DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

# Zulassungsprüfung Stochastik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 01. Juni 2019

*Hinweise:*

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 5 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus. Die Borel $\sigma$-Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue Maß auf $\mathcal{B}^n$ wird mit $\lambda^n$ bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

**Aufgabe 1.** *[24 Punkte]*

Für $\omega \in \Omega$ bezeichne $\delta_\omega$ das Dirac–Maß mit

$$\delta_\omega(A) := \begin{cases} 1 & \text{falls } \omega \in A \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Sei $t \in (0, 1)$ und $\omega_1, \omega_2 \in \Omega$ mit $\omega_1 \neq \omega_2$ und sei $\mu$ das Maß mit

$$\mu(A) := t\delta_{\omega_1}(A) + (1-t)\delta_{\omega_2}(A)$$

(a) *[15 Punkte]* Beweisen Sie, dass für alle messbaren Funktionen $g : \Omega \longrightarrow [0, \infty)$

$$\int g \, d\mu = tg(\omega_1) + (1-t)g(\omega_2)$$

gilt.

(b) *[9 Punkte]* Besitzt $\mu$ im Fall $(\Omega, \mathcal{A}) = (\mathbb{R}, \mathcal{B})$ eine Lebesgue-Dichte? Begründen Sie Ihre Antwort.

**Aufgabe 2.** *[24 Punkte]*

Gegeben seien die Zufallsvariablen $N : \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_0$ und $\Theta : \Omega \longrightarrow (0, \infty)$. Es gelte $\Theta \sim \Gamma(\alpha, \beta)$ mit $\alpha, \beta > 0$ und für $\vartheta \in (0, \infty)$ gelte $N \sim \text{Poi}(\vartheta)$, d.h. unter $\Theta = \vartheta$ besitzt $N$ die bedingte Zähldichte $f(\,.\,|\Theta = \vartheta) : \mathbb{N}_0 \longrightarrow [0, 1]$ mit

$$f(k|\vartheta) := e^{-\vartheta}\frac{\vartheta^k}{k!}.$$

(a) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie $E(N|\Theta)$ und $\text{Var}(N|\Theta)$.

(b) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie $E(N)$ und $\text{Var}(N)$.

(c) *[13 Punkte]* Beweisen Sie, dass $\Theta$ unter $N = k$ mit $k \in \mathbb{N}_0$ die Gamma–Verteilung $\Gamma(\alpha+k, 1+\beta)$ besitzt. Bestimmen Sie hierzu die bedingte Dichte $f(\,.\,|N = k)$ von $\Theta$ unter $N = k$. Sie können ohne Beweis verwenden, dass

$$P(N = k) = \frac{\Gamma(\alpha + k)}{k!\Gamma(\alpha)} \frac{\beta^\alpha}{(1+\beta)^{\alpha+k}}$$

gilt, wobei $\Gamma$ die Gamma-Funktion $(0, \infty) \to (0, \infty)$ bezeichnet.

(d) *[3 Punkte]* Bestimmen Sie $E(\Theta|N)$.

**Aufgabe 3.** *[24 Punkte]*

Die Dauer der Arbeitsunfähigkeit in Jahren wird durch eine Zufallsvariable $T$ mit der Dichtefunktion $f$ mit

$$f(t) := \begin{cases} 2\gamma t e^{-\gamma t^2} & t > 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \tag{1}$$

mit $\gamma > 0$ modelliert.

(a) *[5 Punkte]* Beweisen Sie, dass die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow [0, 1]$ mit

$$F(t) := \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 1 - e^{-\gamma t^2} & t \geq 0 \end{cases}$$

die Verteilungsfunktion von $T$ ist.

(b) *[6 Punkte]* Weisen Sie nach, dass

$$E(T) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\gamma}} \tag{2}$$

gilt.
*Hinweis:* Es gilt

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\, dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

(c) *[13 Punkte]* Beweisen Sie, dass $T^2$ die Exponentialverteilung $\text{Exp}(\gamma)$ besitzt, und bestimmen Sie die Varianz von $T$.

**Aufgabe 4.**[24 Punkte]

(a) *[7 Punkte]* Sei $X \sim \Gamma(\alpha, \beta)$-verteilt mit $\alpha > 1$ und $\beta > 0$. Beweisen Sie:

$$E\left(\frac{1}{X}\right) = \frac{\beta}{\alpha - 1}.$$

*Hinweis:* Für die Gammafunktion $\Gamma : (0, \infty) \longrightarrow (0, \infty)$ gilt

$$\int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-\beta x}\, dx = \frac{\Gamma(\alpha - 1)}{\beta^{\alpha-1}}$$

und $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x)$.

(b) *[10 Punkte]* Bestimmen Sie einen Maximum-Likelihood Schätzer für $\gamma$ für unabhängige und identisch verteilte $T_1, \ldots, T_n$ mit der Dichte (1) aus Aufgabe 3.

(c) *[7 Punkte]* Seien $T_1, \ldots, T_n$ mit $n \geq 2$ unabhängig und identisch verteilt mit der Dichte (1) aus Aufgabe 3. Dann ist

$$\hat{\gamma} := \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} T_i^2}$$

ein Schätzer für $\gamma$. Bestimmen Sie mit (a) und $T^2 \sim \mathrm{Exp}(\gamma)$ (vgl. Aufgabe 3 (c)) den Erwartungswert von $\hat{\gamma}$ und bestimmen Sie gegebenenfalls eine erwartungstreue Modifikation $\hat{\hat{\gamma}}$ von $\hat{\gamma}$.

**Aufgabe 5** *[24 Punkte]* Es soll die Körpergröße $Y$ des Sohns in Abhängigkeit von der Körpergröße $x$ seines Vaters untersucht werden. Die Einheit sei jeweils cm. Für die Zufallsvariable $Y$ wird für $x \in [140, 200]$ das Modell

$$Y = a + bx + \varepsilon \tag{3}$$

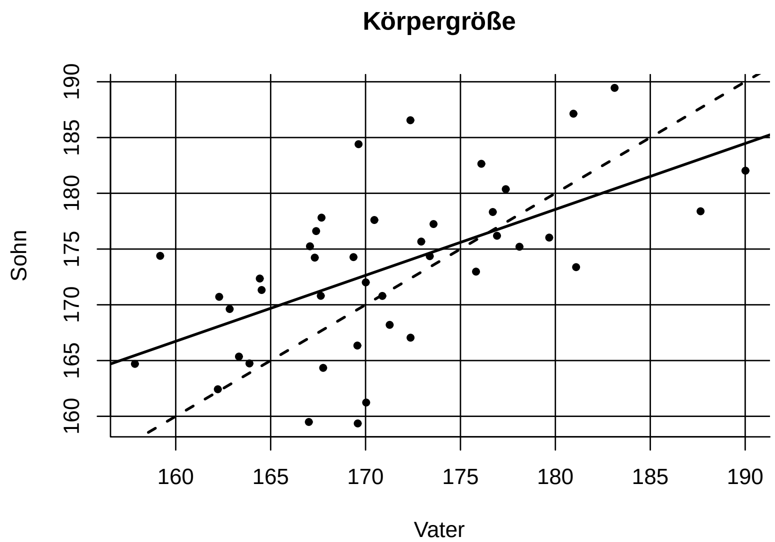
mit $\varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$ angenommen. Die zur Untersuchung vorliegenden Daten bestehen aus den Körpergrößen $x_i$ und den Realisierungen $y_i$ der Zufallsvariablen

$$Y_i = a + bx_i + \varepsilon_i$$

mit $\varepsilon_i \overset{\text{iid}}{\sim} N(0, \sigma^2)$ und $i = 1, \ldots, 42$. Es werden die folgenden Kennzahlen (es handelt sich um die kleinsten Quadrate-Schätzer und deren geschätzte Standardabweichungen) berechnet:

$$\hat{b} = 0{,}59, \qquad \hat{a} = 72{,}1, \qquad \mathrm{se}(\hat{b}) = 0{,}13, \qquad \mathrm{se}(\hat{a}) = 22{,}6.$$

In der folgenden Abbildung sind die Daten, die Anpassungsgerade und die Identitätsgerade $y = x$ eingezeichnet.



(a) *[6 Punkte]* Es soll das Modell

$$Y = 86,9 + 0,5x + \varepsilon \tag{4}$$

mit den obigen Daten überprüft werden. Führen Sie die beiden Hypothesentests zu $a = 86,9$ bzw. $b = 0,5$ zum Niveau von 5% durch.

(b) *[18 Punkte]* Im Folgenden gehen wir vom Modell (4) mit $\sigma = 6,2$ aus.

(i) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass der Sohn eines Vaters mit Körpergröße $x = 195$ bzw. $x = 145$ größer als sein Vater wird.

(ii) *[6 Punkte]* Kommentieren Sie die Behauptung: Die mittlere Körpergröße des Sohns steigt mit der Körpergöße des Vaters an.

(iii) *[6 Punkte]* Kommentieren Sie die Behauptung: Söhne sind im Mittel größer als ihre Väter.

# Lösungsvorschläge

**Aufgabe 1** [24 Punkte]

Zu (a) [*15 Punkte*]

Sei zunächst $g$ eine Treppenfunktion, also $g = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}$, $\alpha_i \in \mathbb{R}$, $A_i \in \mathcal{A}$. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\int g\, d\mu &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \int 1_{A_i}\, d\mu = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \mu(A_i) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \left(t\delta_{\omega_1}(A_i) + (1-t)\delta_{\omega_2}(A_i)\right) \\
&= t\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\omega_1}(A_i) + (1-t)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i \delta_{\omega_2}(A_i) \\
&= t\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(\omega_1) + (1-t)\sum_{i=1}^{n} \alpha_i 1_{A_i}(\omega_2) = tg(\omega_1) + (1-t)g(\omega_2).
\end{aligned}$$

Die vorletzte Gleichung gilt wegen $\delta_\omega(A) = 1_A(\omega)$.

Sei nun $g \geq 0$ messbar. Dann gibt es eine monoton steigende Folge von Treppenfunktionen $g_n \geq 0$ mit $\lim_{n\to\infty} g_n = g$. Da $g_n$ Treppenfunktionen sind, gilt

$$\int g_n\, d\mu = tg_n(\omega_1) + (1-t)g_n(\omega_2).$$

Nach Voraussetzung gilt für die rechte Seite

$$\lim_{n\to\infty} \left(tg_n(\omega_1) + (1-t)g_n(\omega_2)\right) = tg(\omega_1) + (1-t)g(\omega_2)$$

Laut Satz von der monotonen Konvergenz gilt für die linke Seite

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n\, d\mu = \int g\, d\mu,$$

also die Behauptung.

Zu (b) [*9 Punkte*]

O. b. d. A. sei $\omega_1 < \omega_2$. Für $r \in \mathbb{R}$ gilt

$$\mu((-\infty, r]) = t1_{(-\infty,r]}(\omega_1) + (1-t)1_{(-\infty,r]}(\omega_2) = \begin{cases} 0 & r < \omega_1 \\ t & r \in [\omega_1, \omega_2) \\ 1 & \text{sonst} \end{cases}$$

wegen

$$\begin{aligned}
1_{(-\infty,r]}(\omega_1) &= 1 \iff \omega_1 \in (-\infty, r] \iff r \geq \omega_1 \\
1_{(-\infty,r]}(\omega_2) &= 1 \iff \omega_2 \in (-\infty, r] \iff r \geq \omega_2.
\end{aligned}$$

Würde $\mu$ eine Lebesgue-Dichte besitzen, dann wäre die Funktion $r \longmapsto \mu((-\infty, r])$ stetig, was aber nicht der Fall ist. Also besitzt $\mu$ keine Lebesgue-Dichte.

**Aufgabe 2.** *[je 6 Punkte]*

Zu (a) *[3 Punkte]*

Da $N$ gegeben $\Theta = \vartheta$ Poi($\vartheta$)-verteilt ist, folgt

$$E(N|\Theta = \vartheta) = \vartheta \text{ und } \mathrm{Var}(N|\Theta = \vartheta) = \vartheta.$$

Ersetzt man $\vartheta$ durch $\Theta$ folgt

$$E(N|\Theta) = \Theta \text{ und } \mathrm{Var}(N|\Theta) = \Theta.$$

Zu (b) *[5 Punkte]*

Mit dem Satz von der iterierten Erwartung und (a) gilt:

$$\begin{aligned} E(N) &= E(E(N|\Theta)) = E(\Theta) = \frac{\alpha}{\beta} \\ \mathrm{Var}(N) &= \mathrm{Var}(E(N|\Theta)) + E(\mathrm{Var}(N|\Theta)) \\ &= \mathrm{Var}(\Theta) + E(\Theta) = \frac{\alpha}{\beta^2} + \frac{\alpha}{\beta} = \frac{\alpha(1+\beta)}{\beta^2}. \end{aligned}$$

Zu (c) *[13 Punkte]*

Sei $f_\Theta$ die Dichte von $\Theta$. Es gilt für $\vartheta > 0$, $k \in \mathbb{N}_0$

$$\begin{aligned} f(\vartheta|N = k) &= \frac{f(k|\vartheta)f_\Theta(\vartheta)}{P(N = k)} \\ &= \frac{e^{-\vartheta}\vartheta^k}{k!} \cdot \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}\vartheta^{\alpha-1}e^{-\beta\vartheta} \cdot \frac{(1+\beta)^{\alpha+k}k!\Gamma(\alpha)}{\Gamma(\alpha+k)\beta^\alpha} \\ &= e^{-\vartheta}\vartheta^k \cdot \vartheta^{\alpha-1}e^{-\beta\vartheta} \cdot \frac{(1+\beta)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)} \\ &= \frac{(1+\beta)^{\alpha+k}}{\Gamma(\alpha+k)}e^{-(1+\beta)\vartheta}\vartheta^{\alpha+k-1}. \end{aligned}$$

Zu (d) *[3 Punkte]*

Aufgrund der Verteilungseigenschaft in (c) gilt

$$E(\Theta|N = k) = \frac{\alpha+k}{\beta+1}, \text{ also } E(\Theta|N) = \frac{\alpha+N}{\beta+1}.$$

**Aufgabe 3** *[24 Punkte]*

Zu (a) *[5 Punkte]*

Die Funktion $F$ ist auf $\mathbb{R} \setminus 0$ differenzierbar mit

$$F'(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ 2\gamma t e^{-\gamma t^2} & t > 0 \end{cases}$$

d.h. es gilt $F' = f$ fast überall auf $\mathbb{R}$.

Zu (b) *[6 Punkte]*

Da $T \geq 0$ fast sicher folgt

$$E(T) = \int_0^\infty 1 - F(t)\, dt = \int_0^\infty e^{-\gamma t^2}\, dt = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \int_0^\infty e^{-\tau^2}\, d\tau = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\gamma}}.$$

Das dritte Gleichheitszeichen gilt aufgrund der Substitution $\tau = \sqrt{\gamma} t$, das letzte wegen des Hinweises.

Zu (c) *[13 Punkte]*

Sei $t > 0$. Dann gilt

$$P(T^2 \leq t) = P(T \leq \sqrt{t}) = 1 - e^{-\gamma(\sqrt{t})^2} = 1 - e^{-\gamma t}.$$

Dies ist die Verteilungsfunktion der Exp($\gamma$)-Verteilung.

Der Erwartungswert der Exp($\gamma$)-Verteilung ist $\frac{1}{\gamma}$. Somit folgt

$$\begin{aligned} E(T^2) &= \frac{1}{\gamma} \\ \mathrm{Var}(T) = E(T^2) - E(T)^2 &= \frac{1}{\gamma} - \frac{\pi}{4\gamma} = \frac{4-\pi}{4\gamma}. \end{aligned}$$

**Aufgabe 4** *[24 Punkte]*

Zu (a) *[7 Punkte]*

Mit der Dichte von $\Gamma(\alpha, \beta)$ gilt

$$\begin{aligned} E\left(\frac{1}{X}\right) &= \int_0^\infty \frac{1}{x} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \int_0^\infty x^{\alpha-2} e^{-\beta x}\, dx \\ &= \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \frac{\Gamma(\alpha-1)}{\beta^{\alpha-1}} = \frac{\beta\Gamma(\alpha-1)}{(\alpha-1)\Gamma(\alpha-1)} = \frac{\beta}{\alpha-1}. \end{aligned}$$

Zu (b) *[10 Punkte]*

Seien $t_1, \ldots, t_n$ Realisierungen der $T_1, \ldots, T_n$. Damit ergibt sich die Likelihood $L$ aus dem Produkt der Dichten:

$$\begin{aligned}
L(\gamma) &= 2^n \gamma^n \prod_{i=1}^{n} t_i \exp\left(-\gamma \sum_{i=1}^{n} t_i^2\right) \\
\ell(\gamma) &:= \ln L(\gamma) = n \ln 2 + n \ln \gamma + \sum_{i=1}^{n} \ln t_i - \gamma \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \\
\frac{d}{d\gamma}\ell(\gamma) &= \frac{n}{\gamma} - \sum_{i=1}^{n} t_i^2 \\
\frac{d^2}{d\gamma^2}\ell(\gamma) &= -\frac{n}{\gamma^2} < 0.
\end{aligned}$$

Man erhält den ML-Schätzer $\hat{\gamma}$ in dem man die erste Ableitung von $\ell$ Null setzt, nach $\gamma$ auflöst und die Realisierungen $t_i$ durch die Zufalsvariablen $T_i$ ersetzt:

$$\hat{\gamma} = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} T_i^2}.$$

Zu (c) *[7 Punkte]*

Da die Zufallsvariablen $T_i$, $i = 1, \ldots, n$ unabhängig sind, sind auch $T_i^2$, $i = 1, \ldots, n$ unabhängig. Wegen $T_i^2 \sim \operatorname{Exp}(\gamma) = \Gamma(1, \gamma)$ folgt wegen der Unbhängigkeit der $T_i^2$

$$\sum_{i=1}^{n} T_i^2 \sim \Gamma(n, \gamma).$$

Mit (a) erhalten wir daraus

$$E(\hat{\gamma}) = E\left(\frac{n}{\sum_{i=1}^{n} T_i^2}\right) = nE\left(\frac{1}{\sum_{i=1}^{n} T_i^2}\right) = n \cdot \frac{\gamma}{n-1}.$$

Somit ist $\hat{\gamma}$ nicht erwartungstreu. Sei

$$\hat{\hat{\gamma}} := \frac{n-1}{n}\hat{\gamma}.$$

Dies ist wegen

$$E\left(\hat{\hat{\gamma}}\right) = \frac{n-1}{n} E(\hat{\gamma}) = \frac{n-1}{n} \frac{n}{n-1} \gamma = \gamma$$

ein erwartungstreuer Schätzer.

**Aufgabe 5***[24 Punkte]*

Zu (a) *[6 Punkte]*

Die Nullhypothese zum Parameter $b$ lautet:

$H_0 : b = 0,5$.

Die Testgröße ist $t = \dfrac{\hat{b} - 0,5}{\mathrm{se}(\hat{b})} = \dfrac{0,59 - 0,5}{0,13} = 0,69$. Unter $H_0$ ist $t \sim t_{n-2} = t_{40}$ verteilt. Wegen $t_{40;0,975} = 2,021 > |t|$ wird $H_0 : b = 0,5$ nicht verworfen.

In analoger Weise schließt man für den Parameter $a$:

$H_0 : a = 86,9$.

Die Testgröße ist $t = \dfrac{\hat{a} - 86,9}{\mathrm{se}(\hat{a})} = \dfrac{72,1 - 86,9}{22,6} = -0,65$. Unter $H_0$ ist $t \sim t_{n-2} = t_{40}$ verteilt. Wegen $t_{40;0,975} = 2,021 > |t|$ wird $H_0 : a = 86,9$ nicht verworfen.

Zu (b) *[18 Punkte]*

(i) *[6 Punkte]* Zu bestimmen ist für festes $x \in \{145, 195\}$ und $Y = 86,9 + 0,5x + \varepsilon$

$$P(Y > x) = 1 - P(Y \leq x) = 1 - P(86,9 + 0,5x + \varepsilon \leq x) = 1 - P(\varepsilon \leq 0,5x - 86,9) =$$
$$= \Phi\left(\frac{0,5x - 86,9}{6,2}\right)$$

wobei $\Phi$ die Verteilungsfunktion von $N(0,1)$ ist. Setzt man die Werte von $x$ ein ergibt sich

$$P(Y > x) = 1 - \Phi(-2,32) = \Phi(2,32) = 0,9898 \qquad (x = 145)$$
$$P(Y > x) = 1 - \Phi(1,71) = 1 - 0,9564 = 0,0436. \qquad (x = 195)$$

(ii) *[6 Punkte]* Die Behauptung ist richtig, denn für den Erwartungswert von $Y = 86,9 + 0,5x + \varepsilon$ gilt

$$E(Y) = 86,9 + 0,5x,$$

er steigt also monoton in $x$.

(iii) *[6 Punkte]* Die Behauptung stimmt nur für „kleine Väter“, denn

$$E(Y) \geq x \iff 86,9 + 0,5x \geq x \iff x \leq 173,8.$$