Bericht zur Prüfung im Oktober 2001 über Bausparmathematik (Spezialwissen)

Hans Laux (Kornwestheim)

Wegen der im Verhältnis zu den anderen Disziplinen der Aktuarwissenschaften wenigen Prüflinge ist bislang davon abgesehen worden, über die schriftlichen Spezialprüfungen in Bausparmathematik zu berichten. Vom Jahre 2006 ab ist eine Veröffentlichung der betreffenden Aufgaben mit Musterlösungen wie bei den sonstigen Fächern vorgesehen. Als Beispiel für die in der Vergangenheit gestellten Anforderungen wird nachfolgend über die Prüfung im Spezialwissen der Bausparmathematik vom Oktober 2001 berichtet. Die Klausur umfasste vier Aufgaben, für die maximal die jeweils angegebene Zahl von Punkten, insgesamt 90 Punkte, erzielbar waren. Die Klausur war auf 180 Minuten ausgelegt und galt als bestanden, wenn 40 Punkte erreicht wurden. Hilfsmittel waren außer einem Taschenrechner nicht zugelassen.

1. Aufgabe (25 Punkte)

Nach den ABB eines Bauspartarifs mit 2% Guthaben- und 4,75% Darlehenszinsen jährlich gilt - bei Bewertungsstichtagen an den Quartalsenden - die Formel für die Bewertungszahl $BZ = HSS : BS$ und die Mindestbewertungszahl $MBZ = 7,2$. Der Anspruch auf das Bauspardarlehen (BD) beläuft sich auf die Differenz zwischen Bausparsumme (BS) und Bausparguthaben (BG) bei Zuteilung ($BD = BS - BG$) und der vierteljährlich nachschüssig entrichtete Tilgungsbeitrag auf 1,8% der BS. Eine Darlehensgebühr existiert nicht.
Ein Ratensparer mit dem postnumerando gezahlten Quartalssparbeitrag von 1,5% der BS beendet seine Sparzahlungen mit dem *Ende* des Quartals, in dem sein BG erstmals das Mindestsparguthaben (MG) des Tarifs von 40% der BS überschreitet; er wird drei Monate *nach dem Quartalsende*, an dem erstmals $BZ \geq MBZ$ gilt, zugeteilt und erhält sofort die volle BS ausgezahlt.
Berechnen Sie nach den üblichen bausparmathematischen Formeln

- die gesamte Sparzeit $s(1) + s(2) = s$,
- das Endguthaben $BG(s)$ bei Zuteilung,
- das Anfangsdarlehen $BD(0)$,
- die Tilgungszeit t,
- die Sparerleistung SL,
- die Kassenleistung KL und
- das individuelle Sparer-Kassen-Leistungsverhältnis ($iSKLV$).

Lösung:

Mit den Zinsfaktoren

$$r = 1 + i = 1,005 \tag{1.1}$$

und

$$q = 1 + j = 1,011875 \tag{1.2}$$

sowie für

$$BS = 1 \tag{1.3}$$

ergibt sich $s(1)$ aus der Formel für das BG nach k Quartalen ununterbrochener Sparzahlungen

$$BG(k) = A \cdot \frac{r^k - 1}{r - 1} \tag{1.4}$$

und derjenigen - nicht auf volle Quartale lautenden - Sparzeit $k1$, für die exakt

$$BG(k1) = 0,4 \tag{1.5}$$

gilt, mithin aus der Gleichung

$$0,015 \cdot \frac{1,005^{k1} - 1}{0,005} = 0,4. \tag{1.6}$$

Durch Umformung erhält man

$$1,005^{k1} = 1,133333 \tag{1.7}$$

und

$$k1 = \frac{\ln(1,133333)}{\ln(1,005)} = 25,0951. \tag{1.8}$$

Mithin beträgt

$$s(1) = 26 \tag{1.9}$$

und

$$BG(26) = 0,015 \cdot \frac{1,005^{26} - 1}{0,005} = 3 \cdot (1,138460 - 1) = 0,41538. \tag{1.10}$$

Analog wird zunächst diejenige Zeit $k2$ gesucht, in der das BG nur durch Guthabenzinsen auf

$$BG(s(1) + k2) = 0,41538 \cdot 1,005^{k2} \tag{1.11}$$

anwächst und die BZ – hier gleich der HSS, d.h. der Summe GS der BG an den durchlaufenen Quartalsenden [ohne den letzten Saldo $BG(s(1) + k2)$] – die MBZ erreicht, somit die Gleichung gilt

$$GS(26 + k2) = \frac{BG(26 + k2) - 26 \cdot 0,015}{0,005} = \frac{0,41538 \cdot 1,005^{k2} - 0,39}{0,005} = 7,2 = MBZ. \tag{1.12}$$

Über die Umformung auf

$$1,005^{k2} = 1,025567 \tag{1.13}$$

ergibt sich

$$k2 = \frac{\ln(1,02557)}{\ln(1,005)} = 5,0623. \tag{1.14}$$

Mit

$$s(2) = 6 \tag{1.15}$$

stellt sich die gesamte Sparzeit auf

$$s = 26 + 6 = 32 \tag{1.16}$$

Quartale, das Endguthaben bei Zuteilung auf

$$BG(32) = 0,41538 \cdot 1.005^6 = 0,42800 \tag{1.17}$$

und die am Bewertungsstichtag vor der Zuteilung erreichte BZ auf

$$BZ(31) = GS(32) = \frac{0,41538 \cdot 1,005^6 - 0,39}{0,005} = 7,600. \tag{1.18}$$

Das Anfangsdarlehen

$$BD(0) = 1 - 0,42800 = 0,57200 \tag{1.19}$$

liefert den Zwischenwert

$$Q = \frac{0,018}{0,018 - 0,011875 \cdot 0,57200} = 1,606067, \tag{1.20}$$

die Tilgungszeit

$$t = \frac{\ln(1,606067)}{\ln(1,011875)} = 40,13439 \tag{1.21}$$

und die Summe der BD

$$DS(40,13439) = \frac{40,13439 \cdot 0,018 - 0,57200}{0,011875} = 12,667. \tag{1.22}$$

Somit sind die Sparerleistung

$$SL = GS(32) = 7,600 \tag{1.23}$$

und die Kassenleistung

$$KL = DS(40,13439) = 12,667 \tag{1.24}$$

bereits errechnet. Das $iSKLV$ ist der Quotient aus den beiden Werten. Es beträgt

$$iSKLV = \frac{7,600}{12,667} = 0,600 \quad \text{oder} \quad 60,0\%. \tag{1.25}$$

2. Aufgabe (35 Punkte)

Ein Bausparkollektiv aus 2%/4,5%-Verträgen von Ratensparern, die sämtlich eine Sparzeit von 30 Quartalen absolvieren, ist durch die Bestimmungsgrößen

Anspruch auf das Bauspardarlehen $BD = BS - BG$,

Darlehensgebühr $DG = 0,01 \cdot BD$ und

Tilgungszeit t der BD von 36 Quartalen

gekennzeichnet. Der Bestand befindet sich bei dauernd gleichhohem Neugeschäft im (erweiterten) statischen Beharrungszustand und setzt sich nach der BS des Neuzugangs aus folgenden Anteilen zusammen:

- 50% Darlehensnehmer mit einem vierteljährlichen Sparbeitrag $A(D)$ von 1,5% der BS, die am Ende der Sparzeit zugeteilt werden und sofort die volle BS in Anspruch nehmen,
- 20% Darlehensverzichter mit dem Sparbeitrag $A(V)$ = 2,4% und

- 30% Kündiger mit dem Sparbeitrag $A(K) = 0{,}6\%$, die alle ihr BG im Zeitpunkt 30 zurückgezahlt erhalten.

Stellen Sie nach den üblichen Formeln der Bausparmathematik für nachschüssige Quartalszahlungen die Kassengleichung auf und berechnen Sie

- Anlagegrad,
- Zuteilungsgrad,
- Anspargrad,
- Kündigungsquote,
- Darlehensverzichtsquote,
- Rückzahlungsquote II,
- Sparintensität I,
- Tilgungsintensität I,
- $iSKLV$ für die darlehensnehmenden Bausparer und
- kollektives $SKLV$ ($kSKLV$).

Lösung:

Die Ausgangsparameter sind

$$\begin{aligned} BS &= 1, && (2.1)\\ r &= 1{,}005 \quad \text{und} && (2.2)\\ q &= 1{,}01125. && (2.3) \end{aligned}$$

Die Darlehensnehmer erreichen nach 30 Quartalen ein Bausparguthaben von

$$BG(D,30) = 0{,}015 \cdot \frac{1{,}005^{30} - 1}{0{,}005} = 0{,}015 \cdot 32{,}28002 = 0{,}48420 \tag{2.4}$$

und steuern zum Kollektiv für $BS = 1$ die Guthabensumme

$$GS(D,30) = \frac{0{,}48420 - 30 \cdot 0{,}015}{0{,}005} = 6{,}8400 \tag{2.5}$$

bei.
Entsprechend ergibt sich für die Darlehensverzichter

$$BG(V,30) = 0{,}024 \cdot 32{,}28002 = 0{,}77472 \tag{2.6}$$

und

$$GS(V,30) = \frac{0{,}77472 - 30 \cdot 0{,}024}{0{,}005} = 10{,}9440 \tag{2.7}$$

sowie für die Kündiger

$$BG(K,30) = 0{,}006 \cdot 32{,}28002 = 0{,}19368 \tag{2.8}$$

und

$$GS(K,30) = \frac{0,19368 - 30 \cdot 0,006}{0,005} = 2,7360. \tag{2.9}$$

Folglich beträgt der Gesamtbestand an BG bei der Bausparkasse im statischen Beharrungszustand

$$GS(\text{ges}) = 0,5 \cdot 6,8400 + 0,2 \cdot 10,9440 + 0,3 \cdot 2,7360 = 6,4296 \tag{2.10}$$

Mit dem Bruttoanfangs-Bauspardarlehen der Darlehensnehmer von

$$BD(0) = (1 - 0,48420) \cdot 1,01 = 0,52096 \tag{2.11}$$

und dem Tilgungsbeitrag

$$B = BD(0) \cdot \frac{q-1}{q^t - 1} \cdot q^t = 0,52096 \cdot \frac{0,01125}{0,49592} \cdot 1,49592 = 0,017679, \tag{2.12}$$

letzterer abgeleitet aus der Grundgleichung der geometrischen Tilgung

$$D(0) \cdot q^t = B \cdot \frac{q^t - 1}{q^{-}1}, \tag{2.13}$$

ergibt sich die Darlehenssumme des Kollektivs, unmittelbar auf die Darlehensnehmer bezogen, zu

$$DS(\text{ges}) = 0,5 \cdot \frac{36 \cdot 0,017679 - 0,52096}{0,01125} = 5,1326. \tag{2.14}$$

Weitere Bestands- und Umsatzgrößen, die für die Berechnung der Kennzahlen benötigt werden, sind

$$BSNV = 30, \tag{2.15}$$

der Bestand an BS der nicht zugeteilten BV,

$$BSZV = 0,5 \cdot 36 = 18, \tag{2.16}$$

die BS der zugeteilten BV,

$$BSV = 0,2, \tag{2.17}$$

die BS der Darlehensverzichter,

$$BSK = 0,3, \tag{2.18}$$

die BS der Kündiger,

$$SPBK = 0,3 \cdot 30 \cdot 0,006 = 0,054, \tag{2.19}$$

die Sparbeiträge der Kündiger,

$$SP(\text{ges}) = 30 \cdot (0,5 \cdot 0,015 + 0,2 \cdot 0,024 + 0,3 \cdot 0,006) = 0,423, \tag{2.20}$$

die Sparbeiträge insgesamt,

$$GZ = i \cdot GS(\text{ges}) = 0,005 \cdot 6,4296 = 0,032148, \tag{2.21}$$

die Guthabenzinsen,

$$ZZM = SP(\text{ges}) + GZ + 0,5 \cdot BD(0) = 0,715628 \tag{2.22}$$

die (im Folgenden allerdings nicht benötigten) Zuflüsse zur Zuteilungsmasse.

Nunmehr ergeben sich zu

$$\frac{DS(\text{ges})}{GS(\text{ges})} = \frac{5,1326}{6,4296} = 0,7983 \tag{2.23}$$

oder 79,83% der Anlagegrad,

$$\frac{BSZV}{BS(\text{ges})} = \frac{0,5 \cdot 36}{30 + 18} = 0,3750 \tag{2.24}$$

oder 37,50% der Zuteilungsgrad,

$$\frac{GS(\text{ges})}{BSNV} = \frac{6,4296}{30} = 0,2143 \tag{2.25}$$

oder 21,43% der Anspargrad der nicht zugeteilten Verträge,

$$\frac{BSK}{BSNV} = \frac{0,3}{30} = 0,01 \tag{2.26}$$

oder 1,00% die Kündigungsquote,

$$\frac{BSV}{BSNV} = \frac{0,2}{30} = 0,0067 \tag{2.27}$$

oder 0,67% die Darlehensverzichtsquote,

$$\frac{0,3 \cdot BG(K,30)}{SP(\text{ges})} = \frac{0,0581}{0,423} = 0,1374 \tag{2.28}$$

oder 13,74% die Rückzahlungsquote II,

$$\frac{SP(\text{ges})}{BSNV} = \frac{0,423}{30} = 0,0141 \tag{2.29}$$

oder 1,41% die Sparintensität I pro Quartal,

$$\frac{0,5 \cdot BD(0)}{DS(\text{ges})} = \frac{0,26048}{5,1326} = 0,0508 \tag{2.30}$$

oder 5,08% die Tilgungsintensität I pro Quartal,

$$\frac{0,5 \cdot GS(D,30)}{DS(\text{ges})} = \frac{3,4200}{5,1326} = 0,6663 \tag{2.31}$$

oder 66,63% das $iSKLV$,

$$\frac{GS(\text{ges})}{DS(\text{ges})} = \frac{6,4296}{5,1326} = 1,2526 \tag{2.32}$$

oder 125,26% das $kSKLV$.

3. Aufgabe (15 Punkte)

Bei einem Bauspartarif mit 5%igen Darlehenszinsen jährlich, Monatsmodell der Darlehensverzinsung, 2% Darlehensgebühr, festem Darlehensanspruch von 50% der BS und 6‰ der BS monatlichem Tilgungsbeitrag B möchte die Bausparkasse auch Bauspardarlehen (BD) in Höhe von netto $a \cdot 50\%$ der BS mit $a = 1,2; 1,4; 1,6; 1,8$ und 2 gewähren, die Kassenleistung KL aber dabei nicht verändern.

a) Die Nullstelle welcher Funktion müßte bestimmt werden, wenn die zu den neuen Tarifvarianten gehörenden Größen Tilgungsbeitrag $B(a)$ und Tilgungszeit $t(a)$ exakt berechnet werden sollen?

b) Geben Sie Näherungswerte für $B(1,5)$ und $t(1,5)$ sowie $B(2)$ und $t(2)$ an, die sich ergeben, wenn jeweils ein Linearverlauf der Darlehenskurven unterstellt wird.

Lösung:

Zu a)

Es ist für den Ausgangstarif

$$j = 0,0041667, \tag{3.1}$$
$$q = 1,0041667, \tag{3.2}$$
$$D(0) = 0,51 \quad \text{für} \quad BS = 1, \tag{3.3}$$
$$B = 0,006 \tag{3.4}$$

und mit

$$Q = \frac{B}{B - j \cdot D(0)} = \frac{0,006}{0,006 - 0,0041667 \cdot 0,51} = 1,54838 \tag{3.5}$$
$$t = \frac{\ln Q}{\ln q} = \frac{\ln(1,54838)}{\ln(1,0041667)} = 105,148 \text{ Monate.} \tag{3.6}$$

Mithin beträgt für den originalen Bauspartarif die Kassenleistung

$$KL = \frac{t \cdot B - D(0)}{q-1} = \frac{105,148 \cdot 0,006 - 0,51}{0,0041667} = 29,0129. \tag{3.7}$$

Für ein Bruttoanfangs-Bauspardarlehen von $a \cdot D(0)$, das mit dem monatlichen Tilgungsbeitrag $B(a)$ in $t(a)$ Monaten getilgt wird, ergibt sich analog

$$KL(a) = \frac{t(a) \cdot B(a) - a \cdot D(0)}{q-1}. \tag{3.8}$$

Darin gilt bei vorgegebenem, in den ABB zu nennendem $B(a)$ wie in (3.5) bis (3.7)

$$Q(a) = \frac{B(a)}{B(a) - j \cdot a \cdot D(0)} \tag{3.9}$$

und

$$t(a) = \frac{\ln Q(a)}{\ln q}. \tag{3.10}$$

Übereinstimmende Kassenleistungen bedeutet

$$KL = KL(a), \tag{3.11}$$

d.h.

$$KL(a) = \frac{\frac{\ln Q(a)}{\ln q} \cdot B(a) - a \cdot D(0)}{q-1} = KL. \tag{3.12}$$

Daraus ergibt sich

$$F(B(a)) = KL \cdot (q-1) + a \cdot D(o) - \frac{\ln Q(a)}{\ln q} \cdot B(a) \tag{3.13}$$

als Bestimmungsgleichung für $B(a)$, deren Nullstelle eine volle Kompatibilität der Varianten a mit der Originalversion gewährleistet.

Zu b)

Die Annahme eines Linearverlaufs der Darlehenskurve führt zu der Annäherung

$$KL' = 0,5 \cdot D(0) \cdot t. \tag{3.14}$$

Angewendet auf den Originaltarif erhält man

$$KL'(1) = 0,5 \cdot 0,51 \cdot 105,148 = 26,8127. \tag{3.15}$$

Für $a = 1,5$ bzw. $a = 2$ soll dann gelten

$$KL'(1,5) = 0,5 \cdot 0,765 \cdot t(1,5) = 26,8127 \tag{3.16}$$

bzw.

$$KL'(2) = 0,5 \cdot 1,02 \cdot t(2) = 26,8127 \tag{3.17}$$

oder nach der einzigen Unbekannten t aufgelöst,

$$t(1,5) = 70,0985 \tag{3.18}$$

bzw.

$$t(2) = 52,5738. \tag{3.19}$$

Nach (2.12) gilt

$$B(a) = a \cdot D(0) \cdot \frac{q-1}{q^{t(a)}-1} \cdot q^{t(a)}, \tag{3.20}$$

d.h.

$$B(1,5) = 0,765 \cdot \frac{0,0041667}{0,33840} \cdot 1,33840 = 0,012607 \tag{3.21}$$

bzw.

$$B(2) = 1,02 \cdot \frac{0,0041667}{0,24434} \cdot 1,24434 = 0,021642 \tag{3.22}$$

Rundet man im Falle $a = 1,5$ auf 0,0125, so ergibt sich mit

$$\begin{aligned} Q(1,5) &= \frac{0,0125}{0,0125 - 0,0041667 \cdot 0,765} = 1,34229 && (3.23)\\ t'(1,5) &= \frac{\ln(Q(1,5))}{\ln q} = 70,7970 \qquad \text{und} && (3.24)\\ KL''(1,5) &= \frac{70,7970 \cdot 0,0125 - 0,765}{0,041667} = 28,7909 && (3.25) \end{aligned}$$

Im Falle $a = 2$ folgt aus der Rundung von B auf 0,0215

$$\begin{aligned} Q(2) &= \frac{0,0215}{0,0215 - 0,0041667 \cdot 1,02} = 1,24638 && (3.26)\\ t'(2) &= \frac{\ln(1,24638)}{\ln(1,0041667)} = 52,8679 \qquad \text{und} && (3.27)\\ KL''(2) &= \frac{52,8679 \cdot 0,0125 - 1,02}{0,041667} = 28,5141. && (3.28) \end{aligned}$$

4. Aufgabe (15 Punkte)

a) Entwickeln Sie die bausparmathematische Formel für die Guthabensumme GS im dynamischen Beharrungszustand eines Bestandes von Einmalsparern mit den Parametern E, r, p, s und t unter der Annahme der Höhenlage p^t für die gerade zugeteilte (und ausgezahlte) Gruppe.

b) Welche Formel für GS gilt im Fall $p = r$?

c) Welchen Wert nimmt die Darlehenssumme des dynamischen Beharrungszustands

$$DS = \frac{p}{p-q} \cdot \left[D(0) \cdot p^t - B \cdot \frac{p^t - 1}{p - 1} \right]$$

für $p = q$ an?

Lösung:

Zu a)

Da das Endguthaben mit der Höhenlage p^t als gerade abgeflossen gilt, beläuft sich die Summe der Bausparguthaben $SG(E)$ im dynamischen Beharrungszustand auf

$$\begin{aligned} SG(E) &= E \cdot \left[p^{t+1} \cdot r^{s-1} + p^{t+2} \cdot r^{s-2} + \ldots + p^{t+s-1} \cdot r^1 + p^{t+s} \cdot r^0\right] \\ &= E \cdot p^{t+s} \cdot \left[p^0 \cdot r^0 + p^{-1} \cdot r^1 + \ldots + p^{-s+2} \cdot r^{s-2} + p^{-s+1} \cdot r^{s-1}\right] \end{aligned} \tag{4.1}$$

und mit der von 0 bis $s-1$ laufenden Summe $\sum$

$$SG(E) = E \cdot p^{t+s} \cdot \sum \left(\frac{r}{p}\right)^k = E \cdot p^{t+s} \cdot \frac{\left(\frac{r}{p}\right)^s - 1}{\frac{r}{p} - 1} = E \cdot p^{t+s} \cdot \frac{r^s - p^s}{r - p} \tag{4.2}$$

Zu b)

Aus der zweiten Zeile von (4.1) ist direkt ablesbar

$$SG(E; p = r) = E \cdot p^{t+s} \cdot s. \tag{4.3}$$

Zu c)

Die für DS angegebene Formel ist nur für $p \neq q$ gültig. $DS(p = q)$ kann man jedoch bestimmen, indem man die Summation der Darlehensstände betrachtet und darin $p = q$ setzt. Das Bauspardarlehen k Quartale nach Auszahlung $D(k)$ hat die Höhenlage p^{t-k}. Also sind von 0 bis $t-1$ zu addieren die BD

$$q^{t-k} \cdot D(k) = q^{t-k} \cdot D(0) \cdot q^k - q^{t-k} \cdot B \cdot \frac{q^k - 1}{q - 1} = D(0) \cdot q^t - \frac{B}{q-1} \cdot \left[q^t - 1 - q^{t-k} + 1\right] \tag{4.4}$$

Das ergibt wegen

$$D(0) \cdot q^t = B \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} \tag{4.5}$$

$$q^{t-k} \cdot D(k) = \frac{B}{q-1} q^t \cdot (q^{-k} - q^{-t}). \tag{4.6}$$

Die Addition liefert dann

$$DS(p = q) = \frac{B}{q-1} \cdot \left[q \cdot \frac{q^t - 1}{q - 1} - t\right]. \tag{4.7}$$