CERA
Certified Enterprise Risk Actuary

DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Schriftliche Prüfung im CERA-Modul A

Quantitative Methoden des ERM

gemäß Prüfungsordnung 3.0
der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
zum Erwerb der Zusatzqualifikation CERA

am 23. Mai 2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 180 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 90 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 9 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.
- Bitte vermeiden Sie bei der Lösungserstellung die nicht zusammenhängende Streuung der Lösungen zu den einzelnen Aufgabenteilen.
- Aus Gründen der besseren Lesbarkeit wird auf die gleichzeitige Verwendung der Sprachformen männlich, weiblich und divers (m/w/d) verzichtet.

Mitglieder der Prüfungskommission:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Aufgabe 1. Risikomaße und Parameterrisiko. *[30 Punkte]*

Der zufällige Parameter Θ sei exponentialverteilt mit Parameter $\beta > 0$, d.h. habe die Dichte $\pi(\theta) = \beta \cdot \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta)$. Gegeben den Wert θ von Θ, habe die Schadengröße X die Dichte

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{2\sqrt{x}} \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(x),$$

also die Verteilungsfunktion $F(x|\theta) = 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)$, $x \geq 0$.

(a) *[8 Punkte]* Sei $\alpha \in (0,1)$. Bestimmen Sie die Risikomaße $VaR_\alpha(X|\Theta = \theta)$ und $ES_\alpha(X|\Theta = \theta)$ der bedingten Verteilung von X, gegeben den Parameterwert θ.

Hinweis. $\int (\ln(z))^2\, dz = z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z$

(b) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung $x_1 \in \mathbb{R}^+$ von X, sowie die Randdichte von X.

Hinweis. Die Gamma-Verteilung mit den Parametern $a, b > 0$ hat die Dichte

$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \theta^{a-1} \cdot \exp(-b\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta),$$

und es gilt $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

(c) *[14 Punkte]* Aus dem korrekten Ergebnis von Teil b) ergibt sich iterativ die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung von X, gegeben die Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$:

$$F(x \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}} \right)^{1+n}, \quad x \geq 0.$$

Die Vorhersageverteilung hat den Erwartungswert $\mathbb{E}(X|x_1, \ldots, x_n) = \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$.

(i) *[2 Punkte]* Verifizieren Sie, dass der Value at Risk $VaR_\alpha^{(n)}$ der Vorhersageverteilung von $X \mid x_1, x_2, \ldots, x_n$ zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ gegeben ist durch

$$VaR_\alpha(X \mid x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right)^2.$$

(ii) *[6 Punkte]* Quantifizieren Sie das Parameterrisiko, das bei der Schätzung des Value at Risk unter Verwendung des Maximum-Likelihood-Schätzers auf Basis der Beobachtungen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ entsteht.

(iii) *[6 Punkte]* Die Analyse des asymptotischen Verhaltens für $n \to \infty$ führt auf folgende Ergebnisse:

- Die Varianz der a posteriori Verteilung von Θ, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, konvergiert gegen 0.
- Der Erwartungswert der a posteriori Verteilung von Θ, gegeben $x_1, \ldots, x_n$, konvergiert gegen $\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.
- Es gilt $\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha^{(n)} = \left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1-\alpha)\right)^2$.

Erklären Sie die asymptotischen Resultate. Überlegen Sie sich insbesondere dazu, welches Risikomaß welcher Größe der Grenzwert

$$\left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1-\alpha)\right)^2$$

darstellt.

Aufgabe 2. Risikomaße - Bestimmung und Backtesting. *[30 Punkte]*

Die Schadengröße X sei exponentialverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, d.h. mit der Verteilungsfunktion

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0.$$

Hinweis.

- $\mathrm{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
- Stammfunktion von $\ln(x)$ ist $x\ln(x) - x$.

(a) *[5 Punkte]* Berechnen Sie die Risikomaße $\mathrm{VaR}_\alpha(X)$ und $\mathrm{ES}_\alpha(X)$, $\alpha \in (0.5, 1)$.

(b) *[8 Punkte]* Zeigen Sie, dass das Expektil $e_\alpha(X)$, $\alpha \in (0.5, 1)$, Lösung der folgenden Gleichung ist:

$$(\lambda y - 1) \cdot \exp(\lambda y - 1) = \frac{2\alpha - 1}{(1-\alpha)\exp(1)}.$$

(c) *[2 Punkte]* Die Lambertsche Funktion W erfüllt die Beziehung $W(z) \cdot \exp(W(z)) = z$, $z > 0$. Damit liefert das Ergebnis aus b) die Darstellung

$$e_\alpha(X) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + W\left(\frac{2\alpha - 1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right).$$

Geben Sie den Momentenschätzer T_1 für $e_\alpha(X)$ auf Grundlage der Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ an.

(d) *[6 Punkte]* Die Funktion

$$G(y) := 1 + \frac{\exp(-\lambda y)}{1 - \lambda y - 2\exp(-\lambda y)}, \quad y \geq 0,$$

ist eine invertierbare Verteilungsfunktion, und es gilt $G(e_\alpha(X)) = \alpha$. Interpretieren Sie diese Aussage und geben Sie auf Basis Ihrer Interpretation einen weiteren Schätzer T_2 für $e_\alpha(X)$ auf Grundlage der Beobachtungen $x_1, \ldots, x_n$ an.

(e) *[9 Punkte]* Beschreiben Sie ein Verfahren, wie die beiden Schätzverfahren aus c) und d) im Backtesting mit Hilfe einer Scoring-Funktion miteinander verglichen werden könnten.

Aufgabe 3. Extremwerttheorie (EVT). *[20 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Nennen Sie zwei Beispiele von high severity/low frequency events im aktuariellen Risikomanagement. Diskutieren Sie kurz die Probleme beim Umgang mit derartigen Ereignissen. Warum kann EVT bei der Messung der mit high severity/low frequency events verbundenen Risiken hilfreich sein?

(b) *[5 Punkte]* Erläutern Sie die peaks over threshold (POT) Methode in der Extremwerttheorie und die Grundidee des zugehörigen tail-Schätzers. Zur Erinnerung: der POT tail Schätzer ist durch den folgenden Ausdruck gegeben

$$\widehat{\bar{F}}(x) = \frac{N_u}{n}\left(1 + \widehat{\xi}\,\frac{x-u}{\widehat{\beta}}\right)^{-1/\widehat{\xi}}, \quad x > u. \tag{1}$$

Hier bezeichnet u die bei der Anwendung des Schätzers verwendete Schranke und N_u die Anzahl der Beobachtungen, die die Schranke u überschreiten.

(c) *[5 Punkte]* Nehmen Sie an, dass die POT Methode auf Schadendaten angewendet wird, die einer Pareto Verteilung mit Überlebensfunktion $\bar{F}(x) = (K/x)^{\alpha}$, $x > K$, mit Parametern $K, \alpha > 0$ genügt. Welche Werte würden Sie für den Schätzwert $\widehat{\xi}$ erwarten, vorausgesetzt Sie verfügen über eine ausreichend große Anzahl an Beobachtungen? Was würde für normalverteilte Schadendaten passieren? Geben Sie eine kurze Begründung für Ihre Antwort.

(d) *[5 Punkte]* Nehmen Sie an, dass der tail einer unbekannten Verlustverteilung durch den tail Schätzer (1) modelliert wird. Berechnen Sie einen Schätzer für VaR_α unter der Annahme, dass $\alpha > 1 - N_u/N$.

Aufgabe 4. Risikoaggregation und copulas. *[30 Punkte]*

Betrachten Sie ein Versicherungsunternehmen mit d Geschäftsbereichen und zugehörigem loss $L_1, \ldots, L_d$. Das Risikokapital der einzelnen Geschäftsbereiche werde mit $\mathrm{EC}_1, \ldots, \mathrm{EC}_d$ bezeichnet.

(a) *[9 Punkte]* Erläutern Sie drei in der Praxis gebräuchliche Verfahren zur Bestimmung des Gesamtrisikokapitals EC und diskutieren Sie Vor- und Nachteile.

(b) *[15 Punkte]* Der Einfachheit halber betrachten wir im Folgenden nur noch $d = 2$ Geschäftsbereiche. Es sei bekannt, dass $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ und dass L_2 log-normal verteilt ist mit Parameter μ_2, σ_2^2, d.h. $\ln(L_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. Zur Risikoaggregation soll der copula Ansatz verwendet werden.

(i) *[3 Punkte]* Für die copula muss das quantitative Risikomanagement zwischen einem Meta Gauss Modell (basierend auf der Gauss copula C_ρ^{Ga}) und einem Meta t Modell (basierend auf $C_{\nu,\rho}^{\mathrm{t}}$) wählen. Welche Modellklasse ist (bei gleichem ρ) die konservativere Wahl im Hinblick auf die Modellierung von tail Risiken (Antwort mit kurzer Begründung)?

(ii) *[3 Punkte]* Geben Sie für fixe Parameter ρ und ν die Verteilungsfunktion $F_{\mathbf{L}}$ von $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ im meta t Modell an.

(iii) *[9 Punkte]* Sie haben einen Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der unabhängige Realisationen z_1, z_2 einer eindimensionalen Standardnormalverteilung generiert und Sie können unabhängig von z_1 und z_2 eine Realisierung v einer gemäß χ_ν^2 verteilte Zufallsvariable V simulieren. Entwickeln Sie einen Algorithmus, der eine Realisation $(L_1, L_2)'$ generiert, die gemäß $F_{\mathbf{L}}$ verteilt ist.

(c) *[6 Punkte]* Sie haben die folgenden 5 Beobachtungen von L_1 und L_2.

data point	1	2	3	4	5
L_1	-1.05	-0.84	0.20	-0.79	-0.26
L_2	0.26	0.18	0.31	0.34	0.25

(i) *[4 Punkte]* Berechnen Sie Kendalls τ und einen Schätzer für den Korrelationsparameter ρ von $C_{\nu,\rho}^{\mathrm{t}}$.

(ii) *[2 Punkte]* Wie könnte der Parameter ν geschätzt werden?

Aufgabe 5. Kreditrisiko im Rahmen des Merton Modells. *[20 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Erläutern Sie die Modellierung von Ausfällen im Merton Modell und erklären Sie die Verbindung zwischen Firmenanleihen und Optionen auf die Aktiva der Firma.

(b) *[10 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Ausfallwahrscheinlichkeit einer Firma im Merton Modell gegeben ist durch

$$\Phi\left(\frac{\ln\frac{F}{V_0}-(\mu_V-\frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right).$$

Hierbei bezeichnet V_0 den heutigen Wert der Aktiva, F den Nominalwert des Fremdkapitals, μ_V und σ_V den Drift und die Volatilität der Aktiva und F ist der Nominalwert des Fremdkapitals.

(c) *[5 Punkte]* Diskutieren Sie kurz Stärken und Schwächen des Merton Modells. Gehen Sie dabei insbesondere auf Eigenschaften von credit spreads im Rahmen des Modells ein.

Aufgabe 6. Kredit- und Gegenparteirisiko. *[20 Punkte]*

Betrachten Sie einen Erstversicherer, der mit m ausfallbehafteten Rückversicherern $R^1, \dots, R^m$ Rückversicherungsverträge abgeschlossen hat; mit Ausfallsindikatoren $Y^1, \dots, Y^m$. Falls Rückversicherer i ausfällt ($Y^i = 1$), erleidet das VU einen Verlust in Höhe von e^i, wobei die Zufallsvariable e^i das exposure gegenüber R^i darstellt.

(a) *[5 Punkte]* Zur Absicherung dieses Risiko könnte der Erstversicherer CDS Kontrakte einsetzen. Diskutieren Sie Vorteile und Probleme einer derartigen Absicherungsstrategie.

(b) *[15 Punkte]* Bei der Berechnung des ökonomischen Kapitals für das Gegenparteirisiko verwendet das VU ein probit-normal Bernoulli mixture model, um die gemeinsame Verteilung der Ausfälle von $R^1, \dots, R^m$ zu modellieren. Es gelte für die bedingte Ausfallswahrscheinlichkeit

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ für } \psi \sim N(0,1), \quad 1 \le i \le m\,. \tag{2}$$

(i) *[5 Punkte]* Erläutern Sie, warum man Abhängigkeit zwischen den Ausfällen von $R^1, \dots, R^m$ erwarten sollte, und geben Sie eine intuitive Motivation für das Modell (2) an. Warum ist Abhängigkeit zwischen Ausfallsereignissen wichtig im Risikomanagement für Kreditportfolios?

(ii) *[4 Punkte]* Stellen Sie die Ausfallwahrscheinlichkeit $\bar{p}^i = P(Y^i = 1)$ und die Kovarianz $\operatorname{cov}(Y^i, Y^j)$ als Integral bezüglich der Verteilung von ψ dar.

(iii) *[6 Punkte]* Entwickeln Sie einen Algorithmus zur Simulation der Verteilung der Zufallsvariable $L = \sum_{i=1}^m e^i Y^i$, die den Gesamtverlust durch Gegenparteirisiko darstellt. Nehmen Sie zur Vereinfachung an, dass $e^1, \dots, e^m$ deterministisch sind (deterministisches exposure). Geben Sie in einem ersten Schritt einen Algorithmus der Simulation der Ausfallindikatoren an. Dabei steht Ihnen ein Zufallszahlengenerator zur Verfügung, der sowohl normalverteilte als auch Bernoulli-verteilte Zufallsgrößen simulieren kann.

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsstrukturmodelle. *[30 Punkte]*

(a) *[10 Punkte]* Auf welche Weise kann ein Receiver Swap mit Nominalwert 1 und Fixingterminen 1, 2, 3 (d.h. Zahlungszeitpunkten 2 und 3) zum Zeitpunkt 0 mit Hilfe von Zerobonds repliziert werden? Geben Sie eine geeignete Handelsstrategie mit dem Replikationsportfolio an.

(b) *[8 Punkte]* Nehmen Sie an, dass $P(t,S) > P(t,T) \cdot \frac{1}{1+(S-T)\cdot F(0,T,S)}$ für $t \le T \le S$ gilt, wobei $P(t,T)$ bzw. $F(0,T,S)$ den Preis des Zerobonds mit Fälligkeit T zur Zeit t bzw. die Forward-Rate für die künftige Periode $[T,S]$ zum Zeitpunkt 0 bezeichnen. Entwickeln Sie eine Arbitrage-Strategie.

(c) *[8 Punkte]* Sei $F(t,T,S)$ der einfache Terminzins (simply-compounded forward rate) zum Zeitpunkt t mit Ablauf $T \ge t$ und Fälligkeit $S > T$. Zeigen Sie

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le t \le T < S,$$

wobei $\mathbb{E}^S$ den Erwartungswert unter dem S-forward-Maß Q^S bezeichnet. Diskutieren Sie dieses Resultat im Spezialfall $t = T$.

(d) *[4 Punkte]* Erklären Sie die grundlegende Idee hinter der Black 76 Formel für ein Caplet. In welchem Modellrahmen kann diese Idee mathematisch sauber implementiert werden? Diskutieren Sie Stärken dieses Modellrahmens im Vergleich zur klassischen Black 76 Formel.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1. Risikomaße und Parameterrisiko.

(a) Die Verteilungsfunktion von X, gegeben den Parameterwert θ erhält man durch Integration der Dichte.

$$F(x|\theta) = \int_0^x \frac{\theta}{2\sqrt{y}} \exp\left(-\theta\sqrt{y}\right) dy = \exp\left(-\theta\sqrt{y}\right)\Big|_0^x = 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)$$

Auflösen der Gleichung $1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) = \alpha$ liefert den Value at Risk.

$$VaR_\alpha(X|\Theta = \theta) = \left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}\right)^2$$

Gemäß der Definition des Expected Shortfall erhalten wir

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X|\Theta = \theta) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(\frac{\ln(1-z)}{\theta}\right)^2 dz = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha} \left(\frac{\ln(z)}{\theta}\right)^2 dz \\ &= \frac{1}{\theta^2(1-\alpha)}\left(z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z\right)\Big|_0^{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\theta^2}\left((\ln(1-\alpha))^2 - 2\ln(1-\alpha) + 2\right). \end{aligned}$$

(b) Die a posteriori Dichte von Θ, gegeben die Beobachtung x_1, ergibt sich modulo konstanter Terme zu

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x_1) &\propto f(x_1|\theta)\cdot\pi(\theta) \\ &\propto \theta\exp\left(-\theta\sqrt{x_1}\right)\cdot\exp(-\beta\theta)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta) \\ &= \theta\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta). \end{aligned}$$

Dies ist bis auf eine Konstante die Dichte von Gamma$(2, \beta+\sqrt{x_1})$. Folglich gilt

$$\pi(\theta|x_1) = (\beta+\sqrt{x_1})^2\cdot\theta\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

Die Randdichte $m(x)$ von X erhalten wir als Quotient von gemeinsamer Dichte und a posteriori Dichte:

$$m(x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\theta|x)} = \frac{\beta}{2\sqrt{x}}\cdot(\beta+\sqrt{x})^{-2}.$$

(c) (i) Einsetzen liefert

$$\begin{aligned} F(VaR_\alpha^{(n)} \mid x,\ldots,x_n) &= 1 - \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i} + \frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\right)^{n+1} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

(ii) Nullsetzen der Ableitung der Dichte

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\theta^n}{2\prod_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right) \\ &= \frac{\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)}{2\prod_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\cdot\left(n\theta^{n-1}-\theta^n\cdot\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right) \end{aligned}$$

liefert den ML-Schätzer $\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}$.

Da die Vorhersageverteilung die Unsicherheit bezüglich des Parameters einbezieht, kann das Parameterrisiko durch die Differenz

$$\begin{aligned} &VaR_\alpha(X|x_1,\ldots,x_n)-VaR_\alpha(X|\Theta=\hat{\theta}) \\ &= \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}}-\beta-\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)^2-\left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\hat{\theta}}\right)^2 \\ &= \left(\beta+\frac{n}{\hat{\theta}}\right)^2\cdot\left((1-\alpha)^{-\frac{1}{n+1}}-1\right)^2-\left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\hat{\theta}}\right)^2 \end{aligned}$$

quantifiziert werden.

(iii) Der Grenzwert $VaR_\alpha^{(\infty)}:=\left(\frac{1}{\theta}\cdot\ln(1-\alpha)\right)^2$ ist der Value at Risk der Beobachtungsverteilung zum Niveau α unter der Voraussetzung, dass θ der richtige Parameterwert ist. Dies überprüft man leicht durch Einsetzen in die Verteilungsfunktion der Beobachtungsverteilung

$$F(x|\theta)=1-\exp(-\theta\sqrt{x}).$$

Mit jeder Beobachtung wächst die Information über den Parameter Θ an. Im Grenzübergang $n\to\infty$ besteht keine Parameterunsicherheit mehr. Die Varianz der a posteriori Verteilung verschwindet, so dass der Parameter gleich dem Grenzwert des Erwartungswertes der a posteriori Verteilung, d.h. $\Theta=\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$ ist. Daher konvergiert der Value at Risk der Vorhersageverteilung $VaR_\alpha^{(n)}$ gegen den Value at Risk $VaR_\alpha^{(\infty)}$ der Beobachtungsverteilung, gegeben $\theta=\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

Wir führen noch den Nachweis der angegebenen Resultate, der *nicht Bestandteil der Aufgabenstellung* ist.

Die Randverteilungsfunktion F von X ergibt sich durch Integration der Dichte m aus b):

$$F(x)=1-\left(\frac{\beta}{\beta+\sqrt{x}}\right).$$

Wie die Randverteilungsdichte durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a priori Dichte entsteht, so entsteht die Vorhersagedichte durch Mittelung der Beobachtungsdichte über die a posteriori Dichte:

$$\begin{aligned} m(x) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta)\,d\theta, \\ f(x|x_1) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta|x_1)\,d\theta. \end{aligned}$$

Daher erhalten wir die Verteilungsfunktion der Vorhersageverteilung, indem wir in der Randverteilungsfunktion die Parameter der a priori Verteilung durch diejenigen der a posteriori Verteilung ersetzen:

$$F(x|x_1) = 1 - \left(\frac{\beta + \sqrt{x_1}}{\beta + \sqrt{x_1} + \sqrt{x}}\right)^2.$$

Iterativ ergibt sich die Vorhersageverteilung auf Basis von n Beobachtungen

$$F(x|x_1,\dots,x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}}\right)^{n+1}.$$

Mit dem Gesetz der großen Zahl beobachten wir die Konvergenz der Erwartungswerte der a posteriori Verteilung

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\Theta|x_1,\dots,x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n}+1}{\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$$

und die Konvergenz der Varianzen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Var(\Theta|x_1,\dots,x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\left(\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{\left(\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} = \frac{0}{\left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Folglich konvergieren die a posteriori Verteilungen von $\Theta|x_1,\dots,x_n$ gegen das Dirac-Maß im Punkt $\theta = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

Für $n \to \infty$ konvergiert der Value at Risk der Vorhersageverteilung zum Niveau $\alpha \in (0,1)$ gegen

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha(X|x_1,\dots,x_n) &= \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{(1-\alpha)^{-\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}}\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2 \cdot (-\ln(1-\alpha))^2 \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\ln(1-\alpha)\right)^2.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. Risikomaße - Bestimmung und Backtesting.

(a) Der Value at Risk ergibt sich als Lösung der Gleichung

$$\alpha = F(\mathrm{VaR}_\alpha(X)) = 1 - \exp(-\lambda \mathrm{VaR}_\alpha(X)).$$

Wir erhalten $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}$.

Mit der Definition berechnen wir den Expected Shortfall

$$\begin{aligned}
\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \frac{-\ln(1-z)}{\lambda}\,dz = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha} \frac{-\ln(z)}{\lambda}\,dz \\
&= \frac{1}{\lambda(1-\alpha)}(z - z\ln(z))\Big|_0^{1-\alpha} \\
&= \frac{1-\ln(1-\alpha)}{\lambda}.
\end{aligned}$$

(b) Das Expektil ist definiert als Lösung der Gleichung

$$\alpha \mathrm{E}\left[(X-y)^+\right] = (1-\alpha)\cdot \mathrm{E}\left[(X-y)^-\right].$$

Unter Beachtung von $(X-y)^+ - (X-y)^- = X-y$ ergibt sich die äquivalente Gleichung

$$y - \mathrm{E}[X] = \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\cdot \mathrm{E}\left[(X-y)^+\right].$$

Gemäß Hinweis ist $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$, und wir berechnen

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[(X-y)^+\right] &= \int_y^\infty (x-y)\cdot\lambda\exp(-\lambda x)\,dx \\
&= \int_0^\infty x\cdot\lambda\exp(-\lambda(x+y))\,dx \\
&= \exp(-\lambda y)\cdot\mathrm{E}[X] \\
&= \frac{\exp(-\lambda y)}{\lambda}.
\end{aligned}$$

Einsetzen in die obige Gleichung liefert

$$y - \frac{1}{\lambda} = \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\cdot\frac{\exp(-\lambda y)}{\lambda}$$

und damit

$$(\lambda y - 1)\cdot\exp(\lambda y - 1) = \frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}.$$

(c) Der Momentenschätzer für den Erwartungswert ist das arithmetische Mittel der Beobachtungen. Einsetzen in die gegebene Darstellung liefert

$$T_1(X_1,\ldots,X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\cdot\left(1 + W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right).$$

(d) $G(e_\alpha(X)) = \alpha$ bedeutet, dass $e_\alpha(X)$ das α-Quantil der Verteilungsfunktion G ist.

Nun ist $F(x_1),\ldots,F(x_n)$ eine Stichprobe aus der Gleichverteilung auf $[0,1]$ und $G^{-1}(F(x_1)),\ldots,G^{-1}(F(x_n))$ eine Stichprobe aus der Verteilung mit der Verteilungsfunktion G. Der empirische Quantilschätzer ist der $\lfloor(1-\alpha)n\rfloor+1$-größte Wert aus dieser Stichprobe:

$$T_2(X_1,\ldots,X_n) = (G^{-1}\circ F)(X_{(\lfloor(1-\alpha)n\rfloor+1)})$$

Wir verifizieren noch die angegebene Beziehung außerhalb der Aufgabenstellung.

$$\begin{aligned}
G(e_\alpha(X)) &= \frac{1-\lambda e_\alpha(X)-\exp\left(-\lambda e_\alpha(X)\right)}{1-\lambda e_\alpha(X)-2\exp\left(-\lambda e_\alpha(X)\right)} \\
&= \frac{-W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)-\exp(-1)\cdot\exp\left(-W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right)}{-W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)-2\exp(-1)\cdot\exp\left(W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right)} \\
&= \frac{-W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\cdot\exp\left(W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right)-\exp(-1)}{-W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\cdot\exp\left(W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right)-2\exp(-1)} \\
&= \frac{-\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}-\frac{1}{\exp(1)}}{-\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}-2\frac{1}{\exp(1)}} \\
&= \frac{-2\alpha+1-1+\alpha}{-2\alpha+1-2+2\alpha}=\alpha.
\end{aligned}$$

(e) Das Expektil ist elizitierbar. Daher können die beiden Schätzverfahren anhand der streng konsistenten Scoring-Funktion

$$S_\alpha^q(y,x)=\begin{cases}(1-\alpha)\cdot(y-x)^2; & x\le y\\ \alpha\cdot(y-x)^2 \qquad ; & x>y\end{cases}$$

verglichen werden. Liegt eine Beobachtungszeitreihe der Länge n vor und werden die Schätzer für eine Periode auf Basis der m vorangegangenen Perioden ermittelt, so wird das Schätzverfahren mit dem kleinsten Score

$$S_i := \sum_{k=1}^{n-m-1} S(T_i[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}], x_{k+m+1}),\ i=1,2,$$

vorgezogen.

Aufgabe 3. EVT a) Beispiele für high frequency/low severity events in der Schadenversicherung: Versicherung gegen Naturkatastrophen oder gegen Terrorattacken; Risiken aufgrund von Rechtsstreitigkeiten im operational risk; (andere Beispiele sind möglich).

High frequency/low severity events sind aus verschiedenen Gründen schwer zu managen: zum einen hat man meist mit Datenknappheit zu tun (seltenes Auftreten von Großschäden impliziert wenige Beobachtungen); zum anderen weist die Schadensverteilung eines Portfolios mit high frequency/low severity Risiken eine sehr hohe Variabilität auf, so dass Diversifikation der Verluste nur im Zeitablauf d.h. über mehrere Bilanzperioden möglich ist. (In normalen Jahren werden die Prämieneinnahmen die Schäden übersteigen, in Katastrophenjahren sind die Schäden größer als die Prämien).

EVT kann einen Beitrag zur Schätzung der Ränder der Schadenshöhenverteilung und somit zum Umgang mit der Datenproblematik leisten.

b) Grundidee der POT Methode: Man wählt eine hohe Schranke u. Für $x > u$ gilt $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u)$, wobei F_u die excess distribution von F bezüglich u bezeichnet. Falls u nicht zu groß ist, kann $\bar{F}(u)$ durch die empirische Überlebensverteilung geschätzt werden; dies führt auf den Schätzer N_u/N. Die excess Verteilung wird durch eine GPD modelliert (basierend auf dem Grenzwertsatz von Pickands, Balkema und de Haan), $\hat{\xi}$ und $\hat{\beta}$ lassen sich durch Maximum Likelihood schätzen.

c) Im Pareto Fall sollte gelten, dass $\widehat{\xi} \approx 1/\alpha$, da die Pareto Verteilung einen power tail mit Abklingrate α hat; im Fall der Normalverteilung erwartet man $\widehat{\xi}$ nahe bei Null, da die Normalverteilung einen exponentiell schnell abfallenden tail hat.

d) Wir müssen die Gleichung $\widehat{\bar{F}}(x) = (1-\alpha)$ lösen; dies führt nach einigen elementaren Umformungen auf den Schätzer

$$\widehat{\mathrm{VaR}_\alpha} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{N_u/N}\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right);$$

Aufgabe 4. Risikoaggregation und copulas.

(a) Es bezeichne EC_i das Risikokapital von subunit i und EC das Gesamtkapital. Verschiedene Aggregationsmöglichkeiten (3 reichen):

- Simple summation, $\mathrm{EC} = \mathrm{EC}_1 + \cdots + \mathrm{EC}_d$ Vorteil: Einfach, konservativ falls EC_i mit subadditivem Risikomaß berechnet wird. Nachteil: nicht prinzipienbasiert (insbesondere keine Simulation der Verteilung des Gesamtverlusts möglich), keine Berücksichtigung von Diversifikation.
- Correlation adjusted summations $\mathrm{EC} = \left(\sum_{i=1}^d \sum_{j=1}^d \rho_{ij}\,\mathrm{EC}_i\,\mathrm{EC}_j\right)^{\frac{1}{2}}$, wobei ρ_{ij} oft als Korrelation zwischen L_i und L_j interpretiert wird. Vorteil: einfach, Diversifikation wird berücksichtigt. Nachteil: i.A. nicht prinzipienbasiert, die Korrelationen sind schwer zu bestimmen und sie müssen Konsistenzbedingungen erfüllen.
- Copula Methoden. Vorteil: Prinzipienbasiert. Nachteil: Modellrisiko bei Wahl der copula, schwer zu erklären.
- Structural Models (factor based) Vorteil: Prinzipienbasiert, aus ökonomischer Sicht natürlich. Nachteil: In der praktischen Anwendung sehr komplex.

(b) (i) Die t copula ist wegen der 'eingebauten' tail dependence konservativer.

(ii) Nach Sklar ist $F_{\mathbf{L}}(\ell_1, \ell_2) = C^{\mathrm{t}}_{\rho,\nu}\Big(\phi((\ell_1-\mu_1)/\sigma_1), \phi((\log \ell_2 - \mu_2)/\sigma_2)\Big)$.

(iii) Schritt 1: Konstruktion von t_ρ^ν verteilten Realisierungen x_1, x_2: Setze $w = \nu/\text{v}$ und $x_1 = \sqrt{w}z_1$, $x_2 = \sqrt{w}(\rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2}z_2)$.
Schritt 2: Konstruktion von $(u_1, u_2) \sim C^{\text{t}}_{\rho,\nu}$: Setze $(u_1, u_2) = (t_\nu^{-1}(x_1), t_\nu^{-1}(x_2))$.
Schritt 3: Die Quantilfunktion der Lognormalverteilung mit Parametern μ, σ^2 ist durch $u \mapsto = \exp(\sigma\phi^{-1}(u) + \mu)$ gegeben. Nach dem 2. Teil des Satzes von Sklar sind dann

$$(\ell_1, \ell_2) = \big(\mu_1 + \sigma_1\phi^{-1}(u_1), \exp\big(\mu_2 + \sigma_2\phi^{-1}(u_2)\big)\big)$$

die gewünschten Realisierungen.

(c) Man erhält für Kendalls tau, dass $\hat{\rho}_\tau = 0.2$ und somit $\hat{\rho} = \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\rho}_\tau) = 0.31$. ν kann dann mit MLE geschätzt werden.

Aufgabe 5. Kreditrisiko im Merton Modell

(a) In Merton's Modell tritt der Ausfall der betrachteten Firma im Zeitpunkt T ein, falls der Wert V_T der assets kleiner als der Nennwert F der Verbindlichkeiten ist. Man erhält für den Wert der Firmenanleihe bei Fälligkeit, dass

$$F_T = \min(V_T, F) = F - (F - V_T)^+.$$

Die Auszahlung des Fremdkapitals entspricht also dem Nennwert des Fremdkapitals verringert um den payoff einer Put Option auf die Aktiva V_T mit Ausübungspreis F.

(b) Im Merton Modell folgt V einer geometrischen Brownschen Bewegung mit Dynamik $dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t$, so dass

$$V_T = V_0 \exp\Big((\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T + \sigma_V W_T\Big).$$

Für die Ausfallswahrscheinlichkeit erhalten wir daher

$$\begin{aligned} P(V_T < F) = P(\ln V_T < \ln F) &= P\Big(\sigma_V W_T < \ln F - \ln V_0 - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T\Big) \\ &= P\Big(\frac{W_T}{\sqrt{T}} < \frac{\ln F - \ln V_0 - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\Big) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln\frac{F}{V_0} - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right), \end{aligned}$$

da $\frac{W_T}{\sqrt{T}} \sim N(0,1)$.

(c) Stärken des Merton Modells:

- Klare ökonomische Interpretation des Ausfalls,

- Einfach handhabbar, insbesondere explizite und intuitiv interpretierbare Formel für die Ausfallswahrscheinlichkeit;

Schwächen

- Die Annahme, dass ein Ausfall nur im Zeitpunkt T möglich ist, ist unrealistisch (ein Problem bei der Bewertung von Anleihen)
- Unrealistisch niedrige credit spreads für kleine time to maturity $T-t$

Aufgabe 6. Kreditrisiko und Gegenparteirisiko

(a) i) Vorteile: Die Auszahlung des CDS wird genau dann fällig, wenn Verluste durch Gegenparteirisiko eintreten; der Erstversicherer kann die Absicherungsstrategie unilateral einsetzen (ohne Mitwirkung des Rückversicherers).

ii) mögliche Probleme: Höhe des Verlustes durch Gegenparteirisiko (und damit Höhe der benötigten Absicherung) unbekannt; Basisrisiko; fehlende Liquidität am CDS Markt.

(b) (i) Abhängigkeit kann beispielsweise entstehen durch Eintreten eines Katastrophenereignisses, das von mehreren Rückversicherern abgedeckt wird, oder durch schlechte Entwicklung der Finanzmärkte (Auswirkung auf die asset-Seite der Bilanz). Bei großen Portfolien tribt die Abhängigkeit zwischen Ausfällen ganz wesentlich den tail der Verlustverteilung des Portfolios.

(ii) Es gilt $\bar{p}^i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i+\sigma x)\varphi(x)\,dx$, wobei φ die Dichte der Standard-Normalverteilung bezeichnet. Für die Kovarianz gilt

$$\operatorname{cov}(Y^i, Y^j) = E(Y^iY^j) - \bar{p}^i\bar{p}^j = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\phi(\mu_j + \sigma x)\varphi(x)\,dx - \bar{p}^i\bar{p}^j\,.$$

(iii) Zur Erzeugung einer Realisierung von $Y^1, \ldots, Y^m$ generiert man zunächst $\psi \sim N(0,1)$ und dann m unabhängige Bernoulli- Zufallsvariablen $Y^1, \ldots, Y^m$ mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p_i(\psi)$. Der zugehörige Verlust ergibt sich dann als $L = \sum_{i=1}^m e^i Y^i$. N mal unabhängiges Wiederholen ergibt dann eine Approximation der Verteilung von L.

Aufgabe 7. Zinsrisiko und Zinsstrukturmodelle.

(a) Sei K der feste Zinssatz. Zum Zeitpunkt $t = 0$ werden K Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit $T = 2$ und $1 + K$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit $T = 3$

gekauft sowie ein Zerobond mit Fälligkeit $T = 1$ verkauft. Der Preis des Replikationsportfolios beträgt

$$P = K \cdot P(0,2) + (1+K) \cdot P(0,3) - P(0,1),$$

wobei $P(t,T)$ den Preis des Zerobonds mit Fälligkeit T zum Zeitpunkt t bezeichnet.

Zum Zeitpunkt $t = 1$ werden $\frac{1}{P(1,2)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 2 verkauft, um eine Geldeinheit an den Inhaber des zur Zeit 1 fällig gewordenen Zerobonds auszuzahlen. Es verbleiben $K - \frac{1}{P(1,2)} = K - L(1,2) - 1$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 2.

Zum Zeitpunkt $t = 2$ zahlt der Receiver Swap den Betrag $K - L(1,2)$ aus. Um die verbleibende Position von -1 Geldeinheit auszugleichen, werden $\frac{1}{P(2,3)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 3 verkauft. Es verbleiben

$$1 + K - \frac{1}{P(2,3)} = K - L(2,3)$$

Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit 3, die zum Zeitpunkt 3 den Betrag $K - L(2,3)$ auszahlen.

(b) Zur Zeit $t = 0$ verkaufe $\frac{P(t,T)}{P(t,S)}$ Zerobonds mit Fälligkeit S und kaufe 1 Zerobond mit Fälligkeit T, so dass keine Zahlung fällig wird. Schließe darüber hinaus einen Receiver Swap mit Strike $K = F(t,T,S)$ und Nominal 1 kostenlos ab. Zur Zeit T wird die Zahlung 1 des fälligen Zerobonds in $\frac{1}{P(T,S)}$ Anteile des Zerobonds mit Fälligkeit S investiert. Zur Zeit S ist die resultierende Zahlung gegeben durch

$$\begin{aligned} &\frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(t,T)}{P(t,S)} + (S-T) \cdot F(t,T,S) - (S-T) \cdot L(T,S) \\ > \quad &\frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(t,T)}{P(t,S)} + \left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right) - \left(\frac{1}{P(T,S)} - 1\right) = 0. \end{aligned}$$

Dies bedeutet einen strikt positiven Gewinn ohne Verlustrisiko.

(c) Da Zerobonds handelbare Finanzinstrumente darstellen, trifft dies auch für das Instrument

$$F(t,T,S)P(t,S) = \frac{1}{S-T}(P(t,T) - P(t,S))$$

zu. Folglich ist sein diskontierter Preisprozess

$$\frac{F(t,T,S)P(t,S)}{P(t,S)} = F(t,T,S)$$

ein Martingal unter dem Forward-Maß Q^S. Daher gilt

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le t \le T < S.$$

Im Spezialfall $t = T$ nimmt diese Beziehung die Gestalt

$$\mathbb{E}^S(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le T < S,$$

an, da $F(T,T,S) = L(T,S)$ gilt. Dies zeigt, dass zur Zeit $u \le T$ die Forward- Rate $F(u,T,S)$ die verfügbare Marktinformation über den Kassazins in der zukünftigen Periode $[T,S]$ reflektiert.

(d) Die grundlegende Idee der Black 76 Formel für Caplets besteht darin, die Forward-Rate $F(u,T,S)$, $0 \le u \le T$, mit einer sotchastischen Differentialgleichung vom Black-Scholes Typ

$$dF(u,T,S) = \sigma \cdot F(u,T,S)dW(u), \quad 0 \le u \le T,$$

bezüglich einer Brownschen Bewegung W zu modellieren und die Black-Scholes Formel für Call-Optionen zu übertragen.

Dieser Ansatz wird mathematisch rigoros in der Theorie der LIBOR-Marktmodelle umgesetzt. Jene Modelle ermöglichen es, zeitabhängige und stochastische Volatilitäten abzubilden, und verbessern somit die Kalibrierung an Marktpreise von Zinsderivaten.

CERA
Certified Enterprise Risk Actuary

DAV
DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Written exam CERA module A

Quantitative Methods of ERM

in accordance with the examination regulations no. 3.0
of Deutschen Aktuarvereinigung e. V.
for the acquisition of the CERA qualification

23 May 2025

Please note:

- The use of a pocket calculator is permitted.
- The maximum score is 180 points. The examination is passed if the total score is at least 90 points.
- Please check the exam sheets for completeness. The exam has 9 pages.
- All answers shall be justified. For computational tasks it is required to provide the solution approach.
- Please enter your answers only in the designated sheets.

Examination board members:

Prof. Dr. R. Frey, Prof. Dr. J. Wolf

Question 1. Risk Measures and Parameter Risk. *[30 points]*

Suppose that the random parameter Θ follows the exponential distribution with parameter $\beta > 0$, i.e. has the density $\pi(\theta) = \beta \cdot \exp(-\beta\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta)$. Assume that, given the value θ of Θ, the loss variable X has the density

$$f(x|\theta) = \frac{\theta}{2\sqrt{x}} \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) \cdot 1_{(0,\infty)}(x)$$

and thus, the cumulative distribution function $F(x|\theta) = 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)$, $x \geq 0$.

(a) *[8 points]* Let $\alpha \in (0,1)$. Determine the risk measures Value at Risk $\text{VaR}_\alpha(X|\Theta = \theta)$ and Expected Shortfall $\text{ES}_\alpha(X|\Theta = \theta)$ of the conditional distribution of X, given the value θ of the parameter.

Hint. $\int (\ln(z))^2 \, dz = z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z$

(b) *[8 points]* Determine the posterior density of Θ, given the observation $x_1 \in \mathbb{R}^+$ of X as well as the marginal density of X.

Hint. The Gamma-distribution with parameters $a, b > 0$ has the density

$$\pi(\theta) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \cdot \theta^{a-1} \cdot \exp(-b\theta) \cdot 1_{(0,\infty)}(\theta)$$

and it holds that $\Gamma(1) = 1$, $\Gamma(a+1) = a\Gamma(a)$.

(c) *[14 points]* By iteration, the correct result from part b) gives rise to the following cumulative distribution function of X, given the observations $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}^+$:

$$F(x \mid x_1, x_2, \ldots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}} \right)^{1+n}, \quad x \geq 0.$$

The expected value of this predictive distribution is given by $\mathbb{E}(X|x_1, \ldots, x_n) = \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}$.

(i) *[2 points]* Verify that the Value at Risk $VaR_\alpha^{(n)}$ of the predictive distribution of $X \mid x_1, x_2, \ldots, x_n$ at the confidence level $\alpha \in (0,1)$, is given by

$$VaR_\alpha(X \mid x_1, \ldots, x_n) = \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} \right)^2.$$

(ii) *[6 points]* Quantify the parameter risk that materializes when the Value at Risk is estimated by using the maximum-likelihood estimator based on the observations $x_1, x_2, \ldots, x_n$.

(iii) *[6 points]* Analysing the asymptotic behaviour when $n \to \infty$ we observe the following results:

- The variance of the posterior distribution of Θ, given $x_1, \ldots, x_n$, converges to 0.
- The expected value of the posterior distribution of Θ, given $x_1, \ldots, x_n$, converges to $\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.
- It holds that $\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha^{(n)} = \left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1-\alpha)\right)^2$.

Explain these asymptotic results. To this end, reflect which risk measure of which variable takes the value of the limit

$$\left(\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})} \cdot \ln(1-\alpha)\right)^2.$$

Question 2. Risk Measures – Computation and Backtesting. *[30 points]*

Assume that the loss variable X is exponentially distributed with parameter $\lambda > 0$, i.e. its cumulative distribution function is given by

$$F(x) = 1 - \exp(-\lambda x), \quad x \geq 0.$$

Hint.

- $\mathbb{E}(X) = \frac{1}{\lambda}$
- $\int \ln(x)\, dx = x \ln(x) - x$

(a) *[5 points]* Determine the risk measures $VaR_\alpha(X)$ and $ES_\alpha(X)$, $\alpha \in (0.5, 1)$.

(b) *[8 points]* Show that the expectile $e_\alpha(X)$, $\alpha \in (0.5, 1)$, is the solution to the following equation:

$$(\lambda y - 1) \cdot \exp(\lambda y - 1) = \frac{2\alpha - 1}{(1-\alpha)\exp(1)}.$$

(c) *[2 points]* The Lambert W function satisfies the relation $W(z) \cdot \exp(W(z)) = z$, $z > 0$. Using this function, we obtain the following representation from the result from part b):

$$e_\alpha(X) = \frac{1}{\lambda}\left(1 + W\left(\frac{2\alpha - 1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right).$$

State the moment estimator T_1 for $e_\alpha(X)$ based on the observations $x_1, \ldots, x_n$.

(d) *[6 points]* The function

$$G(y) := 1 + \frac{\exp(-\lambda y)}{1 - \lambda y - 2\exp(-\lambda y)}, \quad y \geq 0,$$

is an invertible cumulative distribution function, and it holds that $G(e_\alpha(X)) = \alpha$. Interpret this statement. Following your interpretation, propose another estimator T_2 for $e_\alpha(X)$ based on the observations $x_1, \ldots, x_n$.

(e) *[9 points]* Describe how to compare the two estimators from parts c) and d) using a scoring function when backtesting.

Question 3. Extreme Value Theory (EVT). *[20 points]*

(a) *[5 points]* Give two examples of high severity/low frequency events in actuarial risk management and discuss briefly the challenges in dealing with such events. Why could EVT be helpful in the measurement of such risks?

(b) *[5 points]* Explain the peaks over threshold (POT) method in EVT and the key idea that underlies the corresponding tail estimator given by

$$\widehat{\bar{F}}(x) = \frac{N_u}{n}\left(1 + \widehat{\xi}\frac{x-u}{\widehat{\beta}}\right)^{-1/\widehat{\xi}}, \; x > u. \tag{1}$$

Here u is the threshold chosen in the application of the method and N_u the number of observations that exceed the threshold.

(c) *[5 points]* Suppose that the POT method is applied to claims data that follow a Pareto distribution with tail function $\bar{F}(x) = (K/x)^{\alpha}$, $x > K$, for parameters $K, \alpha > 0$. What values of $\widehat{\xi}$ would you expect given a sufficient amount of data. What would happen for normally distributed data? Give a short justification for your answer.

(d) *[5 points]* Suppose that the tail of an unknown loss distribution is modelled by the tail estimator (1). Compute an estimator of VaR_α for $\alpha > 1 - N_u/N$.

Question 4. Risk Aggregation and Copulas. *[30 points]*

Consider an insurance company with d business units and associated loss $L_1, \ldots, L_d$. The risk capital of the business units is denoted by $\mathrm{EC}_1, \ldots, \mathrm{EC}_d$.

(a) *[9 points]* Discuss three methods for determining the aggregated risk capital EC and discuss pros and cons of each method.

(b) *[15 points]* For simplicity, we restrict ourselves to $d = 2$ business units in the sequel. Assume that $L_1 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$ and that L_2 is log-normally distributed with parameters μ_2, σ_2^2, that is $\ln(L_2) \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$. For risk aggregation the company wants to use the copula approach.

(i) *[3 points]* In choosing the copula the risk management team has to decide between a meta Gauss model (based on the Gauss copula C_ρ^{Ga}) and a meta t model (based on $C_{\nu,\rho}^{\mathrm{t}}$). Which model class is more conservative with respect to the modelling of tail risk (for equal ρ)? Please briefly justify your answer.

(ii) *[3 points]* Write down for fixed parameters ρ and ν the distribution function $F_{\mathbf{L}}$ of $\mathbf{L} = (L_1, L_2)'$ in the meta t model with brief justification.

(iii) *[9 points]* You have a random number generator at your disposal that generates independent realisations z_1, z_2 of a one-dimensional standard normal distribution and you are able to generate independently of z_1 and z_2 a realisation v of a random variable $V \sim \chi_\nu^2$. Develop an algorithm for generating a realisation $(L_1, L_2)'$ that is distributed according to $F_{\mathbf{L}}$.

(c) *[6 points]* You have the following 5 observations of L_1 and L_2 at your disposal.

data point	1	2	3	4	5
L_1	-1.05	-0.84	0.20	-0.79	-0.26
L_2	0.26	0.18	0.31	0.34	0.25

(i) *[4 points]* Compute Kendalls τ and an estimator for the correlation parameter ρ of $C_{\nu,\rho}^{\mathrm{t}}$.

(ii) *[2 points]* How could one estimate the parameter ν?

Question 5. Credit Risk in the Context of the Merton Modell. *[20 points]*

(a) *[5 points]* Explain the modeling of defaults in the Merton model and describe the connection between corporate bonds and options on the firm's assets.

(b) *[10 points]* Show that the default probability of a firm in the Merton model is given by

$$\Phi\left(\frac{\ln\frac{F}{V_0} - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right).$$

Here, V_0 denotes the current value of the assets, F the nominal value of the debt, μ_V and σ_V the drift and volatility of the assets, and F is the nominal value of the debt.

(c) *[5 points]* Briefly discuss the strengths and weaknesses of the Merton model. In particular, address the properties of credit spreads within the model.

Question 6. Credit and Counterparty Risk. *[20 points]*

Consider an insurance company I that has entered into reinsurance contracts with m defaultable reinsurance companies $R^1, \ldots, R^m$; the associated default indicators are denoted $Y^1, \ldots, Y^m$. In case that reinsurer i defaults ($Y^i = 1$), the insurer I suffers a loss of size e^i, where the random variable e^i represents the exposure of I towards the reinsurer R^i.

(a) *[5 points]* In order to hedge this risk, I could use credit default swaps (CDS). Discuss pros and cons of such a hedging strategy.

(b) *[15 points]* The insurer I uses a probit-normal Bernoulli mixture model to compute the economic capital for counterparty credit risk and to model the joint distribution of the defaults of $R^1, \ldots, R^m$. It is assumed that the conditional default probability equals

$$p_i(\psi) = \phi(\mu_i + \sigma\psi) \text{ for } \psi \sim N(0,1), \quad 1 \le i \le m\,. \tag{2}$$

(i) *[5 points]* Discuss economic reasons for dependence between the defaults of $R^1, \ldots, R^m$, and provide an intuitive motivation for the model (2).

(ii) *[4 points]* Represent the default probability $\bar{p}^i = P(Y^i = 1)$ and the covariance $\mathrm{cov}(Y^i, Y^j)$ as integral with respect to the distribution of ψ.

(iii) *[6 points]* Develop an algorithm for simulating the random variable $L = \sum_{i=1}^m e^i Y^i$ describing the loss due to counterparty risk. Assume for simplicity that $e^1, \ldots, e^m$ are deterministic. Describe as a first step an algorithm for simulating the default indicators, assuming that you have a random number generator at your disposal that is able to generate standard normal random variables and Bernoulli random variables.

Question 7. Interest Rate Risk and Term Structure Models. *[30 points]*

(a) *[10 points]* Describe how to replicate a receiver swap with notional amount 1 and reset dates 1, 2, 3 (i.e. payment dates 2 and 3) at time 0 using zero bonds. State a suitable trading strategy and the replicating portfolio.

(b) *[8 points]* Assume that $P(t,S) > P(t,T)\cdot\frac{1}{1+(S-T)\cdot F(0,T,S)}$ for some $t \le T \le S$, where $P(t,T)$ and $F(0,T,S)$ denote the price of the zero bond with maturity T at time t and the forward rate for the future period $[T,S]$ at time 0, respectively. Develop an arbitrage strategy.

(c) *[8 points]* Let $F(t,T,S)$ be the simply-compounded forward rate at time t with expiry time $T \ge t$ and maturity $S > T$. Prove

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le t \le T < S,$$

where $\mathbb{E}^S$ denotes the expected value under the S-forward measure Q^S. Discuss this result in the special case $t = T$.

(d) *[4 points]* Explain the basic idea underlying the Black 76 formula for a caplet. In which modeling framework can this idea be implemented in a mathematically rigorous way? Discuss strengths of this framework as opposed to the classical Black 76 formula.

Proposal for solution

Question 1. Risk Measures and Parameter Risk.

(a) Integrating the density, we obtain the cumulative distribution function of X, given the value θ of the parameter.

$$F(x|\theta) = \int_0^x \frac{\theta}{2\sqrt{y}} \exp\left(-\theta\sqrt{y}\right) dy = \exp\left(-\theta\sqrt{y}\right)\Big|_0^x = 1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right)$$

Solving the equation $1 - \exp\left(-\theta\sqrt{x}\right) = \alpha$ yields the Value at Risk.

$$VaR_\alpha(X|\Theta = \theta) = \left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\theta}\right)^2$$

By the definition of Expected Shortfall, we obtain

$$\begin{aligned} ES_\alpha(X|\Theta = \theta) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \left(\frac{\ln(1-z)}{\theta}\right)^2 dz = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha} \left(\frac{\ln(z)}{\theta}\right)^2 dz \\ &= \frac{1}{\theta^2(1-\alpha)}\left(z(\ln(z))^2 - 2z\ln(z) + 2z\right)\Big|_0^{1-\alpha} \\ &= \frac{1}{\theta^2}\left((\ln(1-\alpha))^2 - 2\ln(1-\alpha) + 2\right). \end{aligned}$$

(b) When calculating the posterior density of Θ, given the observation x_1, we may introduce and delete constants as convenient:

$$\begin{aligned} \pi(\theta|x_1) &\propto f(x_1|\theta)\cdot\pi(\theta) \\ &\propto \theta\exp\left(-\theta\sqrt{x_1}\right)\cdot\exp(-\beta\theta)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta) \\ &= \theta\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta). \end{aligned}$$

Up to a constant, this is the density of Gamma$(2, \beta+\sqrt{x_1})$. We conclude that

$$\pi(\theta|x_1) = (\beta+\sqrt{x_1})^2\cdot\theta\cdot\exp\left(-(\beta+\sqrt{x_1})\theta\right)\cdot 1_{(0,\infty)}(\theta).$$

The marginal density $m(x)$ of X is the quotient of the joint density and the posterior density:

$$m(x) = \frac{f(x|\theta)\pi(\theta)}{\pi(\theta|x)} = \frac{\beta}{2\sqrt{x}}\cdot(\beta+\sqrt{x})^{-2}.$$

(c) (i) We verify

$$\begin{aligned} F(VaR_\alpha^{(n)} \mid x,\ldots,x_n) &= 1 - \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i} + \frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\right)^{n+1} \\ &= \alpha. \end{aligned}$$

(ii) Solving

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{\partial}{\partial\theta}\frac{\theta^n}{2\prod_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right) \\ &= \frac{\exp\left(-\theta\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)}{2\prod_{i=1}^n\sqrt{x_i}}\cdot\left(n\theta^{n-1}-\theta^n\cdot\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right) \end{aligned}$$

yields the ML-estimator $\hat{\theta}=\frac{n}{\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}$.

Since the predictive distribution takes into account the uncertainty about the parameter, the parameter risk can be quantified by the difference

$$\begin{aligned} &VaR_\alpha(X|x_1,\ldots,x_n)-VaR_\alpha(X|\Theta=\hat{\theta}) \\ &= \left(\frac{\beta+\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}}-\beta-\sum_{i=1}^n\sqrt{x_i}\right)^2-\left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\hat{\theta}}\right)^2 \\ &= \left(\beta+\frac{n}{\hat{\theta}}\right)^2\cdot\left((1-\alpha)^{-\frac{1}{n+1}}-1\right)^2-\left(\frac{\ln(1-\alpha)}{\hat{\theta}}\right)^2. \end{aligned}$$

(iii) The limit $VaR_\alpha^{(\infty)}:=\left(\frac{1}{\theta}\cdot\ln(1-\alpha)\right)^2$ is the Value at Risk of the sample distribution at confidence level α provided that θ is the true value of the parameter. This is easily verified by inserting $\left(\frac{1}{\theta}\cdot\ln(1-\alpha)\right)^2$ into the cumulative distribution function of the sample distribution

$$F(x|\theta)=1-\exp(-\theta\sqrt{x}).$$

Each observation increases the available information on the parameter Θ. In the limit $n\to\infty$, the variance of the posterior distribution vanishes, i.e. there is no longer any uncertainty about the parameter. Its value is known to be the limit of the expected value of the posterior distribution, i.e. $\Theta=\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$. Therefore, the value at risk of the predictive distribution $VaR_\alpha^{(n)}$ converges to the value at risk $VaR_\alpha^{(\infty)}$ of the sample distribution, given $\theta=\frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

We now prove the results stated in this exercise. This proof is *not required* in this exercise.

Integrating the density m from part b), we obtain the cumulative distribution function F of the marginal distribution of X:

$$F(x)=1-\left(\frac{\beta}{\beta+\sqrt{x}}\right).$$

In the same way as the marginal density is obtained by averaging the sample density over the prior density, the predictive density is obtained by averaging the sample density over the posterior density:

$$\begin{aligned} m(x) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta)\,d\theta, \\ f(x|x_1) &= \int f(x|\theta)\cdot\pi(\theta|x_1)\,d\theta. \end{aligned}$$

Therefore, we get the cumulative distribution function of the predictive distribution by replacing the parameters of the prior distribution in the marginal distribution function by those of the posterior distribution:

$$F(x|x_1) = 1 - \left(\frac{\beta + \sqrt{x_1}}{\beta + \sqrt{x_1} + \sqrt{x}}\right)^2.$$

By iteration, we get the predictive distribution based on n observations:

$$F(x|x_1, \ldots, x_n) = 1 - \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i} + \sqrt{x}}\right)^{n+1}.$$

By the law of large numbers, we observe the following convergence of the expected values of the posterior distribution

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{E}(\Theta|x_1, \ldots, x_n) = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} = \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n} + 1}{\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}} = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$$

and the following convergence of the variances

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} Var(\Theta|x_1, \ldots, x_n) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{\left(\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{\frac{1}{n^2} + \frac{1}{n}}{\left(\frac{\beta}{n} + \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2} = \frac{0}{\left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2} \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Consequently, the posterior distributions of $\Theta|x_1, \ldots, x_n$ converge to the Dirac measure in the point $\theta = \frac{1}{\mathbb{E}(\sqrt{X})}$.

For $n \to \infty$, the Value at Risk of the predictive distribution at the confidence level $\alpha \in (0, 1)$ converges to

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} VaR_\alpha(X|x_1, \ldots, x_n) &= \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{(1-\alpha)^{\frac{1}{n+1}}} - \beta - \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}\right)^2 \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(\frac{\beta + \sum_{i=1}^n \sqrt{x_i}}{n+1}\right)^2 \left(\frac{(1-\alpha)^{-\frac{1}{n+1}} - 1}{\frac{1}{n+1}}\right)^2 \\
&= \left(\mathbb{E}(\sqrt{X})\right)^2 \cdot (-\ln(1-\alpha))^2 \\
&= \left(\frac{1}{\theta}\ln(1-\alpha)\right)^2.
\end{aligned}$$

.

Question 2. Risk Measures – Computation and Backtesting.

(a) The Value at Risk is given by the solution of the following equation:

$$\alpha = F(\mathrm{VaR}_\alpha(X)) = 1 - \exp(-\lambda \mathrm{VaR}_\alpha(X)).$$

We obtain $\mathrm{VaR}_\alpha(X) = -\frac{\ln(1-\alpha)}{\lambda}$.

Using the definition, we compute the Expected Shortfall

$$\begin{aligned}\mathrm{ES}_\alpha(X) &= \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 \frac{-\ln(1-z)}{\lambda}\,dz = \frac{1}{1-\alpha}\int_0^{1-\alpha}\frac{-\ln(z)}{\lambda}\,dz \\ &= \frac{1}{\lambda(1-\alpha)}(z - z\ln(z))\Big|_0^{1-\alpha} \\ &= \frac{1-\ln(1-\alpha)}{\lambda}.\end{aligned}$$

(b) The expectile ist defined as the solution to the equation

$$\alpha \mathrm{E}\left[(X-y)^+\right] = (1-\alpha)\cdot \mathrm{E}\left[(X-y)^-\right].$$

Using $(X-y)^+ - (X-y)^- = X-y$, we get the equivalent equation

$$y - \mathrm{E}[X] = \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\cdot \mathrm{E}\left[(X-y)^+\right].$$

According to the hint, we have $\mathrm{E}[X] = \frac{1}{\lambda}$. We compute

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[(X-y)^+\right] &= \int_y^\infty (x-y)\cdot\lambda\exp(-\lambda x)\,dx \\ &= \int_0^\infty x\cdot\lambda\exp(-\lambda(x+y))\,dx \\ &= \exp(-\lambda y)\cdot\mathrm{E}[X] \\ &= \frac{\exp(-\lambda y)}{\lambda}.\end{aligned}$$

Inserting in the above equation yields

$$y - \frac{1}{\lambda} = \frac{2\alpha-1}{1-\alpha}\cdot\frac{\exp(-\lambda y)}{\lambda}$$

and thus

$$(\lambda y - 1)\cdot\exp(\lambda y - 1) = \frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}.$$

(c) The moment estimator for the expected value is the arithmetic mean of the observations. Interseting into the given representation yields

$$T_1(X_1,\ldots,X_n) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i\cdot\left(1 + W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right).$$

(d) $G(e_\alpha(X)) = \alpha$ means that $e_\alpha(X)$ is the α-quantile of the distribution function G.

Now, $F(x_1),\ldots,F(x_n)$ is a sample from the uniform distribution on $[0,1]$ and $G^{-1}(F(x_1)),\ldots,G^{-1}(F(x_n))$ is a sample from the distribution with the cdf G. The empirical quantile estimator is the $\lfloor(1-\alpha)n\rfloor+1$-largest value of this sample:

$$T_2(X_1,\ldots,X_n) = (G^{-1}\circ F)(X_{(\lfloor(1-\alpha)n\rfloor+1)})$$

We now verify the given relation $G(e_\alpha(X) = \alpha$. This is *not required* in this exercise.

$$\begin{aligned}
G(e_\alpha(X)) &= \frac{1-\lambda e_\alpha(X) - \exp(-\lambda e_\alpha(X))}{1-\lambda e_\alpha(X) - 2\exp(-\lambda e_\alpha(X))} \\
&= \frac{-W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right) - \exp(-1)\cdot\exp\left(-W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right)}{-W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right) - 2\exp(-1)\cdot\exp\left(W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right)} \\
&= \frac{-W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\cdot\exp\left(W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right) - \exp(-1)}{-W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\cdot\exp\left(W\left(\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)}\right)\right) - 2\exp(-1)} \\
&= \frac{-\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)} - \frac{1}{\exp(1)}}{-\frac{2\alpha-1}{(1-\alpha)\exp(1)} - 2\frac{1}{\exp(1)}} \\
&= \frac{-2\alpha+1-1+\alpha}{-2\alpha+1-2+2\alpha} = \alpha.
\end{aligned}$$

(e) The expectile is elicitable. Therefore, the two estimators T_1 and T_2 can be compared using the strictly consistent scoring function

$$S_\alpha^q(y,x) = \begin{cases} (1-\alpha)\cdot(y-x)^2; & x \le y \\ \alpha\cdot(y-x)^2 \qquad ; & x > y \end{cases}$$

Suppose we are given a time series of n observations and determine the estimators for the next period using the observations of the latest m periods. Then, we prefer the estimator with the lowest score

$$S_i := \sum_{k=1}^{n-m-1} S(T_i[x_k, x_{k+1}, \ldots, x_{k+m}], x_{k+m+1}),\ i = 1, 2.$$

Question 3. Extreme Value Theory (EVT).

(a) Examples for high frequency/ low severity events in casualty insurance: insurance against natural catastrophes (floods/storm) or insurance against terrorist attacks; another example are legal risks in operational risk. High frequency/low severity events are difficult to manage for a number of reasons: first, scarcity of data (rare occurrence means few observations); moreover, an insurance portfolio that contains such events displays a high degree of randomness so that only intertemporal diversification is possible. (In a normal year premia will exceed claim payments; in bad years claim payments much larger than collected premia). EVT can help to estimate the upper tails of the claim sizes distribution and to deal with the data problem.

(b) Key idea of the POT method. Choose a (high) threshold u. For $x > u$ it holds that $\bar{F}(x) = \bar{F}(u)\bar{F}_u(x-u)$ where F_u represents the excess distribution of F with respect to the threshold u. If u is large but not too large $\bar{F}(u)$ is easily estimated to be the proportion of the data bigger than u (empirical survival function N_u/N). The excess function is modeled as a GPD (based on asymptotic result) $\hat{\xi}$ and $\hat{\beta}$ can be estimated via Maximum Likelihood.

(c) In the Pareto case it should hold that $\widehat{\xi} \approx 1/\alpha$ since the Pareto has a power tail with decay rate α; in the normal case one expects $\widehat{\xi}$ close to zero sínce the normal distribution has an exponentially decaying tail.

(d) We need to solve the equation $\widehat{\widehat{F}}(x) = (1-\alpha)$; this leads to the estimator

$$\widehat{\mathrm{VaR}_\alpha} = u + \frac{\hat{\beta}}{\hat{\xi}}\left(\left(\frac{1-\alpha}{N_u/N}\right)^{-\hat{\xi}} - 1\right);$$

we omit details of the elementary computation.

Question 4. Risk Aggregation and Copulas.

(a) Denote by EC_i the risk capital of subunit i and by EC the overall capital. Different possibilities for risk aggregation: (3 are sufficient)

- Simple summation, $\mathrm{EC} = \mathrm{EC}_1 + \cdots + \mathrm{EC}_d$. Advantages: Simple, conservative, at least if EC_i is computed using a subadditive risk measure. Drawbacks: not principles based, diversification is not taken into account.
- Correlation adjusted summations

$$\mathrm{EC} = \Big(\sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d}\rho_{ij}\mathrm{EC}_i\mathrm{EC}_j\Big)^{\frac{1}{2}},$$

  where ρ_{ij} is often interpreted as *correlation* of L_i and L_j. Pro: simple, diversification is taken into account. Con: in general not principles based; correlations are hard to determine and need to satisfy consistency conditions.
- Copula methods. Pro: principles-based. Con: model risk in choosing the copula and its parameters, harder to communicate.
- Structural Models (factor based). Pro: principles based, natural from an economic point of view. Con: very complex in practical applications.

(b) (i) The t copula is more conservative due to tail dependence.

(ii) According to Sklar's theorem it holds that

$$F_{\mathbf{L}}(\ell_1, \ell_2) = C^{\mathrm{t}}_{\rho,\nu}\Big(\phi((\ell_1-\mu_1)/\sigma_1), \phi((\log\ell_2-\mu_2)/\sigma_2)\Big)$$

(iii) Step 1: Construction of $(x_1, x_2) \sim t^{\nu}_{\rho}$: Put $w = \nu/\mathrm{v}$ and $x_1 = \sqrt{w}z_1$, $x_2 = \sqrt{w}(\rho z_1 + \sqrt{1-\rho^2}z_2)$.
Step 2: Construction of $(u_1, u_2) \sim C^{\mathrm{t}}_{\rho,\nu}$: Put $(u_1, u_2) = (t_\nu^{-1}(x_1), t_\nu^{-1}(x_2))$.

Step 3: The quantile function of the lognormal distribution with parameters μ, σ^2 is given by $u \mapsto = \exp(\sigma\phi^{-1}(u)+\mu)$. Following the second part of Sklar's theorem,

$$(\ell_1, \ell_2) = \big(\mu_1 + \sigma_1\phi^{-1}(u_1), \exp\big(\mu_2 + \sigma_2\phi^{-1}(u_2)\big)\big)$$

are the realisations of L_1, L_2.

(c) One gets for Kendalls tau, that $\hat{\rho}_\tau = 0.2$ and hence $\hat{\rho} = \sin(\frac{\pi}{2}\hat{\rho}_\tau) = 0.31$. ν can be estimated via MLE.

Question 5. Credit Risk in the Context of the Merton Modell.

(a) In Merton's model, the firm defaults at time T if the value V_T of the assets is less than the face value F of the liabilities. At maturity, the value of the firm's debt is given by

$$F_T = \min(V_T, F) = F - (F - V_T)^+.$$

The payout to debt holders thus equals the face value of the debt minus the payoff of a put option on the assets V_T with strike price F.

(b) In the Merton model, V follows a geometric Brownian motion with dynamics $dV_t = \mu_V V_t dt + \sigma_V V_t dW_t$, so that

$$V_T = V_0 \exp\Big((\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T + \sigma_V W_T\Big).$$

The default probability is thus given by

$$\begin{aligned} P(V_T < F) = P(\ln V_T < \ln F) &= P\Big(\sigma_V W_T < \ln F - \ln V_0 - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T\Big) \\ &= P\Big(\frac{W_T}{\sqrt{T}} < \frac{\ln F - \ln V_0 - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\Big) \\ &= \Phi\left(\frac{\ln \frac{F}{V_0} - (\mu_V - \frac{1}{2}\sigma_V^2)T}{\sigma_V\sqrt{T}}\right), \end{aligned}$$

since $\frac{W_T}{\sqrt{T}} \sim N(0,1)$.

(c) Strengths of the Merton model:

- Clear economic interpretation of default,
- Easy to handle, especially due to the explicit and intuitively interpretable formula for default probability;

Weaknesses:

- The assumption that default can only occur at time T is unrealistic (a problem for bond valuation),
- Unrealistically low credit spreads for short time to maturity $T-t$

Question 6. Credit and Counterparty Risk.

(a) i) Advantages. The CDS pays off at the same time as losses due to the default of a reinsurer arise; the hedging can be done unilaterally (without consent of the reinsurer)

ii) Potential problems: The size of the loss (and hence the size of the CDS position needed) is unknown as of today; CDS markets might not be sufficiently liquid.

(b) (i) Dependence between the default of different reinsurers could be caused by a catastrophic event that is insured by several reinsurance companies or by a financial crisis (decline of the asset side of all reinsurers).

(ii) It holds that $\bar{p}^i = E(p_i(\psi)) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\varphi(x)\,dx$,where φ denotes the density of the standard normal distribution. We get for the covariance that

$$\operatorname{cov}(Y^i, Y^j) = E(Y^i Y^j) - \bar{p}^i\bar{p}^j = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(\mu_i + \sigma x)\phi(\mu_j + \sigma x)\varphi(x)\,dx - \bar{p}^i\bar{p}^j\,.$$

(iii) In order to generate a realization of $Y^1, \ldots, Y^m$ one first generates $\psi \sim N(0,1)$ and then m independent Bernoulli-variates $Y^1, \ldots, Y^m$ with success probability $p_i(\psi)$. The associated loss is $L = \sum_{i=1}^{m} e^i Y^i$. Repeating this N times (N large) gives an approximation of the distribution of L.

Question 7. Interest Rate Risk and Term Structure Models.

(a) Let K be the fixed rate. At time $t = 0$, we buy K shares of the zero bond with maturity $T = 2$ and $1 + K$ shares of the zero bond with maturity $T = 3$ and sell a zero bond with maturity $T = 1$. The price of this replicating portfolio is given by

$$P = K \cdot P(0,2) + (1+K) \cdot P(0,3) - P(0,1),$$

where $P(t,T)$ denotes the price of the zero bond with maturity T at time t.

At time $t = 1$, we sell $\frac{1}{P(1,2)}$ shares of the zero bond with maturity 2 in order to pay one unit of currency to the holder of the zero bond that falls due at time 1. There remain $K - \frac{1}{P(1,2)} = K - L(1,2) - 1$ shares of the zero bond with maturity 2.

At time $t = 2$, the receiver swap pays the amount $K - L(1,2)$. In order to settle the remaining position of -1 unit of currency, we sell $\frac{1}{P(2,3)}$ shares of the zero bond with maturity 3. There remain

$$1 + K - \frac{1}{P(2,3)} = K - L(2,3)$$

shares of the zero bond with maturity 3, that pay the amount $K - L(2,3)$ at time 3.

(b) At time $t = 0$ sell $\frac{P(t,T)}{P(t,S)}$ zero bonds with maturity S and buy 1 zero bond with maturity T, resulting in a zero net investment. In addition, enter a receiver swap with $K = F(t,T,S)$ and nominal 1 for free. At time T, the payment 1 of the maturing zero bond is invested in $\frac{1}{P(T,S)}$ shares of the zero bond with maturity S. At time S, the resulting payment is given by

$$\begin{aligned} &\frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(t,T)}{P(t,S)} + (S-T)\cdot F(t,T,S) - (S-T)\cdot L(T,S) \\ &> \frac{1}{P(T,S)} - \frac{P(t,T)}{P(t,S)} + \left(\frac{P(t,T)}{P(t,S)} - 1\right) - \left(\frac{1}{P(T,S)} - 1\right) = 0, \end{aligned}$$

i.e. a strictly positive profit without any downside risk.

(c) Since zero coupon bonds are tradable assets, so is the quantity

$$F(t,T,S)P(t,S) = \frac{1}{S-T}(P(t,T) - P(t,S)).$$

Consequently, its discounted price process

$$\frac{F(t,T,S)P(t,S)}{P(t,S)} = F(t,T,S)$$

is a martingale under the forward measure Q^S. Therefore, it holds that

$$\mathbb{E}^S(F(t,T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le t \le T < S.$$

In the special $t = T$, this relation takes the form

$$\mathbb{E}^S(L(T,S) \mid \mathcal{F}_u) = F(u,T,S), \quad 0 \le u \le T < S.$$

because of $F(T,T,S) = L(T,S)$. This shows that, at time $u \le T$, the forward rate $F(u,T,S)$ reflects the available market information on the spot rate of the future period $[T,S]$.

(d) The basic idea of the Black 76 formula for caplets consists in modeling the forward rate $F(u,T,S)$, $0 \le u \le T$ by a Black-Scholes type stochastic differential equation

$$dF(u,T,S) = \sigma \cdot F(u,T,S)dW(u), \quad 0 \le u \le T$$

with respect to a Brownian motion W and transferring the Black-Scholes formula for call options.

This approach is made mathematically rigorous in the theory of LIBOR market models. Those models allow for time dependent and stochastic volatilities, thus improving the fit to market prices of interest rate derivatives.