DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung Stochastik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 14. Mai 2022

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 4 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus. Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1. *[24 Punkte]*

Sei $X : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$ eine Zufallsvariable mit

$$\int_\Omega X \, dP = 0$$

gilt. Beweisen Sie, dass dann $X = 0$ fast sicher gilt.

Aufgabe 2. *[24 Punkte]*

Seien $X, Y \in L^2(\Omega, \mathcal{A}, P)$ mit

$$E(Y|X) = X \text{ und}$$
$$E(Y^2|X) = X^2.$$

Beweisen Sie, dass

$$X = Y \text{ fast sicher}$$

gilt.

Aufgabe 3. *[24 Punkte]*

Die jährliche Niederschlagsmenge in Köln ist $N(\mu, \sigma^2)$-verteilt mit $\mu = 800$ mm und $\sigma = 100$ mm.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass die Niederschlagsmenge eines Jahres zwischen 750 mm und 900 mm beträgt.

(b) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Niederschlagsmenge über 900 mm beträgt?

(c) Wie hoch ist die Wahrscheinlichkeit, dass die gesamte Niederschlagsmenge in zwei aufeinanderfolgenden Jahren über 1800 mm beträgt? Welche Annahme treffen Sie für die Berechnung?

(d) Wir betrachten die jährlichen Niederschlagsmengen von 2 Jahren. Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass in beiden Jahren die Jahresniederschlagsmenge 900 mm überschreitet. Vergleichen Sie das Ergebnis mit (c) und erklären Sie die unterschiedliche Größenordnung.

(e) Bestimmen Sie ein symmetrisches Intervall um 800 mm in dem die jährliche Niederschlagsmenge mit einer Wahrscheinlichkeit von 90 % liegt.

Aufgabe 4. *[24 Punkte]*

Für die Schadenzahl $N_t : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0$ eines Bestand mit Versicherungsdauer $t > 0$ wird $N_t \sim \mathrm{Poi}(\lambda t)$ mit $\lambda > 0$ angenommen.

(a) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeitsfunktion von N_t.

Im Folgenden betrachten wir k gleichartige und unabhängige Bestände mit den Versicherungsdauern $t_1, \dots, t_k > 0$ und $N_{t_i} \sim \mathrm{Poi}(\lambda t_i)$ für alle $i = 1, \dots, k$.

(b) Bestimmen Sie die gemeinsame Wahrscheinlichkeitsfunktion (also die gemeinsame Zähldichte) von $(N_{t_1}, \dots, N_{t_k})$.

(c) Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood-Schätzer $\hat{\lambda}$ für λ.

(d) Gegeben seien die folgenden Beobachtungen:

i	1	2	3	4	5	6
t_i	4	2	1	3	3	7
N_i	9	5	6	6	5	15

Bestimmen Sie einen ML-Schätzwert für λ mit dem Schätzer $\hat{\lambda}$ aus (c).

(e) Sei $\hat{\hat{\lambda}} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{N_{t_i}}{t_i}$ ein Schätzer für λ. Ist er erwartungstreu? Bestimmen Sie den mittleren quadratischen Fehler $MSE\left(\hat{\hat{\lambda}}\right)$ von $\hat{\hat{\lambda}}$.

Aufgabe 5. *[24 Punkte]*

Es liegen die jährlichen Niederschlagsmengen (in mm) für Köln und München der letzten 32 Jahre vor. Folgende Zusammenfassung wird geliefert:

Stadt	Mittelwert	empirische Standardabweichung
Köln	800	96
München	950	107

Wir gehen davon aus, dass die jährlichen Niederschlagsmengen in Köln und München unabhängig und normalverteilt $X \sim N\left(\mu_K, \sigma_K^2\right)$ (Köln), $Y \sim N\left(\mu_M, \sigma_M^2\right)$ (München) sind.

(a) Wie beurteilen Sie die Hypothese $H_0 : \sigma_M^2 = \sigma_K^2$ zum Niveau von 90 %?

(b) Wir gehen nun von $\sigma_M^2 = \sigma_K^2$ aus. Testen Sie jeweils zum Niveau von 95 %

   (i) $H_0 : \mu_K = \mu_M$, $H_1 : \mu_K \neq \mu_M$

   (ii) $H_0 : \mu_K \geq \mu_M$, $H_1 : \mu_K < \mu_M$

(c) Interpretieren Sie inhaltlich die Ergebnisse von (b). Verwenden Sie auch Wahrscheinlichkeitsaussagen.

Sie können folgende q-Quantile der F-Verteilung verwenden:

q	m	n	$F_{m,n}$
0,05	32	32	0,55
0,10	32	32	0,63
0,90	32	32	1,58
0,95	32	32	1,80
0,05	32	31	0,55
0,10	32	31	0,63
0,90	32	31	1,59
0,95	32	31	1,82
0,05	31	31	0,55
0,10	31	31	0,63
0,90	31	31	1,59
0,95	31	31	1,82

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 [[24 Punkte]]

1. Schritt Ist $X \geq 0$ eine Treppenfunktion, d.h. es gibt $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \ldots, n$ mit $X = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$ und

$$0 = \int_\Omega X \, dP = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i P(A_i).$$

Somit gilt

$$\alpha_i P(A_i) = 0 \text{ folglich } \alpha_i = 0 \text{ oder } P(A_i) = 0 \text{ für alle } i = 1, \ldots, n.$$

Damit ist

$$A := \bigcup_{\{i:\alpha_i \neq 0\}} A_i$$

als endliche Vereinigung von Nullmengen eine Nullmenge, und es gilt $\{X \neq 0\} \subset A$. Damit gilt $X = 0$ f.ü.

2. Schritt Ist nun $X \geq 0$, dann sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Treppenfunktionen mit $X_n \uparrow X$, $X_n \geq 0, n \in \mathbb{N}$. Es folgt

$$0 \leq \int_\Omega X_n \, dP \leq \int_\Omega X \, dP = 0 \text{ und somit } \int_\Omega X_n \, dP = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Damit gilt mit dem ersten Schritt $X_n = 0$ fast sicher für alle $n \in \mathbb{N}$. Ferner gilt

$$\{X \neq 0\} \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X_n \neq 0\}.$$

Auf der rechten Seite steht eine abzählbare Vereinigung von Nullmengen, also eine Nullmenge. Die Menge auf der linken Seite ist messbar und somit ihrerseits eine Nullmenge.

Alternativer Lösungsweg mit der Ungleichung von Markov

$$P(X \geq r) \leq \frac{E(X)}{r} = 0 \text{ für alle } r > 0.$$

Es gilt wegen $\int_\Omega X dP = E(X) = 0$

$$P(X \geq 1/n) = 0 \text{ für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Desweiteren gilt $\{X > 0\} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X \geq 1/n\}$. Die Mengen auf der rechten Seite sind wegen der Ungleichung von Markov jeweils Nullmengen. Daraus folgt $P(X > 0) = 0$ und somit die Behauptung.

Aufgabe 2 *[24 Punkte]* **Lösung**

Es gilt

$$E\left((X-Y)^2|X\right)=E(X^2-2XY+Y^2|X)=X^2-2XE(Y|X)+E(Y^2|X)=X^2-2X^2+X^2=0.$$

Mit dem Satz von der iterierten Erwartung folgt damit

$$E((X-Y)^2)=E\left(E((X-Y)^2|X)\right)=0.$$

Da die Zufallsvariable $(X-Y)^2$ nicht negativ ist, folgt mit Aufgabe 1

$$\begin{aligned}(X-Y)^2&=0 \text{ fast sicher, also}\\ X-Y&=0 \text{ fast sicher}\end{aligned}$$

und damit die Behauptung.

Alternativ: Man zeigt $E(X-Y)=0$, $Var(X-Y)=E((X-Y)^2)=0$. Damit ist $X-Y$ f.s. konstant gleich dem Erwartungswert, also die Behauptung.

Aufgabe 3 *[24 Punkte]*

Sei $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ die jährliche Niederschlagsmenge und Φ die Verteilungsfunktion von $N(0,1)$.

Zu (a) und (b)

Es gilt

$$\begin{aligned}P(750<X\leq 900)&=\Phi\left(\frac{900-800}{100}\right)-\Phi\left(\frac{750-800}{100}\right)\\ &=\Phi(1)-\Phi(-0,5)=\Phi(1)-(1-\Phi(0,5))\\ &=0,8413+(1-0,6915)=0,5328 && \text{(a)}\\ P(900<X)&=1-P(X\leq 900)=1-\Phi\left(\frac{900-800}{100}\right)=1-\Phi(1)\\ &=1-0,8413=0,1587 && \text{(b)}\end{aligned}$$

Zu (c)

Seien X_1,X_2 die jährlichen Niederschlagsmengen zweier aufeinanderfolgender Jahre, $Y:=X_1+X_2$. Sind X_1,X_2 unabhängig, dann gilt $Y\sim N(1600,2*100^2)$ und somit

$$\begin{aligned}P(Y>1800)&=1-P(Y\leq 1800)=1-\Phi\left(\frac{1800-1600}{100\sqrt{2}}\right)=1-\Phi(\sqrt{2})\approx 1-\Phi(1,41)\\ &=1-0,9207=0,0793\end{aligned}$$

Zu (d)

Seien $X_1, X_2 \overset{\text{iid}}{\sim} N(\mu, \sigma^2)$, $\mu = 800$, $\sigma = 100$ und $Z := \min(X_1, X_2)$. Es gilt

$$\begin{aligned} P(Z > 900) &= P(X_1 > 900, X_2 > 900) = P(X_1 > 900)P(X_2 > 900) = (1 - P(X \le 900))^2 \\ &= 0,1587^2 \approx 0,0252. \end{aligned}$$

Beim zweiten Gleichheitszeichen wurde die Unabhängigikeit von X_1, X_2 verwendet. Wegen $\{Z > 900\} \subset \{X_1 + X_2 > 1800\}$ und $\{Z > 900\} \neq \{X_1 + X_2 > 1800\}$ passen die Größenordnungen zueinander.

Zu (e)

Gesucht ist $\delta > 0$ so, dass $P(X \in [\mu - \delta, \mu + \delta]) = 0,9$, also

$$0,9 = P(\mu - \delta < X \le \mu + \delta) = 2\Phi\left(\frac{\delta}{\sigma}\right) - 1.$$

Sei $u_{0,95} = 1,645$ das 95 % Quantil der Standardnormalverteilung. Löst man die vorhergehende Gleichung nach δ auf folgt

$$\delta = u_{0,95}\sigma = 164,5$$

also ist das gesuchte Intervall

$$[635,5,\ 964,5]$$

Aufgabe 4 *[24 Punkte]*

Zu (a) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Laut Annahme gilt

$$P(N = n) \quad = \quad e^{-\lambda t}\frac{(\lambda t)^n}{n!}.$$

Zu (b) und (c) Für n_i, $n_i \in \mathbb{N}_0$, $i = 1, \ldots, k$ gilt

$$\begin{aligned} L(\lambda) &= \prod_{i=1}^{k} e^{-\lambda t_i}\frac{(\lambda t_i)^{n_i}}{n_i!} \\ \ell(\lambda) &:= \ln L(\lambda) = \sum_{i=1}^{k}(-\lambda t_i + n_i \ln(\lambda t_i) - \ln n_i!) \\ \frac{d}{d\lambda}\ell(\lambda) &= -\sum_{i=1}^{k} t_i + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^{k} n_i \\ \ell''(\lambda) &= -\frac{1}{\lambda^2}\sum_{i=1}^{k} n_i < 0 \\ \ell'(\hat{\lambda}) &= 0 \Longrightarrow \hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} n_i}{\sum_{i=1}^{k} t_i}. \end{aligned}$$

Somit ist $\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{k} N_{t_i}}{\sum_{i=1}^{k} t_i}$ ML-Schätzer.

Zu (d)

Mit den Daten ergibt sich der Schätzwert $\hat{\lambda} = \frac{46}{20} = 2,3.$

Zu (e)

Es gilt

$$E\left(\hat{\hat{\lambda}}\right) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{E(N_{t_i})}{t_i} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda t_i}{t_i} = \lambda.$$

Somit ist $\hat{\hat{\lambda}}$ erwartugstreu. Damit ist der mittlere quadratische Fehler gleich der Varianz des Schätzers. Wegen der Unahängigkeit der N_{t_i}, $i = 1, ... k$ gilt

$$Var\left(\hat{\hat{\lambda}}\right) = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{Var(N_{t_i})}{t_i^2} = \frac{1}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{\lambda t_i}{t_i^2} = \frac{\lambda}{k^2} \sum_{i=1}^{k} \frac{1}{t_i}.$$

Aufgabe 5[24 Punkte]

Zu (a)

Wir verwenden den F-Test. Die Testgröße ist

$$t = \frac{96^2}{107^2} = 0,81.$$

Die Hypothese H_0 wird nicht verworfen wegen $t \in [F_{31,31,\frac{5}{100}}, F_{31,31,\frac{95}{100}}] = [0{,}55,\ 1{,}82]$

Zu (b)

(i) Wir verwenden den zwei Stichproben t-Test. Es ergibt sich

$$s^2 = \frac{31 \cdot 96^2 + 31 \cdot 107^2}{62} = 10332,5$$

$$t = \frac{950 - 800}{\sqrt{10332,5}} \sqrt{\frac{32^2}{32 + 32}} = 5,9.$$

Das 97,5 %-Quantil der t-Verteilung mit 62 Freiheitsgraden approximieren wir mit dem Quantil der Standardnormalverteilung $u_{0,975} = 1,96$. Die Hypothese wird verworfen, da $|t| > 1,96$ gilt.

(ii) Die Testgröße ändert sich nicht. Wir verwenden wieder die Approximation der Quantile der t-Verrteilung mit der Standardnormalverteilung $t_{62,\frac{95}{100}} \approx u_{0,95} = 1,645$. Wegen $t > t_{62,\frac{95}{100}}$ wird H_0 verworfen.

Zu (c) Die Hypothese, dass es in Köln mehr regnet als in München wird verworfen. Es regnet in München signifikant mehr als in Köln, mit einem Signifikanzniveau von 5%. Bei häufiger Verwendung des Test, wird in etwa 5 % der Fälle H_0 fälschlicherweise verworfen.