DAV

Deutsche Aktuarvereinigung e.V.

Zulassungsprüfung Stochastik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 12. Oktober 2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 7 Seiten.
- **Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.**

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus. Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1 (24 Punkte)

(a) *Sei $f : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ eine Treppenfunktion mit*

$$\int_\Omega f d\mu = 0.$$

Beweisen Sie, dass $f = 0$ fast überall gilt.

(b) *Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine punktweise konvergente Folge messbarer Funktionen $f_n : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ mit Grenzwert $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte $f_n = 0$ fast überall. Beweisen Sie, dass dann auch $f = 0$ fast überall gilt.*

(c) *Sei $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ messbar mit*

$$\int_\Omega |f| d\mu = 0.$$

Zeigen Sie mit Hilfe von (a) und (b), dass $f = 0$ fast überall gilt.

Lösung Aufgabe 1 [je 8 Punkte]

Zu (a)

Ist $f \geq 0$ eine Treppenfunktion, so gibt es $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n$ mit $f = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ und

$$0 = \int_\Omega f \, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i).$$

Somit gilt für alle $i = 1, \ldots, n$

$$\alpha_i \mu(A_i) = 0 \text{ folglich } \alpha_i = 0 \text{ oder } \mu(A_i) = 0.$$

Damit ist

$$A := \bigcup_{i\in\{1,\ldots,n\}, \alpha_i>0} A_i$$

als endliche Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge, und es gilt $\{f \neq 0\} \subseteq A$. Damit gilt $f = 0$ fast überall.

Zu (b)

Nach Voraussetzung ist für alle $n \in \mathbb{N}$ die Menge $B_n := \{f_n \neq 0\} \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge. Als abzählbare Vereinigung von Nullmengen ist auch die Menge $B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n$ eine Nullmenge. Wegen der punktweisen Konvergenz der f_n gilt $\{f \neq 0\} \subseteq B$, also ist auch die Menge $\{f \neq 0\} \in \mathcal{A}$ eine Nullmenge.

Zu (c)

Die Funktion $|f|$ ist messbar und es gilt $|f| \geq 0$. Dann gibt es eine Folge von Treppenfunktionen mit $g_n \uparrow |f|$, $g_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$0 \leq \int_\Omega g_n \, d\mu \leq \int_\Omega |f| \, d\mu = 0 \text{ und somit } \int_\Omega g_n \, d\mu = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt mit (a) $g_n = 0$ fast überall für alle $n \in \mathbb{N}$ und mit (a) folgt $|f| = 0$ fast überall und somit auch $f = 0$ fast überall.

Aufgabe 2 (24 Punkte)

Der aktuelle Wert einer Aktie sei $x_0 > 0$. Die Zufallsvariable $X : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$ sei der Wert der Aktie nach dem Ablauf eines Jahres. Die relative Änderung R ist durch $R := \frac{X}{x_0}$ definiert. Wir gehen davon aus, dass $\ln(R) \sim N(\mu, \sigma^2)$ gilt.

(a) *Beweisen Sie, dass $P(R \leq r) = \Phi\left(\frac{\ln(r)-\mu}{\sigma}\right)$ gilt. Φ ist hierbei die Verteilungsfunktion der Standardnormal-Verteilung.*

(b) *Bestimmen Sie für $\mu = 0,05$ und $\sigma^2 = 0,0049$ die Wahrscheinlichkeit, dass R*

(i) unter 1,03 (ii) über 1,07 (iii) zwischen 1,03 und 1,07

liegt.

(c) (i) *Die Zufallsvariable $V := x_0 - X$ sei der Verlust aus der Aktie. Bestimmen Sie $v_0 \in \mathbb{R}$ so, dass mit einer Wahrscheinlichkeit von $\varepsilon \in (0, 1)$ der Verlust V den Wert v_0 überschreitet.*

(ii) *Was ergibt sich für v_0 in (i) mit $\varepsilon = 0,01$, $\mu = 0,05$ und $\sigma^2 = 0,0049$?*

Lösung Aufgabe 2 [(a) 5, (b) 9, (c,i) 8, (c,ii) 2]

Zu (a)

Wegen $\ln(R) \sim N(\mu, \sigma^2)$ ist die Standardisierung von $\ln(R)$ standardnormal verteilt, also

$$P(R \leq r) = P(\ln(R) \leq \ln(r)) = P\left(\frac{\ln(R)-\mu}{\sigma} \leq \frac{\ln(r)-\mu}{\sigma}\right) = \Phi\left(\frac{\ln(r)-\mu}{\sigma}\right).$$

Zu (b)

Da $\ln(R)$ stetig verteilt ist gilt

(i) $$P(R < 1,03) = \Phi\left(\frac{\ln(1,03)-0,05}{0,07}\right) \approx \Phi(-0,29) = 1-\Phi(0,29) = 0,3859$$

(ii) $$P(R > 1,07) = 1-\Phi\left(\frac{\ln(1,07)-0,05}{0,07}\right) \approx 1-\Phi(0,25) = 0,4013$$

(iii) $$P(1,03 \leq R \leq 1,07) = P(R \leq 1,07) - P(R \leq 1,03) \approx 0,5987 - 0,3859 = 0,2128.$$

Zu (c)

(i) Sei $\varepsilon > 0$. Gesucht ist v_0 mit $P(V > v_0) = \varepsilon$.

$$\begin{aligned}\varepsilon &= P(V > v_0) = P(x_0 - X > v_0) = P(X < x_0 - v_0) = P(X \leq x_0 - v_0)\\ &= P\left(\frac{X}{x_0} \leq 1 - \frac{v_0}{x_0}\right) = P\left(R \leq 1 - \frac{v_0}{x_0}\right) \overset{(a)}{=} \Phi\left(\frac{\ln\left(1 - \frac{v_0}{x_0}\right) - \mu}{\sigma}\right)\end{aligned}$$

Löst man die sich ergebende Gleichung nach v_0 auf ergibt sich

$$\begin{aligned}\ln\left(1 - \frac{v_0}{x_0}\right) &= \mu + u_\varepsilon \sigma\\ v_0 &= (1 - \exp(\mu + u_\varepsilon \sigma))\, x_0.\end{aligned}$$

wobei u_ε das ε Quantil der Standardnormalverteilung ist.

(ii) Mit $\varepsilon = 0,01$, $\mu = 0,05$, $\sigma = \sqrt{0,0049} = 0,07$ ergibt sich $u_{0,01} = -u_{0,99} = -2,33$, damit

$$v_0 = \left(1 - e^{0,05 - 2,33 \cdot 0,07}\right) x_0 = 0,1069 x_0$$

Aufgabe 3 (24 Punkte)

Gegeben seien die Zufallsvariablen $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0$ und $\Theta : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$. Es gelte $\Theta \sim \Gamma(\alpha, \alpha)$ für $\alpha > 0$.
Für gegebenes $\vartheta > 0$, sei $N \sim Poi(\vartheta)$, d.h. N gegeben $\Theta = \vartheta$ besitzt die bedingte Zähldichte $f(\cdot|\vartheta) : \mathbb{N}_0 \longrightarrow [0, 1)$ mit $f(k|\vartheta) = e^{-\vartheta} \frac{\vartheta^k}{k!}$.

(a) Bestimmen Sie $E(N|\Theta)$ und $Var(N|\Theta)$.

(b) Bestimmen Sie $E(N)$ und $Var(N)$.

(c) Beweisen Sie, dass $N \sim NB\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+1}\right)$ gilt.
Hinweis: es gilt $\frac{\Gamma(x+n)}{\Gamma(x)n!} = \binom{x+n-1}{n}$ für $x > 0$, $n \in \mathbb{N}_0$, $\alpha > 0$

(d) Bestimmen Sie $Cov(N, \Theta)$.

(e) Sind N und Θ unabhängig?

Lösung Aufgabe 3 [(a) 4, (b) 5, (c) 8, (d) 6, (e) 1]

(a) $E(N|\Theta) = \Theta$, $Var(N|\Theta) = \Theta$

(b) $E(N) = E(E(N|\Theta)) = E(\Theta) = E(\Theta) = 1$

$$Var(N) = E(Var(N|\Theta)) + Var(E(N|\Theta)) = E(\Theta) + Var(\Theta) = 1 + Var(\Theta) = 1 + \frac{1}{\alpha}.$$

Zu (c)

Sei f_Θ die Dichte der $\Gamma(\alpha,\alpha)$-Verteilung. Es gilt

$$\begin{aligned}
P(N=k) &= \int_{\mathbb{R}} f(k|\vartheta) f_\Theta(\vartheta)\,d\vartheta = \int_0^\infty e^{-\vartheta}\frac{\vartheta^k}{k!}\frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\vartheta^{\alpha-1}e^{-\alpha\vartheta}d\vartheta = \\
&= \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{1}{k!}\int_0^\infty e^{-(1+\alpha)\vartheta}\vartheta^{k+\alpha-1}d\vartheta \\
&= \frac{\alpha^\alpha}{k!\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{(\alpha+1)^{\alpha+k}}\int_0^\infty \frac{(\alpha+1)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)}\vartheta^{k+\alpha-1}e^{-(1+\alpha)\vartheta}d\vartheta \\
&= \frac{\alpha^\alpha}{\Gamma(\alpha)k!}\frac{\Gamma(\alpha+k)}{(\alpha+1)^{\alpha+k}} = \binom{\alpha+k-1}{k}\left(\frac{\alpha}{\alpha+1}\right)^\alpha\left(\frac{1}{\alpha+1}\right)^k
\end{aligned}$$

also $N \sim NB\left(\alpha, \frac{\alpha}{\alpha+1}\right)$. Das vorletzte Gleichheitszeichen gilt, da unter dem Integral die Dichte der $\Gamma(1+\alpha, k+\alpha)$-Verteilung steht.

Zu (d)

$$\begin{aligned}
Cov(N,\Theta) &= E(N\Theta) - E(N)E(\Theta) = E(E(N\Theta|\Theta)) - 1 = E(\Theta E(N|\Theta)) - 1 = \\
&= E(\Theta\Theta) - 1 = E(\Theta^2) - 1 = Var(\Theta) + E(\Theta)^2 - 1 = \frac{1}{\alpha} > 0.
\end{aligned}$$

Zu (e)

N und Θ sind nicht unabhängig, da sie wegen $Cov(N,\Theta) \neq 0$ nicht unkorreliert sind.

Anderes Argument: Wären N, Θ unabhängig, dann würde $E(N|\Theta) = E(N)$ also mit (a) und (b) $\Theta = 1$ gelten. Das ist aber nicht der Fall.

Aufgabe 4 (24 Punkte)

Sei $X : \Omega \longrightarrow (0,\infty)$ eine Zufallsvariable mit $\ln(X) \sim N(\mu, 1)$.

(a) Beweisen Sie, dass die Dichte von X gegeben ist durch $f : \mathbb{R} \longrightarrow [0,\infty)$,

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}(\ln(x)-\mu)^2\right) & x > 0 \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

(b) Bestimmen Sie einen Maximum Likelihood Schätzer von μ für unabhängig und identisch verteilte $X_1, \ldots, X_n \sim X$.

(c) Ist der Schätzer aus (b) erwartungstreu? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösung Aufgabe 4 [(a) 7, (b) 10, (c) 7]

Zu (a)

Es gilt $P(X \le x) = P(\ln(X) \le \ln(x)) = \Phi(\ln(x) - \mu)$ für $x > 0$, wobei Φ die Verteilungsfunktion der Standardnormalverteilung ist. Es ergibt sich

$$\frac{d}{dx}P(X \le x) = \frac{d}{dx}\Phi(\ln(x)-\mu) = \frac{1}{x}\varphi(\ln(x)-\mu) = f(x)$$

wobei φ die Dichte der Standardnormalverteilung ist.

Zu (b)

Die Likelihood ist wegen der Unabhängigkeit der X_i das Produkt der Einzeldichten. Es folgt:

$$\begin{aligned}
L(\mu) &= \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}(\ln(x_i) - mu)^2\right) \\
\ell(\mu) := \ln(L(\mu)) &= \sum_{i=1}^{n} -\ln(x_i\sqrt{2\pi}) - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(\ln(x_i) - \mu)^2 \\
\frac{d}{d\mu}\ell(\mu) &= \sum_{i=1}^{n}(\ln(x_i) - \mu) \\
\ell''(\mu) &= -n < 0 \\
\ell'(\hat{\mu}) = 0 &\Longrightarrow \hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(x_i).
\end{aligned}$$

Somit ist $\hat{\mu} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln(X_i)$ ML-Schätzer.

Zu (c)

Da $\ln(X_i) \sim N(\mu, 1)$ gilt

$$E(\hat{\mu}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} E(\ln(X_i)) = \mu,$$

und somit ist $\hat{\mu}$ erwartungstreu.

Aufgabe 5 (24 Punkte)

Seien $U_1, \dots, U_8 \sim N(\mu_1, \sigma_1^2)$, $V_1, \dots, V_8 \sim N(\mu_2, \sigma_2^2)$ unabhängige Zufallsvariablen (stetige Renditen zweier unabhängiger Wertpapiere). Gegeben sind unabhängige Realisierungen $u_1, \dots, u_8$ bzw. $v_1, \dots, v_8$. Die Mittelwerte der Daten sind $\overline{u} = 0,189$ bzw. $\overline{v} = 0,145$, die empirischen Varianzen $s_u^2 = 0,049$ bzw. $s_v^2 = 0,118$.

Bei (a)-(c) verwenden Sie die jeweils üblichen Tests.

(a) *Wird die Hypothese $H_0 : \mu_1 = 0,05$ zu einem Niveau von 5% verworfen?*

(b) *Wird die Hypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_2^2$ zu einem Niveau von 5% verworfen?.*

(c) *In der Folge geht man davon aus, dass $\sigma_1^2 = \sigma_2^2$ gilt. Wird die Hypothese $\mu_1 \geq \mu_2$ für ein Signifikanzniveau von 5 % verworfen?*

(d) *Obige Daten sind das Ergebnis von Simulationen mit $\mu_1 = 0,05$, $\mu_2 = 0,07$ und $\sigma_1^2 = \sigma_2^2 = 0,06$.*

   (i) *Seien $U_1, \dots, U_8 \sim N(0,05; 0,06)$, $V_1, \dots, V_8 \sim N(0,07; 0,06)$ und $U_1, \dots, V_8$ unabhängig. Seien $\overline{U}$ bzw. $\overline{V}$ der Mittelwert der U_i bzw. V_i. Bestimmen Sie $P(\overline{U} > \overline{V})$.*

   (ii) *Kommentieren Sie die obigen Ergebnisse in (a) und (c). Verwenden Sie dazu auch (i).*

Lösung Aufgabe 5 [(a) 5, (b) 5, (c) 5, (d,i) 6, (d,ii) 3]

Zu (a)

Zu prüfen ist die Nullhypothese $H_0 : \mu_1 = 0,05$ gegen $H_1 : \mu_1 \neq 0,05$. Da die Varianz unbekannt ist, wird der t-Test verwendet. Der Wert der Testgröße ist

$$t = \frac{\overline{u} - 0,05}{\sqrt{s_u^2}}\sqrt{n} = \frac{0,189 - 0,05}{\sqrt{0,049}}\sqrt{8} = 1,776$$

und wegen $t_{7;0,975} = 2,365$ wird H_0 nicht verworfen.

Zu (b)

Zu prüfen ist die Nullhypothese $H_0 : \sigma_1^2 = \sigma_1^2$ gegen $H_1 : \sigma_1^2 \neq \sigma_1^2$. Es wird der F-Test verwendet. Der Wert der Testgröße ist

$$t = \frac{s_u^2}{s_v^2} = \frac{0,049}{0,118} \approx 0,42$$

und wegen $F_{7;7;0,975} = 4,99 > t$ und $F_{7;7;0,025} = \frac{1}{F_{7;7;0,975}} \approx 0,2 < t$ wird H_0 nicht verworfen.

Zu (c)

Die Varianzen sind unbekannt. Es wird der einseitige, zwei Stichproben t-Test verwendet. Als Testgröße ergibt sich

$$s = \sqrt{\frac{7 \cdot s_u^2 + 7 \cdot s_v^2}{8 + 8 - 2}} = \sqrt{0,0835} \approx 0,29,$$

$$t = \frac{\overline{v} - \overline{u}}{s}\sqrt{\frac{8 \cdot 8}{8 + 8}} = \frac{0,145 - 0,189}{0,29} \cdot 2 \approx -0,3$$

somit wird $H_0 : \mu_1 \geq \mu_2$ wegen $-0,3 < t_{14;0,95} = 1,761$ nicht verworfen.

Zu (d)

(i) Wegen der Unabhängigkeit der $U_1, \ldots, V_8$ sind $\overline{U}, \overline{V}$ unabhängig, es gilt $\overline{U} \sim N(\mu_1; \frac{\sigma^2}{8})$ und $\overline{V} \sim N(\mu_2; \frac{\sigma^2}{8})$ und $\overline{V} - \overline{U} \sim N(\mu_2 - \mu_1; \frac{\sigma^2}{4}) = N(0,02; 0,15)$. Damit folgt

$$P(\overline{U} > \overline{V}) = P(\overline{V} - \overline{U} \leq 0) = \Phi\left(\frac{-0,02}{\sqrt{0,015}}\right) \approx 1 - \Phi(0,16) = 1 - 0,5636 = 0,4364.$$

(ii) In Aufgabenteil (a) wir H_0 richtigerweise nicht verworfen. In Aufgabenteil (c) wird H_0 fälschlicherweise nicht verworfen, also ein Fehler zweiter Art. Die Mittelwerte würden hier sogar $\mu_1 < \mu_2$ vermuten lassen, was wegen (i) in etwa 44 % der Simulationen bzw. Realisationen eintreten würde. Bei den Hypothesentests wird hingegen nur die Wahrscheinlichkeit des Fehlers erster Art auf 5 % beschränkt.