

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e.V.

am 09. Mai 2026

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner und eine mathematische Formelsammlung zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 5 Seiten.
- **Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.**

Aufgabe 1. [17 Punkte] Es sollen die folgenden Mengen untersucht werden:

$$U_d := \{v \in \mathbb{R}^3 \mid \langle p, v \rangle = \langle q, v \rangle + d\}.$$

Dabei sind $p, q \in \mathbb{R}^3$ linear unabhängig und $d \in \mathbb{R}$.

- (a) [3 Punkte] Zeigen Sie: $v_d := d \frac{p-q}{\|p-q\|^2} \in U_d$.
- (b) [5 Punkte] Für welche d ist U_d ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$?
- (c) [5 Punkte] Begründen Sie, dass es sich bei U_d um Ebenen im $\mathbb{R}^3$ handelt. Welchen Abstand hat U_d zum Ursprung?
- (d) [4 Punkte] Bestimmen Sie die Orthogonalräume

$$U_d^\perp := \{w \in \mathbb{R}^3 \mid \langle w, v \rangle = 0 \text{ für alle } v \in U_d\}.$$

Lösung:

- (a) Direkt aus der Definition von v_d und den Eigenschaften des Skalarprodukts folgt für jedes $d \in \mathbb{R}$:

$$\langle p, v_d \rangle - \langle q, v_d \rangle = \langle p - q, v_d \rangle = \frac{d}{\|p - q\|^2} \langle p - q, p - q \rangle = d \frac{\|p - q\|^2}{\|p - q\|^2} = d.$$

Also $v_d \in U_d$.

- (b) Für $d \neq 0$ kann U_d kein Unterraum des $\mathbb{R}^3$ sein, da dann offensichtlich $0 \notin U_d$. Für $d = 0$ ist $0 \in U_0$ und es gilt für alle $v, \tilde{v} \in U_0, \lambda \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} \langle p, v + \tilde{v} \rangle &= \langle p, v \rangle + \langle p, \tilde{v} \rangle = \langle q, v \rangle + \langle q, \tilde{v} \rangle = \langle q, v + \tilde{v} \rangle \\ \langle p, \lambda v \rangle &= \lambda \langle p, v \rangle = \lambda \langle q, v \rangle = \langle q, \lambda v \rangle. \end{aligned}$$

Also auch $v + \tilde{v} \in U_0$ und $\lambda v \in U_0$.

Damit ist U_0 ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$.

- (c) Alle $v \in U_0$ sind nach Definition von U_0 orthogonal zu $p - q$, so dass U_0 eine Ebene mit der Normalen $\text{span}\{p - q\}$ ist. Wegen $0 \in U_0$ hat U_0 den Abstand 0 zum Ursprung; U_0 ist also eine Ursprungsebene. Für $d \neq 0$ gilt nach Definition von U_d und v_d :

$$\langle p - q, v - v_d \rangle = 0.$$

Demnach ist U_d für $d \neq 0$ eine Ebene, die wegen $v_d \in \text{span}\{p - q\}$ ebenfalls die Normale $\text{span}\{p - q\}$ besitzt, aber den folgenden positiven Abstand zum Ursprung hat:

$$\|v_d\| = \frac{|d|}{\|p - q\|}.$$

(d) Nach (c) ist zunächst klar: $U_0^\perp = \text{span}\{p - q\}$.

Für $d \neq 0$ wähle zwei linear unabhängige Vektoren v_1, v_2 aus U_0 . Die drei Vektoren v_d (nach (a)), $v_1 + v_d$ und $v_2 + v_d$ liegen dann in U_d und sind linear unabhängig.

Da $w \in U_d^\perp$ insbesondere zu diesen drei Vektoren orthogonal sein muss, kann dieses nur für $w = 0$ gelten. Also $U_d^\perp = \{0\}$.

Aufgabe 2. [15 Punkte] Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem über $\mathbb{R}$ mit den beiden Parametern $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & & = & 1 \\ x_1 & + & (a+2)x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & b \\ -x_1 & - & 2x_2 & + & x_3 & - & 3x_4 & = & 2-b \\ x_1 & + & 2x_2 & - & x_3 & + & 3x_4 & = & 2b \end{array}$$

Im folgenden sollen nun die Lösungsmengen dieses Gleichungssystems in Abhängigkeit von den Parametern a und b bestimmt werden.

- (a) [6 Punkte] Zeigen Sie dazu, dass sich die erweiterte Koeffizientenmatrix dieses Gleichungssystems durch elementare Zeilenumformungen auf die folgende Zeilenstufenform (Treppenform) bringen lässt:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+b \end{array}$$

Geben Sie bei jedem Schritt die verwendeten elementaren Zeilenumformungen an.

- (b) [9 Punkte] Bestimmen Sie nun unter Verwendung der Zeilenstufenform (Treppenform) aus (a) die Lösungsmengen in Abhängigkeit von den Parametern a und b .

Lösung:

- (a) Das Gleichungssystem wird folgendermaßen auf die gewünschte Zeilenstufenform (Treppenform) gebracht:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & a+2 & -1 & 3 & b \\ -1 & -2 & 1 & -3 & 2-b \\ 1 & 2 & -1 & 3 & 2b \end{array} \xrightarrow[\substack{II:=II-I \\ III:=III+I \\ IV:=IV-I}]{\quad} \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & -1 & 3 & b-1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3-b \\ 0 & 0 & -1 & 3 & 2b-1 \end{array} \xrightarrow[\substack{II:=II+III \\ IV:=IV+III}]{\quad} \begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 3-b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2+b \end{array} \quad (*)$$

(Römische Zahlen bezeichnen die Zeilennummern der erweiterten Koeffizientenmatrix.)

(b) Mit L wird die Lösungsmenge des gegebenen linearen Gleichungssystems bezeichnet.

1. Fall: $a = 0$ oder $b \neq -2$

Aus der zweiten bzw. aus der vierten Zeile der Zeilenstufenform (*) folgt unmittelbar: $L = \emptyset$.

2. Fall: $a \neq 0$ und $b = -2$

Durch offensichtliche elementare Zeilenumformungen lässt sich die folgende normierte Zeilenstufenform (reduzierte Treppenform) aus (*) herstellen:

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 - \frac{4}{a} \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{2}{a} \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}$$

und damit durch Ablesen:

$$L = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 \mid x = \begin{pmatrix} 1 - \frac{4}{a} \\ \frac{2}{a} \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}.$$

Aufgabe 3. [22 Punkte] Zu einer unbekannten reellen 3×3 -Matrix A liegen folgende Informationen vor:

- A hat genau die Eigenwerte 1 und 4, wobei 4 die algebraische Vielfachheit 2 hat.
- $u_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist Eigenvektor zu Eigenwert 4, $u_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ Eigenvektor zu Eigenwert 1.
- Für $u_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ gilt: $(A - 4E_3)u_2 = u_1$ (E_3 3×3 -Einheitsmatrix).

Bestimmen Sie nun mit diesen Informationen die Matrix A in folgenden Schritten:

- [3 Punkte] Zeigen Sie, dass die Vektoren u_1, u_2, u_3 eine Basis des $\mathbb{R}^3$ bilden.
- [6 Punkte] Leiten Sie her, dass der Eigenraum $\text{Eig}(A; 4)$ eindimensional ist.
(Hinweis: Nehmen Sie dazu an, dass $\text{Eig}(A; 4) = \text{span}\{u_1, \tilde{u}\}$ gilt und betrachten Sie $(A - 4E_3)\tilde{u}$.)
- [5 Punkte] Begründen Sie, dass die zu A ähnliche Jordan-Normalform J folgende Form hat:

$$J = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- [5 Punkte] Bestimmen Sie zu der mit den Spalten u_1, u_2, u_3 gebildeten Matrix S die Inverse S^{-1} :

$$S := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- [3 Punkte] Berechnen Sie die Matrix A über die Beziehung $A = SJS^{-1}$.

Lösung:

- Für die mit u_1, u_2 und u_3 gebildete Matrix S gilt: $\det S = -1 \neq 0$.
Also sind die drei Spaltenvektoren von S linear unabhängig und bilden damit eine Basis von $\mathbb{R}^3$.
- Da der Eigenwert 4 die algebraische Vielfachheit 2 besitzt, kann der zugehörige Eigenraum höchstens die Dimension 2 haben.
Angenommen $\text{Eig}(A; 4) = \text{span}\{u_1, \tilde{u}\}$. Dann folgt mit $\tilde{u} = \lambda_1 u_1 + \lambda_2 u_2 + \lambda_3 u_3$:

$$0 = (A - 4E_3)\tilde{u} = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 u_1 - 3\lambda_3 u_3.$$

Da u_1 und u_3 linear unabhängig sind, folgt $\lambda_2 = 0 = \lambda_3$, damit $\tilde{u} = \lambda_1 u_1$ und $\text{Eig}(A; 4) = \text{span}\{u_1\}$.

(c) Auf der Hauptdiagonalen von J stehen die beiden Eigenwerte 1, 4 von A gemäß ihrer Vielfachheit. Da die beiden Eigenräume jeweils eindimensional sind, steht in J zu jedem der beiden Eigenwerte genau ein Jordanblock. Aus den geometrischen und algebraischen Vielfachheiten ergibt sich, dass für den Eigenwert 4 ein 2×2 -Block und für den Eigenwert 1 ein 1×1 -Block in J (bis auf Reihenfolge eindeutig) stehen muss.

(d) Mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus ergibt sich aus

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right).$$

gerade

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array} \right)$$

und damit

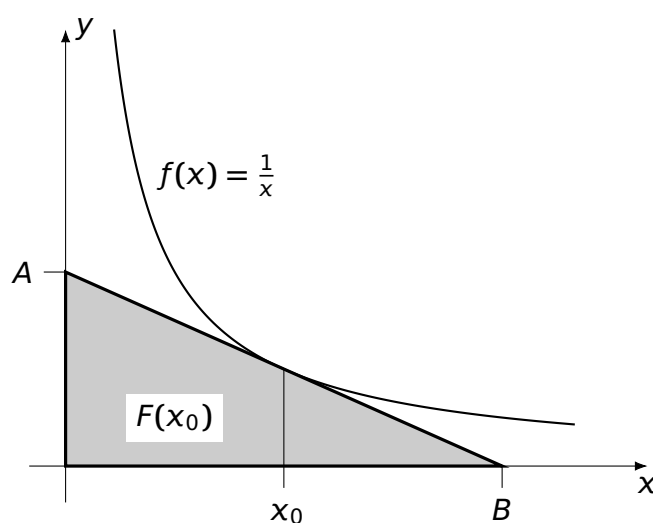
$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

(e) Direkte Rechnung ergibt

$$A = SJS^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 4 \\ -3 & 4 & 3 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. [14 Punkte] Betrachten Sie die Funktion $f: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

- (a) [6 Punkte] Bestimmen Sie die Gleichung der Tangente an den Graphen von f an der Stelle x_0 .
- (b) [5 Punkte] Ermitteln Sie die Koordinaten A und B der Schnittpunkte dieser Tangente mit den beiden Koordinatenachsen (siehe Skizze).
- (c) [3 Punkte] Berechnen Sie die Fläche $F(x_0)$ des Dreiecks mit den Ecken $(0, A)$, $(B, 0)$ und $(0, 0)$ (siehe Skizze).



Lösung:

- (a) Aus $f'(x) = -\frac{1}{x^2}$ folgt

$$T_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x_0^2}(x - x_0) = \frac{2x_0 - x}{x_0^2}$$

- (b) $A = T_{x_0}(0) = \frac{2}{x_0}$.

B ist die Nullstelle von $T_{x_0}(x)$. Es folgt $2x_0 - B = 0$ und damit $B = 2x_0$.

- (c) Die Fläche ist $F(x_0) = \frac{1}{2} \cdot A \cdot B = 2$.

Aufgabe 5. [23 Punkte] Bestimmen Sie alle Maxima und Minima von $f(x, y) = x^2y$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + 2y^2 = 6$.

Lösung: Der Ansatz $\nabla f(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ mit dem Lagrange-Multiplikator λ führt zu dem Gleichungssystem

$$\begin{aligned} 2xy &= 2\lambda x \\ x^2 &= 4\lambda y \\ x^2 + 2y^2 &= 6 \end{aligned}$$

Aus der ersten Gleichung folgt $x = 0$ oder $y = \lambda$. Im Fall $x = 0$ ergeben sich mit der Nebenbedingung die zwei möglichen Extremalstellen $(0, \pm\sqrt{3})$ mit dem Funktionswert $f(0, \pm\sqrt{3}) = 0$.

Im Fall $y = \lambda$ wird die zweite Gleichung zu $x^2 = 4y^2$. Aus der Nebenbedingung folgt $6y^2 = 6$ mit den Lösungen $y = \pm 1$. Weiter folgt $x^2 = 4$ mit den Lösungen $x = \pm 2$. Es ergeben sich die vier weiteren möglichen Extremalstellen $(\pm 2, \pm 1)$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind $f(\pm 2, 1) = 4$ und $f(\pm 2, -1) = -4$. Die Funktion $f(x, y)$ hat unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 6$ zwei Maxima an den Stellen $(\pm 2, 1)$ mit dem Funktionswert 4 und zwei Minima an den Stellen $(\pm 2, -1)$ mit dem Funktionswert -4 .

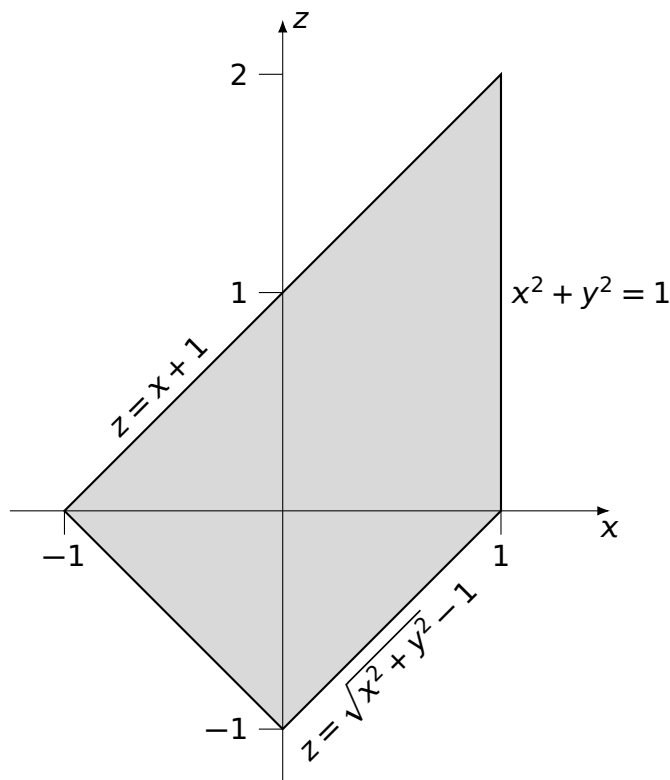
Aufgabe 6. [16 Punkte]

Betrachten Sie den Körper K der von oben durch die Ebene $z = x + 1$ und von unten durch den Kegel $z = \sqrt{x^2 + y^2} - 1$ berandet wird, und der innerhalb des Zylinders $x^2 + y^2 = 1$ liegt.

- (a) [6 Punkte] Skizzieren Sie den Schnitt von K mit der (x, z) -Ebene.
(b) [10 Punkte] Berechnen Sie das Volumen von K durch Übergang zu Polarkoordinaten.

Lösung:

- (a) Der Schnitt von K mit der (x, y) -Ebene ist in folgender Skizze dargestellt:



- (b) Der obere Rand lautet in Polarkoordinaten $z = r \cos \varphi + 1$, und der untere Rand ist $z = r - 1$. Damit ist das Volumen von K gleich

$$\begin{aligned} V(K) &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} ((r \cos \varphi + 1) - (r - 1)) r \, d\varphi \, dr \\ &= \int_0^1 \int_0^{2\pi} (r^2 \cos \varphi + 2r - r^2) \, d\varphi \, dr = 2\pi \int_0^1 (2r - r^2) \, dr = 2\pi \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{4\pi}{3}. \end{aligned}$$

Aufgabe 7. [13 Punkte] Sie haben eine lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten gelöst. Leider sind auf Ihren Aufzeichnungen zwei Tintenkleckse, die Teile der Differentialgleichung und des von Ihnen ermittelten Fundamentalsystems verdecken:

Die Differentialgleichung

$$y^{(4)} = 17xe^{-2x}$$

hat das Fundamentalsystem $\{e^{-2x}, e^{2x} \sin x\}$

und eine partikuläre Lösung $y_p(x) = \left(\frac{1}{6}x^3 + \frac{4}{17}x^2\right)e^{-2x}$

Sie wollen aus dem noch sichtbaren Teil Ihrer Aufzeichnungen das Fundamentalsystem und die Differentialgleichung rekonstruieren.

- (a) [7 Punkte] Geben Sie das vollständige Fundamentalsystem an. Begründen Sie Ihr Vorgehen in vollständigen Sätzen.
- (b) [6 Punkte] Geben Sie die Differentialgleichung an.

Lösung:

- (a) Da $e^{2x} \sin x$ im Fundamentalsystem enthalten ist, hat das charakteristische Polynom die konjugiert komplexen Nullstellen $\lambda_{1,2} = 2 \pm i$. Daher ist die Funktion $e^{2x} \cos x$ eine weitere Fundamentallösung. Die partikuläre Lösung zur Störfunktion $17xe^{-2x}$ ist $y_p(x) = x^2 \left(\frac{1}{6}x + \frac{4}{17}\right)e^{-2x}$. Der Vorfaktor x^2 zeigt, dass die Zahl $\lambda_{3,4} = -2$ eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Die Funktionen e^{-2x} und xe^{-2x} gehören daher ebenfalls zum Fundamentalsystem. Da die Differentialgleichung die Ordnung 4 hat, enthält das Fundamentalsystem genau vier Fundamentallösungen. Das vollständige Fundamentalsystem ist

$$\{e^{-2x}, xe^{-2x}, e^{2x} \cos x, e^{2x} \sin x\}.$$

- (b) Nach den obigen Überlegungen ist das charakteristische Polynom der Differentialgleichung

$$\chi(\lambda) = (\lambda - (2 + i)) \cdot (\lambda - (2 - i)) \cdot (\lambda + 2)^2 = \lambda^4 - 7\lambda^2 + 4\lambda + 20.$$

Die Koeffizienten dieses Polynoms stimmen mit den Koeffizienten der Differentialgleichung überein. Diese lautet

$$y^{(4)} - 7y'' + 4y' + 20y = 17xe^{-2x}.$$