

Bericht zur Prüfung im Mai 2008 über Bausparmathematik (Spezialwissen)

Eberhard Bertsch

Received: 21 Juli 2008 / Accepted: 21 Juli 2008 / Published online: 14 August 2008
© DAV / DGVFM 2008

Am 31. Mai 2008 führte die DAV die Prüfung über das Spezialwissen in Bausparmathematik durch. Sie bestand aus einer dreistündigen Klausur, in der drei Aufgaben zu lösen waren. Hilfsmittel waren außer einem Taschenrechner nicht zugelassen. Die Höchstpunktzahl aus den Aufgaben betrug insgesamt 180 Punkte. Die Klausur galt als bestanden, wenn mindestens 80 Punkte erreicht waren.

1. Aufgabe (80 Punkte)

Für einen Einmalpartarif gelten die Tarifgrößen BS (Bausparsumme), E (Einmalspareinlage bei Vertragsbeginn), r (Guthabenzinsfaktor), $D(0)$ (= fester, von der Ansparung unabhängiger Darlehensanspruch bei Zuteilung), q (Darlehenszinsfaktor), B (Tilgungsbeitrag quartalsweise nachschüssig), keine Gebühren.

- Geben Sie die Formel für das individuelle Sparer-Kassen-Leistungsverhältnis ($iSKLV$) der Einzelverträge bei Vorgabe der Sparzeit s an.
- Entwickeln Sie die Kassengleichung für den dynamischen Beharrungszustand dieses Bauspartarifes (nunmehr sei s die Sparzeit im dynamischen Beharrungszustand) für den Fall $p > 1$, $p \neq r$, $p \neq q$ unter der üblichen Annahme der Höhenlage p^t für die gerade zugeteilte und ausgezahlte Zugangsgruppe.
- Stellen Sie die Formeln für die zugehörigen bauspartechnischen Kenngrößen
– Sparintensität pro Quartal und
– Zuteilungsgrad
des dynamischen Beharrungszustandes zusammen.
- Verifizieren Sie den dynamischen Beharrungszustand gemäß Aufgabenteil b) für die Datenkonstellation

$$BS = 100; \quad E = 40; \quad r = 1,0025; \quad s = 14,7976;$$
$$D(0) = 50; \quad q = 1,005; \quad B = 2; \quad p = 1,01$$

und berechnen Sie für diese Daten das *iSKLV* der Einzelverträge gemäß Aufgabenteil a) und die Sparintensität des dynamischen Beharrungszustandes pro Quartal gemäß Aufgabenteil c).

Lösung

zu a)

Die Sparerleistung des Einmaleinlegers errechnet sich als Quotient aus Guthabenzinsen und Guthabenzinssatz:

$$SL = \frac{E \times (r^s - 1)}{r - 1}. \quad (1)$$

Die Kassenleistung ist der Quotient aus der Summe der Darlehenszinsen und dem Darlehenszinssatz:

$$KL = \frac{t \times B - D(0)}{q - 1}. \quad (2)$$

Hierbei errechnet sich die Tilgungszeit t folgendermaßen:

$$t = \frac{\ln Q}{\ln q}, \quad \text{wobei } Q = \frac{B}{B - D(0) \times (q - 1)}. \quad (3)$$

Mit (1) und (2) beträgt das individuelle Sparer-Kassen-Leistungsverhältnis

$$iSKLV = \frac{SL}{KL}. \quad (4)$$

zu b)

Mit der üblichen bausparmathematischen Bezeichnungswiese und Normierung der Höhenlage der Zugangsgenerationen ergeben sich für den dynamischen Beharrungszustand nach Bestimmung der Tilgungszeit t gemäß (3) die folgenden Kenngrößen:

Guthabensumme:

$$\begin{aligned} GS &= \sum_{k=0}^{s-1} E \times r^k \times p^{t+s-k} = E \times p^{t+s} \times \sum_{k=0}^{s-1} \left(\frac{r}{p}\right)^k \\ &= E \times p^{t+s} \times \frac{\frac{r^s}{p^s} - 1}{\frac{r}{p} - 1} = E \times p^{t+s} \times \frac{(r^s - p^s) \times p}{p^s \times (r - p)} \end{aligned}$$

also

$$GS = E \times p^{t+1} \times \frac{r^s - p^s}{r - p}. \quad (5)$$

Darlehenssaldensumme:

Die einzelnen Darlehensstände ohne Berücksichtigung der Neugeschäftsprogression betragen

$$D_k = D(0) \times q^k - B \times \frac{q^k - 1}{q - 1}, \quad k = 0, 1, \dots, t. \quad (6)$$

Unter Berücksichtigung der Höhenlage der jeweiligen Zugangsgeneration wird daraus im dynamischen Fall

$$D_k = \left(D(0) \times q^k - B \times \frac{q^k - 1}{q - 1} \right) \times p^{t-k}. \quad (7)$$

Mit (7) lautet die Summe der Darlehensstände im dynamischen Beharrungszustand

$$DS = \sum_{k=0}^{t-1} D_k = D(0) \times p^t \times \sum_{k=0}^{t-1} \left(\frac{q}{p}\right)^k - B \times \frac{p^t}{q-1} \sum_{k=0}^{t-1} \frac{q^k - 1}{p^k},$$

also

$$DS = D(0) \times p^t \times \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^t - 1}{\frac{q}{p} - 1} - B \times \frac{p^t}{q-1} \times \frac{\left(\frac{q}{p}\right)^t - 1}{\frac{q}{p} - 1} + B \times \frac{p^t}{q-1} \times \frac{\left(\frac{1}{p}\right)^t - 1}{\left(\frac{1}{p} - 1\right)}.$$

Dies ergibt

$$DS = D(0) \times p \times \frac{q^t - p^t}{q - p} - B \times \frac{p}{q-1} \times \frac{q^t - p^t}{q - p} + B \times \frac{p}{q-1} \times \frac{1 - p^t}{1 - p}. \quad (8)$$

Beachtet man (7) für $k = t$, d. h. $D(0) \times q^t = B \times \frac{q^t - 1}{q - 1}$, so ergibt sich aus (8)

$$DS = \frac{B \times p}{q - p} \times \frac{q^t - 1}{q - 1} - D(0) \times p \times \frac{p^t}{q - p} - \frac{B \times p}{q - 1} \times \frac{q^t}{q - p} + \frac{B \times p}{q - 1} \times \frac{p^t}{q - p} + \frac{B \times p}{q - 1} \times \frac{p^t}{p - 1} - \frac{B \times p}{(q - 1) \times (p - 1)}, \quad \text{d. h.}$$

$$DS = D(0) \times p \times \frac{p^t}{p - q} + \frac{-Bpp + Bp + Bpp^t p - Bpp^t + Bpp^t q - Bpp^t p - Bpq + Bpp}{(q - p) \times (q - 1) \times (p - 1)},$$

also

$$DS = D(0) \times p \times \frac{p^t}{p - q} + B \times p \times \frac{1 - p^t + p^t q - q}{(q - p) \times (q - 1) \times (p - 1)} \\ = D(0) \times p \times \frac{p^t}{p - q} - B \times p \times \frac{p^t - 1}{(p - q) \times (p - 1)},$$

und damit als vereinfachte Form von (8):

$$DS = \frac{p}{p - q} \times \left[D(0) \times p^t - B \times \frac{p^t - 1}{p - 1} \right]. \quad (9)$$

zu c)

Sparbeiträge in der dynamischen Beharrung:

Da im Einmalspartarif nur die gerade zugehende Sparergeneration Sparbeiträge leistet, ist

$$S = E \times p^{t+s} \quad (10)$$

Bausparsumme des nichtzugeleiteten Bestandes:

$$NZBV = BS \times (p^{t+s} + p^{t+s-1} + \dots + p^{t+1}),$$

also

$$NZBV = BS \times p^{t+1} \times \frac{p^s - 1}{p - 1}. \quad (11)$$

Aus (10) und (11) errechnet sich die Sparintensität im dynamischen Beharrungszustand zu

$$SI = \frac{S}{NZBV} = \frac{E \times p^{t+s} \times (p - 1)}{BS \times p^{t+1} \times (p^s - 1)}$$

also

$$SI = \frac{E}{BS} \times p^{s-1} \times \frac{p-1}{p^s-1}. \quad (12)$$

Zur Ermittlung des Zuteilungsgrades benötigt man den zugeteilten Bestand und den Gesamtbestand.

Bausparsumme des zugeteilten Bestandes:

Die Höhenlage der gerade ausgezahlten Generation ist p^t .

Die Höhenlage der letzten Generation vor Darlehenstilgung ist p .

Also:

$$ZBV = BS \times (p + \dots + p^t) = BS \times p \times \frac{p^t - 1}{p - 1}. \quad (13)$$

Gesamter Vertragsbestand:

$$BBV = BS \times (p + \dots + p^t + \dots + p^{t+s}),$$

also

$$BBV = BS \times p \times \frac{p^{t+s} - 1}{p - 1}. \quad (14)$$

Aus (13) und (14) ergibt sich als Zuteilungsgrad

$$ZG = \frac{ZBV}{BBV} = \frac{p^t - 1}{p^{t+s} - 1}. \quad (15)$$

zu d)

Zahlenwerte aus den Vorgaben:

$$BS = 100; \quad E = 40; \quad r = 1,0025; \quad s = 14,7976;$$

$$D(0) = 50; \quad q = 1,005; \quad B = 2; \quad p = 1,01.$$

Die Tilgungszeit errechnet sich aus (3): $t = 26,77299$ Quartale.

Hilfswerte:

$$p^t = 1,30526; \quad q^t = 1,14286; \quad r^s = 1,03764; \quad p^s = 1,15863.$$

Verifizierung des dynamischen Beharrungszustandes:

Gemäß (5) ergibt sich als Guthabensaldensumme $GS = 850,709066$.

Aus (8) (oder noch einfacher aus (9)) errechnet sich als Darlehensaldensumme

$$DS = 1.640,2404 - 13.121,9232 + 12.332,3902, \quad \text{also } DS = 850,707385.$$

Die minimale Differenz von GS und DS bestätigt den dynamischen Beharrungszustand für den angegebenen Datenkranz.

Ermittlung der Kennzahlen $iSKLV$ und Sparintensität:

Das $iSKLV$ ergibt sich aus (1), (2) und (4) mit $t = 26,77299$ zu

$$iSKLV = 0,84916254, \quad \text{also } iSKLV = 84,9\%.$$

Aus (12) errechnet sich für den dynamischen Beharrungszustand eine Sparintensität SI von $0,2892614 = 28,93\%$.

2. Aufgabe (30 Punkte)

- a) Beschreiben Sie stichwortartig, wie sich die von der deutschen Aufsichtsbehörde auf Antrag zugelassene Ausnahmeregelung gemäß § 1 Abs. 4 BspkV unterscheidet vom herkömmlichen Kontingent für Vorfinanzierungs- und Zwischenkredite aus Zuteilungsmitteln gemäß § 1 Abs. 1–3 BspkV und welche Verfahrensvoraussetzungen für die Genehmigung und Anwendung der Ausnahmeregelung gelten.
- b) Schildern Sie kurz, welche Größen in dem Meldeformular bei Anwendung der Ausnahmeregelung darzustellen sind und wie der Abgleich zum Nachweis einer ausreichenden Kollektivliquidität dann vorzunehmen ist.

Lösung

zu a)

§1 Abs.1–3 BSpkV sieht vor, dass bis zu 70 von Hundert der überschüssigen Zuteilungsmittel zur Gewährung von Vorfinanzierungs- und Zwischenkrediten eingesetzt werden können. Davon dürfen maximal 25% für Vorfinanzierungskredite verwendet werden (d. h. für Bausparverträge, bei denen das Mindestsparguthaben noch nicht erreicht ist). Rechtsverbindlich zugesagte Kredite sind zu 50% anzurechnen. Die kollektiv refinanzierten Vorfinanzierungs- und Zwischenkredite dürfen maximal eine Laufzeit von 48 Monaten haben, jedoch dürfen maximal 25% des Kontingents eine Laufzeit von 36 Monaten überschreiten.

Hingegen sind gemäß der Ausnahmeregelung der Aufsichtsbehörde Laufzeiten für kollektiv refinanzierte *ZD* und *VD* von bis zu 10 Jahren möglich. Voraussetzung ist der Liquiditätsnachweis mit einem geeigneten bauspartechnischen Simulationsmodell.

Es gelten dabei konkrete Mindestanforderungen für

- die Genehmigung durch die BaFin (einschließlich vorausgehendem Testat des Simulationsmodells durch einen Wirtschaftsprüfer),
- das Simulationsmodell selbst (Die BaFin hat Mindeststandards für bausparmathematische Simulationsmodelle festgelegt.),
- die Handhabung und die regelmäßige Überprüfung (Das Modell ist jährlich durch den Jahresabschlussprüfer zu testieren, Änderungen sind zu dokumentieren, ebenfalls zu testieren und der BaFin zu melden.),
- die nachzuweisende Mindestliquidität.

Das Simulationsmodell ist jährlich durch Backtests zu validieren. Für Abweichungen gibt es ein von der Abweichungshöhe abhängiges Eskalationsverfahren bis hin zur Rücknahme der Genehmigung für die Ausnahmeregelung.

zu b)

Im Meldeformblatt ist die per Simulation vorausgeschätzte Entwicklung der Bausparguthaben und der Bauspardarlehen tabellarisch darzustellen über einen Zeitraum, der die längsten kollektiv refinanzierten Vorausfinanzierungs- und Zwischendarlehen um mindestens drei Jahre übersteigt.

Die daraus abzulesende Entwicklung des Guthabenüberschusses ist von Quartal zu Quartal zu vermindern um einen Sicherheitspuffer, der 10% der jeweiligen Guthabenüberschüsse beträgt und der außerdem von Quartal zu Quartal zusätzlich um 0,4% des Guthabenstandes ansteigt.

Die so ermittelten „modellbasierten freien Bausparguthaben“ ergeben, nach Jahresbändern minimiert, die „kollektiv refinanzierbaren VD/ZD “.

Zum Nachweis einer ausreichenden Kollektivliquidität muss die Differenz zwischen den kollektiv refinanzierten VD und ZD einerseits (die höchstens so groß sein dürfen wie die zuvor festgestellten „Kollektiv refinanzierbaren ZD/VD “) und dem vollen Guthabenüberschuss andererseits durch liquide Anlagen bedeckt sein (Kassenbestand, Bundesbankguthaben, liquide Geldanlagen nach § 4 Abs. 3 BSpkG).

3. Aufgabe (70 Punkte)

Ein Bauspartarif **N** sieht im Normalverlauf vor, dass ein Bauspardarlehen $ND(0)$ zur Auszahlung kommt, mit dem Zinsfaktor q verzinst wird (übliche quartalsweise Darstellung der Bausparmathematik) und bis zur Schlusstilgung mit der nachschüssigen Quartalsrate B zu bedienen ist.

Eine Tarifvariante **V** sieht bei unveränderter Besparung vor, dass für das Anfangsdarlehen $VD(0)$ die dynamisierte Quartalsrate VB gezahlt wird, die sich quartalsweise mit einem vorgegebenen Progressionsfaktor p erhöht ($p > 1$, $p \neq q$).

- Geben Sie für den Tarif **N** die bausparmathematischen Formeln an
 - für die Entwicklung der Darlehensstände im Tilgungsverlauf,
 - für die Tilgungszeit und
 - für die Darlehenssaldensumme des statischen Beharrungszustandes.
- Leiten Sie auch für die Tarifvariante **V** mit Anfangsdarlehen $VD(0)$ und dynamischer Tilgung die Formeln her
 - für die Entwicklung der Darlehensstände im Tilgungsverlauf,
 - für die Tilgungszeit und
 - für die Darlehenssaldensumme des statischen Beharrungszustandes.
- Tarif **N** und Tarifvariante **V** sollen bauspartechnisch kompatibel sein. Hierzu wählt die Bausparkasse nicht nur als Tilgungsbeitrag $VB = B$, sondern setzt auch den Darlehensanspruch in beiden Tarifvarianten **N** und **V** unabhängig vom Anspargrad bei Zuteilung und in beiden Tarifgestaltungen identisch fest: $ND(0) = VD(0)$ (z. B. kurz mit $D(0)$ bezeichnet). Wie muss sich die Bewertungszahlrechnung (BZ gerechnet aus den Saldensummen) in den Tarifen **N** und **V** unterscheiden?

Lösung

zu a)

Bei konstantem Tilgungsbeitrag ergibt sich für die Darlehensstände im Tilgungsverlauf:

$$D_k = ND(0) \times q^k - B \times \frac{q^k - 1}{q - 1} \quad \text{für } k = 0, 1, \dots, t;$$

für die Tilgungszeit:

$$t = \frac{\ln Q}{\ln q} \quad \text{mit } Q = \frac{B}{B - ND(0) \times (q - 1)} \quad (16)$$

und für die Darlehensaldensumme des statischen Beharrungszustandes:

$$DSS = \frac{t \times B - ND(0)}{q - 1}. \quad (17)$$

zu b)

Darlehensstände im Tilgungsverlauf mit dynamischer Tilgung:

$$VD(0) = \text{Anfangsdarlehen}$$

$$VD(1) = VD(0) \times q - VB$$

$$VD(2) = VD(1) \times q - VB \times p = VD(0) \times q^2 - VB \times q - VB \times p$$

$$VD(3) = VD(2) \times q - VB \times p^2 = VD(0) \times q^3 - VB \times q^2 - VB \times p \times q - VB \times p^2$$

$$VD(4) = VD(3) \times q - VB \times p^3$$

$$= VD(0) \times q^4 - VB \times q^3 - VB \times p \times q^2 - VB \times p^2 \times q - VB \times p^3.$$

Daraus ist das allgemeine Bildungsgesetz erkennbar:

$$VD(k) = VD(0) \times q^k - VB \times \sum_{i=0}^{k-1} p^i \times q^{k-1-i} \quad \text{für } k = 1, 2, \dots, \quad \text{d. h.}$$

$$VD(k) = VD(0) \times q^k - VB \times q^{k-1} \times \sum_{i=0}^{k-1} \left(\frac{p}{q}\right)^i \quad \text{und damit}$$

$$VD(k) = VD(0) \times q^k - VB \times q^{k-1} \times \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^k - 1}{\frac{p}{q} - 1}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad \text{oder}$$

$$VD(k) = VD(0) \times q^k - VB \times \frac{p^k - q^k}{p - q}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (18)$$

Wegen $VD(0) \times q^0 - VB \times \frac{p^0 - q^0}{p - q} = VD(0)$ gilt die Darstellung in (18) auch für $k = 0$.

Tilgungszeit tV der Tarifvariante **V**:

Wegen $VD(tV) = 0$ muss gelten:

$$VD(0) \times q^{tV} = VB \times \frac{p^{tV} - q^{tV}}{p - q},$$

also

$$VD(0) = VB \times \frac{\left(\frac{p}{q}\right)^{tV} - 1}{p - q},$$

d. h.

$$VB \times \left(\frac{p}{q}\right)^{tV} = VD(0) \times (p - q) + VB.$$

Daraus ergibt sich als Tilgungszeit

$$tV = \frac{\ln \frac{VD(0) \times (p - q) + VB}{VB}}{\ln \left(\frac{p}{q}\right)}. \quad (19)$$

Darlehenssaldensumme im statischen Beharrungszustand für Tarifvariante **V**:

Da $VD(tV) = 0$, gilt für die Darlehenssaldensumme $DSSV$:

$$DSSV = \sum_{k=0}^{tV-1} VD(k) = \sum_{k=0}^{tV-1} VD(0) \times q^k - \frac{VB}{p-q} \times \sum_{k=0}^{tV-1} (p^k - q^k), \quad \text{also}$$

$$DSSV = VD(0) \times \frac{q^{tV} - 1}{q-1} - \frac{VB}{p-q} \times \left[\frac{p^{tV} - 1}{p-1} - \frac{q^{tV} - 1}{q-1} \right]. \quad (20)$$

zu c)

Die Variante **V** liefert bei gleichem Anfangsdarlehen $D(0)$ und gleichem (anfänglichem) Tilgungsbeitrag B wegen der progressiven Tilgung eine kürzere Tilgungszeit und eine kleinere Darlehenssaldensumme $DSSV$.

Die Bewertungszahlrechnung in Variante **V** ist deshalb mit einem zusätzlichen Bewertungszahlfaktor F auszustatten.

Hierzu ermittle man zunächst die Tilgungszeiten tN gemäß (16) und tV gemäß (19), die wegen des festen Darlehensanspruchs von der Ansparung unabhängig sind.

Hiermit berechne man dann gemäß (17) und (20) die Darlehenssaldensummen

$$DSS = \frac{t \times B - ND(0)}{q-1} \quad \text{für den Tarif N}$$

und

$$DSSV = VD(0) \times \frac{q^{tV} - 1}{q-1} - \frac{VB}{p-q} \times \left[\frac{p^{tV} - 1}{p-1} - \frac{q^{tV} - 1}{q-1} \right] \quad \text{für die Tarifvariante V.}$$

Der zusätzliche Bewertungszahlfaktor in Tarifvariante **V** beträgt dann

$$F = \frac{DSS}{DSSV}.$$