text{indep}} = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+) f_S(t)\, dt,$$

where f_S denotes the density of τ_S.

(ii) *[6 points]* Evaluate the formula for the case where $E^Q(V_t^+)$ is constant and equal to 100 and where under Q, τ_S has an exponential distribution with parameter γ_S. Can γ_S be calibrated from the spread of a traded CDS on S?

(iii) *[5 points]* In the derivation of the formula for $\text{CVA}^{\text{indep}}$ it is assumed that V_t and the default time τ_S are independent. Discuss the appropriateness of this assumption in the context of a reinsurance contract.

Question 8. Portfolio Credit Risk. *[16 points]*

Consider an insurance company offering insurance against defaults in consumer credits. The insurance portfolio consists of m contracts offering protection against the default of m different credits with default indicators $Y^1, \ldots, Y^m$. In case credit i defaults ($Y^i = 1$), the insurance company suffers a loss of size e_i. In the sequel we assume that e_i is deterministic.

The insurer uses a probit-normal Bernoulli mixture model, for modelling the joint distribution of the defaults of the m credits (eg. for risk capital purposes). We assume that the conditional default probability takes the form

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ for } \psi \sim N(0,1), \quad 1 \le i \le m\,, \tag{1}$$

where ϕ is the standard normal distribution function.

(a) *[4 points]* Explain why one expects the defaults to be dependent, and give an intuitive motivation for the model (1).

(b) *[5 points]* Express the default probability $\bar{p}_i = P(Y^i = 1)$, and the probability that exactly one credit defaults as an integral with respect to the density of ψ.

(c) *[7 points]* Suppose in the sequel that the model is exchangeable ($\mu_i \equiv \mu, e_i \equiv e$) and define the mixing variable $Q = \phi(\mu + \sigma\psi)$. For large m it holds that

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) \approx me\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q)\,. \tag{2}$$

Explain the derivation of this formula and use (2) to compute an approximation for $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$. What is the impact of a higher σ on $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ for $\alpha > 0.5$?

Question 9. Interest Rate Risk and Interest Rate Risk Management *[17 points]*

An asset management company manages the portfolio of an investor $A(t)$, $t \in [0,T]$, with the initial value $A(0) = P$ at time zero 0, such that the part β is invested in the default-free money market account and the part $1-\beta$ in the share index. Assume that the risk free short rate $r(t)$ follows a Vasicek model and the share index follows a Black-Scholes model with the risk free interest rate $r(t)$, a constant drift coefficient and a constant volatility coefficient.

(a) *[4 points]* State the stochastic differential equations describing the evolution of the value of the portfolio $A(t)$ under the real world measure $\mathbb{P}$ and the risk neutral measure $\mathbb{Q}$, respectively.

(b) *[3 points]* Determine the fair terminal participation rate γ for the investor, such that the market value at time 0 of the pay-off profile falling due at time T,

$$L(T) := G(T) + \gamma \cdot \max(A(T) - G(T), 0),$$

is equal to P, where $G(T) = P \cdot (1+i)^T$ is the guaranteed minimal payment based on the constant interest rate i.

Represent your result using suitable prices of zero bonds and options on A, see hint below.

(c) *[2 points]* Explain why $A(t)$ is lognormally distributed under $\mathbb{P}$ and $\mathbb{Q}$.

(d) *[5 points]* The asset management company uses the risk measure VaR_α for steering its business activities. Determine the risk capital which is required for ensuring the guaranteed minimal payment based on the constant interest rate i. State your result using the parameters μ_T, σ_T^2 of the lognormal distribution of $A(T)$. What is the highest cost of capital rate that the asset management company could afford to pay for the risk capital assuming that no management fees and no transaction fees apply?

(e) *[3 points]* Is it possible to eliminate interest rate risk completely by buying receiver swaps at time 0? Give reasons for your answer.

Hint. At time 0, the value of a European call option on A with strike K and maturity T is given in the Black-Scholes model with stochastic interest rate by

$$C_A(0,K,T) = A(0) \cdot \Phi(d_1(0,K,T)) - K \cdot P(0,T) \cdot \Phi(d_2(0,K,T)),$$

where

$$\begin{aligned} d_{1/2}(0,K,T) &= \frac{\ln\left(\frac{A(0)}{K \cdot P(0,T)}\right) \pm \int_0^T \frac{v^2(s,T)}{2}\, ds}{\sqrt{\int_0^T v^2(s,T)\, ds}}, \\ v^2(s,T) &= (1-\beta)^2\sigma_S^2 + 2\frac{\varrho(1-\beta)\sigma_S\sigma_r}{a}(1-\exp(-a(T-s))) + \frac{\sigma_r^2}{a^2}(1-\exp(-a(T-s)))^2 \end{aligned}$$

and $P(0,T) = \exp(-A(0,T) - B(0,T) \cdot r(0))$ with

$$\begin{aligned} A(0,T) &= (b_\lambda - \frac{\sigma_r^2}{2a^2})(T - B(0,T) + \frac{\sigma_r^2}{4a} B(0,T)^2, \\ B(0,T) &= \frac{1}{a}(1 - \exp(-aT)). \end{aligned}$$

is the price of the zero bond with maturity T at time 0 in the Vasicek model.

Proposal for solution

Question 1. Risk Measures and Dependence Structures.

a) Because of $F(3-) = 0.8 < 0.85 < \frac{8}{9} = F(3)$ we obtain

$$\text{VaR}_{0.85}(X_1) = \inf\{x_1 \mid F_1(x_1) \geq 0.85\} = 3.$$

Using the definition, we compute

$$\begin{aligned} \text{TVaR}_{0.85}(X_1) &= \mathbb{E}(X_1 \mid X_1 > \text{VaR}_{0.85}(X_1)) \\ &= \frac{1}{\mathbb{P}(X_1 > 3)} \int_3^\infty x_1 \cdot \frac{2}{x_1^3}\, dx_1 \\ &= 9 \cdot \left[-\frac{2}{x_1}\right]_3^\infty \\ &= 6. \end{aligned}$$

With $\frac{\mathbb{P}(X_1 > VaR_{0.85}(X_1))}{1-0.85} = \frac{20}{27}$ we obtain the Expected Shortfall:

$$\begin{aligned} \text{ES}_{0.85}(X_1) &= \frac{20}{27} \cdot \text{TVaR}_{0.85}(X_1) + \frac{7}{27} \cdot \text{VaR}_{0.85}(X_1) \\ &= \frac{47}{9} \approx 5.22. \end{aligned}$$

b) Two random variables X_1 and X_2 are said to be comonotonic, if there exist a random variable U and increasing functions V_1, V_2 such that $X_i = V_i(U)$ holds for $i = 1, 2$. Comonotonicity reflects perfect dependence; in particular, comonotone risks do not allow for diversification.

We may choose U to be uniformly distributed on $[0, 1]$ and $V_i = F_i^{\leftarrow}(u) = \inf\{x \mid F_i(x) \geq u\}$ to be the generalized inverse of the cumulative distribution function. It holds that

$$\begin{aligned} F_1^{\leftarrow}(u) &= \begin{cases} 0 & ; \quad 0 \leq u \leq 0.8 \\ 3 & ; \quad 0.8 < u \leq \frac{8}{9} \\ (1-u)^{-\frac{1}{2}} & ; \quad \frac{8}{9} < u \leq 1, \end{cases} \\ F_2^{\leftarrow}(u) &= (1-u)^{-\frac{1}{4}}; \quad 0 \leq u \leq 1. \end{aligned}$$

c) Using the representation form part b), we obtain

$$\begin{aligned} \text{VaR}_{0.9}(X_1 + X_2) &= \text{VaR}_{0.9}\left((F_1^{\leftarrow} + F_2^{\leftarrow})(U)\right) = (F_1^{\leftarrow} + F_2^{\leftarrow})(0.9) \\ &= F_1^{\leftarrow}(0.9) + F_2^{\leftarrow}(0.9) = 0.1^{-0.5} + 0.1^{-0.25} = 4.94. \end{aligned}$$

d) (i) For $i = 1, \ldots, 10000$ repeat:

- Draw a random number u_i from the uniform distribution on $[0, 1]$.
- Compute $z_i := F_1^{\leftarrow}(u_i) + F_2^{\leftarrow}(u_i)$.

(ii) Compute the shortfall probability $p = \frac{1}{10000} \sum_{i=1}^{10000} 1_{z_i > 3}$.

(iii) Sort the z_i in descending order and compute the Expected Shortfall $ES_{0.99}(X_1 + X_2) = \frac{1}{100} \sum_{i=1}^{100} z_{(i)}$, where $z_{(i)}$ denotes the ith-largest value.

Question 2. Risk Measures and Axiomatics.

(a) Because of

$$F\left(c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - c\right) = 1 - \left(\frac{c}{c + c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - c}\right)^b = 1 - (1-\alpha) = \alpha$$

it holds that $\text{VaR}_\alpha(X) = c(1-\alpha)^{-\frac{1}{b}} - c$. We get the moment estimator T_1 for $\text{VaR}_\alpha(X)$ by inserting the moment estimators $\hat{b}$, $\hat{c}$ for the parameters.

(b) The empirical quantile estimator is the $\lfloor (1-\alpha)m \rfloor + 1$-largest observed value:

$$T_2(X_1, \ldots, X_m) = X_{(\lfloor (1-\alpha)m \rfloor + 1)}$$

(c) The Value at Risk is elicitable. Therefore, the two estimators T_1 and T_2 can be compared using the strictly consistent scoring function

$$S_\alpha^q(y, x) = \begin{cases} (1-\alpha) \cdot |y - x|; & x \leq y, \\ \alpha \cdot |y - x| \quad\quad ; & x > y. \end{cases}$$

Suppose we are given a time series of n observations and determine the estimators for the next period using the observations of the latest m periods. Then, we prefer the estimator with the lowest score

$$S_i := \sum_{k=1}^{n-m-1} S(T_i[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}], x_{k+m+1}), \; i = 1, 2.$$

Question 3. Extreme Value Theory (EVT) and Risk Measures.

(a) First you choose a high threshold u, for instance the 95% quantile of the data. For $x > u$ it holds that $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F_u}(x - u)$, where F_u represents the excess distribution of F with respect to the threshold u. Next one models F_u by a GPD and one fits ξ and β to the observed threshold exceedances (eg via maximum likelihood); this leads to the estimates $\hat{\xi}$ and $\hat{\beta}$ and via the POT approach to

an estimate for the tail of the losses. For the given data the mean excess plot is growing more or less linearly with a positive but finite slope. As the excess function of the GPD (and hence the asymptotic slope of the mean excess plot given sufficient data) has a slope of $\frac{\xi}{1-\xi}$, the mean excess plot clearly points to the case $0 < \xi < 1$.

(b) (i) It holds that

$$\overline{F}(x) = \frac{b^\alpha}{(b+x)^\alpha} = x^{-\alpha}\frac{b^\alpha}{b/x^\alpha + 1},$$

and for $x \to \infty$ this converges to $x^{-\alpha}b^\alpha$.

(ii) Since the survival function of the Pareto-distribution decays polynomially with parameter $\xi = \frac{1}{\alpha}$ (see i), it holds asymptotically that

$$\lim_{\alpha\to 1}\frac{\mathrm{ES}_\alpha(X)}{\mathrm{VaR}_X(\alpha)} = \frac{1}{1-\xi} = \frac{\alpha}{\alpha-1}.$$

Hence we get for $\alpha = 11$, that for α large, $\mathrm{ES}_\alpha(X) \approx 1.1\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, that is VaR and ES are nearly identical. For $\alpha = 1.1$ we get $\mathrm{ES}_\alpha(X) \approx 11\,\mathrm{VaR}_\alpha(X)$, so that there is a substantial difference between the two risk measures. In general terms, the difference between VaR and ES is larger for larger values of ξ (heavier tail) or equivalently for smaller values of $\alpha = 1/\xi$. It follows that in particular for heavy-tailed risks (ξ close to 1), VaR underestimates tail risk. On the other hand, for very heavy tailed risks ξ might be difficult to estimate, so that estimates of ES can be subject to high model and parameter risk.

Question 4. Risk Measures and Capital Allocation.

(a) RORAC compatibility implies that the RORAC of the overall portfolio increases if one increases the weight of a subunit L_i, whose RORAC $-E(L_i)/\mathrm{AC}_i$ exceeds the RORAC of the entire company. In this sense the Euler principle gives appropriate signals for investment and portfolio decisions.

The existence of a diversification benefit is particularly relevant for subadditive risk measures where $\varrho(L) \le \sum_{i=1}^d \varrho(L_i)$. The diversification benefit ensures that all business units profit from the subadditivity ($\mathrm{AC}_i \le \varrho(L_i)$); otherwise there would be (theoretical) incentives for subunits to leave the company.

(b) As $(L_1, \ldots, L_d) \sim N(0, \Sigma)$ we get that

$$L(\boldsymbol{\lambda}) = \sum_{i=1}^d \lambda_i L_i \sim N(0, \sigma^2(\boldsymbol{\lambda}))$$

with $\sigma^2(\boldsymbol{\lambda}) = \boldsymbol{\lambda}'\Sigma\boldsymbol{\lambda}$. Since ϱ is positively homogeneous, it follows that

$$\mathrm{ES}_\alpha(L(\boldsymbol{\lambda})) = \sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}\varrho(X)\,.$$

Hence we get for the Euler principle

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_i} r_{\mathrm{ES}_\alpha}(\boldsymbol{\lambda})_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{\partial}{\partial\lambda_i}\sqrt{\sigma^2(\boldsymbol{\lambda})}_{|\boldsymbol{\lambda}=\mathbf{1}} = \varrho(X)\frac{(\Sigma\mathbf{1})_i}{\mathrm{SD}(L)} = \varrho(X)\frac{\mathrm{cov}(L_i, L)}{\mathrm{SD}(L)}.$$

Question 5. Copulas and Credit Risk

(a) One might use the following algorithm

Step 1: Construct normally distributed x_1, x_2: Let $x_1 = z_1$, $x_2 = (\rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2}z_2)$, where z_1, z_2 are drawn from $\mathcal{N}(0,1)$.
Step 2: Construct $(u_1, u_2) \sim C^{\mathrm{Ga}}_{\rho,}$: Let $(u_1, u_2) = (\phi(x_1), \phi(x_2))$.
Step 3: The quantile function of the exponential distribution with parameter λ is given by $u \mapsto -\ln(1-u)/\lambda$. According to part 2 of Sklar's theorem,

$$(\tau_1, \tau_2) = \big(-\ln(1-u_1)/\lambda_1, -\ln(1-u_2)/\lambda_2\big)$$

are the desired realisations.

(b) i) An increase in ρ leads to a stronger dependence. The event $\{\tau_1 \le T\} \cap \{\tau_2 \le T\}$ means that τ_1 and τ_2 (and hence u_1 and u_2) assume very small values; the probability for this event increases for larger ρ. The probability $P(\tau_1 \le T)$ depends only on the marginal distribution of τ_1 so that it is independent of the copula parameter ρ.

ii) For $\rho = 1$ we have comonotonicity . It holds, using Sklar,

$$P\big((\tau_1 \le T) \cap (\tau_2 \le T)\big) = \min(1 - e^{-\lambda_1 T}, 1 - e^{-\lambda_2 T}) = 1 - e^{-\lambda T}\,.$$

Question 6. Lapse Option and Interest Rate Risk in Life Insurance

(a) (i) The option to call the bond is exercised if and only if $(1+r_G)^{-1} > P(1,2)$ holds at time 1. In this case the investor receives the amount $(1+r_G)^{-1}$ at time 1 and buys a zero bond with duration 1. Thus, the resulting payment at time 1 is given by

$$c_1 = \big((1+r_G)^{-1} - P(1,2)\big) \cdot 1_{\{(1+r_G)^{-1} > P(1,2)\}}.$$

At time 2 the investor receives the amount 1, either from the payment of the original bond or in the case of surrender from the payment of the bond purchased at time 1. Therefore, we have $c_2 = 1$.

While the investment in the zero bond with maturity 2 gives rise to the annual yield r_G the option to call the bond allows to benefit from rising interest rates in the market by reinvesting at time 1. The condition $P(0,2)\cdot(1+r_G) = (1+r_G)^{-1} > P(1,2)$ says that in the period $[1,2]$, the interest rate of the market turns out to be higher than r_G.

(ii) We have $K = P(0,2)(1+r_G) = (1+r_G)^{-1}$. The cash-flow of the callable bond consists of the payments $c_1 = K \cdot 1_{\{K>P(1,2)\}}$ and $c_2 = 1_{\{K\leq P(1,2)\}}$.

When interest rates are rising in the market then the surrender option permits to ensure the payment of 1 at time 2 by buying a zero bond with duration 1 at time 1 fpr the lower price $P(1,2) < K$ and to earn $K - P(1,2) > 0$ at time 1. This motivates the following choice of the replicating portfolio.

At time 0, buy a zero bond with maturity 2 and a put option with maturity 1 and strike K on the zero bond with maturity 1. The value of this portfolio is given by

$$P(0,2) + \mathbb{E}_Q\left((K - P(1,2)^+ \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).$$

We show that the portfolio is replicating the cash-flow.

- Case 1: $K > P(1,2)$. At time 1, exercise the put option and sell the zero bond with remaining duration of 1 for the price K.
- Case 2: $K \leq P(1,2)$. The put option is out of the money. The zero bond pays the amount 1 at time 2.

Therefore, the value V of the cash-flow (c_1, c_2) at time 0 is indeed equal to the value of the replicating portfolio.

Alternative. The surrender option allows to benefit from rising interest rates in the market. This feature is captured by a payer-swaption.

At time 0 buy a zero bond with maturity 2 and a payer-swaption with nominal K, fixed leg r_G and a single payment date 2. I.e., at time 2 the payer-swation pays $(L(1,2) - r_G)^+$. The value of the portfolio is given by

$$P(0,2) + K \cdot \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds) \cdot (L(1,2) - r_G)^+ \cdot P(1,2)\right).$$

We show that the portfolio is replicating the cash-flow.

- Case 1: $K > P(1,2)$. In this case we have $(1+r_G)^{-1} > (1+L(1,2)^{-1}$, thus $r_G < L(1,2)$. At time 1 sell $\frac{K}{P(1,2)}$ shares of the zero bond with

duration 1 (short selling) and exercise the swaption. Thus, the amount K is paid at time 1 and the amount

$$1-\frac{K}{P(1,2)}+K\cdot(L(1,2)-r_G)=1-K(1+L(1,2))+K(L(1,2)+1-K^{-1})=0$$

is paid at time 2.

- Case 2: $K \le P(1,2)$. Then, we have $(1+r_G)^{-1} \le (1+L(1,2)^{-1}$, thus $r_G \ge L(1,2)$. The swaption is out of the money. The zero bond pays 1 at time 2.

Therefore, the value V of the cash-flow (c_1, c_2) at time 0 is indeed equal to the value of the replicating portfolio.

Remark. The two replicating portfolios have indeed the same value as is shown below. Note that only one replicating strategy is required in the exam question.

$$\begin{aligned}
&K\cdot\mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(L(1,2)-r_G)^+\cdot P(1,2)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K\cdot L(1,2)+K-1)^+\cdot P(1,2)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K\cdot(1+L(1,2))\cdot P(1,2)-P(1,2))^+\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot(K-P(1,2))^+\right)
\end{aligned}$$

(b) (i) By conditioning on $\mathcal{F}_1$ we obtain

$$\begin{aligned}
&\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(\mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\mid\mathcal{F}_1\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\cdot\mathbb{E}_Q\left(\exp(-\int_1^2 r(s)\,ds)\mid\mathcal{F}_1\right)\right)\\
&= \mathbb{E}_Q\left(P(1,2)\cdot 1_{\{K\le P(1,2)\}}\cdot\exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).
\end{aligned}$$

(ii) Since insurance risk and financial risk are assumed to be independent the

value V of the insurance benefits is given by

$$\begin{aligned}
V &= {}_2p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left(1_{\{K\le P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^2 r(s)\,ds)\right) \\
&\quad + {}_1p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left(K \cdot 1_{\{K>P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&\overset{(i)}{=} {}_2p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K\le P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&\quad + {}_1p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left(K \cdot 1_{\{K>P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&= {}_2p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&\quad + {}_1p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left((K-P(1,2)) \cdot 1_{\{K>P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&\quad + ({}_1p_x - {}_2p_x) \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K>P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&= {}_2p_x \cdot P(0,2) + {}_1p_x \cdot \mathbb{E}_Q\left((K-P(1,2))^+ \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right) \\
&\quad + ({}_1p_x - {}_2p_x) \cdot \mathbb{E}_Q\left(P(1,2) \cdot 1_{\{K>P(1,2)\}} \cdot \exp(-\int_0^1 r(s)\,ds)\right).
\end{aligned}$$

(c) The third summand under b) ii) takes into account that in the case that the insured person dies in the second year an endowment benefit can only arise through the exercise of the surrender option at time 1.

The value of the surrender option depends depends on the combined effects of insurance and financial risk. If the interest rate in period $[1,2]$ is greater than r_G, the probability of a payment is equal to ${}_1p_x$. Otherwise, probability of a payment is equal to ${}_2p_x$ and thus equal to the probability that the insured sum is paid by a pure endowment policy without surrender option. The amount of the additional payment at time 1 depends on the level of interest rates.

Question 7. Counterparty Risk.

(a) Counterparty risk is the risk that one of the contracting parties such as S defaults prior to maturity; if the contract has a positive value for B at τ_S, B suffers a loss. Approaches for managing counterparty risk include collateralization; netting; hedging with CDS contracts (provide a brief explanation,see slides).

(b) (i) It holds that

$$\text{CVA} = \delta_S E^Q\big(I_{\{\tau_S<T\}} e^{-r\tau} V_\tau^+\big) = \delta_S \int_0^T e^{-rt} E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) f_S(t) dt$$

Using the independence assumption gives $E^Q(V_t^+ \mid \tau_S = t) = E^Q(V_t^+)$ and hence the claim.

(ii) We get

$$\begin{aligned}\text{CVA}^{\text{indep}} &= \delta_S \int_0^T e^{-rt} 100 \gamma_S e^{-\gamma_S t}\, dt \\ &= 100\delta_S\gamma_S\Big[-\frac{1}{r+\gamma_S} e^{-(r+\gamma_S)t}\Big]_0^T \\ &= \frac{100\delta_S\gamma_S}{r+\gamma_S}\Big(1 - e^{-(r+\gamma_S)T}\Big)\end{aligned}$$

The CVA is a valuation adjustment and therefore a risk neutral quantity; hence γ_S can be calibrated to market prices such as CDS spreads.

(iii) The independence assumption is problematic. If S is a big reinsurer one would expect that $E(V_t^+ \mid \tau_S = t) > E(V_t^+)$: a default of S could be caused by a major catastrophic event, that affects the payoff of the insurance contract, and a default of S reduces the supply of reinsurance, leading to an increase in the premia for reinsurance contracts (other scenarios are possible).

Question 8. Portfolio Credit Risk.

(a) Dependence arises in particular due to the fact that the default probability of different consumers is driven largely by the economic environment (in particular the development of the rate of unemployment). This is modelled by the random variable ψ which drives the default probabilities of all credits.

(b) It holds that $\bar{p}_i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\varphi(x)\, dx$, for φ the density of the standard normal distribution. The probability for exactly one default computes to

$$\sum_{i=1}^m \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x) \prod_{j=1, j\neq i}^m (1 - \phi(\mu_j + \sigma x))\, \varphi(x)\, dx$$

(c) Given $Q = q$, the default indicators Y_i, $1 \le i \le m$, are independent with mean q; according to the law of large numbers it holds that, given $Q = q$,

$$\lim_{m\to\infty} \frac{L^{(m)}}{m} = eq,$$

oder $L^{(m)} \approx meQ$. This leads to the formula. Using (2) we get that

$$\mathrm{VaR}_\alpha(L) \approx me\,\mathrm{VaR}_\alpha(Q) = \mathrm{VaR}_\alpha(Q)\phi(\mu + \sigma\phi^{-1}\alpha);$$

for $\alpha > 0.5$, one has $\phi^{-1}(\alpha) > 0$ and $\mathrm{VaR}_\alpha(L)$ is increasing in σ.

Question 9. Interest Rate Risk and Interest Rate Risk Management.

(a) evolution of the value of the portfolio

- under the real world measure $\mathbb{P}$:

$$\begin{aligned} A(0) &= P \\ dA(t) &= A(t)\cdot(\beta r(t) + (1-\beta)\mu)\,dt + (1-\beta)\sigma_S\,dW_S(t)) \end{aligned}$$

- under the risk neutral measure $\mathbb{Q}$:

$$\begin{aligned} A(0) &= P \\ dA(t) &= A(t)\cdot(r(t)\,dt + (1-\beta)\sigma_S\,d\tilde{W}_S(t)) \end{aligned}$$

(b) At time 0, the value of the pay-off profile due at time T is the sum of the value of guaranteed minimal payment $G(T)$ falling due at time T and of the part γ of the value of a call option on A with strike $G(T)$. At time 0, it must be equal to the initial investment P:

$$P = G(T)\cdot P(0,T) + \gamma\cdot C_A(0, G(T), T),$$

where $P(0,T)$ and $C_A(0,G(T),T)$ can be determined using the hint.

It follows that fair terminal participation rate is given by the following function of the model parameters (especially the mixture parameter β of the strategic asset allocation):

$$\gamma = \frac{P - G(T)\cdot P(0,T)}{P\cdot\Phi(d_1(0,G(T),T)) - G(T)\cdot P(0,T)\cdot\Phi(d_2(0,G(T),T))}.$$

(c) It holds that

$$dA(t) = A(t)\cdot(\beta r(t) + (1-\beta)\mu)\,dt + (1-\beta)\sigma_S\,dW_S(t)).$$

Since $W_S(t)$ and in the Vasicek model, $r(t)$ and $\int_0^t r(s)\,ds$ are normally distributed, so ist $\ln(A(t))$. Consequently, $A(t)$ is lognormally distributed.

(d) With the parameters μ_T and σ_T^2 of the lognormal distribution $A(T)$ we obtain the Value at Risk

$$\begin{aligned} & \text{VaR}_\alpha(G(T)-A(T)) \\ = \;& G(T)+\text{VaR}_\alpha[-\exp(\ln(A(T)))] \\ = \;& G(T)-\exp\left(\mu_T+\sigma_T\cdot\Phi^{-1}(1-\alpha)\right). \end{aligned}$$

Therefore, the required risk capital is given by

$$RK=\left(G(T)-\exp\left(\mu_T+\sigma_T\cdot\Phi^{-1}(1-\alpha)\right)\right)\cdot P(0,1),$$

where $P(0,1)$ denotes the price of the zero bond with maturity 1 representing the market discount factor.

The highest cost of capital rate k that the asset management company could afford to pay is characterized through the requirement that the cost of capital be equal to the value of the part of the surplus belonging to the asset management company. We obtain

$$k=\frac{(1-\gamma)\cdot C_A(0,G(T),T)}{RK}.$$

(e) Since the asset allocation strategy relies on continuous rebalancing of the money-market account and the share index, a receiver swap with a fixed nominal amount cannot eliminate interest rate risk completely.