Blätter DGVFM (2007) 28: 171–179
DOI 10.1007/s11857-007-0008-0

ACTUARIAL EXAMS

Bericht zur Prüfung im Oktober 2006 über Bausparmathematik (Spezialwissen)

Hans Laux

Published online: 14 April 2007

Am 21. Oktober 2006 fand in Köln die Prüfung über das Spezialwissen der Bausparmathematik statt. Der Klausur unterzogen sich drei Teilnehmer, die alle die Prüfung bestanden haben.
Die Klausur umfasste vier Aufgaben, für die maximal die jeweils angegebene Zahl von Punkten, insgesamt 90 Punkte, erzielbar waren. Die Klausur war auf 180 Minuten ausgelegt und galt als bestanden, wenn 40 Punkte erreicht wurden. Hilfsmittel waren außer einem Taschenrechner nicht zugelassen.

1. Aufgabe (30 Punkte)

Ein Bausparer führt einen Bausparvertrag (BV) mit folgenden Tarifmerkmalen:

Abschlussgebühr (AG) 1% der Bausparsumme (BS),
Guthabenzinsen (GZ) 2% jährlich, keine Kontogebühren,
Bei Erhöhungen keine Karenzzeit,
Bewertungsstichtage (BWS) an den Kalenderquartalsletzten,
Tarifliches Mindestsparguthaben (MG) 40% der BS,
Berechnung der Bewertungszahl (BZ) aus den Habensaldensummen (HSS) mit dem Bewertungszahlfaktor $BZF = 1$,
Mindestbewertungszahl $MBZ = 6$.

Die Bausparkasse (BK) lässt nur Sparzahlungen von maximal 10% der BS zu und teilt die Verträge des betreffenden Tarifs höchstwahrscheinlich genau drei Monate nach Erreichen der genannten Zuteilungsvoraussetzungen zu. Konkret lautet der BV zum BWS am Ende eines Kalenderjahres 01 (hier mit $BWS1$ bezeichnet) über

$BSalt = 100.000$ €,
Bausparguthaben $BG = 35.000$ € ($= BG1$),
$HSS = 780.000$ € ($= HSS1$) und
$BZ = 7{,}800$ ($= BZ1$).

Hans Laux, Kornwestheim, Deutschland, e-mail: laux.aktuar@t-online.de

Der Bausparer möchte die Zuteilung einer möglichst hohen *BS* zum 30.06.03, d. h. aus dem *BWS6* heraus zum *BWS7*, erreichen und hierbei den Sparvorgang bis dahin optimieren. Er hat der *BK* keinen steuerlichen Freistellungsauftrag für die GZ eingereicht. Welche Vertragsgestaltung und welche Sparzahlungen schlagen Sie hierfür vor? Zeigen Sie anhand des Kontoablaufs bis zum Zuteilungszeitpunkt auf, dass die Optimalitätsvoraussetzungen tatsächlich erfüllt werden.

Lösung:

Es ist nützlich, sich zunächst die zeitliche Zuordnung zu notieren:

31.12.01	31.03.02	30.06.02	30.09.02	31.12.02	31.03.03	30.06.03
$BWS1$	$BWS2$	$BWS3$	$BWS4$	$BWS5$	$BWS6$	$BWS7 =$ Zuteilung

Der BV weist mit der $BZ = 7,800$ zum $BWS1$ eine überschießende Sparerleistung auf, die durch eine Erhöhung der *BSalt* mobilisiert werden kann. Wegen der AG und der fehlenden Karenzzeit ist eine Erhöhung erst zum 31.12.02 zweckmäßig, aber zum Erreichen einer möglichst hohen Sparzahlung im Jahr 02 auch notwendig. Zur Optimierung des Sparvorgangs gehört ebenso die Zahlung der noch möglichen Sparbeiträge (SB) so spät wie möglich, also zum 31.12.02 für das Jahr 02 und zum 31.03.03 für 03. Wiederum unter dem Aspekt so weit wie denkbar nach hinten verschobener Sparbeiträge ist Priorität der Vollausnutzung der Obergrenze von $0,1 \cdot BS$ zum $BWS6$ zuzuerkennen, wenn die *BSneu* kurz mit BS bezeichnet wird. Beim Sparbeitrag $SB(5)$ ist darauf zu achten, dass die genannte Obergrenze nicht überschritten wird. (Als zulässig wurde auch eine Interpretation des Optimalitätskriteriums angesehen, bei der zur Erzielung einer maximalen *BS* die *SB* – und damit auch die Erhöhung von *BSalt* – möglichst früh unterstellt worden sind, beispielsweise zum $BWS2$ oder im Extrem zum 01.01. der Kalenderjahre 02 und 03. Die aus dieser Variante folgenden Änderungen der Formeln werden jedoch hier nicht aufgeführt.)
Die GZ zum $BWS5$ und $BWS7$ reduzieren sich um die an das Finanzamt abzuführende Zinsabschlagsteuer ($ZASt$) in Höhe von 30% der GZ zuzüglich des Solidaritätszuschlags von 5,5% der $ZASt$. Von den Bruttozinsen GZb verbleiben mithin bei einem Einbehalt zugunsten des Fiskus von $1{,}055 \cdot 30\% = 31{,}65\% = 0{,}3165$ auf dem BV $68{,}35\% = 0{,}6835$, d. h. Nettozinsen von

$$GZn = GZb \cdot 0{,}6835\,. \tag{1}$$

Die Optimierung wird demnach geldlich und bewertungszahlmäßig erreicht, wenn die folgenden Gleichungen (2) bis (4) gelten:

$$BG(6) = 0,4 \cdot BS, \tag{2}$$

$$BZ(6) = MBZ = 6{,}000 \tag{3}$$

und

$$SB(6) = 0,1 \cdot BS\,. \tag{4}$$

Da

$$BG(6) = BG(5) + SB(6) \tag{5}$$

gilt, ist

$$BG(5) = BG(6) - SB(6) = 0{,}3 \cdot BS\,. \tag{6}$$

Vom $BWS5$ an errechnet sich die BZ nach der einfachen Formel

$$BZ = \frac{HSS}{BS}\,. \tag{7}$$

Folglich beträgt

$$HSS(6) = 6{,}000 \cdot BS \tag{8}$$

und

$$HSS(5) = 5{,}600 \cdot BS\,. \tag{9}$$

Nun liegt die Vertragsentwicklung vom $BWS1$ bis zum $BWS5$ ziemlich fest. Die $BG(2)$ bis $BG(4)$ stimmen mit $BG(1)$ überein. Zum $BWS5$ wird dem Bausparkonto die Abschlussgebühr AG für den Erhöhungsteil der BS belastet; gutgeschrieben werden die Nettoguthabenzinsen GZn und der Sparbeitrag $SB(5)$. Daraus ergibt sich

$$BG(5) = BG(1) - AG + GZn + SB(5)\,, \tag{10}$$

$$GZb = 0{,}02 \cdot BG(1) = 0{,}02 \cdot 35.000,-\,€ = 700,-\,€ \tag{11}$$

und

$$GZn = 0{,}6835 \cdot 700,-\,€ = 478{,}45\,€\,. \tag{12}$$

Die Formeln (6) und (10) gleichgesetzt liefert

$$0{,}3 \cdot BS = BG(1) - AG + 478{,}45\,€ + SB(5) \tag{13}$$

und nach $SB(5)$ aufgelöst

$$SB(5) = 0{,}3 \cdot BS - BG(1) + AG - 478{,}45\,€\,. \tag{14}$$

Ferner ist

$$HSS(4) = HSS(1) + 3 \cdot BG(1) = 780.000,-\,€ + 105.000,-\,€ = 885.000,-\,€ \tag{15}$$

und

$$HSS(5) = HSS(4) + BG(5)\,, \tag{16}$$

also

$$BG(5) = HSS(5) - HSS(4) = 5{,}600 \cdot BS - 885.000,-\,€ = 0{,}3 \cdot BS\,, \tag{17}$$

somit

$$BS = \frac{885.000}{5{,}3}\,€ = 166.981,13\,€\,. \tag{18}$$

Damit gilt

$$SB(6) = 16.698,11\text{ €}, \tag{19}$$

$$AG = 0{,}01 \cdot 66.981,13\text{ €} = 669{,}81\text{ €} \tag{20}$$

und nach (14)

$$\begin{aligned} SB(5) &= 0{,}3 \cdot 166.698,13\text{ €} - 35.000,-\text{ €} + 669{,}81\text{ €} - 478{,}45\text{ €} \\ &= 15.285,70\text{ €} \end{aligned} \tag{21}$$

$SB(5)$ liegt mithin innerhalb der Toleranzgrenze von 10% der BS. Deren Vollausnutzung auch zum $BWS5$ widerspräche der Optimierungsprämisse, weil dadurch das $BG(6)$ das MG überschritte. Die Ansparung zum $BWS6$ beläuft sich auf

$$BG(6) = BG(5) + SB(6) = 50.094,30\text{ €} + 16.698,11\text{ €} = 66.792,40\text{ €}, \tag{22}$$

das sind exakt 40% der BS von 166.981,13 €.
Den optimalen Vertragsablauf zeigt die nachfolgende Kontoentwicklung:

Stichtag	**Nr.**	**BS**	**AG**	**SB**	**GZn**	**BG**	**HSS**	**BZ**
		€	€	€	€	€	€	
31.12.01	1	100.000,00				35.000,00	780.000,00	7,800
31.03.02	2	100.000,00				35.000,00	815.000,00	8,150
30.06.02	3	100.000,00				35.000,00	850.000,00	8,500
30.09.02	4	100.000,00				35.000,00	885.000,00	8,850
31.12.02	5	166.981,13	669,81	15.285,70	478,45	50.094,30	935.094,34	5,600
31.03.03	6	166.981,13		16.698,11		66.792,45	1.001.886,79	6,000
30.06.03	7	16.6981,13			399,46	67.191,91	Zuteilung	

2. Aufgabe (20 Punkte)

a) Entwickeln Sie die bausparmathematische Formel der Kassengleichung für den statischen Beharrungszustand eines Einmalspartarifs mit den Merkmalen E, r, q, d, B und D-Modell, ferner für die bauspartechnischen Kennzahlen
   Sparintensität SI,
   Tilgungsintensität TI,
   Zuteilungsgrad ZG,
   Anteile von Sparbeiträgen, Tilgungsbeträgen und Guthabenzinsen an den Zuflüssen zur Zuteilungsmasse (ZZM) sowie
   Anteile von Bausparguthaben und Bauspardarlehen an den Entnahmen aus der Zuteilungsmasse EZM in Prozent.

b) Berechnen Sie diese Werte für $BS = 1$, $E = 0{,}45 \cdot BS$, $r = 1{,}00375$, $s = 21{,}007$, $q = 1{,}01$, $d = 0{,}02$ und $B = 0{,}018$.

Lösung:

Die Guthabensumme (Sparerleistung SL) ergibt sich aus

$$GS = E \cdot [1 + r^1 + r^2 + \ldots + r^{s-1}] = E \cdot \frac{r^s - 1}{r - 1} \tag{23}$$

und mit $G(s) = E \cdot r^s$ sowie $D(0) = [BS - G(s)] \cdot (1+d)$, $t = \frac{\ln Q}{\ln q}$, $Q = \frac{B}{B-(q-1)\cdot D(0)}$ die Darlehenssumme (Kassenleistung KL) zu

$$DS = \frac{t \cdot B - D(0)}{q-1}\,. \tag{24}$$

Somit lautet die Kassengleichung:

$$SL = E \cdot \frac{r^s - 1}{r-1} = \frac{t \cdot B - D(0)}{q-1} = KL\,. \tag{25}$$

Da es im statischen Beharrungszustand s Sparergruppen (ferner t Darlehensgruppen) gibt und sich die Tilgungsbeträge pro Quartal auf $D(0)$ addieren, beträgt die – vierteljährliche – Sparintensität SI in Prozent:

$$SI = 100 \cdot \frac{E}{s}\,, \tag{26}$$

Tilgungsintensität TI in Prozent

$$TI = 100 \cdot \frac{D(0)}{DS}\,, \tag{27}$$

die jährlichen Intensitäten das Vierfache hiervon. Der Zuteilungsgrad beläuft sich in Prozent auf

$$ZG = 100 \cdot \frac{t}{s+t}\,. \tag{28}$$

Die Zuflüsse zur Zuteilungsmasse belaufen sich auf

$$ZZM = E + (r-1) \cdot GS + D(0) = E \cdot r^s + D(0) \tag{29}$$

und die Entnahmen daraus

$$EZM = G(s) + D(0) = ZZM\,. \tag{30}$$

Mithin stellen sich die prozentualen Anteile an den Zuflüssen zur Zuteilungsmasse an Sparbeiträgen

$$ASB = 100 \cdot \frac{E}{ZZM} \tag{31}$$

Guthabenzinsen

$$AGZ = 100 \cdot \frac{(r-1) \cdot GS}{ZZM} \tag{32}$$

und Tilgungsbeiträgen

$$ATBe = 100 \cdot \frac{D(0)}{ZZM}\,. \tag{33}$$

Die prozentualen Entnahmen aus der Zuteilungsmasse betragen an Bausparguthaben

$$ABG = 100 \cdot \frac{G(s)}{EZM} \tag{34}$$

und Bauspardarlehen

$$ABD = 100 \cdot \frac{D(0)}{EZM}. \tag{35}$$

Die numerischen Werte ergeben sich wie folgt:
$r^s = 1{,}0818$, $\frac{r^s-1}{r-1} = 21{,}8143$, $G(s) = 0{,}4868$, $D(0) = 0{,}5235$, $Q = 1{,}4101$, $t = 34{,}534$, $GS = 9{,}8164$, $DS = 9{,}8164$, $SI = 2{,}142\%$, $TI = 5{,}333\%$, $ZG = 62{,}18\%$, $SB = E = 0{,}45$, $GZ = 0{,}00375 \cdot 9{,}8164 = 0{,}0368$, $STBe = 0{,}5235$, $ZZM = 1{,}0103$, $ZBG = G(s) = 0{,}4868$, $ZBD = 0{,}5235$, $EZM = 1{,}0103$, $ASB = 44{,}54\%$, $AGZ = 3{,}44\%$, $ATBe = 51{,}82\%$, $ABG = 48{,}18\%$, $ABD = 51{,}82\%$.

3. Aufgabe (18 Punkte)

Ein Bausparbestand von Ratensparern, die sämtlich während der Sparzeit von (als bekannt anzunehmenden) s Quartalen vierteljährlich postnumerando den Sparbeitrag $A(R, s)$ zahlen, befindet sich im dynamischen Beharrungszustand mit der Progressionsrate des summenmäßigen Neuzugangs p pro Quartal. Ein konstanter Anteil $a(F)$ daran setzt vom Zeitpunkt s ab den Vertrag über f Quartale fort und entrichtet in dieser Zeit (ebenfalls nachträglich) den Vierteljahres-Sparbeitrag $A(F, f)$. Es gilt die übliche Annahme, dass die Höhenlage der Normalsparer, die sofort im Zeitpunkt s die Zuteilung annehmen und die volle Bausparsumme (BS) ausgezahlt erhalten, in der Weise normiert wird, dass die Gruppe, deren Bauspardarlehen (BD) mit dem letzten Tilgungsbeitrag gerade vollständig getilgt wird, seinerzeit mit der Höhenlage $p^0 = 1$ zugegangen ist.
Leiten Sie die Formeln her für

a) die BS und
b) die Bausparguthaben (BG) der Fortsetzer (F), ferner
c) die maximal (ohne Aufrundung beim Darlehensanspruch gerechnete) zulässige Fortsetzerreserve (FR).

Lösung:

Wegen der um f Quartale längeren Verweildauer reicht bei den Fortsetzern (F) die Skala der Höhenlagen nicht nur von p^0 bis p^{t+s}, sondern von p^{-f} bis p^{t+s}. Damit auch die F bei ihrem Neuzugang die gleiche Höhenlage wie die Bausparverträge, bei denen keine Fortsetzung stattfindet, einnehmen, müssen sie f Quartale früher zugegangen sein. Lässt man zunächst die Teile des BG der F weg, die sich aus den Sparbeiträgen $A(F, f)$ ergeben, so gilt: Das BG $G(R, s)$, das sonst gerade im Berechnungszeitpunkt per Zuteilung abgeflossen wäre, hat die Höhe p^t, das aus dem Zugang des vorhergehenden Quartals stammende und um den Zinsfaktor r angewachsene BG die Höhe p^{t-1} usw. Das „letzte“ BG mit der Höhenlage p^{t-f} ist um r^f höher als bei Eintritt im den F-Bestand und durch Zuteilungsannahme soeben abgeflossen. Die Summe der BG der F ohne die aus ihren weiteren Sparbeiträgen $A(F, f)$ herrührenden

Teile beläuft sich somit für $a(F)=1$ auf

$$\begin{aligned} SBG(F, G(R,s), p) &= G(R,s)\cdot p^t \cdot \Big[p^0\cdot r^0 + p^{-1}\cdot r^1 + p^{-2}\cdot r^2 + \\ &\qquad \ldots + p^{-f+1}\cdot r^{f-1}\Big] \\ &= G(R,s)\cdot p^t \cdot \frac{(\frac{r}{p})^f - 1}{\frac{r}{p}-1} \\ &= G(R,s)\cdot p^{t-f+1}\cdot \frac{r^f - p^f}{r-p}\,. \end{aligned} \tag{36}$$

Aus den $A(F, f)$ bildet sich die Summe der BG

$$\begin{aligned} SBG(F, A(F,f), p) &= A(F,f)\cdot \big[p^{t-1}\cdot r^0 + p^{t-2}\cdot(1+r^1) + p^{t-3}\cdot(1+r^1+r^2) \\ &\quad + \ldots + p^{t-f+1}\cdot(1+r^1+r^2+\ldots r^{f-2})\big] \\ &= A(F,f)\cdot p^t \cdot \sum_{m=1}^{f-1}\frac{r^m-1}{r-1}\cdot p^{-m} \\ &= A(F,f)\cdot\frac{p^{t+1}}{r-1}\cdot\left[\frac{r^f-p^f}{r-p} - \frac{p^f-1}{p-1}\right]\cdot p^{-f}\,. \end{aligned} \tag{37}$$

Insgesamt ergibt sich die Guthabensaldensumme der F in der Fortsetzungszeit zu

$$GS(F, f, p) = a(F)\cdot[SBG(F, G(R,s), p) + SBG(F, A(F,f), p)]\,. \tag{38}$$

Die BS der F in der Fortsetzerzeit stellt sich auf

$$SNZBS(F, f, p) = p^{t-1}\cdot\frac{p^f-1}{p-1}\cdot p^{-f} \tag{39}$$

und die maximale FR für Bauspartarife nach dem D-Modell , d. h. mit einem Darlehensanspruch in Höhe der Differenz zwischen BS und BG, auf

$$\begin{aligned} FRM(f,p) &= GS(F,f,p) + 0{,}25\cdot[SNZBS(F,f,p) - GS(F,f,p)] \\ &= 0{,}25\cdot SNZBS(F,f,p) + 0{,}75\cdot GS(F,f,p)\,. \end{aligned} \tag{40}$$

4. Aufgabe (22 Punkte)

Eine Bausparkasse (BK) möchte einen Bauspartarif, dessen Darlehenbedingungen durch die Größen q, $D(0)$, B und dem sich daraus ergebenden t gekennzeichnet sind, um eine Variante mit einem anfänglich herabgesetzten, aber dynamisierten Tilgungsbeitrag (TB) B' erweitern. B' soll an jedem Quartalsende geometrisch mit dem Faktor p zunehmen. Zur Wahrung der Kompatibilität soll die Dynamikvariante die gleiche Kassenleistung aufweisen wie die Ausgangsvariante mit dem statischen TB.

a) Zeigen Sie nach dem Formelwerk der klassischen Bausparmathematik den Lösungsweg auf, die Größen B' und t' bei vorgegebenem p zu bestimmen.
b) Welche Parameter der Dynamikvariante bei $p = 1{,}015$ für B', nämlich 3,0% oder 3,1% von $D(0)$ pro Quartal sind mit der Statikvariante und ihrem TB von 3,6% besser kompatibel, wenn $D(0) = 100\%$ und $q = 1{,}01$ gesetzt wird?

Lösung:

Zu a)

Bezeichnet SB' die Summe der dynamisierten Tilgungsbeiträge B' in der Tilgungszeit t' so gelten für die Kassenleistungen KL

$$KL = \frac{B \cdot t - D(0)}{q-1} \tag{41}$$

in der Variante mit dem gleichbleibenden und

$$KL' = \frac{SB' - D(0)}{q-1} \tag{42}$$

in der mit dem steigenden TB.
Da die beiden KL übereinstimmen sollen, muss der dynamisierte TB B' die Gleichung erfüllen:

$$B \cdot t = SB'. \tag{43}$$

Die Höhenlage der vierteljährlich nachträglich gezahlten B' beträgt im k-ten Quartal nach Tilgungsbeginn p^{k-1}. Mithin beläuft sich die Summe der dynamisierten Tilgungsbeiträge auf

$$SB' = B' \cdot \sum_{k=1}^{t'} p^{k-1} = B' \cdot \frac{p^{t'} - 1}{p-1}. \tag{44}$$

Darin ist jedoch t' noch unbestimmt. Man kann t' – ähnlich wie in der Grundgleichung der progressiven Tilgung – nach dem Zweikontenmodell bestimmen, indem man den Endwert des ungetilgten und nur verzinsten Anfangsdarlehens $D(0) \cdot q^{t'}$ gleichsetzt dem Endwert der dynamisierten TB, die unangetastet einem mit q verzinsten Gegenkonto zufließen. Das ergibt für den zuletzt genannten Endwert

$$B' \cdot \sum_{k=1}^{t'} p^{k-1} \cdot q^{t'-k} = B' \cdot q^{t'-1} \cdot \sum_{k=1}^{t'} \left(\frac{p}{q}\right)^{k-1} = B' \cdot q^{t'-1} \cdot \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{t'} - 1}{\frac{p}{q} - 1} = B' \cdot \frac{p^{t'} - q^{t'}}{p-q}. \tag{45}$$

Die Grundgleichung der geometrischen Tilgung bei dynamischem TB lautet mithin

$$D(0) \cdot q^{t'} = B' \cdot \frac{q^{t'} - p^{t'}}{q-p}. \tag{46}$$

Daraus leitet man durch einfache Umordnung ab

$$\left(\frac{q}{p}\right)^{t'} \cdot [B' - (q-p) \cdot D(0)] = B'. \tag{47}$$

Mit dem Zwischenwert

$$Q' = \frac{B'}{B' - (q-p) \cdot D(0)}, \tag{48}$$

der gegenüber der bekannten Formel für Q etwas abgewandelt ist, erhält man die Tilgungszeit t' zu

$$t' = \frac{\ln(Q')}{\ln\left(\frac{q}{p}\right)}. \tag{49}$$

Ist B' vorgegeben, kann letztlich aus (49) die Tilgungszeit t' für das dynamisierte B' und damit deren Summe aus (44) ermittelt werden. Damit ist aber noch nichts darüber gesagt, ob dadurch die Kompatibilitätsanforderung von (43) erfüllt ist. Die exakte Gleichheit der Darlehenssummen ergibt sich, wenn man die Nullstelle der Funktion

$$F(B') = B \cdot t - B' \cdot \frac{p^{t'} - 1}{p - 1} \tag{50}$$

nach einem Näherungs- oder Iterationsverfahren berechnet.
Ist umgekehrt (vermutlich eher selten) t' primär vorgegeben, kann man B' leicht aus (46) herleiten und mit dem so gewonnenen Wert wieder die Tilgungsbeitragssumme nach (44) bestimmen. Danach ist wieder die Formel (50) anzuwenden, die nunmehr als $F(t')$ zu verstehen ist.
Die tatsächliche Berechnung kann man durch die vorläufige Vorgabe entweder von B' oder von t' beginnen. Im ersten Fall berechnet man zunächst t' aus (48) und (49) und sodann die Summe der dynamisierten TB aus (44). Gibt man primär t' vor, so errechnet sich B' aus (46) und SB' aus (44).

Zu b)

Numerisch ergibt sich für $q = 1{,}01$, $D(0) = 100$ und $B = 3{,}6$ in der statischen Variante mit $Q = 1{,}3846$, $t = 32{,}705$ Quartale und $KL = 1773{,}7$. In der Dynamikvariante mit $p = 1{,}015$ resultiert aus einem anfänglichen TB von
$B' = 3{,}0$: $Q' = 0{,}85714$, $t' = 31{,}2154$, $SB' = 118{,}325$ und ein KL' von 1832,5,
$B'' = 3{,}1$: $Q'' = 0{,}86111$, $t'' = 30{,}2801$, $SB'' = 117{,}720$ und ein KL'' von 1772,0.
Die zweite Alternative mit dem TB von $B'' = 3{,}1$ ist mithin wesentlich genauer.