



DAV

Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

Zulassungsprüfung Stochastik

der Deutschen Aktuarvereinigung e.V.

am 09. Mai 2026

Hinweise:

- Als Hilfsmittel ist ein Taschenrechner zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- **Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.**

Wir gehen stets von einem Maßraum $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ bzw. einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ aus. Die Borel σ -Algebra auf $\mathbb{R}^n$ wird mit $\mathcal{B}^n$ bezeichnet, das Lebesgue Maß auf $\mathbb{R}^n$ wird mit λ^n bezeichnet.

Sollten Ihnen in Teilaufgaben Ergebnisse fehlen, dann treffen Sie eine plausible Annahme dafür.

Aufgabe 1 [24 Punkte]

Seien $X, Y : \Omega \rightarrow [0, \infty)$ Zufallsvariablen mit $\int_{\Omega} X dP = 1$. Sei $Q : \mathcal{A} \rightarrow [0, 1]$ das Maß

$$Q(A) := \int_{\Omega} 1_A X dP.$$

Beweisen Sie

$$\int_{\Omega} Y dQ = \int_{\Omega} XY dP.$$

Lösung Aufgabe 1[24]

Sei Y eine Treppenfunktion, also

$$Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 1_{A_i}$$

mit $\alpha_i \geq 0$, $A_i \in \mathcal{A}$, $i = 1, \dots, n$. Dann gilt

$$\int_{\Omega} Y dQ = \sum_{i=1}^n \alpha_i Q(A_i) = \sum_{i=1}^n \alpha_i \int_{\Omega} 1_{A_i} X dP = \int_{\Omega} \left(\sum_{i=1}^n \alpha_i \cdot 1_{A_i} X \right) dP = \int_{\Omega} YX dP.$$

Sei nun $Y \geq 0$ messbar. Es gibt eine Folge $(Y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von Treppenfunktionen mit $Y_n \geq 0$ f.s. und $Y_n \nearrow Y$ f.s. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\int_{\Omega} Y dQ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Y_n dQ.$$

Da Y_n eine Treppenfunktion ist, gilt wie oben gezeigt

$$\int_{\Omega} Y_n dQ = \int_{\Omega} Y_n X dP.$$

Aus $0 \leq Y_n \nearrow Y$ f.s. folgt auch $0 \leq Y_n X \nearrow YX$ f.s. Mit dem Satz von der monotonen Konvergenz folgt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Y_n X dP = \int_{\Omega} YX dP.$$

Insgesamt haben wir also gezeigt:

$$\int_{\Omega} Y dQ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Y_n dQ = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} Y_n X dP = \int_{\Omega} YX dP.$$

Aufgabe 2 [24 Punkte]

Sei X eine Zufallsvariable mit Dichte

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{e^{-x}}{\sqrt{\pi x}} & x > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Sei Y eine weitere Zufallsvariable, die bei gegebenem $X = x > 0$ normalverteilt ist mit Erwartungswert 0 und Varianz $\frac{1}{2x}$.

- (a) [5 Punkte] Bestimmen Sie die gemeinsame Dichte $f_{(X,Y)}$ von X und Y .
 (b) [3 Punkte] Bestimmen Sie die Dichte f_Y von Y .
 (c) [4 Punkte] Beweisen Sie, dass für die bedingte Dichte $f_{X|Y}$ von X gegeben Y

$$f_{X|Y}(x|y) = (1 + y^2)e^{-(1+y^2)x} \cdot 1_{(0,\infty)}(x)$$

gilt. Um welche Verteilung handelt es sich?

- (d) [7 Punkte] Bestimmen Sie $P(X \leq x|Y)$ sowie $E(X|Y)$ und $\text{Var}(X|Y)$.
 (e) [5 Punkte] Sind Y und X unabhängig?

Lösung Aufgabe 2 [(a) 5, (b) 3, (c) 4, (d) 7, (e) 5]

Seien f_X und f_Y die Randdichten von (X, Y) .

Zu (a)

Für die bedingte Dichte $f_{Y|X}$ von Y gegeben X gilt

$$f_{Y|X}(y|x) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_X(x)} \text{ wenn } f_X(x) > 0.$$

Auflösen nach $f_{(X,Y)}(x, y)$ ergibt für $x > 0$

$$f_{(X,Y)}(x, y) = f_{(Y|X)}(y|x)f_X(x) = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{\pi}} e^{-xy^2} \frac{1}{\sqrt{\pi x}} e^{-x} = \frac{1}{\pi} e^{-x(1+y^2)}.$$

Für $x \leq 0$ ist $f_{(X,Y)}(x, y) = 0$.

Zu (b)

Aus (a) ergibt sich

$$f_Y(y) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty e^{-x(1+y^2)} dx = -\frac{1}{\pi(1+y^2)} e^{-x(1+y^2)} \Big|_0^\infty = \frac{1}{\pi(1+y^2)}.$$

Zu (c)

Wegen (b) gilt für $x > 0$

$$f_{X|Y}(x|y) = \frac{f_{(X,Y)}(x, y)}{f_Y(y)} = \frac{\frac{1}{\pi} e^{-x(1+y^2)}}{\frac{1}{\pi(1+y^2)}} = e^{-x(1+y^2)}(1+y^2).$$

Für $x \leq 0$ ist $f_{X|Y}(x|y) = 0$.

Es handelt sich um eine $\text{Exp}(1 + Y^2)$ -Verteilung.

Zu (d) Wegen (c) gilt für $x > 0$

$$P(X \leq x|Y) = 1 - e^{-x(1+Y^2)}.$$

Wegen (c) kann man Erwartungswert und Varianz von $\text{Exp}(1 + y^2)$ verwenden:

$$E(X|Y = y) = \int_0^{\infty} x f_{X|Y}(x|y) dx = \frac{1}{1 + y^2} \Rightarrow E(X|Y) = \frac{1}{1 + Y^2}$$
$$\text{Var}(X|Y) = \frac{1}{(1 + Y^2)^2}.$$

Zu (e)

Die Zufallsvariablen X, Y sind nicht unabhängig, da $E(X|Y) = \frac{1}{1 + Y^2}$ nicht konstant, also insbesondere $E(X|Y) \neq E(X)$ gilt.

Aufgabe 3 [24 Punkte]

Sei X_{ij} die zufällige Anzahl der Kunden in einem Warenhaus, die in der j -ten Minute der i -ten Stunde in der Zeit zwischen 16:00 und 20:00 Uhr zahlen. Die X_{ij} seien unabhängig und identisch verteilt mit $E(X_{ij}) = 15$ und $\text{Var}(X_{ij}) = 100$. Sei ferner X die Anzahl der zahlenden Kunden in diesen vier Stunden und sei Y die Anzahl dieser Kunden, die bargeldlos zahlen. Wir gehen davon aus, dass X normalverteilt ist.

- (a) [4 Punkte] Bestimmen Sie $E(X)$ und $\text{Var}(X)$.
- (b) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass nicht mehr als 3500 Kunden während der 4 Stunden bezahlen.
- (c) [4 Punkte] $1/6$ der Kunden zahlt bargeldlos. Bestimmen Sie Erwartungswert, Varianz und Verteilung von Y .
- (d) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, dass mehr als 660 Kunden bargeldlos zahlen.
- (e) [4 Punkte] Von n Tagen sei N die zufällige Anzahl der Tage, an denen mehr 660 Kunden bargeldlos Zahlen. Bestimmen Sie die Verteilung von N .
- (f) [4 Punkte] Diskutieren Sie die Annahme der Normalverteilung für X .

Lösung Aufgabe 3 [(a) 4, (b) 4, (c) 4, (d) 4, (e) 4, (f) 4]

Zu (a)

Laut Definition gilt $X = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{60} X_{ij}$. Somit gilt

$$E(X) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{60} E(X_{ij}) = 4 \cdot 60 \cdot 15 = 3600$$

$$\text{Var}(X) = \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^{60} \text{Var}(X_{ij}) = 4 \cdot 60 \cdot 100 = 24000.$$

Zu (b)

Da X normalverteilt ist mit den Parametern aus (a), gilt

$$P(X \leq 3500) = \Phi\left(\frac{3500 - 3600}{\sqrt{24000}}\right) = \Phi\left(\frac{-100}{\sqrt{24000}}\right) = \Phi(-0,65) = 1 - \Phi(0,65)$$

$$= 1 - 0,7422 = 0,2578.$$

Zu (c)

Laut Angabe gilt $Y = \frac{X}{6}$, damit folgt

$$E(Y) = \frac{E(X)}{6} = 600, \quad \text{Var}(Y) = \frac{\text{Var}(X)}{36} = \frac{2000}{3}$$

also $Y \sim N\left(600, \frac{2000}{3}\right)$.

Zu (d)

Aufgrund von (c) ergibt sich mit der Standardnormalverteilung

$$\begin{aligned} P(Y > 660) &= 1 - P(Y \leq 660) = 1 - \Phi\left(\frac{660 - 600}{\sqrt{666,67}}\right) = 1 - \Phi\left(\frac{60}{\sqrt{666,67}}\right) \\ &= 1 - \Phi(2,32) = 1 - 0,9898 = 0,0102. \end{aligned}$$

Zu (e)

Für die Wahrscheinlichkeit p , dass an einem Tag mehr als 660 Kunden bargeldlos zahlen, gilt $p = 0,0102$. Somit gilt $N \sim B(n, p)$.

Zu (f)

X ist Summe einer großen Anzahl unabhängiger, identisch verteilter Zufallsvariablen mit endlicher Varianz. Mit dem zentralen Grenzwertsatz kann man daher davon ausgehen, dass X normalverteilt ist.

Aufgabe 4 [24 Punkte]

Für $x \in \mathbb{R}$ bezeichnet $\lfloor x \rfloor$ die größte ganze Zahl, die kleiner als x ist, z.B. $\lfloor 3, 1 \rfloor = 3$, $\lfloor 3, 8 \rfloor = 3$.

Sei $X \sim \text{Exp}(\lambda)$ und die diskrete Zufallsvariable $N := \lfloor X \rfloor$.

(a) [6 Punkte] Beweisen Sie, dass für die Wahrscheinlichkeitsfunktion von N gilt:

$$P(N = n) = (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda n}, \quad n \in \mathbb{N}_0.$$

(b) [4 Punkte] Um welche Verteilung handelt es sich in (a)? Bestimmen Sie den Erwartungswert und die Varianz von N .

(c) [12 Punkte] Bestimmen Sie für eine Stichprobe von unabhängig und identisch verteilten $N_1, \dots, N_n \sim N$ einen Maximum Likelihood Schätzer für λ .

(d) [2 Punkte] Welcher Schätzwert für λ ergibt sich in (c) im Fall einer Stichprobe mit Stichprobenumfang 15 und Stichprobenmittel 1,6?

Lösung Aufgabe 4 [(a) 6, (b) 4, (c) 12, (d) 2]

Zu (a)

Für die Verteilungsfunktion von X gilt

$$P(X \leq x) = 1 - e^{-\lambda x}.$$

Insbesondere ist die Verteilungsfunktion von X stetig. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned} P(N = n) &= P(n \leq X < n + 1) \\ &= P(X < n + 1) - P(X < n) \\ &= P(X \leq n + 1) - P(X \leq n) \\ &= (1 - e^{-\lambda(n+1)}) - (1 - e^{-\lambda n}) \\ &= (1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda n} \end{aligned}$$

Zu (b)

Es handelt sich um die Negativbinomial Verteilung $NB(1, 1 - e^{-\lambda})$. Damit folgt

$$E(N) = \frac{e^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}}, \quad \text{Var}(N) = \frac{e^{-\lambda}}{(1 - e^{-\lambda})^2}.$$

Zu (c)

Aus der Likelihood L ergibt sich

$$L(\lambda) = \prod_{i=1}^n ((1 - e^{-\lambda}) e^{-\lambda n_i}) = (1 - e^{-\lambda})^n e^{-\sum_{i=1}^n \lambda n_i}$$

$$\ell(\lambda) := \ln L(\lambda) = n \ln(1 - e^{-\lambda}) - \sum_{i=1}^n \lambda n_i$$

$$\ell'(\lambda) = \frac{ne^{-\lambda}}{1 - e^{-\lambda}} - \sum_{i=1}^n n_i = \frac{n}{e^{\lambda} - 1} - \sum_{i=1}^n n_i$$

$$\ell''(\lambda) = -\frac{ne^{\lambda}}{(1 - e^{\lambda})^2} < 0$$

Aus $\ell'(\hat{\lambda}) = 0$ ergibt sich wegen $\ell''(\lambda) < 0$ der ML-Schätzer

$$\hat{\lambda} = \ln \left(\frac{n + \sum_{i=1}^n N_i}{\sum_{i=1}^n N_i} \right) = \ln \left(\frac{1 + \bar{N}}{\bar{N}} \right) \text{ mit } \bar{N} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n N_i.$$

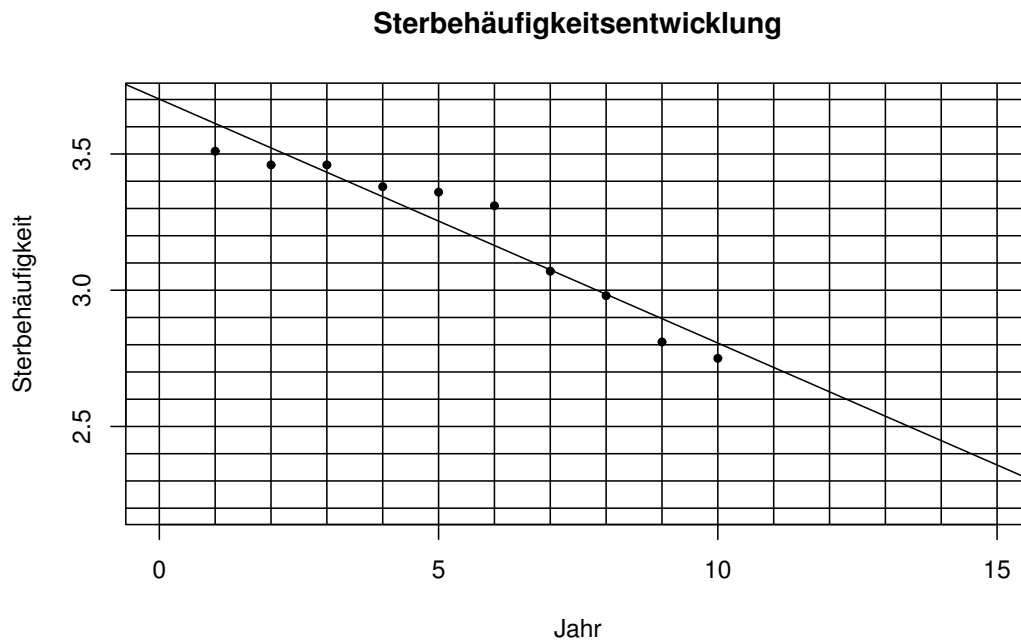
Zu (d)

Laut (c) erhält man den Schätzwert $\hat{\lambda} = \ln \left(\frac{1 + \bar{n}}{\bar{n}} \right) = \ln \left(\frac{1 + 1,6}{1,6} \right) = 0,49$.

Aufgabe 5 [24 Punkte]

Für einen homogenen Bestand und die Jahre $i = 1, \dots, 10$ sind in der folgenden Tabelle und Abbildung die Realisationen y_i der relativen Schadenhäufigkeiten Y_i in % dargestellt:

Jahr	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
y_i	3,51	3,46	3,46	3,38	3,36	3,31	3,07	2,98	2,81	2,75



Für die Zufallsvariablen Y_i wird das Modell

$$Y_i = \alpha + bx_i + \varepsilon_i, \quad i = 1, \dots, 10$$

mit $x_i := i$ untersucht. Die ε_i seien unabhängig und $N(0, \sigma^2)$ -verteilt. Sie können verwenden:

$$\begin{aligned} \bar{x} &= 5,5; & \sum_{i=1}^{10} (x_i - \bar{x})^2 &= 82,5 \\ \bar{y} &= 3,209; & \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})^2 &= 0,725; & \sum_{i=1}^{10} (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x}) &= -7,407. \end{aligned}$$

(a) Stützen die Daten die Behauptung, dass die Schadenhäufigkeit

(i) [12 Punkte] vom Beobachtungsjahr abhängt?

(ii) [4 Punkte] sich jedes Jahr um 0,1 %-Punkte verringert?

Beide Aussagen sollen zu einem Niveau von $\alpha = 5 \%$ erfolgen.

(b) Mit einer Statistiksoftware werden für das kommende Jahr 11 das Schätzintervall für den Wert $E(Y_{11})$ und das Prognoseintervall für $Y_{11} = a + bx_{11} + \varepsilon_{11}$ jeweils zum Niveau 95 % ausgegeben. Dabei steht *lwr* bzw. *upr* für die untere bzw. obere Intervallgrenze. Punktschätzer bzw. Punktprognose von $E(Y_{11})$ und Y_{11} werden mit *fit* bezeichnet:

	<i>lwr</i>	<i>upr</i>	<i>fit</i>		<i>lwr</i>	<i>upr</i>	<i>fit</i>
(1)	2.58	2.85		(2)	2.48	2.96	

(i) [3 Punkte] Welches der beiden Intervalle ist das Prognose-, welches das Schätzintervall? Begründen Sie Ihre Antwort.

(ii) [5 Punkte] Die Werte von *fit* sind nicht lesbar, bestimmen Sie diese.

Lösung Aufgabe 5 [(a,i) 12, (a,ii) 4, (b,i) 3, (c) 5]

Zu (a)

(i) Zu untersuchen ist die Hypothese $H_0 : b = 0$. Es ergeben sich folgende Schätzwerte:

$$\begin{aligned}\hat{b} &= \frac{-7,407}{82,5} = -0,09 \\ \hat{\sigma}^2 &= \frac{1}{8} \left(0,725 - \frac{7,407^2}{82,5} \right) = 0,0075 \\ \text{se}(\hat{b}) &= \sqrt{\frac{0,0075}{82,5}} = 0,0095 \\ T &= \frac{\hat{b} - b_0}{\text{se}(\hat{b})} = \frac{-0,09}{0,0095} = -9,439.\end{aligned}$$

H_0 wird abgelehnt, denn $|T| > t_{8;0,975} = 2,306$. Somit wird die Hypothese, dass die Sterblichkeit nicht vom Beobachtungsjahr abhängt, verworfen.

(ii) Zu untersuchen ist nun die Hypothese $H_0 : b = -0,1$. Mit den Werten aus (a) ergibt sich nun die Testgröße

$$T = \frac{\hat{b} - b_0}{\text{se}(\hat{b})} = \frac{-0,09 + 0,1}{0,0095} = 1,053.$$

Die Hypothese, dass sich die Sterblichkeit jährlich um 0,1 %-Punkte verbessert wird also nicht verworfen.

Zu (b)

(i) Das Intervall (1) ist das Schätzintervall, (2) das Prognoseintervall. Das Prognoseintervall ist breiter.

(ii) *Fit* ist die Intervallmitte, also das arithmetische Mittel von *lwr* und *upr*: 2,715 bzw. 2,72. Den Wert erhält man auch mittels

$$\hat{a} + 11\hat{b}.$$

Es ist der geschätzte Erwartungswert für das Jahr 11 und liegt auf der Regressionsgeraden, in beiden Fällen also derselbe Wert. Der Unterschied ist auf Rundungen zurückzuführen.