DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 12. Oktober 2024

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 12 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[17 Punkte]*
Gegeben ist das folgende lineare Gleichungssystem mit einem Parameter $p \in \mathbb{R}$:

$$\begin{array}{rcrcrcl} 2\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 1 \\ p\,x_1 & + & x_2 & + & x_3 & = & 0\ . \\ 2\,x_1 & - & x_2 & + & p\,x_3 & = & 1 \end{array}$$

(a) *[11 Punkte]* Bestimmen Sie alle $p \in \mathbb{R}$, für die das Gleichungssystem lösbar oder sogar eindeutig lösbar ist.

(b) *[6 Punkte]* Geben Sie zu jedem möglichen $p \in \mathbb{R}$ die Dimension des Lösungsraums des zugehörigen homogenen Gleichungssystems an.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\det\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ p & 1 & 1 \\ 2 & -1 & p \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 2-p & 0 & 0 \\ p & 1 & 1 \\ 2 & -1 & p \end{pmatrix} = (2-p)(p+1) = 0 \Leftrightarrow p = -1 \ \vee \ p = 2.$$

Also ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar für $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$.

1. Fall $p = -1$:
Es ist

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 2$$

und

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rang}\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\det = 2 \neq 0} = 3.$$

Somit ist das Gleichungssystem für $p = -1$ nicht lösbar.

2.Fall $p = 2$:
Es ist

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix} = 2 \quad \left(\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \neq 0\right)$$

und

$$\text{Rang}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \text{Rang}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad \left(\det\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 3 \neq 0\right).$$

Somit ist das Gleichungssystem für $p = 2$ nicht lösbar.

Insgesamt ist das Gleichungssystem genau für $p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\}$ lösbar.

(b) Für den Lösungsraum L_p der zugehörigen homogenen Gleichungssysteme gilt:

$$\dim L_p = 0 \text{ für } p \in \mathbb{R} \setminus \{-1, 2\},$$

da nach (a) die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems für diese p vollen Rang, also nach Dimensionsformel einen trivialen Kern hat, und

$$\dim L_p = 1 \text{ für } p \in \{-1, 2\},$$

da nach (a) die Koeffizientenmatrix des Gleichungssystems in diesen beiden Fällen jeweils den Rang 2 hat, also nach Dimensionsformel der Kern die Dimension 1 haben muss.

Aufgabe 2. *[17 Punkte]*
Betrachten Sie die Abbildung $H : M_2(\mathbb{R}) \to M_2(\mathbb{R})$ auf dem Vektorraum der reellen 2×2 - Matrizen $M_2(\mathbb{R})$ definiert durch

$$H(X) := AX + XA^T \text{ für } X \in M_2(\mathbb{R})$$

mit der festen Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

(a) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass H linear ist.

(b) *[10 Punkte]* Bestimmen Sie Kern(H) und Bild(H) und geben Sie jeweils eine Basis an.

(c) *[3 Punkte]* Zeigen Sie, dass gilt:

$$\text{Kern}(H) \cap \text{Bild}(H) = \{\lambda AA^T \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Lösung:

(a) H ist linear, denn:

$$\begin{aligned} H(X+Y) =& A(X+Y) + (X+Y)A^T \\ =& (AX + XA^T) + (AY + YA^T) = H(X) + H(Y) \text{ für } X, Y \in M_2(\mathbb{R}) \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} H(\lambda X) =& A(\lambda X) + (\lambda X)A^T \\ =& \lambda(AX + XA^T) = \lambda H(X) \text{ für } \lambda \in \mathbb{R}, X \in M_2(\mathbb{R}). \end{aligned}$$

(b) Sei $X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix}$.
Dann ist

$$AX + XA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ x_{11} & x_{12} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & x_{11} \\ 0 & x_{21} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & x_{11} \\ x_{11} & x_{12} + x_{21} \end{pmatrix}.$$

Damit folgt

$$\text{Bild}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Weiterhin gilt $AX + XA^T = 0$ genau dann, wenn $x_{11} = 0$ und $x_{12} = -x_{21}$.
Also

$$\text{Kern}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

Als Basen kann man offensichtlich verwenden:

$$\text{Bild}(H) = \text{span}\left\{ \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

und

$$\mathrm{Kern}(H) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

(c) Es folgt aus (b):

$$\mathrm{Kern}(H) \cap \mathrm{Bild}(H) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a \in \mathbb{R} \right\} = \{\lambda A A^T \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

wegen

$$AA^T = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3. *[19 Punkte]*
Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen über die Menge der reellen quadratischen Matrizen $M_n(\mathbb{R})$ richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung mit einer hinreichend genauen Herleitung oder einem geeigneten Gegenbeispiel.

(a) *[4 Punkte]* Für jedes $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ gibt es eine Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$, die nur den Eigenwert 0 hat, aber trotzdem nicht die Nullmatrix ist.

(b) *[4 Punkte]* Für gerades $n \in \mathbb{N}$ besitzt jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ einen reellen Eigenwert.

(c) *[5 Punkte]* Für Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ gilt: $\operatorname{Rang}(AB) = \operatorname{Rang}(BA)$.

(d) *[3 Punkte]* Für jede Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ steht der von den Spalten von A^T erzeugte Unterraum senkrecht auf $\operatorname{Kern}(A)$.

(e) *[3 Punkte]* Für orthogonale Matrizen $A, B \in M_n(\mathbb{R})$ und $m \in \mathbb{N}$ gilt:

$$\left(B^T A^T\right)^m (AB)^m = E_n \ (E_n = \text{Einheitsmatrix der Dimension } n).$$

Lösung:

(a) wahr:
Die Matrix A, deren Einträge alle außer a_{1n} gleich 0 sind, hat das charakteristische Polynom $(-\lambda)^n$ und damit nur den Eigenwert 0, ist aber nicht die Nullmatrix.

(b) falsch:
Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ besitzt das charakteristische Polynom $\lambda^2 + 1$ mit genau den Nullstellen $\pm i$, hat also keinen reellen Eigenwert.

(c) falsch:
Für die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

gilt:

$$AB = 0, \text{ also } \operatorname{Rang}(AB) = 0, \text{ aber } BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \text{ mit } \operatorname{Rang}(BA) = 1.$$

(d) wahr:
Es sei $v \in \operatorname{span}\{\tilde{a_1}, \dots, \tilde{a_n}\}$, wobei $\tilde{a_j}$ die j-te Spalte von A^T bezeichnet, und $w \in \operatorname{Kern}(A)$, dann gilt:

$$\langle v, w \rangle = v^T w \underset{v = A^T x}{=} x^T \underbrace{Aw}_{=0} = 0.$$

(e) wahr:

$$\left(B^T A^T\right)^m (AB)^m = B^T A^T \cdot \ldots \cdot \underbrace{B^T \underbrace{A^T A}_{=E_n} B}_{=E_n \text{ usw.}} \cdot \ldots \cdot AB = E_n.$$

Aufgabe 4. *[20 Punkte]* Betrachten Sie die für $x > 0$ definierte Funktion

$$F(x) = \int_1^x \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}t\right)}{t}\, \mathrm{d}t.$$

(a) *[4 Punkte]* Bestimmen Sie die beiden Ableitungen $F'(x)$ und $F''(x)$ dieser Funktion.

(b) *[4 Punkte]* Berechnen Sie den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{F(x)}{\ln x}$.

(c) *[6 Punkte]* Ermitteln Sie das Taylorpolynom $T_1(x)$ ersten Grades für die Funktion F mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 1$ und geben Sie das zugehörige Restglied $R_1(x)$ in der Darstellung von Lagrange an.

(d) *[6 Punkte]* Beweisen Sie, dass für $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ die Abschätzung $\left|R_1(x)\right| \leq 2\left(\frac{3\pi}{4}+1\right)\cdot(x-1)^2$ gilt.

Lösung:

(a) Aus dem HDI folgt $F'(x) = \frac{\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x}$. Mit Hilfe der Quotientenregel ergibt sich weiter $F''(x) = \frac{\frac{\pi}{2}x\cos\left(\frac{\pi}{2}x\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}x\right)}{x^2}$.

(b) Es ist $\lim\limits_{x\to 1} F(x) = 0$ und $\lim\limits_{x\to 1} \ln x = 0$. Mit der Regel von l'Hospital ergibt sich

$$\lim_{x\to 1} \frac{F'(x)}{\ln' x} = \lim_{x\to 1} \sin\left(\tfrac{\pi}{2}x\right) = 1,$$

und daraus folgt $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{F(x)}{\ln x} = 1$.

(c) Mit $F(1) = 0$ und $F'(1) = 1$ ergibt sich

$$T_1(x) = F(1) + F'(1)\cdot(x-1) = 0 + 1\cdot(x-1) = x-1.$$

Das Restglied R_1 hat die Darstellung

$$R_1(x) = \frac{1}{2}F''(\xi)(x-1)^2 = \frac{\frac{\pi}{2}\xi\cos\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)-\sin\left(\frac{\pi}{2}\xi\right)}{2\xi^2}\cdot(x-1)^2$$

mit einem ξ zwischen $x_0 = 1$ und x.

(d) Aus $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$ folgt zunächst $\frac{1}{2} \leq \xi \leq \frac{3}{2}$. Aus $\xi \geq \frac{1}{2}$ folgt $\frac{1}{2\xi^2} \leq \frac{4}{2} = 2$. Aus $\xi \leq \frac{3}{2}$ ergibt sich die Abschätzung

$$\left|\frac{\pi}{2}\xi\cos\left(\tfrac{\pi}{2}\xi\right)-\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\xi\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot 1 + 1 = \frac{3\pi}{4}+1.$$

Insgesamt folgt daraus $\left|R_1(x)\right| \leq 2\left(\frac{3\pi}{4}+1\right)\cdot(x-1)^2$.

Aufgabe 5. *[17 Punkte]*
Die Funktion $T\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R},\ (x,y) \mapsto T(x,y)$ beschreibt eine Temperaturverteilung in der Ebene. Die Temperatur wird in °C und die Koordinaten x und y werden im Metern gemessen. Über die Funktion T ist folgendes bekannt:

$$T(7,3) = 42, \quad T_x(7,3) = 4, \quad T_y(7,3) = -3.$$

(a) *[5 Punkte]* Bestimmen Sie die lineare Approximation $L(x,y)$ der Funktion $T(x,y)$ an der Stelle $(7,3)$.

(b) *[6 Punkte]* Eine Fliege sitzt im Punkt $(7,3)$ und möchte in eine Richtung krabbeln, in der sich die Temperatur nicht ändert. In welche Richtungen kann die Fliege starten?

(c) *[6 Punkte]* Etwas später sitzt eine Ameise im Punkt $(7,3)$. Sie möchte in die Richtung krabbeln, in der die Temperatur so schnell wie möglich abnimmt.

   (i) *[2 Punkte]* In welche Richtung startet die Ameise?

   (ii) *[3 Punkte]* Wie schnell, gemessen in °C pro Meter, ändert sich die Temperatur in diese Richtung?

   (iii) *[1 Punkte]* Die Ameise möchte so schnell krabbeln, dass sie eine Änderungsrate der Temperatur von -1°C pro Sekunde spürt. Mit welchem Tempo, gemessen in Metern pro Sekunde, muss die Ameise vom Punkt $(7,3)$ aus starten?
   Für dieses letzte Ergebnis ist keine Begründung erforderlich.

Lösung:

(a) Es ist

$$L(x,y) = T(7,3) + T_x(7,3)\cdot(x-7) + T_y(7,3)\cdot(y-3) = 42 + 4(x-7) - 3(y-3) = 23 + 4x - 3y.$$

(b) Die Bewegung erfolgt in Richtung der Niveaulinie von T durch den Punkt $(7,3)$. Der Gradient $\nabla T(7,3) = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ steht senkrecht auf dieser Niveaulinie. Die Fliege muss also in eine Richtung starten, die senkrecht zu dem Gradienten $\nabla T(7,3)$ ist. Dies sind die Richtungen $\pm \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$.

(c) (i) Die Ameise startet in Richtung $-\nabla T(7,3) = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

   (ii) Der Wert der Richtungsableitung in die Richtung $-\nabla T(7,3)$ ist $-\big\|\nabla T(7,3)\big\| = -5\,$°C pro Meter.

   (iii) Die Ameise muss mit dem Tempo $\frac{1}{5}$ Meter pro Sekunde in diese Richtung starten.

Aufgabe 6. *[16 Punkte]*
Es sei das iterierte Integral

$$I = \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \, \mathrm{d}\varphi \, \mathrm{d}r$$

in Polarkoordinaten gegeben.

(a) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den Wert von I.

(b) *[10 Punkte]* Schreiben Sie das Integral in kartesichen Koordinaten, also in der Form

$$I = \int_a^b \int_{\psi_1(x)}^{\psi_2(x)} f(x,y) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Beachten Sie das Flächenelement $\mathrm{d}A$ in Polarkoordinaten.

(c) *[4 Punkte]* Mit dem Integral I können Sie das Volumen eines Körpers berechnen. Skizzieren Sie den Schnitt dieses Körpers mit der (x,z)-Ebene.

Lösung:

(a) Es ist $I = 2\pi \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3}$.

(b) Das Flächenelement in Polarkoordinaten ist $\mathrm{d}A = r \ \mathrm{d}r \ \mathrm{d}\varphi$. Damit ergibt sich der Integrand in Polarkoordinaten zu $f(r\cos\varphi, r\sin\varphi) = r$. Dieser Wert ist gleich dem Abstand des Punktes $(r\cos\varphi, r\sin\varphi)$ vom Koordinatenursprung. In kartesischen Koordinaten ist dieser Abstand gleich $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$.

Der Integrationsbereich wird in Polarkoordinaten durch die Ungleichungen $0 \le r \le 1$ und $0 \le \varphi \le 2\pi$ beschreiben. Dieser Integrationsbereich ist das Innere des Einheitskreises $x^2 + y^2 \le 1$. In kartesischen Koordinaten kann man diesen Kreis in der Form

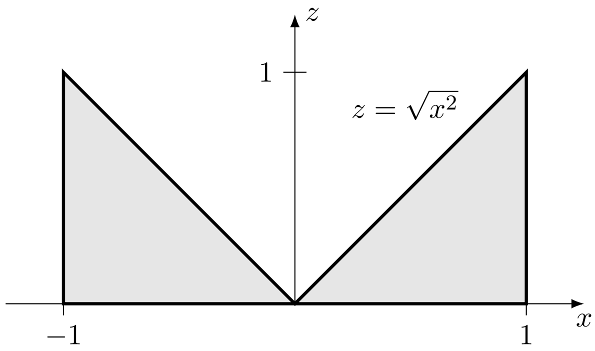
$$\left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid -1 \le x \le 1, \, -\sqrt{1-x^2} \le y \le \sqrt{1-x^2}\right\}$$

darstellen.

Insgesamt ergibt sich für das Integral I in kartesischen Koordinaten der Ausdruck

$$I = \int_{-1}^{1} \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{x^2+y^2} \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}x.$$

(c) Der Körper liegt über dem Einheitskreis $x^2+y^2 \le 1$ in der (x,y)-Ebene und wird von oben durch den Graphen der Funktion $z = f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$ berandet. Für den Schnitt mit der (x,z)-Ebene setzt man $y = 0$ und erhält $f(x,0) = \sqrt{x^2} = |x|$. Das folgende Bild zeigt den Schnitt des Körpers mit der (x,z)-Ebene.


z
1
$z = \sqrt{x^2}$
x
−1
1

Aufgabe 7. *[14 Punkte]* Wachstumsprozesse für eine Population der Größe $P(t)$ mit einer maximalen Größe von K können für $t \geq 0$ mit Hilfe der logistischen Differenzialgleichung durch das folgende Anfangswertproblem beschrieben werden:

$$\frac{\mathrm{d}P}{\mathrm{d}t} = \dot{P} = \lambda P(K - P), \quad P(0) = P_0,$$

wobei $\lambda > 0$ eine Konstante ist. Weiter sei $0 < P_0 < \frac{K}{2}$ und die Funktion P sei zweimal stetig differenzierbar.

Beweisen Sie, dass die Lösungskurve $P(t)$ folgende Eigenschaften hat:

(a) *[4 Punkte]* Für alle $t \geq 0$ gilt $0 < P(t) < K$.

(b) *[2 Punkte]* Die Funktion P ist in $t \geq 0$ streng monoton wachsend.

(c) *[2 Punkte]* Es gilt $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = K$.

(d) *[6 Punkte]* An der Stelle t_0 mit $P(t_0) = \frac{K}{2}$ hat die Lösungskurve $P(t)$ einen Wendepunkt.

Verwenden Sie bei der Bearbeitung dieser Aufgabe nur die logistische Differenzialgleichung. Die Angabe oder die Verwendung der expliziten Lösung dieses Anfangswertproblems ist nicht erforderlich und wird nicht bewertet. Sie dürfen ohne Beweis verwenden, dass das gegebene Anfangswertproblem in $t \geq 0$ eine eindeutige Lösung hat.

Lösung:

(a) Die Funktionen $P \equiv 0$ und $P \equiv K$ sind konstante Lösungen dieser Differenzialgleichung. Wegen der Eindeutigkeit muss die Lösung des Anfangswertproblems für alle $t \geq 0$ von diesen konstanten Lösungen verschieden sein. Aus der Stetigkeit der Lösung und $0 < P(0) < K$ folgt die Behauptung.

(b) Aus $0 < P(t) < K$ folgt $\dot{P} = \lambda P(K - P) > 0$. Daraus folgt die strenge Monotonie der Funktion P.

(c) Da P streng monoton wachsend und beschränkt ist, existiert der Grenzwert $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = P_\infty$. Daraus folgt $\lim\limits_{t \to \infty} \dot{P}(t) = 0$. Aus der Differenzialgleichung und dem Monotonieverhalten von P ergibt sich $P_\infty = K$.

(d) Das Krümmungsverhalten der Lösungskurve kann man mit Hilfe des Vorzeichens der zweiten Ableitung $\ddot{P}$ untersuchen. Durch Ableiten der Differenzialgleichung erhält man

$$\ddot{P} = \lambda \dot{P}(K - P) - \lambda P \dot{P} = \lambda \dot{P}(K - 2P).$$

Wegen $\lambda \dot{P} > 0$ stimmt das Vorzeichen von $\ddot{P}$ mit dem Vorzeichen des Faktors $K - 2P$ überein. Dieser Ausdruck hat wegen der strengen Monotonie von P an der Stelle t_0 mit $P(t_0) = \frac{K}{2}$ einen Vorzeichenwechsel. Die Lösungskurve ändert bei $\frac{K}{2}$ das Krümmungsverhalten und hat damit an dieser Stelle einen Wendepunkt.