DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung Stochastik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 11. Oktober 2019

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 4 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus. Die Borel σ-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1. *[24 Punkte]*

Sei $d > 0$, $\alpha > 1$ und $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$,

$$F(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x < d \\ 1 - x^{-\alpha} & \text{falls } x \geq d. \end{cases}$$

Sei μ das von F erzeugte Maß auf $\mathcal{B}^1$, also

$$\mu((-\infty, a]) := F(a) \text{ für } a \in \mathbb{R}.$$

(a) *[3 Punkte]* Skizzieren Sie F.

(b) *[12 Punkte]* Wir betrachten die Maße μ_1, μ_2 auf $\mathcal{B}^1$ mit

$$\mu_1(A) := (1 - d^{-\alpha})\delta_d(A),$$
$$\mu_2(A) := \alpha \int_A x^{-\alpha-1} 1_{[d,\infty)}(x)\, dx$$

für $A \in \mathcal{B}^1$ und dem Dirac Maß δ_d. Beweisen Sie, dass $\mu = \mu_1 + \mu_2$ gilt.

(c) *[9 Punkte]* Bestimmen Sie $\int_{\mathbb{R}} x\, d\mu(x)$. Sie können ohne Beweis verwenden, dass wegen (b) $\int_{\mathbb{R}} h\, d\mu = \int_{\mathbb{R}} h\, d\mu_1 + \int_{\mathbb{R}} h\, d\mu_2$ für alle integrierbaren Funktionen $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gilt.

Aufgabe 2. *[24 Punkte]*

(a) *[9 Punkte]* Sei $X \sim N(0, 1)$.

(i) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie die Verteilungsfunktion der Zufallsvariablen $|X|$.

(ii) *[6 Punkte]* Beweisen Sie $E(|X|) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Hinweis: $\int x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -e^{-\frac{x^2}{2}} + C.$

(b) *[15 Punkte]* Seien $X, Y \overset{\text{iid}}{\sim} N(0,1)$, $Z := \dfrac{X}{|Y|}$. Ohne Beweis können Sie verwenden, dass $E(Z)$ nicht existiert, d.h. Z ist nicht integrierbar. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $Z_n := \dfrac{X}{\frac{1}{n} + |Y|}$.

(i) *[11 Punkte]* Beweisen Sie:

(1) $E\left(\dfrac{1}{\frac{1}{n} + |Y|}\right) \leq n$,

(2) $|Z_n| \leq |Z|$ und $\lim_{n\to\infty} Z_n = Z$ fast sicher,

(3) $E(Z_n) = 0$,

(4) $\lim_{n\to\infty} E(Z_n) \neq E(Z)$.

(ii) *[4 Punkte]* Widerspricht (i) dem Satz von der dominierten Konvergenz? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 3. *[24 Punkte]*

Gegeben seien zwei Zufallsvariablen X und Λ. Dabei sei $\Lambda \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ mit $\alpha, \beta > 0$ und bei gegebenem $\Lambda = \lambda$ sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$.

(a) *[2 Punkte]* Bestimmen Sie $E(X|\Lambda)$

(b) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie den Erwartungswert von X. Für welche α, β existiert dieser?

(c) *[10 Punkte]* Beweisen Sie, dass für $x > 0$

$$P(X \leq x) = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta + x}\right)^{\alpha}$$

gilt.

(d) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie mit Hilfe von (c) den Erwartungswert von X. *Hinweis: es sollte dasselbe Ergebnis wie in (b) sein!*

Aufgabe 4.[24 Punkte]

Für $\lambda > 0$, $p \in (0,1)$ sei $f : \mathbb{N}_0 \longrightarrow (0,1)$:

$$f(x) = \begin{cases} p & \text{für } x = 0, \\ \dfrac{1-p}{1-e^{-\lambda}} \cdot e^{-\lambda} \cdot \dfrac{\lambda^x}{x!} & \text{für } x = 1, 2, \ldots \end{cases} \qquad (*)$$

(a) *[5 Punkte]* Beweisen Sie, dass f die Wahrscheinlichkeitsfunkion einer Zufallsvariablen $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0$ ist, also dass $\sum_{x=0}^{\infty} f(x) = 1$ gilt.

(b) *[6 Punkte]* Seien $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$ und $k := \sum_{i=1}^n 1_{\{0\}}(x_i)$ die Anzahl der $i \in \{1, \ldots n\}$ mit $x_i = 0$. Beweisen Sie

$$\prod_{i=1}^n f(x_i) = p^k \left(\frac{1-p}{e^\lambda - 1}\right)^{n-k} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}.$$

(c) *[13 Punkte]* Beweisen Sie, dass die Maximum-Likelihood Schätzer für p und λ für unabhängige und identisch verteilte $X_1, \ldots, X_n$ mit der Wahrscheinlichkeitsfunktion in $(*)$ die Gleichungen

$$\hat{p} = \frac{K}{n}$$
$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n-K}\left(1 - e^{-\hat{\lambda}}\right)$$

mit $K := \sum_{i=1}^n 1_{\{0\}}(X_i)$ erfüllen. Hierbei ist K die Anzahl der Realisierungen gleich 0.

Aufgabe 5 *[24 Punkte]* Es werden die durchschnittlichen Noten und die Bestehensquoten bei den Abiturprüfungen 2016/2017 in den Bundesländern Baden-Württemberg (BA), Bayern (BY) und Niedersachsen (NI) untersucht. Dazu wurden Abiturienten befragt. Es wurden folgende Werte erhoben:

Land	BW	BY	NI
Zahl der Befragten	20	30	n
durchschnittlichen Note	2,42	2,31	2,568
empirische Standardabweichung	0,09	0,10	0,12

Es wird angenommen, dass die durchschnittlichen Noten jeweils $N(\mu_i, \sigma^2)$ normalverteilt sind mit $i \in \{\text{BY, BW, NI}\}$.

(a) *[6 Punkte]* Der Notendurchschnitt in Deutschland war 2,42. Wie beurteilen Sie die Behauptung, dass das Notenmittel in Bayern 2,42 ist? Verwenden Sie das Signifikanzniveau von 5 %.

(b) *[6 Punkte]* Wie beurteilen Sie die Behauptung, dass sich die Notenmittel von Baden-Württemberg und Bayern nicht unterscheiden? Verwenden Sie erneut das Signifikanzniveau von 5 %.

(c) Wir betrachten nun Niedersachsen.

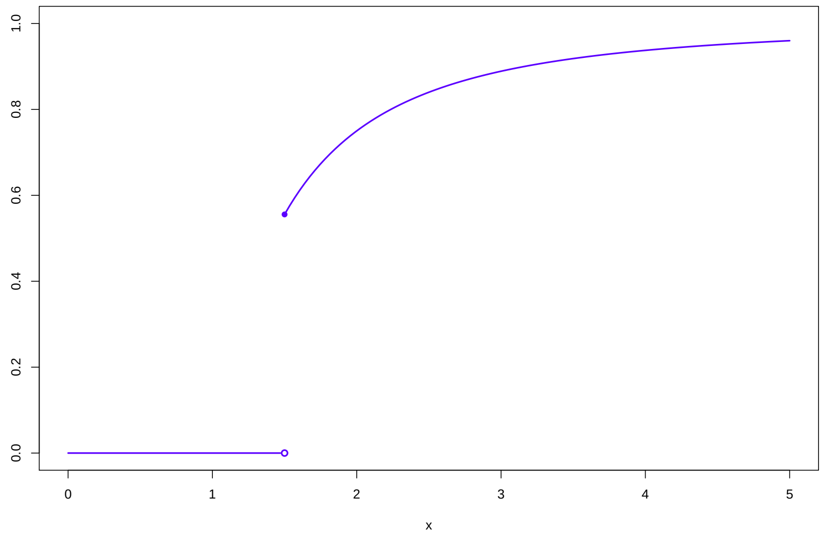
  (i) *[6 Punkte]* Geben Sie das 95 % Konfidenzintervall für das Notenmittel an, wenn $n = 20$ ist.

  (ii) *[6 Punkte]* Bei unveränderten Werten für die durchschnittliche Note und der empirischen Standardabweichung, wird ein Konfidenzintervall der Länge von maximal 0,1 benötigt. Muss n erhöht werden oder kann n kleiner gewählt werden? Begründen Sie Ihre Antwort.

Lösungsvorschläge

Aufgabe 1 [24 Punkte]

Zu (a) [*3 Punkte*] Für $d = 1,5$, $\alpha = 2$:



Zu (b) [*12 Punkte*]

Es gilt

$$\mu_1(-\infty, x] = \begin{cases} 0 & \text{falls } x < d \\ 1 - d^{-\alpha} & \text{sonst,} \end{cases}$$

$$\mu_2(-\infty, x] = \alpha \int_{\mathbb{R}} t^{-1-\alpha} 1_{[d,\infty)}(t) 1_{(-\infty,x]}(t)\, dt.$$

Falls $x < d$, gilt $\mu_2(-\infty, x] = 0$, da der Integrand verschwindet. Sei $x \geq d$. Dann gilt

$$\mu_2(-\infty, x] = \alpha \int_d^x t^{-1-\alpha}\, dt = -t^{-\alpha}\Big|_d^x = d^{-\alpha} - x^{-\alpha}$$

Summation der beiden Terme ergibt

$$\mu_1(-\infty, x] + \mu_2(-\infty, x] = 0 \qquad (x < d)$$
$$\mu_1(-\infty, x] + \mu_2(-\infty, x] = 1 - d^{-\alpha} + d^{-\alpha} - x^{-\alpha} = 1 - x^{-\alpha} \qquad (x \geq d)$$

also die Behauptung.

Zu (c) [*9 Punkte*]

Es gilt

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu_1(x) = \int_{\mathbb{R}} x(1-d^{-\alpha}) d\delta_d(x) = d(1-d^{-\alpha})$$
$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu_2(x) = \alpha \int_d^\infty x x^{-1-\alpha}\, dx = \alpha \int_d^\infty x^{-\alpha}\, dx = \frac{\alpha}{1-\alpha} x^{1-\alpha}\Big|_d^\infty = \frac{\alpha}{\alpha-1} d^{1-\alpha}.$$

Damit folgt mit dem Hinweis

$$\int_{\mathbb{R}} x d\mu(x) = d(1-d^{-\alpha}) + \frac{\alpha}{\alpha-1} d^{1-\alpha} = d + \frac{d^{1-\alpha}}{\alpha-1}.$$

Aufgabe 2. *[24 Punkte]*

Sei Φ bzw. φ stets die Verteilungsfunktion bzw. die Dichte der Standardnormalverteilung.

Zu (a) (i) *[3 Punkte]*

Für $x \le 0$ gilt $P(|X| \le x) = 0$. Sei also $x > 0$. Dann gilt

$$\begin{aligned} P(|X| \le x) &= P(-x \le X \le x) = P(X \le x) - P(X \le -x) = \Phi(x) - \Phi(-x) \\ &= \Phi(x) - (1 - \Phi(x)) = 2\Phi(x) - 1. \end{aligned}$$

Zu (ii) *[6 Punkte]*

Es gilt

$$E(|X|) = \int_{-\infty}^\infty |x|\varphi(x)\, dx = 2\int_0^\infty x\varphi(x)\, dx = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty x e^{-\frac{x^2}{2}}\, dx \quad = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\Big|_0^\infty = \sqrt{\frac{2}{\pi}}.$$

Zu (b) (i) *[11 Punkte]*

Wegen

$$0 \le \frac{1}{\frac{1}{n} + |Y|} \le \frac{1}{\frac{1}{n}} = n$$

folgt

$$E\left(\frac{1}{\frac{1}{n} + |Y|}\right) \le E(n) = n \text{ also (1).}$$

Die Menge $N = \{Y = 0\}$ ist eine Nullmenge, das Y stetig verteilt ist. Für $\omega \in \Omega \setminus N$ gilt

$$|Z_n(\omega)| = \frac{|X(\omega)|}{\frac{1}{n} + |Y(\omega)|} \leq \frac{|X(\omega)|}{|Y(\omega)|} = |Z(\omega)|$$
$$\lim_{n\to\infty} Z_n(\omega) = \lim_{n\to\infty} \frac{X(\omega)}{\frac{1}{n} + |Y(\omega)|} \leq \frac{X(\omega)}{|Y(\omega)|} = Z(\omega).$$

somit ist (2) gezeigt.

Da X und Y unabhängig sind, trifft das auch auf X und $\frac{1}{\frac{1}{n}+|Y|}$ zu. Da $E\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+|Y|}\right)$ endlich ist und $E(X) = 0$ gilt, folgt (3), denn

$$E(Z_n) = E(X)E\left(\frac{1}{\frac{1}{n}+|Y|}\right) = 0.$$

Offensichtlich gilt

$$\lim E(Z_n) = 0.$$

Da der Erwartungswert von Z laut Angabe nicht existiert, ist (4) klar.

Zu (ii) *[4 Punkte]*

(i) wiederspricht nicht dem Satz von der dominierten Konvergenz, da die Majorante Z der Z_n nicht integrierbar ist.

Aufgabe 3 *[24 Punkte]*

Zu (a) *[2 Punkte]*

Aus den Eigenschaften der Exponentialverteilung folgt sofort

$$E(X|\Lambda) = \frac{1}{\Lambda}.$$

Zu (b) *[8 Punkte]*

Mit dem Satz von der iterierten Erwartung gilt mit $\alpha > 1$

$$E(X) = E(E(X|\Lambda)) = E\left(\frac{1}{\Lambda}\right) = \int_0^\infty \frac{1}{x}\frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}x^{\alpha-1}e^{-\beta x}\,dx$$
$$= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\int_0^\infty x^{\alpha-2}e^{-\beta x}\,dx \overset{\alpha>1}{=} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\frac{\Gamma(\alpha-1)}{\beta^{\alpha-1}} = \frac{\Gamma(\alpha-1)\beta}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} = \frac{\beta}{\alpha-1}.$$

$E(X)$ existiert für $\alpha > 1$ und $\beta > 0$.

Zu (c) *[10 Punkte]*

Sei $x > 0$. Es gilt

$$\begin{aligned}
P(X \le x) &= \int_0^\infty P(X \le x | \Lambda = \lambda) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}\, d\lambda \\
&= \int_0^\infty \left(1 - e^{-\lambda x}\right) \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}\, d\lambda \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \left(\int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} e^{-\beta\lambda}\, d\lambda - \int_0^\infty \lambda^{\alpha-1} e^{-(x+\beta)\lambda}\, d\lambda \right) \\
&= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{\beta^\alpha} - \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha)}{(\beta+x)^\alpha} = 1 - \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha .
\end{aligned}$$

Zu (d) *[4 Punkte]*

Aus $X \ge 0$ fast sicher folgt

$$\begin{aligned}
E(X) &= \int_0^\infty (1 - F(x))\, dx = \int_0^\infty \left(\frac{\beta}{\beta+x}\right)^\alpha dx = \beta^\alpha \int_0^\infty (\beta + x)^{-\alpha} dx \\
&= \frac{\beta^\alpha}{1-\alpha} (\beta+x)^{1-\alpha} \Big|_0^\infty = -\frac{\beta^\alpha}{1-\alpha} \beta^{1-\alpha} = \frac{\beta}{\alpha - 1}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 4 *[24 Punkte]*

Zu (a) *[5 Punkte]*

Es gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{x=0}^\infty f(x) &= p + \frac{1-p}{1-e^{-\lambda}} e^{-\lambda} \sum_{x=1}^\infty \frac{\lambda^x}{x!} = p + \frac{1-p}{1-e^{-\lambda}} e^{-\lambda} \left(\sum_{x=0}^\infty \frac{\lambda^x}{x!} - 1 \right) \\
&= p + \frac{1-p}{1-e^{-\lambda}} e^{-\lambda} (e^\lambda - 1) = p + \frac{1-p}{1-e^{-\lambda}} (1 - e^{-\lambda}) = 1.
\end{aligned}$$

Zu (b) *[6 Punkte]*

Offensichtlich gilt für $x = 1, 2, \ldots,$

$$f(x) = \frac{1-p}{e^\lambda - 1} \frac{\lambda^x}{x!}.$$

Damit folgt für $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{N}_0$ mit der Bezeichung $A := \{i : x_i = 0\}$, $B := \{i : x_i > 0\}$

$$\begin{aligned}
\prod_{i=1}^n f(x_i) &= \prod_{i \in A} f(x_i) \prod_{i \in B} f(x_i) = f(0)^k \prod_{i \in B} \frac{1-p}{e^\lambda - 1} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} = p^k \left(\frac{1-p}{e^\lambda - 1}\right)^{n-k} \prod_{i \in B} \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \\
&= p^k \left(\frac{1-p}{e^\lambda - 1}\right)^{n-k} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!}.
\end{aligned}$$

Die letzte Zeile folgt wegen $\lambda^{x_i} = \lambda^0 = 1$, $x_i! = 0! = 1$ für alle $x_i = 0$.

Zu (c) *[13 Punkte]*

Seien $x_1, \ldots, x_n$ Realisierungen der $X_1, \ldots, X_n$. Dann ergibt sich die Likelihood aus dem Produkt der Dichten mit (b) und den dort verwendeten Bezeichnungen:

$$\begin{aligned}
L(p,\lambda) &= p^k \left(\frac{1-p}{e^\lambda - 1}\right)^{n-k} \prod_{i=1}^n \frac{\lambda^{x_i}}{x_i!} \\
\ell(p,\lambda) &= \ln L(p,\lambda) = k \ln p + (n-k)\left(\ln(1-p) - \ln(e^\lambda - 1)\right) + \sum_{i=1}^n (x_i \ln\lambda - \ln(x_i!)) \\
\ell_p(p,\lambda) &= \frac{k}{p} - \frac{n-k}{1-p} = \frac{k-np}{p(1-p)}.
\end{aligned}$$

Da der ML-Schätzer die Gleichung $\ell_p(\hat{p},\hat{\lambda}) = 0$ erfüllt, folgt

$$k - n\hat{p} = 0 \Longrightarrow \hat{p} = \frac{k}{n}.$$

Die partielle Ableitung nach λ ergibt

$$\ell_\lambda(p,\lambda) = -\frac{(n-k)e^\lambda}{e^\lambda - 1} + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i = -\frac{(n-k)}{1-e^{-\lambda}} + \frac{1}{\lambda}\sum_{i=1}^n x_i.$$

Da der ML-Schätzer die Gleichung $\ell_\lambda(\hat{p},\hat{\lambda}) = 0$ erfüllt, folgt

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\hat{\lambda}}\sum_{i=1}^n x_i &= \frac{n-k}{1-e^{-\hat{\lambda}}} \\
\frac{\hat{\lambda}}{\sum_{i=1}^n x_i} &= \frac{1-e^{-\hat{\lambda}}}{n-k} \\
\hat{\lambda} &= \frac{\sum_{i=1}^n x_i}{n-k}\left(1-e^{-\hat{\lambda}}\right).
\end{aligned}$$

Geht man zu den Zufallsvariablen über mit $K := \sum_{i=1}^n 1_{\{0\}}(X_i)$, dann ergeben sich die beiden Gleichungen:

$$\begin{aligned}
\hat{p} &= \frac{K}{n} \\
\hat{\lambda} &= \frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n-K}\left(1-e^{-\hat{\lambda}}\right).
\end{aligned}$$

Aufgabe 5*[24 Punkte]*

Zu (a) *[6 Punkte]*

Es handelt sich um einen ein Stichproben *t*-Test. Die Nullhypothese zum Parameter μ_{BY} lautet:

$H_0 : \mu_{BY} = 2,42.$

Die Testgröße ist $t = \dfrac{2,31 - 2,42}{0,1}\sqrt{30} = -6,02$. Unter H_0 ist $t \sim t_{29}$ verteilt. Wegen $t_{29;0,975} = 2,045 < |t|$ wird H_0 verworfen.

Zu (b) *[6 Punkte]*

Es handelt sich um einen zwei Stichproben t-Test. Die Nullhypothese lautet:

$H_0 : \mu_{BY} = \mu_{BW}.$

Die Testgröße lautet

$$t = \frac{2,42 - 2,31}{s}\sqrt{\frac{20 \cdot 30}{20 + 30}}, \qquad s = \sqrt{\frac{19 \cdot 0,09^2 + 29 \cdot 0,1^2}{48}} \approx 0,0962$$
$$t = 3,96$$

Unter H_0 ist $t \sim t_{48}$ verteilt. Wegen $t_{48;0,975} < t_{45;0,975} = 2,021 < |t|$ wird H_0 verworfen.

Zu (c)

(i) *[6 Punkte]* Das Konfidenzintervall ergibt sich zu $[2,568 - \delta, 2,568 + \delta]$ mit

$$\delta = \frac{0,12 \cdot t_{19;0,975}}{\sqrt{20}} = \frac{0,12 \cdot 2,093}{\sqrt{20}} = 0,056 \text{ also } [2,512;\ 2,624]$$

(ii) *[6 Punkte]* Man muss n größer wählen. Die Intervallbreite ist 0,112, muss also noch kleiner werden. Im Term

$$\delta = \frac{0,12 \cdot t_{n-1;0,975}}{\sqrt{n}}$$

wird mit größerem n das Quantil der t-Verteilung kleiner und der Nenner größer, somit wird δ mit größerem n seinerseits kleiner.