DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung Stochastik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 17. Mai 2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 4 Seiten.
- **Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.**

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus. Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1 (20 Punkte)

Sei $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ eine σ-Algebra, $X : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ sei $\mathcal{A}$-messbar und $X_0 : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ sei $\mathcal{C}$-messbar. Beweisen Sie:

(a) X_0 ist $\mathcal{A}$-messbar.

(b) Für alle $C \in \mathcal{C}$ gelte

$$\int_C X_0 \, dP = \int_C X \, dP. \tag{1}$$

Dann folgt für alle $\mathcal{C}$-messbaren $Z : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$

$$\int_\Omega Z X_0 \, dP = \int_\Omega Z X \, dP. \tag{2}$$

(c) Zeigen Sie, dass auch (1) aus (2) folgt.

Aufgabe 2 (20 Punkte)

Sei $X \sim N(0, 1)$ und $Y := |X|$ und sei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung.

(a) Bestimmen Sie den Wert von $P(Y \leq 1)$.

(b) Beweisen Sie, dass

$$P(Y \leq y) = \begin{cases} 2\Phi(y) - 1 & y > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

gilt.

(c) Bestimmen Sie die Dichte, Erwartungswert und Varianz von Y.

(d) Warum ist Y nicht normalverteilt?

Aufgabe 3 (20 Punkte)

Seien $X, Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen mit $E[X^2] < \infty$ und $Var(X|Y) > 0$. Sei $\sigma(Y)$ die von Y erzeugte σ-Algebra.

(a) Sei $Z : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ eine $\sigma(Y)$-messbare Zufallsvariable und sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar. Dann ist auch $g(Z)$ $\sigma(Y)$-messbar.

(b) Schließen Sie aus (a), dass

$$\frac{1}{\sqrt{Var(X|Y)}}$$

$\sigma(Y)$-messbar ist. Ohne Beweis können Sie verwenden, dass die Funktion $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) := \begin{cases} x^{-1/2} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$

messbar ist.

(c) Sei

$$Z = \frac{X - E(X|Y)}{\sqrt{Var(X|Y)}}$$

Bestimmen Sie $E(Z|Y)$, $Var(Z|Y)$, $E(Z)$ und $Var(Z)$.

Aufgabe 4 (20 Punkte)

Seien T_1, T_2 unabhängige Zufallsvariablen mit endlichen Erwartungswerten und positiven Varianzen τ_1^2, τ_2^2. Es gelte $E(T_1) = E(T_2) = \theta$. Wir interpretieren T_1, T_2 als erwartungstreue Schätzer für den Parameter θ.

(a) Zeigen Sie, dass $T := \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2$ für alle $\lambda \in [0,1]$ ein erwartungstreuer Schätzer für θ ist.

(b) Bestimmen Sie in (a) den Parameter λ so, dass T minimale Varianz besitzt.

$\left[\textit{Kontrollergebnis } \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2+\tau_2^2}\right]$.

(c) Seien $X_1, \ldots X_n, Y_1, \ldots, Y_m$ unabhängige Zufallsvariablen mit $X_i \sim N(\mu_1, \sigma^2)$ und $Y_j \sim N(\mu_2, \sigma^2)$. Seien S_x^2 bzw. S_y^2 die empirischen Varianzen der X_i bzw. Y_j.

Ohne Beweis können Sie verwenden, dass

$$\frac{n-1}{\sigma^2} S_x^2 \sim \chi^2_{n-1} \textit{ und } \frac{m-1}{\sigma^2} S_y^2 \sim \chi^2_{m-1}$$

gilt (Satz von Student).

(i) Zeigen Sie

$$E(S_x^2) = E(S_y^2) = \sigma^2, \quad Var\left(\frac{n-1}{\sigma^2} S_x^2\right) = 2(n-1), \quad Var\left(\frac{m-1}{\sigma^2} S_y^2\right) = 2(m-1).$$

(ii) Bestimmen Sie mit (a) und (b) einen erwartungstreuen Schätzer für σ^2 mit minimaler Varianz als Konvexkombination von S_x^2 und S_y^2.

Aufgabe 5 (20 Punkte)

Die Kosten für die Suche nach Programmierfehlern seien $X = T^2$ wobei $T \sim \text{Exp}(\lambda)$ verteilt sei.

(a) Sei F bzw. f die Verteilungsfunktion bzw. die Dichte von X. Bestimmen Sie F und weisen Sie nach, dass $f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}$ für alle $x > 0$ gilt.

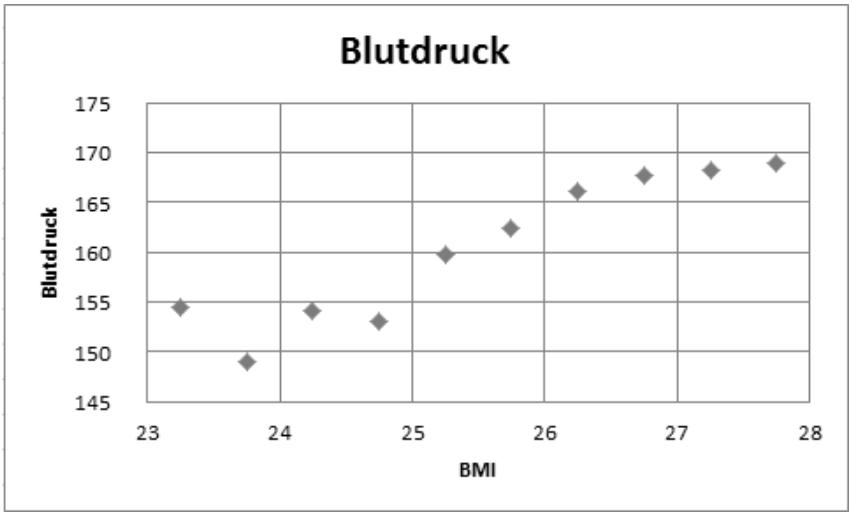
(b) Es wird angenommen, dass unabhängig voneinander n Teams Programmierfehler suchen mit den Kosten $X_1, \ldots, X_n$. Stellen Sie die Likelihoodfunktion auf und bestimmen Sie den ML-Schätzer für den Parameter λ.

(c) Beobachtet werden $x_1, \ldots, x_{10}$ mit

$$\frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i = 6,8, \quad \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} x_i^2 = 231, \quad \frac{1}{10}\sum_{i=1}^{10} \sqrt{x_i} = 1,4$$

Bestimmen Sie den ML-Schätzwert für λ bei dieser Stichprobe.

Aufgabe 6 (20 Punkte)



In einer Studie wurde der Zusammenhang zwischen Body Mass Index (BMI) x (Gewicht in kg/(Körpergröße in m)^2) und Blutdruck Y bei Männern untersucht. Es wird angenommen, dass der folgende Zusammenhang

$$Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i, \; i = 1, \ldots, 10$$

besteht. Die ε_i seien unabhängig und $N(0, \sigma^2)$-verteilt. Eine Stichprobe lieferte folgende Werte:

$$\overline{x} = 25,5; \qquad \sum_{i=1}^{10}(x_i - \overline{x})^2 = 20,625; \qquad \text{(BMI)}$$

$$\overline{y} = 160,4; \qquad \sum_{i=1}^{10}(y_i - \overline{y})^2 = 483,5; \qquad \text{(Blutdruck)}$$

$$\sum_{i=1}^{10}(y_i - \overline{y})(x_i - \overline{x}) = 93,7.$$

(a) Bestimmen Sie die Schätzer $\hat{a}$, $\hat{b}$ für a, b.

(b) Führen Sie für die Hypothese $H_0 : b = 0$ einen Test zum Niveau von $\alpha = 5$ % durch. Interpretieren Sie das Ergebnis.

(c) Eine Ärztin misst den Blutdruck von 175 eines Patienten mit einem BMI von 26. Grund zur Sorge besteht laut Lehrbuch, wenn der gemessene Blutdruck außerhalb des Normbereichs liegt. Im Normbereich liegen 95 Prozent der bei gesunden Personen gemessen Werte. Besteht in diesem Fall Grund zu Sorge?

Lösung Aufgabe 1[(a) 3 Punkte, (b) 14, (c) 3]

Zu (a)

Sei $B \in \mathcal{B}^1$. Da X_0 messbar ist, folgt $X_0^{-1}(B) \in \mathcal{C}$, also wegen $\mathcal{C} \subset \mathcal{A}$ auch $X_0^{-1}(B) \in \mathcal{A}$.

Zu (b)

Sei Z eine Treppenfunktion, also $Z = \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{C_i}$, wobei $C_i \in \mathcal{C}$ und $\alpha_i > 0$. Dann folgt laut Voraussetzung

$$\begin{aligned}\int_\Omega ZX_0\,dP &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{C_i} X_0\,dP = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{C_i} X_0\,dP \overset{(1)}{=} \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{C_i} X\,dP \\ &= \int_\Omega \sum_{i=1}^n \alpha_i 1_{C_i} X\,dP = \int_\Omega ZX\,dP.\end{aligned}$$

Somit gilt (2) für $\mathcal{C}$-messbare Treppenfunktionen Z.

Sei Z $\mathcal{C}$-messbar. Dann gibt es eine Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\mathcal{C}$-messbaren Treppenfunktionen mit $Z_n \geq 0$ und $Z_n \uparrow Z$. Dann folgt $0 \leq Z_n X_0 \uparrow ZX_0$ und $0 \leq Z_n X \uparrow ZX$. Ferner gilt wegen des oben Gezeigten auch

$$\forall n \in \mathbb{N}: \quad \int_\Omega Z_n X_0\,dP = \int_\Omega Z_n X\,dP.$$

Bildet man auf beiden Seiten den Grenzübergang $n \to \infty$, so folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz die Behauptung.

Zu (c)

Die Umkehrung gilt: Sei $C \in \mathcal{C}$. Die Abbildung $Z := 1_C$ ist dann $\mathcal{C}$-messbar und somit gilt

$$\int_C X_0\,dP = \int_\Omega 1_C X_0\,dP = \int_\Omega ZX_0\,dP \overset{(2)}{=} \int_\Omega ZX\,dP = \int_\Omega 1_C X\,dP = \int_C X\,dP.$$

Lösung Aufgabe 2 [(a) 4, (b) 4, (c) 10 (d) 2]

Zu (a)

$$\begin{aligned}P(Y \leq 1) &= P(-1 \leq X \leq 1) = \Phi(1) - \Phi(-1) = \Phi(1) - (1 - \Phi(1)) = 2\Phi(1) - 1 \\ &= 2 \cdot 0,8413 - 1 = 0,6826.\end{aligned}$$

Zu (b)

Da $Y = |X| \geq 0$ gilt, ist $P(Y \leq y) = 0$ für $y \leq 0$ offensichtlich. Sei $y > 0$. Es folgt

$$P(Y \leq y) = P(-y \leq X \leq y) = \Phi(y) - \Phi(-y) = 2\Phi(y) - 1.$$

Zu (c)

Differenziert man in (b) nach y ergibt sich für $y > 0$ und $\varphi(x) := \Phi'(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}$ die Dichte

$$\frac{d}{dy} P(Y \leq y) = 2\varphi(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}.$$

Mit dieser Dichte ergibt sich der Erwartungswert

$$E(Y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty y e^{-y^2/2}\, dy = -\frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2} \Big|_0^\infty = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}$$

Da $X \sim N(0,1)$ und $|X|^2 = X^2$ folgt

$$E(Y^2) = E(|X|^2) = E(X^2) = Var(X) + E(X)^2 = 1.$$

Damit folgt

$$Var(Y) = 1 - \frac{4}{2\pi} \approx 0,36$$

Zu (d)

Da die Zufallsvariable Y nicht negativ ist, kann Y nicht normalverteilt sein, da sie sonst auch negative Werte annehmen würde.

Lösung Aufgabe 3 [(a) 4, (b) 4, (c) 12]

Zu (a)

Sei $B \in \mathcal{B}$. Zu zeigen ist, dass $(g(Z))^{-1}(B) \in \sigma(Y) = Y^{-1}(\mathcal{B})$. Es gilt

$$(g(Z))^{-1}(B) = Z^{-1}(\underbrace{g^{-1}(B)}_{\in \mathcal{B}}) \in \sigma(Y),$$

da Z $\sigma(Y)$-messbar ist.

Zu (b)

$Var(X|Y) = E((X - E(X|Y))^2|Y)$ ist $\sigma(Y)$-messbar laut Definition als bedingter Erwartungswert gegeben Y. Wegen (a) ist $g(Var(X|Y))$ mit dem gegebenem g ebenfalls $\sigma(Y)$-messbar.

Zu (c)

Es gilt

$$\begin{aligned}
E(Z|Y) &= E(X - E(X|Y)|Y)\frac{1}{\sqrt{Var(X|Y)}} && \text{(wegen (b))}\\
&= \frac{1}{\sqrt{Var(X|Y)}}(E(X|Y) - \underbrace{E(E(X|Y)|Y)}_{=E(X|Y)}) = 0.\\
Var(Z|Y) &= E(Z^2|Y) - E(Z|Y)^2 = E(Z^2|Y) && \text{(da } E(Z|Y) = 0\text{)}\\
&= E\left(\frac{(X - E(X|Y))^2}{Var(X|Y)}\Big|Y\right) = \frac{1}{Var(X|Y)}E\left((X - E(X|Y))^2\Big|Y\right)\\
&= 1.
\end{aligned}$$

Mit dem Satz von der iterierten Erwartung ergibt sich weiter

$$\begin{aligned}
E(Z) &= E(E(Z|Y)) = E(0) = 0\\
Var(Z) &= Var(E(Z|Y)) + E(Var(Z|Y)) = E(0) + E(1) = 1.
\end{aligned}$$

Lösung Aufgabe 4 [(a) 3, (b) 6, (c) 4+2+5]

Zu (a)

Sei $\lambda \in [0, 1]$ und $T := \lambda T_1 + (1-\lambda)T_2$. Es gilt

$$E(T) = \lambda E(T_1) + (1-\lambda)E(T_2) = \lambda\theta + (1-\lambda)\theta = \theta$$

Zu (b)

Da T_1 und T_2 unabhängig sind, gilt

$$Var(T) = \lambda^2 Var(T_1) + (1-\lambda)^2 Var(T_2) = \lambda^2\tau_1^2 + (1-\lambda)^2\tau_2^2.$$

Um die linke Seite zu minimieren leiten wir nach λ ab und erhalten

$$\frac{d}{d\lambda}Var(T) = 2\lambda\tau_1^2 - 2(1-\lambda)\tau_2^2 = 2(\lambda(\tau_1^2 + \tau_2^2) - \tau_2^2).$$

In $\lambda = \dfrac{\tau_2^2}{\tau_1^2 + \tau_2^2}$ wechselt das Vorzeichen, es liegt ein Minimum vor. Damit besitzt

$$T = \frac{\tau_2^2}{\tau_1^2 + \tau_2^2}T_1 + \frac{\tau_1^2}{\tau_1^2 + \tau_2^2}T_2$$

minimale Varianz.

Zu (c)

(i) Die χ^2_{n-1}-Verteilung und $\Gamma\left(\frac{n-1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ stimmen überein. Es gilt

$$\begin{aligned}
\frac{n-1}{\sigma^2}E\left(S_x^2\right) &= E\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S_x^2\right) = \frac{(n-1)/2}{1/2} = n-1 \Longrightarrow E\left(S_x^2\right) = \sigma^2\\
\frac{(n-1)^2}{\sigma^4}Var\left(S_x^2\right) &= Var\left(\frac{n-1}{\sigma^2}S_x^2\right) = \frac{(n-1)/2}{1/4} = 2(n-1) \Longrightarrow Var\left(S_x^2\right) = \frac{2\sigma^4}{n-1}.
\end{aligned}$$

Analog erhält man $E\left(S_y^2\right) = \sigma^2$ und $Var\left(S_y^2\right) = \frac{2\sigma^4}{m-1}$.

(ii) Setze $T_1 := S_x^2$, $T_2 := S_y^2$. Mit $\lambda = \dfrac{Var(T_2)}{Var(T_1) + Var(T_2)}$ aus (b) ergibt sich

$$\lambda = \frac{\frac{2\sigma^4}{n-1}}{\frac{2\sigma^4}{n-1} + \frac{2\sigma^4}{m-1}} = \frac{\frac{1}{n-1}}{\frac{m-1+n-1}{(n-1)(m-1)}} = \frac{m-1}{(n+m-2)}$$
$$T = \lambda S_x^2 + (1-\lambda) S_y^2 = \frac{m-1}{(n+m-2)} S_x^2 + \frac{n-1}{(n+m-2)} S_y^2$$

Nach (a) ist T erwartungstreu, nach (b) besitzt T minimale Varianz.

Lösung Aufgabe 5 [(a) 6, (b) 12, (c) 2]

Zu (a)

Sei $X > 0$. Es gilt für die Verteilungsfunktion und die Dichte f von X

$$P(X \le x) = P(T^2 \le x) = P(T \le \sqrt{x}) = 1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}$$
$$f(x) = \frac{d}{dx}\left(1 - e^{-\lambda\sqrt{x}}\right) = \frac{1}{2\sqrt{x}} \lambda e^{-\lambda\sqrt{x}}.$$

Zu (b) Seien $X_1, \ldots, X_n \sim X$ die unabhängigen Suchkosten. Für $(x_1, \ldots, x_n) \in (0, \infty)^n$ ergibt sich

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^{n} \frac{\lambda}{2\sqrt{x_i}} \exp(-\lambda\sqrt{x_i}) \qquad \text{(Likelihood)}$$
$$\ell(\lambda) := \ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(-\ln(2\sqrt{x_i}) + \ln(\lambda) - \lambda\sqrt{x_i}\right)$$
$$\ell'(\lambda) = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{\lambda} - \sqrt{x_i}\right)$$
$$\ell''(\lambda) = -\frac{n}{\lambda^2} < 0$$
$$\ell'(\hat{\lambda}) = 0 \Longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{x_i}}.$$

Somit ist $\hat{\lambda} = \dfrac{n}{\sum_{i=1}^{n} \sqrt{X_i}}$ ML-Schätzer.

Zu (c)

$\hat{\lambda} = \frac{1}{1{,}4} \approx 0{,}7$

Lösung Aufgabe 6 [(a) 4, (b) 8, (c) 8]

Zu (a)

Es ergeben sich folgende Schätzwerte:

$$\hat{b} = \frac{93,7}{20,625} = 4,54$$
$$\hat{a} = 160,4 - 4,54 \cdot 25,5 = 44,55.$$

Zu (b)

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{8}\left(483,5 - \frac{93,7^2}{20,625}\right) = 57,82$$
$$\mathrm{se}(\hat{b}) = \sqrt{\frac{57,82}{20,625}} = 1,674$$
$$T = \frac{\hat{b} - b_0}{\mathrm{se}(\hat{b})} = \frac{4,54}{1,674} = 2,71.$$

H_0 wird abgelehnt, denn $|T| > t_{8;0,975} = 2,308$. Somit wird die Hypothese, dass der Blutdruck nicht vom Body Maß Index abhängt, verworfen.

Zu (c)

Der geschätzte Erwartungswert für den Blutdruck bei einem BMI von 26 ist $\hat{a} + 26\hat{b} \approx 162,59$. Die Definition des Normbereichs entspricht dem Prognoseintervall für einen BMI von 26. Für die Breite des Prognoseintervalls benötigen wir

$$\Delta^2 := \mathrm{se}(\hat{a} + \hat{b}x)^2 + \hat{\sigma}^2 = \hat{\sigma}^2\left(1 + \frac{1}{n} + \frac{(x-\overline{x})^2}{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}\right)$$
$$= 57,82\left(1 + \frac{1}{10} + \frac{(26-25,5)^2}{20,625}\right) = 64,30.$$

Die Grenzen des Prognoseintervalls sind

$$\hat{a} + 26\hat{b} + t_{8;0,975}\sqrt{\Delta^2} \approx 162,59 + 2,308 \cdot 8 \approx 181,03,$$
$$\hat{a} + 26\hat{b} - t_{8;0,975}\sqrt{\Delta^2} \approx 162,59 - 2,308 \cdot 8 \approx 144,13.$$

Der gemessene Blutdruck ist nicht besorgniserregend, da er innerhalb des 95 % Prognoseintervalls liegt.