DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung Stochastik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 18. Mai 2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 7 Seiten.
- **Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.**

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus. Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1 (24 Punkte)

(a) Sei $f : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$ stetig und monoton fallend. Beweisen Sie

$$\lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f(x^n) d\lambda(x) = f(0).$$

(b) Seien $A_n \in \mathcal{A}$, $n \in \mathbb{N}$, paarweise disjunkt, $A := \bigcup_{n\geq 1} A_n$ und $f : \Omega \longrightarrow [0,\infty)$ messbar. Beweisen Sie

$$\int_A f d\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{A_n} f d\mu.$$

Lösung Aufgabe 1

Zu (a)

Für $x \in [0,1)$ gilt $0 \leq x^{n+1} \leq x^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Damit folgt $0 \leq f(x^n) \leq f(x^{n+1})$, da f monoton fällt und $\lim_{n\to\infty} f(x^n) = f(0)$, da f stetig ist. Seien $g_n, g : [0,1] \longrightarrow [0,\infty)$, $g_n(x) = f(x^n)$, $g(x) = \begin{cases} f(0) & \text{falls } x \in [0,1) \\ f(1) & x = 1 \end{cases}$. Laut Definition gilt $0 \leq g_n \uparrow g$ fast überall und mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} f(x^n) d\lambda(x) &= \lim_{n\to\infty} \int_{[0,1]} g_n(x) d\lambda(x) = \int_{[0,1]} \lim_{n\to\infty} g_n(x) d\lambda(x) \\ &= \int_{[0,1]} g(x) d\lambda(x) = f(0)\lambda([0,1)) + f(1)\lambda(\{1\}) = f(0). \end{aligned}$$

Zu (b)

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_n := \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}$, $g := \sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k}$. Es gilt $g = 1_A$:

$$1_A(x) = 1 \iff x \in A \iff \underset{k_0 \in \mathbb{N}}{\exists!}\ x \in A_{k_0} \iff g(x) = \sum_{k=1}^{\infty} 1_A(x) = 1_{A_{k_0}}(x) = 1.$$

Ferner gilt $0 \leq g_n \uparrow g\, (n \to \infty)$ und wegen $f \geq 0$ auch $0 \leq f g_n \uparrow f g\, (n \to \infty)$. Damit folgt mit dem Satz von der monotonen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f g_n \, d\mu = \int_\Omega f g \, d\mu = \int_A f \, d\mu.$$

Die Behauptung folgt nun wegen

$$\int_\Omega f g_n \, d\mu = \int_\Omega f \sum_{k=1}^n 1_{A_k} \, d\mu = \sum_{k=1}^n \int_\Omega f 1_{A_k} \, d\mu = \sum_{k=1}^n \int_{A_k} f \, d\mu.$$

Aufgabe 2 (24 Punkte)

Ein Stab der Länge L werde zufällig in zwei Teile zerbrochen. Die Bruchstelle wird mit einer Zufallsvariablen $X \sim U(0,L)$ modelliert.

(a) Sei $Y := \min(X, L-X)$ die Länge des kürzeren Bruchstücks. Bestimmen Sie den Erwartungswert von Y.

(b) Sei Z die Länge des längeren Bruchstücks. Bestimmen Sie $P(Z \leq z)$ für $z \in \left(\frac{L}{2}, L\right)$ und schließen Sie daraus, dass $Z \sim U\left(\frac{L}{2}, L\right)$ gilt.

(c) Bestimmen Sie den Erwartungswert von $\frac{Y}{Z}$ (kürzeres durch längeres Stück).

Lösung Aufgabe 2

Zu (a)

$$E(Y) = \frac{1}{L}\int_0^L \min(x, L-x)\, dx = \frac{1}{L}\left(\int_0^{L/2} x\, dx + \int_{L/2}^L (L-x)\, dx\right) = \frac{2}{L}\int_0^{L/2} x\, dx = \frac{L}{4}$$

Zu (b)

Es gilt $Z = \max(X, L-X)$. Für $z \in \left(\frac{L}{2}, L\right)$ erhalten wir

$$\begin{aligned} P(Z \leq z) &= P(\max(X, L-X) \leq z) = P(L-z \leq X \leq z) \\ &= P(X \leq z) - P(X \leq L-z) = \frac{z}{L} - \frac{L-z}{L} = \frac{2z-L}{L} = \frac{z-\frac{L}{2}}{\frac{L}{2}} \end{aligned}$$

also die Verteilungsfunktion einer $U\left(\frac{L}{2}, L\right)$-verteilten Zufallsvariablen.

Zu (c)

Es gilt $Y = L - Z$ und somit

$$\begin{aligned} E\left(\frac{Y}{Z}\right) &= E\left(\frac{L-Z}{Z}\right) = E\left(\frac{L}{Z} - 1\right) = \int_{\frac{L}{2}}^L \left(\frac{L}{z} - 1\right)\frac{2}{L}\, dz = \frac{2}{L}\left[L\ln(L) - L\ln\left(\frac{L}{2}\right) - \frac{L}{2}\right] \\ &= \frac{2}{L}\left[L\ln\left(\frac{L}{L/2}\right) - \frac{L}{2}\right] = 2\ln 2 - 1 \approx 0,39. \end{aligned}$$

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Gegeben seien die Zufallsvariablen $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0$ und $\Theta : \Omega \longrightarrow [0,1]$. Sei $m \in \mathbb{N}$ und es gelte $P(\Theta \leq \vartheta) = \vartheta^m$ für $\vartheta \in (0,1)$.
Für gegebenes $\vartheta \in (0,1)$, sei $N \sim NB(1, \vartheta)$, d.h. N gegeben $\Theta = \vartheta$ besitzt die die bedingte Dichte $f(\cdot|\vartheta) : \mathbb{N}_0 \longrightarrow [0,1)$ mit $f(k|\vartheta) = \vartheta(1-\vartheta)^k$.

(a) Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte von N und Θ (bezüglich dem Produktmaß aus Zählmaß auf $\mathbb{N}_0$ und Lebesguemaß).

(b) Bestimmen Sie die bedingte Dichte von Θ gegeben $N = k$.

Hinweis: Für $p, q \in \mathbb{N}_0$ *gilt* $\int_0^1 x^p (1-x)^q \, dx = \frac{p!q!}{(p+q+1)!}$.

(c) Bestimmen Sie $E(\Theta|N)$.

Lösung Aufgabe 3

Zu (a)

Die Dichte f_Θ von Θ ist gegeben durch $f_\Theta(\vartheta) = m\vartheta^{m-1} \cdot 1_{(0,1)}(\vartheta)$. Für $k \in \mathbb{N}_0$, $\vartheta \in (0,1)$ gilt

$$f(k|\vartheta) = \frac{f(k,\vartheta)}{f_\Theta(\vartheta)} \Longrightarrow f(k,\vartheta) = m\vartheta^m (1-\vartheta)^k 1_{(0,1)}(\vartheta).$$

Zu (b)

Die Wahrscheinlichkeitsfunktion von N ist gegeben durch

$$P(N=k) = \int_{\mathbb{R}} f(k,\vartheta)\, d\vartheta = m \int_0^1 \vartheta^m (1-\vartheta)^k \, d\vartheta = m \frac{m!k!}{(k+m+1)!}.$$

Damit folgt für $\vartheta \in (0,1)$, $k \in \mathbb{N}_0$

$$f(\vartheta|N=k) = \frac{f(k,\vartheta)}{P(N=k)} = \vartheta^m (1-\vartheta)^k \frac{(k+m+1)!}{k!m!}.$$

Zu (c)

$$\begin{aligned} E(\Theta|N=k) &= \int_0^1 \vartheta f(\vartheta|N=k)\, d\vartheta = \frac{(k+m+1)!}{k!m!} \int_0^1 \vartheta^{m+1}(1-\vartheta)^k \, d\vartheta \\ &= \frac{(k+m+1)!}{k!m!} \cdot \frac{(m+1)!k!}{(k+m+2)!} = \frac{m+1}{k+m+2}. \end{aligned}$$

Damit folgt $E(\Theta|N) = \frac{m+1}{N+m+2}$.

Aufgabe 4 (24 Punkte)

Ein Versicherungsbestand mit Volumen $v \in \mathbb{N}$ (z.B. Anzahl Versicherungsnehmer) wird durch die Schadenzahl $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0$ und die Frequenz $Z := \frac{N}{v}$ modelliert. Dabei wird $N \sim \text{Poi}(\lambda v)$ mit $\lambda > 0$ angenommen.

(a) Bestimmen Sie $E(Z)$ und $Var(Z)$.

(b) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von Z.

(c) Beobachtet werden unabhängige Realisierungen von $Z_1, \ldots, Z_n$ (Frequenzen) und Volumina $v_1, \ldots v_n$, insbesondere gilt also $Z_i v_i \sim \mathrm{Poi}(\lambda v_i)$ für dasselbe $\lambda > 0$.

(i) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion (also die gemeinsame Zähldichte) von $(Z_1, \ldots, Z_n)$.

(ii) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer für λ.

(iii) Gegeben seien die folgenden Beobachtungen:

i	1	2	3	4	5	6	Σ
z_i	$2/7$	$1/3$	$3/11$	$1/10$	$1/3$	$1/8$	
v_i	14	12	11	10	9	8	64
$v_i z_i$	4	4	3	1	3	1	16

Bestimmen Sie einen ML-Schätzwert für λ.

Lösung Aufgabe 4

Zu (a)

$$E(N) = Var(N) = \lambda v \qquad \text{(da } N \sim \mathrm{Poi}(\lambda v))$$

$$E(Z) = E\left(\frac{N}{v}\right) = \frac{E(N)}{v} = \lambda$$

$$Var(Z) = Var\left(\frac{N}{v}\right) = \frac{Var(N)}{v^2} = \frac{\lambda}{v}.$$

Zu (b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$.

$$P(Z = k/v) \quad = \quad P(Zv = k) = e^{-\lambda v}\frac{(\lambda v)^k}{k!}.$$

Zu (c)

(i) Für alle z_i mit $P(Z_i = z_i) > 0$ gibt es ein $k_i (:= z_i v_i) \in \mathbb{N})$ mit

$$\{Z_i = z_i\} = \{Z_i v_i = z_i v_i\} = \{N_i = k_i\}.$$

Aus der Unabhängigkeit ergibt sich nun

$$P\left(\bigcap_{i=1}^n \{Z_i = z_i\}\right) = P\left(\bigcap_{i=1}^n \{N_i = k_i\}\right) = \prod_{i=1}^n P(N_i = k_i) = \prod_{i=1}^n \exp(-\lambda v_i)\frac{(\lambda v_i)^{k_i}}{k_i!}$$

also

$$L(\lambda) \quad = \quad \prod_{i=1}^n e^{-\lambda v_i}\frac{(\lambda v_i)^{k_i}}{k_i!}.$$

(ii)

$$\begin{aligned}
\ell(\lambda) &:= \ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{n}(-\lambda v_i + z_i v_i \ln(\lambda v_i) - \ln(z_i v_i!)) \\
\frac{d}{d\lambda}\ell(\lambda) &= -\sum_{i=1}^{n} v_i + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} z_i v_i = -\sum_{i=1}^{n} v_i + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{n} v_i z_i \\
\ell''(\lambda) &= -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{n} v_i z_i < 0 \\
\ell'(\hat{\lambda}) &= 0 \Longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i z_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}.
\end{aligned}$$

Somit ist $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} v_i Z_i}{\sum_{i=1}^{n} v_i}$ ML-Schätzer.

(iii) Mit den Daten ergibt sich der Schätzwert $\hat{\lambda} = \frac{16}{64} = \frac{1}{4}$.

Aufgabe 5 (24 Punkte)

Seien $X_1, \ldots, X_n, X_{n+1} \sim N(\mu, \sigma^2)$ unabhängige Zufallsvariablen. Ziel ist es aus den Beobachtungen $X_1, \ldots, X_n$ ein Prognoseintervall für X_{n+1} zu konstruieren, wobei μ als unbekannt und σ^2 als bekannt vorausgesetzt wird. Sei $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$.

(a) Bestimmen Sie die Verteilung von $\overline{X}$ und $X_{n+1} - \overline{X}$.

(b) Beweisen Sie, dass $\frac{X_{n+1} - \overline{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$ standardnormaverteilt ist.

(c) Bestimmen Sie ein Prognoseintervall für X_{n+1} zum Niveau $1-\alpha$ für $\alpha \in (0,1)$, das symmetrisch um $\overline{X}$ ist (d.h. ein Intervall $I(\overline{X})$ mit $P\left(X_{n+1} \in I(\overline{X})\right) = 1-\alpha$).

(d) Sie können davon ausgehen, dass die mittlere Temperatur des Mai normalverteilt ist und die mittleren Temperaturen des Monats Mai jeweils unabhängig voneinander und identisch verteilt sind. Die Standardabweichung wird mit $1,5°$ C als bekannt vorausgesetzt.

Temperaturmessungen ergaben in den Jahren 2011-2023 eine mittlere Temperatur von $13,1°$ C für den Monat Mai. Bestimmen Sie hierfür das Prognoseintervall aus (c) zu einem Konfidenzniveau von 90 % für die mittlere Temperatur im Mai 2024 (Genauigkeit: in ° C, eine Nachkkommastelle.)

Lösung Aufgabe 5

Zu (a)

$\overline{X}$ und $X_{n+1}-\overline{X}$ sind Linearkombinationen von unabhängigen, normalverteilten Zufallsvariablen und somit auch normalverteilt. Es gilt

$$\begin{aligned}
E\left(\overline{X}\right) &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(X_i) = \mu \\
Var\left(\overline{X}\right) &= \frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = \frac{\sigma^2}{n} \text{ da } (X_i)_{i=1,\dots,n} \text{ unabhängig} \\
E\left(X_{n+1}-\overline{X}\right) &= E\left(X_{n+1}\right) - E\left(\overline{X}\right) = \mu - \mu = 0 \\
Var\left(X_{n+1}-\overline{X}\right) &= Var\left(X_{n+1}\right) + Var\left(-\overline{X}\right) = \frac{\sigma^2}{n} + \sigma^2 \\
&= \sigma^2\left(\frac{n+1}{n}\right) \text{ da } X_{n+1} \text{ und } \overline{X} \text{ unabhängig.}
\end{aligned}$$

Zu (b)

Die Zufallsvariable

$$\frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}$$

ist ein Vielfaches einer normalverteilten Zuvallsvariablen und daher ebenfalls normalverteilt. Wegen (a) ist der Erwartungswert 0 und die Varianz 1.

Zu (c)

Gesucht ist $c > 0$ so, dass gilt:

$$\begin{aligned}
1-\alpha &= P\left(\overline{X}-c \le X_{n+1} \le \overline{X}+c\right) = P\left(-c \le X_{n+1}-\overline{X} \le c\right) \\
&= P\left(-\frac{c}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}} \le \frac{X_{n+1}-\overline{X}}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}} \le \frac{c}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\right) \\
&= 2\Phi\left(\frac{c}{\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}}\right) - 1.
\end{aligned}$$

Löst man die sich ergebende Gleichung nach c auf ergibt sich

$$c = u_{1-\alpha/2}\,\sigma\sqrt{\frac{n+1}{n}}.$$

Zu (d)

Mit $\alpha = 0,1$, $n = 13$ ergibt sich $c = 1,64 \cdot 1,5\sqrt{1+1/13} \approx 2,6°$ C, also das Prognoseintervall $\left[\frac{105}{10}, \frac{157}{10}\right]$.