DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 18. Mai 2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 10 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[13 Punkte]*

(a) *[6 Punkte]* Im $\mathbb{R}^3$ sei der Unterraum $U = \operatorname{span}\{u_1, u_2, u_3\}$ gegeben, wobei:

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Geben Sie für U eine Orthonormalbasis an.

(b) *[7 Punkte]* Im $\mathbb{R}^5$ seien vier linear unabhängige Vektoren $v_k,\ k = 1, \ldots, 4$, gegeben. Wendet man auf diese Vektoren das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren an, so erhält man bekanntlich orthonormierte Vektoren $w_k,\ k = 1, \ldots, 4$.
Bilden dann die beiden Vektoren w_3, w_4 immer eine Orthonormalbasis des Unterraums $V = \operatorname{span}\{v_3, v_4\}$?

Lösung:

(a) Anwendung des Gram-Schmidtschen Orthonormalisierungsverfahrens liefert:

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \frac{1}{\sqrt{30}} \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \text{aber} \quad v_3 = 0.$$

Also bilden v_1, v_2 eine Orthonormalbasis des zweidimensionalen Unterraums U.

(b) Gegenbeispiel:

$$v_k := e_k,\ k = 1, 2,\ v_3 := e_2 + e_3,\ v_4 := e_3 + e_4,$$

wobei e_k den k-ten Einheitsvektor im $\mathbb{R}^5$ bezeichnet.
Dann liefert das Gram-Schmidtsche Orthonormalisierungsverfahren gerade:

$$w_k := e_k,\ k = 1, \ldots, 4.$$

Offensichtlich folgt dann:

$$V = \operatorname{span}\{v_3, v_4\} = \operatorname{span}\{e_2 + e_3, e_3 + e_4\} \neq \operatorname{span}\{e_3, e_4\} = \operatorname{span}\{w_3, w_4\}.$$

Aufgabe 2. *[19 Punkte]*

(a) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass für eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $x \mapsto Ax$, mit Abbildungsmatrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ genau dann $\text{Bild}(f) \subseteq \text{Kern}(f)$ gilt, wenn $A^2 = 0$ ist.

(b) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie alle Parameterwerte b und d der Matrix $A = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R})$, für die die zugehörige lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $x \mapsto Ax$, gerade die Gleichung $\text{Bild}(f) = \text{Kern}(f)$ erfüllt.

(c) *[7 Punkte]* Betrachten Sie die Matrizen

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B_4 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und die zugehörigen linearen Abbildungen $g_k : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, x \mapsto B_k x,\ k \in \{1, 2, 3, 4\}$.
Überprüfen Sie für jede Abbildung g_k, ob sie die folgenden Eigenschaften erfüllt:

$$\text{Bild}(g_k) \subseteq \text{Kern}(g_k) \ \text{ bzw. } \ \text{Kern}(g_k) \subseteq \text{Bild}(g_k).$$

Lösung:

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} \text{Bild}(f) \subseteq \text{Kern}(f) &\iff \forall x \in \mathbb{R}^n :\ f(x) \in \text{Kern}(f) \\ &\iff \forall x \in \mathbb{R}^n :\ f(f(x)) = 0 \\ &\iff f \circ f = 0. \end{aligned}$$

Dies ist äquivalent zu $A^2 = 0$, da die Matrix $A^2 = A \cdot A$ die lineare Abbildung $f^2 = f \circ f$ eindeutig beschreibt.

(b) Wegen Teil (a) muss mit $\text{Bild}(f) \subseteq \text{Kern}(f)$ auch $A^2 = 0$ gelten, d. h. man erhält die notwendige Bedingung

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & b \\ 1 & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+b & 2b+bd \\ 2+d & b+d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit $b = -4$ und $d = -2$.
Dies ist auch hinreichend, denn nach Teil (a) ist mit $A^2 = 0$ bereits $\text{Bild}(f) \subseteq \text{Kern}(f)$ gezeigt. Wegen $A \neq 0$ gilt $\text{Bild(f)} \neq \{0\}$ und $\text{Kern}(f) \neq \mathbb{R}^2$. Damit folgt

$$1 \leq \dim(\text{Bild}(f)) \leq \dim(\text{Kern}(f)) \leq 1$$

also $\dim(\text{Bild}(f)) = \dim(\text{Kern}(f))$ und somit aufgrund der Inklusion sogar die Gleichheit $\text{Bild}(f) = \text{Kern}(f)$.
Insgesamt ergibt sich die eindeutige Lösung

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

(c)

	B_1	B_2	B_3	B_4
$\mathrm{Bild}(g_k) \subseteq \mathrm{Kern}(g_k)$	ja	nein	nein	nein
$\mathrm{Kern}(g_k) \subseteq \mathrm{Bild}(g_k)$	nein	ja	nein	ja

Denn:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Bild}(g_1) = \mathrm{span}\{e_1\} &\subset \mathrm{Kern}(g_1) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\} \\
\mathrm{Bild}(g_2) = \mathrm{span}\{e_1, e_2\} &\supset \mathrm{Kern}(g_2) = \mathrm{span}\{e_1\} \\
\mathrm{Bild}(g_3) = \mathrm{span}\{e_1, e_3\} &\neq \mathrm{Kern}(g_3) = \mathrm{span}\{e_2\} \\
\mathrm{Bild}(g_4) = \mathbb{R}^3 &\supset \mathrm{Kern}(g_4) = \{0\}
\end{aligned}$$

Aufgabe 3. *[24 Punkte]* Es seien n eine *ungerade* natürliche Zahl und $a, b \in \mathbb{N}_0$.
Betrachten Sie die folgende n-reihige quadratische Matrix

$$C_n = \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & b & 0 & a & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ b & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a \end{pmatrix}.$$

(a) *[7 Punkte]* Zeigen Sie, dass für die Determinante von C_n gilt:

$$\det C_n = \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{n-1}{2}}.$$

Hinweis: Sie könnten die Matrix C_n für $a \neq 0$ durch geeignete Zeilenumformungen zunächst auf obere Dreiecksgestalt bringen.

(b) *[3 Punkte]* Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix C_n invertierbar?

(c) *[7 Punkte]* Für welche $a, b \in \mathbb{R}$ ist die Matrix C_n orthogonal?

(d) *[7 Punkte]* Begründen Sie, dass die Matrix C_n stets diagonalisierbar ist.
Geben Sie eine zu C_n ähnliche Diagonalmatrix an.
Hinweis: Sie könnten das Ergebnis aus (a) benutzen.

Lösung:

(a) Für $a \neq 0$ bringt man C_n durch elementare Zeilenumformungen auf obere Dreiecksgestalt, indem man in den letzten $\frac{n-1}{2}$ Zeilen von der Zeile mit Nummer $n-j+1, j = 1, \ldots, \frac{n-1}{2}$, das $\frac{b}{a}$-fache der j-ten Zeile subtrahiert. Die neue Matrix hat dann die Gestalt:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & b \\ 0 & \ddots & \ddots & & \iddots & \iddots & 0 \\ \vdots & \ddots & a & 0 & b & \iddots & \vdots \\ \vdots & & 0 & 1 & 0 & & \vdots \\ \vdots & \iddots & 0 & 0 & a - \frac{b^2}{a} & \ddots & \vdots \\ 0 & \iddots & \iddots & & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & a - \frac{b^2}{a} \end{pmatrix}$$

Die Determinante einer oberen Dreiecksmatrix ist das Produkt der Hauptdiagonalelemente. Hier ergibt sich direkt:

$$\det C_n = a^{\frac{n-1}{2}} \cdot (a - \tfrac{b^2}{a})^{\frac{n-1}{2}} = \left(a^2 - b^2\right)^{\frac{n-1}{2}} .$$

Diese Formel schließt auch den Fall $a = 0$ ein, indem man in diesem Fall C_n z.B. nach der letzten Spalte entwickelt.

(b) Die quadratische Matrix C_n ist genau dann invertierbar, wenn $\det C_n \neq 0$ gilt.
Dieses ist für $n = 1$ direkt erfüllt. Für $n > 1$ müssen nach Teilaufgabe (a) die natürlichen Zahlen a, b verschieden sein.

(c) Die Matrix C_n ist orthogonal genau dann, wenn für je zwei Spalten c_k, c_l von C_n die Gleichung $\langle c_k,\ c_l\rangle = \delta_{kl}$ gilt.
Hier ergibt sich:

$$\langle c_k,\ c_l\rangle = \begin{cases} a^2 + b^2, & k = l \neq \frac{n+1}{2}; \\ 1, & k = l = \frac{n+1}{2}; \\ 2ab, & k \neq l, k + l = n + 1; \\ 0, & k \neq l, k + l \neq n + 1 \end{cases}$$

Zusammenfassend ist C_n genau dann orthogonal, wenn $(a, b) = (0, 1) \vee (1, 0)$

(d) Die reelle Matrix C_n ist symmetrisch, so dass sie nach dem Spektralsatz ähnlich zu einer Diagonalmatrix D_n ist.
Die Diagonalelemente von D_n sind genau die Eigenwerte von C_n, die ihrer algebraischen Vielfachheit im charakteristischen Polynom $\det(C_n - \lambda E_n)$ entsprechend häufig auftreten.
Die Matrix $C_n - \lambda E_n$ hat eine zu C_n analoge Gestalt, so dass nach Teilaufgabe (a) gilt:

$$\det\left(C_n - \lambda E_n\right) = (1 - \lambda)\big((a - \lambda) - b\big)^{\frac{n-1}{2}} \big((a + \lambda) - b\big)^{\frac{n-1}{2}} .$$

Also stehen auf der Diagonalen von D_n die Eigenwerte 1 mit Vielfachheit 1 sowie $a - b$ und $b - a$ jeweils mit der Vielfachheit $\frac{n-1}{2}$.

Aufgabe 4. *[16 Punkte]*

(a) *[7 Punkte]* Die Funktion $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $f(2) = 1$.
Zeigen Sie: Es existiert eine Stelle $\xi \in (0,2)$ mit $f(\xi) = \frac{1}{\xi}$.

Hinweis: Betrachten Sie die Funktion $h : [0,2] \to \mathbb{R}$ mit $h(x) = xf(x) - 1$.

(b) *[9 Punkte]* Beweisen Sie: Für alle x, y mit $\frac{1}{3} \leq x < y \leq 3$ gilt die Ungleichung

$$\frac{1}{3}(y-x) \leq \ln y - \ln x \leq 3(y-x).$$

Lösung:

(a) Aus der Stetigkeit von f folgt, dass auch die Funktion h im Intervall $[0,2]$ stetig ist. Weiter ist $h(0) = -1 < 0$ und $h(2) = 1 > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert eine Stelle $\xi \in (0,2)$ mit $h(\xi) = \xi f(\xi) - 1 = 0$. Da $\xi > 0$ ist, folgt daraus $f(\xi) = \frac{1}{\xi}$.

(b) Es sei $\frac{1}{3} \leq x < y \leq 3$. Aus dem Mittelwertsatz folgt, dass ein c zwischen x und y existiert, für das die Gleichung

$$\frac{\ln y - \ln x}{y - x} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \ln x \bigg|_{x=c} = \frac{1}{c}$$

gilt. Aus $c \geq x \geq \frac{1}{3}$ folgt $\frac{1}{c} \leq \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$, und aus $c \leq y \leq 3$ folgt $\frac{1}{c} \geq \frac{1}{3}$. Daraus folgt

$$\frac{1}{3} \leq \frac{\ln y - \ln x}{y - x} \leq 3,$$

und dies ist gleichwertig mit der Behauptung.

Aufgabe 5. *[16 Punkte]*
Betrachten Sie den Körper, der durch Rotation der Funktion $f:[1,\infty)\to\mathbb{R},\ f(x)=\frac{1}{x}$ um die x-Achse entsteht.

(a) *[8 Punkte]* Zeigen Sie dass dieser Körper ein endliches Volumen hat und berechnen Sie den Wert dieses Volumens.

(b) *[8 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Mantelfläche dieses Körpers unendlich groß ist.

Lösung:

(a) Das Volumenelement für diesen Körper ist $\mathrm{d}V=\pi f^2(x)\ \mathrm{d}x=\frac{\pi}{x^2}\ \mathrm{d}x$. Das Gesamtvolumen wird mit Hilfe des uneigentlichen Integrals $\int\limits_1^\infty \mathrm{d}V=\int\limits_1^\infty \frac{\pi}{x^2}\ \mathrm{d}x$ berechnet. Es ist

$$\int\limits_1^R \frac{\pi}{x^2}\ \mathrm{d}x=\pi\frac{-1}{x}\bigg|_1^R=\pi\left(1-\frac{1}{R}\right).$$

Damit ist

$$\int\limits_1^\infty \frac{\pi}{x^2}\ \mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\int\limits_1^R \frac{\pi}{x^2}\ \mathrm{d}x=\lim_{R\to\infty}\pi\left(1-\frac{1}{R}\right)=\pi.$$

Dieser Körper hat ein endliches Volumen, der Wert des Volumens ist π.

(b) Das Flächenelement der Mantelfläche ist $\mathrm{d}A=2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ \mathrm{d}x$. Mit der Ableitung $f'(x)=\frac{-1}{x^2}$ von f folgt

$$\mathrm{d}A=2\pi f(x)\sqrt{1+\left(f'(x)\right)^2}\ \mathrm{d}x=\frac{2\pi}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\ \mathrm{d}x\geq\frac{2\pi}{x}.$$

Wegen $\int\limits_1^R \frac{1}{x}\ \mathrm{d}x=\ln R$ divergiert das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{2\pi}{x}\ \mathrm{d}x$. Aus dem Vergleichskriterium für uneigentliche Integrale folgt, dass auch das uneigentliche Integral $\int\limits_1^\infty \frac{2\pi}{x}\sqrt{1+\frac{1}{x^4}}\ \mathrm{d}x$ divergiert. Daher ist die Mantelfläche dieses Körpers unendlich groß.

Aufgabe 6. *[20 Punkte]*
Bestimmen Sie die kleinsten und größten Funktionswerte der Funktion $f(x,y,z) = x^2 + yz$ auf der Ellipse $18x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 72$.

Lösung: Gesucht sind die Extrema von $f(x,y,z)$ unter der Nebenbedingung $g(x,y,z) = 18x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 72$. Der Ansatz $\nabla f(x,y,z) = \lambda \nabla g(x,y,z)$ mit dem Lagrange-Multplikator λ ergibt

$$\begin{aligned} 2x &= \lambda \cdot 36x \\ z &= \lambda \cdot 8y \\ y &= \lambda \cdot 18z \end{aligned}$$

Einsetzen der dritten Gleichung in die zweite Gleichung führt zu $z = \lambda \cdot 8y = 144\lambda^2 z$. Daraus folgt $z = 0$ oder $\lambda^2 = \frac{1}{144}$. Diese Fälle führen zu:

$z = 0$**:** Aus der letzten Gleichung folgt $y = 0$. Die Nebenbedingung $18x^2 + 4y^2 + 9z^2 = 72$ wird damit zu $18x^2 = 72$ mit den Lösungen $x = \pm 2$. Es ergeben sich die zwei möglichen Extremalstellen $(\pm 2, 0, 0)$ mit den Funktionswerten $f(\pm 2, 0, 0) = 4$.

$\lambda^2 = \frac{1}{144}$**:** Die erste Gleichung wird mit den Werten $\lambda = \pm\frac{1}{12}$ zu $2x = \pm 3x$ und es folgt $x = 0$. Aus der zweiten Gleichung wird $z = \pm\frac{2}{3}y$. Zusammen mit der Nebenbedingung wird daraus $4y^2 + 9\left(\pm\frac{2}{3}y\right)^2 = 8y^2 = 72$ mit den beiden Lösungen $y = \pm 3$. Damit ergibt sich $z = \pm 2$ und dies führt zu den vier weiteren möglichen Extremalstellen $(0, \pm 3, \pm 2)$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind $f(0,3,2) = f(0,-3,-2) = 6$ und $f(0,-3,2) = f(0,3,-2) = -6$.

Der kleinste Funktionswert von f in der Ellipse ist -6, dieser wird an den Stellen $(0,-3,2)$ und $(0,3,-2)$ angenommen. Der größte Funktionswert ist 6, er wird an den Stellen $(0,3,2)$ und $(0,-3,-2)$ angenommen.

Aufgabe 7. *[12 Punkte]* Betrachten Sie die folgende Menge kompakter Intervalle in $\mathbb{R}$

$$X := \left\{[a,b] \subsetneq \mathbb{R} \;\middle|\; a,b \in \mathbb{R}, a < b\right\}$$

und die Abbildung

$$\begin{aligned} d: \quad X \times X &\longrightarrow \mathbb{R}_0^+ \\ \big([a,b],[c,d]\big) &\longmapsto |a-c| + |b-d| \end{aligned}$$

Zeigen Sie:

(a) *[6 Punkte]* Die Abbildung d ist eine Metrik auf X.

(b) *[6 Punkte]* Der metrische Raum (X,d) ist *nicht* vollständig.
Hinweis: Beachten Sie, dass X keine punktförmigen Intervalle enthält.

Lösung:

(a)
- d ist offensichtlich wohldefiniert
- d ist positiv definit, denn:
  Einerseits
  $$d\left([a,b],[a,b]\right) = |a-a| + |b-b| = 0$$
  und andererseits
  $$\begin{aligned} &0 = d\left([a,b],[c,d]\right) = |a-c| + |b-d| \\ &\Longrightarrow |a-c| = 0 \;\wedge\; |b-d| = 0 \Longrightarrow a = c \;\wedge\; b = d \Longrightarrow [a,b] = [c,d]. \end{aligned}$$
- d ist symmetrisch, denn:
  $$d\left([a,b],[c,d]\right) = |a-c| + |b-d| = |b-d| + |a-c| = d\left([c,d],[a,b]\right).$$
- d erfüllt die Dreiecksungleichung, denn:
  $$\begin{aligned} d\left([a,b],[c,d]\right) &= |a-c| + |b-d| \\ &\le |a-u| + |u-c| + |b-v| + |v-d| = d\left([a,b],[u,v]\right) + d\left([u,v],[c,d]\right). \end{aligned}$$

(b) Man betrachte die Intervallfolge $I_n := \left[0, \frac{1}{n}\right]$, $n \in \mathbb{N}$.
Dann ist $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge in X, denn:
$$d(I_n, I_m) = \left|\frac{1}{n} - \frac{1}{m}\right| \longrightarrow 0, \quad \text{falls } n,m \to \infty.$$
Aber $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht in X, denn für beliebiges $[a,b] \in X$ gilt:
$$d(I_n, \underbrace{[a,b]}_{a \lneq b}) = |a| + \left|\frac{1}{n} - b\right| \longrightarrow |a| + |b| \gneq 0, \quad \text{falls } n \to \infty.$$