DAV
Deutsche
Aktuarvereinigung e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 17. Mai 2025

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 11 Seiten.
- **Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.**

Aufgabe 1. *[17 Punkte]* Es sei die lineare Abbildung $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ gegeben durch

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} x-y \\ x+y-2z \\ x-z \end{pmatrix}.$$

(a) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie die Abbildungsmatrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ von F und den Rang von A.

(b) *[9 Punkte]* Geben Sie eine Basis K von Kern (F) und eine Basis B von Bild (F) an.
Prüfen Sie, ob $K \cup B$ eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Lösung:

(a) Die Spalten der Abbildungsmatrix A von F bestehen genau aus den Bildern der Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^3$ unter F:

$$A = \big(F(e_1)\ F(e_2)\ F(e_3)\big) = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Mittels geeigneter elementarer Zeilenumformungen lässt sich A auf Zeilenstufenform bringen:

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Da elementare Zeilenumformungen den Rang einer Matrix nicht ändern, ist der Rang von A zwei (= Anzahl der Nichtnullzeilen der Zeilenstufenform).

(b) Wegen $\text{Rang}\,(A) = 2 = \dim \text{Bild}\,(F)$ gilt nach Dimensionsformel $\dim \text{Kern}\,(T) = 3 - \dim \text{Bild}\,(F) = 1$.
Die normierte Zeilenstufenform von A lautet:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die letzte Spalte liefert damit eine Basis für Kern (F), genauer:

$$\text{Kern}\,(F) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right\},$$

d.h. also

$$K = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Da der erste und zweite Spaltenvektor von A linear unabhängig sind, in Bild (F) liegen und $\dim \text{Bild}\,(F) = 2$, gilt:

$$\text{Bild}\,(F) = \text{span}\,\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

d.h. also

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

$K \cup B$ ist keine Basis des $\mathbb{R}^3$, da $K \subset B$ und damit $K \cup B$ nur aus zwei l.u. Vektoren statt der erforderlichen drei besteht.

Aufgabe 2. *[20 Punkte]* Betrachten Sie die Ebene $E_\lambda := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_3 = x_1 + \lambda \right\}$ mit dem Parameter $\lambda \in \mathbb{R}$ und die zugehörige Spiegelung $S_\lambda : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ des $\mathbb{R}^3$ an dieser Ebene.

(a) *[6 Punkte]* Schreiben Sie S_λ als affin-lineare Abbildung, d.h. in der Form $Ax + b_\lambda$ mit einer von λ unabhängigen Matrix $A \in M_3(\mathbb{R})$ und einem Vektor $b_\lambda \in \mathbb{R}^3$.

(b) *[8 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Matrix A orthogonal ist und dass die affin-lineare Abbildung S_λ bijektiv ist.
Geben Sie die Umkehrabbildung S_λ^{-1} ebenfalls als affin-lineare Abbildung an.

(c) *[6 Punkte]* Geben Sie das Bild der folgenden Geraden g unter S_λ an:

$$g(t) := t \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ t \in \mathbb{R}.$$

Lösung:

(a) Für die Koordinaten eines Bildpunktes unter der Spiegelung S_λ an der Ebene E_λ folgt aus einer elementaren geometrischen Überlegung:

$$S_\lambda(x_1, x_2, x_3) = (x_3 - \lambda, x_2, x_1 + \lambda) \ \text{ für alle } \ (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Damit ergibt sich die gesuchte affin-lineare Darstellung:

$$S_\lambda(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{=A} x + \underbrace{\begin{pmatrix} -\lambda \\ 0 \\ \lambda \end{pmatrix}}_{=b_\lambda}, \ x \in \mathbb{R}^3.$$

(b) Für die Skalarprodukte der Spalten $a_i, \ i \in \{1, 2, 3\}$, von A gilt:

$$\langle a_i, \ a_j \rangle = \delta_{ij},$$

also ist A orthogonal.
Als orthogonale Matrix ist A invertierbar, so dass die Gleichung $Ax + b_\lambda = y$ bzw. $Ax = y - b_\lambda$ für jedes $y \in \mathbb{R}^3$ eindeutig lösbar ist. Das bedeutet aber, dass die affin-lineare Abbildung S_λ surjektiv und injektiv, also bijektiv ist.
Wegen der Orthogonalität von A gilt $A^{-1} = A^T = A$ und damit für die Umkehrabbildung S_λ^{-1}:

$$S_\lambda^{-1}(y) = A^{-1}(y - b_\lambda) = Ay - Ab_\lambda = Ay + b_\lambda = S_\lambda(y), \ y \in \mathbb{R}^3.$$

(c) Für die zu allen E_λ parallele Ebene E_0 gilt offensichtlich

$$E_0 = \operatorname{span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

Da das Skalarprodukt des Richtungsvektors der Geraden g mit jedem dieser beiden Basisvektoren von E_0 offensichtlich Null ist, steht der Richtungsvektor senkrecht auf E_0 und damit auch senkrecht auf allen Ebenen E_λ, so dass g durch die Spiegelung S_λ wieder auf sich abgebildet wird.

Aufgabe 3. *[17 Punkte]* Die zunächst unbekannten reellen Werte der Parameter u, v in der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & u \\ 0 & 4 & 8 \\ -u & 0 & v \end{pmatrix}$$

sollen durch zunehmende Kenntnis über die Eigenwerte von A sukzessive bestimmt werden.

(a) *[3 Punkte]* Zeigen Sie zunächst, ohne u und v zu kennen, dass die Matrix A den Eigenwert $\lambda_1 = 4$ besitzt.

(b) *[4 Punkte]* Es sei nun bekannt, dass zwei der drei im allgemeinen komplexen Eigenwerte der Matrix A identisch sind. Begründen Sie ohne zusätzliche Berechnungen, dass dann sogar alle Eigenwerte der Matrix A reell sind.

(c) *[3 Punkte]* Als weitere Information erhalten Sie jetzt, dass der doppelte Eigenwert der Matrix A gerade $\lambda_2 = \lambda_3 = 10$ ist. Bestimmen Sie, ohne u zu kennen, mit den bisher verfügbaren Daten den Wert von v.

(d) *[4 Punkte]* Welche Werte kommen für u in Frage, wenn die Matrix A alle bisherigen Anforderungen erfüllen soll?

(e) *[3 Punkte]* Als letzte Information erhalten Sie, dass das Skalarprodukt aus der ersten und letzten Spalte der Matrix A positiv ist. Welche konkrete Matrix A ergibt sich damit schließlich?

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$p_A(\lambda) = (4-\lambda)\big((16-\lambda)(v-\lambda)+u^2\big). \tag{1}$$

Damit ist $\lambda_1 = 4$ Nullstelle von p_A bzw. Eigenwert von A.

(b) p_A hat offensichtlich nur reelle Koeffizienten, so dass mit $z \in \mathbb{C}$ auch $\overline{z}$ Nullstelle von p_A ist. Angenommen p_A würde eine Nullstelle z mit $\operatorname{Im} z \neq 0$ haben, dann würde das Polynom p_A dritten Grades drei verschiedene Nullstellen, i.e. $4, z, \overline{z}$, haben im Widerspruch dazu, dass zwei Nullstellen identisch sind.

(c) Da die Spur der Matrix A mit der Summe aller Eigenwerte von A übereinstimmt, folgt:

$$\operatorname{Spur} A = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 24 = 20 + v.$$

Also $v = 4$.

(d) Aus (1) und der Kenntnis der drei Eigenwerte folgt:

$$(16-\lambda)(v-\lambda)+u^2=(10-\lambda)^2 \Longleftrightarrow 64+u^2=100$$

und damit $u \in \{\pm 6\}$.

(e) Es gilt

$$\left\langle \begin{pmatrix} 16 \\ 0 \\ -u \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u \\ 8 \\ 4 \end{pmatrix} \right\rangle = 12u > 0,$$

also $u = 6$.
Insgesamt erhält man

$$A = \begin{pmatrix} 16 & 0 & 6 \\ 0 & 4 & 8 \\ -6 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. *[18 Punkte]*

(a) *[3+6 Punkte]* Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert:

(i) $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$

(ii) $a_n = \dfrac{n^n}{\left(n!\right)^2}$

Hinweis: Untersuchen Sie die Quotienten von je zwei aufeinanderfolgenden Folgegliedern.

(b) *[5+4 Punkte]* Untersuchen Sie die nachstehenden Reihen auf Konvergenz:

(i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n-(-1)^n\sqrt{n}}$

(ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!}$

Lösung:

(a) (i) Es ist $a_n = \dfrac{1}{n} \cdot \underbrace{\dfrac{2 \cdot \ldots \cdot n}{n \cdot \ldots \cdot n}}_{\leq 1} \leq \dfrac{1}{n}$, und daraus folgt $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

(ii) Für $n \geq 2$ gilt $\dfrac{a_{n+1}}{a_n} = \dfrac{(n+1)^{n+1} \cdot \left(n!\right)^2}{\left((n+1)!\right)^2 \cdot n^n} = \dfrac{1}{n+1}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < \dfrac{\mathrm{e}}{n+1} < 1$, da $\mathrm{e} < 3$ und $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ monoton wachsend ist. Die Folge $\left(a_n\right)$ ist monoton fallend und von unten durch 0 beschränkt, und daher existiert der Grenzwert $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Weiter gilt $0 < a_{n+1} < \frac{\mathrm{e}}{n+1} \cdot a_n$ und daraus folgt $0 \leq a \leq 0 \cdot a = 0$. Damit ergibt sich $a = 0$.

(b) (i) Es ist $\dfrac{1}{n-(-1)^n\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n+\sqrt{n}} \geq \dfrac{1}{n+n} = \dfrac{1}{2n}$. Aus der Divergenz von $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n}$ folgt die Divergenz der zu untersuchenden Reihe (Minorantenkriterium).

(ii) Es ist

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left((n+1)!\right)^2 \cdot (2n)!}{(2n+2)! \cdot (n!)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2(2n+1)} = \frac{1}{4} < 1.$$

Aus dem Quotientenkriterium folgt die Konvergenz der Reihe.

Aufgabe 5. *[15 Punkte]* Bei der folgenden Aufgabe dürfen Sie aus der Formelsammlung für unbestimmte Integrale nur

$$\int x^r \, dx = \frac{1}{r+1} x^{r+1} + c \quad (r \neq -1)$$

verwenden.

(a) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie durch eine geeignete Substitution

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \, dx.$$

(b) *[7 Punkte]* Bestimmen Sie mittels partieller Integration

$$\int x^n \ln(x) \, dx \quad \text{für } n \in \mathbb{N}.$$

Lösung:

(a) Die Substitution $y = 1 + x^4$ ergibt zunächst $x^3 \, dx = \frac{1}{4} dy$. Aus dem Integral wird damit

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{1+x^4}} \, dx = \frac{1}{4} \int \frac{1}{\sqrt{y}} \, dy = \frac{1}{2}\sqrt{y} + c = \frac{1}{2}\sqrt{1+x^4} + c.$$

(b) Mit der Wahl $g'(x) = x^n$ und $f(x) = \ln x$ ergibt eine partielle Integration

$$\int x^n \ln(x) \, dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^{n+1} \cdot \frac{1}{x} \, dx =$$

$$\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{n+1} \int x^n \, dx =$$

$$\frac{1}{n+1} x^{n+1} \ln x - \frac{1}{(n+1)^2} x^{n+1} + c = \frac{x^{n+1}}{n+1} \left(\ln x - \frac{1}{n+1} \right) + c.$$

Aufgabe 6. *[20 Punkte]*
Es soll die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ untersucht werden.

(a) *[7 Punkte]* Bestimmen Sie alle kritischen Punkte von f.

(b) *[7 Punkte]* Zeigen Sie, dass f in $(0, 0)$ längs jeder Gerade durch $(0, 0)$ ein relatives Minimum hat, d.h. für alle $(a, b) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ und mit $g(t) = (at, bt)$ hat $f \circ g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $t \mapsto f(at, bt)$ ein relatives Minimum bei $t = 0$.

(c) *[6 Punkte]* Begründen Sie, dass der Punkt $(0, 0)$ ein Sattelpunkt von f ist.
Hinweis: Eine Begründung mit Hilfe der Hesse-Matrix ist nicht möglich.

Lösung:

(a) Es gilt $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 4x(3x^2 - 2y) \\ 2(y - 2x^2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Longleftrightarrow \begin{cases} x(3x^2 - 2y) = 0, & (i) \\ 2y - 4x^2 = 0, & (ii). \end{cases}$

Aus (i) folgt $x = 0$ oder $3x^2 - 2y = 0$. Im Fall $x = 0$ wird (ii) zu der Gleichung $y = 0$. Im Fall $3x^2 - 2y = 0$ wird (ii) zu $2y - 4x^2 = 2y - 3x^2 - x^2 = -x^2 = 0$ und es folgt $x = 0$. Daraus folgt, dass $(0, 0)$ der einzige stationäre Punkt von f ist.

(b) Die Funktion $h(t) = (f \circ g)(t)$ und deren Ableitungen sind

$$\begin{aligned} h(t) &= b^2t^2 - 4a^2bt^3 + 3a^4t^4, \\ h'(t) &= 2b^2t - 12a^2bt^2 + 12a^4t^3 \text{ und} \\ h''(t) &= 2b^2 - 24a^2bt + 36a^4t^2 \end{aligned}$$

Es folgt $h'(0) = 0$ und $h''(0) = 2b^2 > 0$ für $b \neq 0$. Für $b = 0$ gilt $h(t) = 3a^4t^4 > 0 = h(0)$ für $t \neq 0$. Daher hat die Funktion h an der Stelle $t = 0$ immer ein relatives Minimum.

(c) Auf der Parabel $(x, 2x^2)$ gilt: $f(x, 2x^2) = -x^4 < f(0, 0) = 0$ für $x \neq 0$. Zusammen mit Teil (b) folgt, dass die Funktion f in jeder Umgebung von $(0, 0)$ sowohl positive als auch negative Werte annimmt. Daher ist $(0, 0)$ ein Sattelpunkt.

Aufgabe 7.*[13 Punkte]* Es sei $(V, \|\cdot\|)$ ein normierter Vektorraum über $\mathbb{R}$ und V^* der Vektorraum aller stetigen linearen Abbildungen von V nach $\mathbb{R}$.
Eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt *schwach konvergent* gegen $x \in V$, wenn gilt:

$$\forall \phi \in V^* : \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x).$$

(a) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass allgemein in jedem normierten Vektorraum $(V, \|\cdot\|)$ die Konvergenz einer Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in V$ bzgl. der gegebenen Norm $\|\cdot\|$ auch die schwache Konvergenz dieser Folge gegen x impliziert.

(b) *[9 Punkte]* Betrachten Sie als konkretes Beispiel den Banach-Raum der reellen Nullfolgen, ausgestattet mit der Supremumsnorm, $(c_0, \|\cdot\|_\infty)$. Es ist bekannt (d.h. kein Nachweis verlangt), dass zu jeder Abbildung $\phi \in c_0^*$ eine Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=1}^\infty |a_k| < +\infty$ existiert, so dass gilt:

$$\phi\big((x_k)_{k\in\mathbb{N}}\big) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \quad \text{für alle} \quad (x_k)_{k\in\mathbb{N}} \in c_0.$$

Zeigen Sie, dass in c_0 die Folge der „Einheitsvektoren”, d.h. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit der Festlegung $e_{n,k} := \delta_{nk}$ (Kronecker-Symbol) für das k-te Folgeglied von e_n, zwar schwach gegen $0 \in c_0$ konvergiert, aber nicht bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ gegen 0 konvergiert.

Lösung:

(a) Da nach Definition jede Abbildung $\phi \in V^*$ stetig ist, folgt:

$$\|x_n - x\| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \Longrightarrow |\phi(x_n) - \phi(x)| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{bzw.} \quad \lim_{n\to\infty} \phi(x_n) = \phi(x).$$

(b) Es sei $\phi \in c_0^*$ mit zugehöriger Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\sum_{k=1}^\infty |a_k| < +\infty$.
Es ist offensichtlich $e_n \in c_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und es folgt:

$$\phi(e_n) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \delta_{n,k} = a_n.$$

Wegen $\sum_{k=1}^\infty |a_k| < +\infty$ ist $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge, so dass

$$\lim_{n\to\infty} \phi(e_n) = \lim_{n\to\infty} a_n = 0 \underset{\phi\ \text{linear}}{=} \phi\left((0)_{k\in\mathbb{N}}\right).$$

D.h. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert in c_0 schwach gegen $0 \in c_0$.
Aber:
$(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nicht normkonvergent gegen $0 \in c_0$, da

$$\|e_n - e_m\|_\infty = 1 \text{ für } n \neq m,$$

d.h. $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist keine Cauchy-Folge.