DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 20. Mai 2023

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 5 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[18 Punkte]* Betrachten Sie die aus $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ und der n-dimensionalen Einheitsmatrix E_n gebildete Matrix

$$R_a := E_n - \frac{2}{\langle a, a\rangle} aa^T.$$

(a) *[4 Punkte]* Zeigen Sie:

$$R_a^2 = E_n \quad \text{und} \quad R_a^T = R_a.$$

(b) *[5 Punkte]* Es seien

$$H_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid \langle a, x\rangle = 0\} \quad \text{und} \quad G_a := \{x \in \mathbb{R}^n \mid x = \lambda a, \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Weisen Sie nach:

$$R_a x = \begin{cases} x, & x \in H_a; \\ -x, & x \in G_a. \end{cases}$$

(c) *[3 Punkte]* Welche geometrische Bedeutung hat die Abbildung $x \mapsto R_a x, x \in \mathbb{R}^n$?

(d) *[6 Punkte]* Begründen Sie, dass R_a diagonalisierbar ist, und geben Sie ohne Rechnung eine zu R_a ähnliche Diagonalmatrix an.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\left(E_n - \frac{2}{\langle a, a\rangle} aa^T\right)^2 = E_n - \frac{4}{\langle a, a\rangle} aa^T + \frac{4}{\langle a, a\rangle^2} a \underbrace{(a^T a)}_{=\langle a,a\rangle} a^T = E_n,$$

und

$$R_a^T = \left(E_n - \frac{2}{\langle a, a\rangle} aa^T\right)^T = E_n - \frac{2}{\langle a, a\rangle} \underbrace{\left(aa^T\right)^T}_{=a^{T^T} \cdot a^T = aa^T} = R_a.$$

(b) Es gilt für $x \in H_a$:

$$R_a x = x - \frac{2}{\langle a, a\rangle} \underbrace{\left(aa^T\right) x}_{=\langle a,x\rangle a = 0} = x,$$

und für $x = \lambda a \in G_a$:

$$R_a x = x - \left(\frac{2}{\langle a, a\rangle} aa^T\right) x = \lambda \left(a - \frac{2}{\langle a, a\rangle} \underbrace{\left(aa^T\right) a}_{=\langle a,a\rangle a}\right) = -\lambda a = -x$$

(c) Es handelt sich um eine Spiegelung des $\mathbb{R}^n$ an der Hyperebene H_a mit der Normalen G_a in Richtung a. Dabei entspricht H_a genau den Fixpunkten der Spiegelung und die Ursprungsgerade G_a wird durch die Spiegelung in Richtung $-a$ gedreht.

(d) Nach Aufgabenteil (a) ist R_a eine symmetrische (und sogar orthogonale) reelle $n \times n$-Matrix. Also ist R_a nach dem Spektralsatz ähnlich zu einer Diagonalmatrix mit den Eigenwerten von R_a auf der Hauptdiagonalen. Nach Aufgabenteil (b) ist die $(n-1)$-dimensionale Hyperebene Eigenraum zum Eigenwert 1 von R_a und die Normale G_a Eigenraum zum Eigenwert -1 von R_a. Also ist R_a ähnlich zu der Diagonalmatrix

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & & -1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. *[15 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$\begin{aligned} s : M_n(\mathbb{C}) \times M_n(\mathbb{C}) &\longrightarrow \mathbb{C} \\ (A, B) &\longmapsto \operatorname{Spur}(B^\star A) \end{aligned}$$

mit $B^\star := \overline{B}^T$ ein Skalarprodukt auf dem Vektorraum der n-dimensionalen quadratischen Matrizen mit komplexen Einträgen, $M_n(\mathbb{C})$, ist.

Lösung:
Die Abbildung s ist *positiv definit*:

$$\begin{gathered} s(A, A) = 0 \Rightarrow 0 = \operatorname{Spur}(A^\star A) = \sum_{k=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{n} \overline{a_{jk}} \cdot a_{jk} \right) = \sum_{j,k=1}^{n} |a_{jk}|^2 \\ \Rightarrow a_{jk} = 0 \ \text{ für alle } \ j, k = 1, \ldots, n \ \Rightarrow A = 0. \end{gathered}$$

Die umgekehrte Implikation ist trivial.

Die Abbildung s ist *hermitesch*:

$$\begin{aligned} s(A, B) &= \operatorname{Spur}\left(\overline{B}^T A\right) = \operatorname{Spur}\left(\left(\overline{B}^T A\right)^T\right) = \operatorname{Spur}\left(A^T \overline{B}\right) \\ &= \overline{\operatorname{Spur}\overline{\left(A^T \overline{B}\right)}} = \overline{\operatorname{Spur}(A^\star B)} = \overline{s(B, A)}. \end{aligned}$$

Die Abbildung s ist *linear in der ersten Komponente*:

$$\begin{aligned} s(A_1 + A_2, B) &= \operatorname{Spur}\left(\overline{B}^T (A_1 + A_2)\right) = \operatorname{Spur}\left(\overline{B}^T A_1\right) + \operatorname{Spur}\left(\overline{B}^T A_1\right) = s(A_1, B) + s(A_2, B), \\ s(\lambda A, B) &= \operatorname{Spur}\left(\overline{B}^T (\lambda A)\right) = \lambda \operatorname{Spur}\left(\overline{B}^T A\right) = \lambda\, s(A, B). \end{aligned}$$

Aufgabe 3. *[15 Punkte]* Geben Sie die Größe des Lösungsraums für jedes der folgenden linearen Gleichungssysteme durch Ankreuzen an und begründen Sie Ihre Entscheidung.
Dabei steht in der Tabelle das Symbol $\star$ für eine beliebige reelle Zahl.

	Gleichungssystem	Anzahl Lösungen			
		endlich viele			unendlich viele
		keine	genau eine	mehr als eine	
(a) *[3 Punkte]*	$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \star \\ 1 & \star & \star \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ \star \\ \star \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
(b) *[4 Punkte]*	$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star \\ 0 & 1 & \star \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} \star \\ \star \\ 1 \\ \star \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
(c) *[5 Punkte]*	$\begin{pmatrix} 1 & \star & \star & \star \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \star & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐
(d) *[3 Punkte]*	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \star & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$	☐	☐	☐	☐

Lösung:
Jedes Gleichungssystem ist von der Form $Ax = b$.

(a) *Genau eine*, denn:
Für die Koeffizientenmatrix A des quadratischen Gleichungssystems gilt $\det A = -1 \neq 0$.

(b) *Keine*, denn:
Die erweiterte Koeffizientenmatrix $(A|b)$ besitzt den Rang 3, während die Koeffizientenmatrix A nur den Rang 2 hat.

(c) *Unendlich viele*, denn:
Die dritte Zeile lässt sich durch Subtraktion der zweiten Zeile zu einer Nullzeile machen. Die ersten beiden Zeilen von $(A|b)$ und A sind jeweils linear unabhängig, so dass $\operatorname{rg}(A|b) = \operatorname{rg}(A)$ und damit das Gleichungssystem lösbar ist. Offensichtlich besitzt das Gleichungssystem zwei freie Variablen, so dass die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Gleichungssystems unendlich viele Elemente enthält.

(d) *Genau eine*, denn:
Auf die letzte (Null)zeile des Gleichungssystems kann verzichtet werden, so dass ein quadratisches Gleichungssystem mit nicht verschwindender Determinante $= 1$ übrig bleibt.

Aufgabe 4. *[18 Punkte]* Eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt gerade, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(-x) = f(x)$ gilt. Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ heißt ungerade, wenn für alle $x \in \mathbb{R}$ die Gleichung $f(-x) = -f(x)$ gilt. Jede in dieser Aufgabe vorkommende Funktion f sei auf ganz $\mathbb{R}$ definiert.

(a) *[4 Punkte]* Zeigen Sie: Ist f gleichzeitig gerade und ungerade, so gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

(b) *[6 Punkte]* Zeigen Sie, dass sich jede Funktion f als Summe einer geraden Funktion G und einer ungeraden Funktion U schreiben lässt:

$$f(x) = G(x) + U(x) \quad \text{mit} \quad G(-x) = G(x) \text{ und } U(-x) = -U(x) \text{ für alle } x \in \mathbb{R}.$$

Hinweis: betrachten Sie die durch $\frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$ definierte Funktion.

(c) *[8 Punkte]* Beweisen Sie, dass diese Darstellung von f als Summe einer geraden und einer ungeraden Funktion eindeutig ist.

Lösung:

(a) Für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(-x) = f(x)$ und gleichzeitig $f(-x) = -f(x)$, also $f(x) = -f(x)$. Daraus folgt die Behauptung.

(b) $G(x) = \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big)$ ist gerade, da $G(-x) = \frac{1}{2}\big(f(-x) + f(x)\big) = G(x)$. Die Funktion $U(x) = f(x) - G(x) = f(x) - \frac{1}{2}\big(f(x) + f(-x)\big) = \frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big)$ ist ungerade, da $U(-x) = \frac{1}{2}\big(f(-x) - f(x)\big) = -\frac{1}{2}\big(f(x) - f(-x)\big) = -U(x)$. $f(x) = G(x) + U(x)$ ist die gesuchte Zerlegung.

(c) Falls es zwei solche Zerlegungen gibt folgt $f(x) = G_1(x) + U_1(x) = G_2(x) + U_2(x)$ mit zwei geraden Funktionen G_1 und G_2 sowie zwei ungeraden Funktionen U_1 und U_2. Daraus folgt $G_1(x) - G_2(x) = U_2(x) - U_1(x)$. Wegen $G_1(-x) - G_2(-x) = G_1(x) - G_2(x)$ ist $G_1(x) - G_2(x)$ gerade und wegen $U_2(-x) - U_1(-x) = -U_2(x) + U_1(x) = -\big(U_2(x) - U_1(x)\big)$ ist $U_2(x) - U_1(x)$ ungerade. Die Differenzen $G_1(x) - G_2(x) = U_2(x) - U_1(x)$ sind beide gleichzeitig gerade und ungerade und aus Teil (a) folgt $G_1(x) - G_2(x) = U_2(x) - U_1(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Daraus folgt $G_2(x) = G_1(x)$ und $U_2(x) = U_1(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und damit ist die Eindeutigkeit dieser Zerlegung nachgewiesen.

Aufgabe 5. *[16 Punkte]* Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Aussagen:

(a) *[8 Punkte]* Für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$c = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(f'(x) \cdot \sin(x) + f(x) \cdot \cos(x)\big) \, \mathrm{d}x.$$

(b) *[8 Punkte]* Für jede Zahl $c \in \mathbb{R}$ gibt es eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft

$$c = \int_0^{\pi} \cos\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \, \mathrm{d}x.$$

Lösung:

(a) Diese Aussage ist richtig.

Für jede in $\mathbb{R}$ differenzierbare Funktion gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) \cdot \sin(x)\right) = f'(x) \cdot \sin(x) + f(x) \cdot \cos(x)$. Aus dem HDI folgt damit

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \big(f'(x) \cdot \sin(x) + f(x) \cdot \cos(x)\big) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(f(x) \cdot \sin(x)\right) \mathrm{d}x =$$

$$f\left(\tfrac{\pi}{2}\right) \cdot \sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - f(0) \cdot \sin(0) = f\left(\tfrac{\pi}{2}\right).$$

Für jede stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f\left(\frac{\pi}{2}\right) = c$ folgt die behauptete Aussage.

(b) Diese Aussage ist falsch.

Es gilt $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin\big(f(x)\big)\big) = \cos\big(f(x)\big) \cdot f'(x)$. Aus dem HDI folgt damit

$$\int_0^{\pi} \cos\big(f(x)\big) \cdot f'(x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\big(\sin\big(f(x)\big)\big) \, \mathrm{d}x = \sin\big(f(\pi)\big) - \sin\big(f(0)\big) \in [-2, 2].$$

Für alle c mit $|c| > 2$ gibt es keine stetig differenzierbare Funktion, für die die behauptete Gleichung gilt.

Aufgabe 6. *[18 Punkte]*

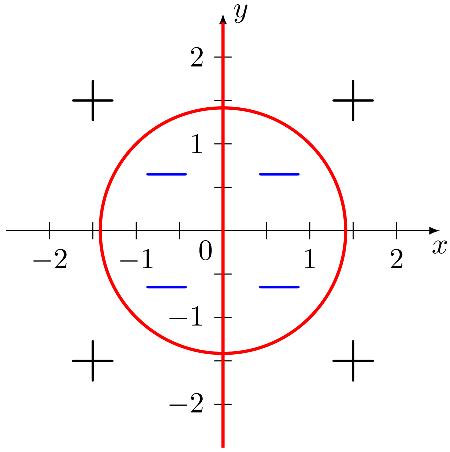
Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(x,y) = x^2(x^2 + y^2 - 2)$.

(a) *[9 Punkte]* Bestimmen Sie die Nullstellenmenge $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x,y) = 0\}$ von f. Skizzieren Sie alle Bereiche im $\mathbb{R}^2$, in denen die Funktionswerte von f positiv bzw. negativ sind.

(b) *[9 Punkte]* Bestimmen Sie alle lokalen Extrema vom f. Greifen Sie hierbei gegebenenfalls auf die Ergebnisse des ersten Aufgabenteils zurück.

Lösung:

(a) Es ist $f(x,y) = 0 \iff x = 0$ oder $x^2+y^2-2 = 0$. Die Nullstellenmenge ist also die Vereinigungsmenge der y-Achse und des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ um den Ursprung, $N = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x = 0 \text{ oder } x^2 + y^2 = 2\}$. Außerhalb der Nullstellenmenge stimmt das Vorzeichen der Funktionswerte von f mit dem Vorzeichen von x^2+y^2-2 überein. Das Vorzeichen ist im Inneren des Kreises mit Radius $\sqrt{2}$ um den Ursprung negativ und außerhalb dieses Kreises positiv. Die Nullstellenmenge und die Bereiche mit positiven und negativen Funktionswerten sind in folgendem Bild skizziert.



(b) Aus $f(x,y) = x^2(x^2+y^2-2) = x^4 + x^2y^2 - 2x^2$ folgt

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} 4x^3 + 2xy^2 - 4x \\ 2x^2y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x(2x^2+y^2-2) \\ 2x^2y \end{pmatrix}$$

Die Nullstellen des Gradienten sind zunächst alle Punkte der y-Achse mit $x = 0$. Mit $x \neq 0$ folgt aus $f_y(x,y) = 0$ sofort $y = 0$. Weiter ist $f_x(x,0) = 0 \iff 2x(2x^2-2) = 4x(x-1)(x+1) = 0$. Damit sind die Punkte $\pm(1,0)$ alle Nullstellen des Gradienten mit $x \neq 0$.

Die Punkte auf der y-Achse sind keine isolierten stationären Punkte, daher ist eine Klassifikation mit Hilfe der Hesse-Matrix nicht möglich. Aus der Skizze zu Teil (a) und $f(0,y) = 0$ ergibt sich: Ist $|y| < \sqrt{2}$, so ist $(0,y)$ ein lokales Maximum von f, aber kein striktes Maximum. Ist $|y| > \sqrt{2}$, so ist $(0,y)$ ein lokales Minimum von f, aber kein striktes Minimum. Die beiden Punkte $\pm(0,\sqrt{2})$ sind Sattelpunkte, da die Funktion f in jeder Umgebung dieser Punkte sowohl positive als auch negative Funktionswerte annimmt.

Zur Untersuchung der beiden isolierten Nullstellen des Gradienten kann man die Hesse-Matrix $\mathrm{H}f(x,y) = \begin{pmatrix} 12x^2 + 2y^2 - 4 & 4xy \\ 4xy & 2x^2 \end{pmatrix}$ verwenden. Es gilt $\mathrm{H}f(\pm 1, 0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Diese Matrix hat zwei positive Eigenwerte und ist daher positiv definit. Die beiden Punkte $\pm(1,0)$ sind (strikte) lokale Minima von f.

Aufgabe 7. *[20 Punkte]* Betrachten Sie die Menge M aller Funktionen $f : \mathbb{C} \cup \{\infty\} \longrightarrow \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit folgender Festlegung:

$$f(z) = \frac{az+b}{cz+d}, \; z \in \mathbb{C} \setminus \left\{-\tfrac{d}{c}\right\}, \; f\left(-\tfrac{d}{c}\right) := \infty, \; f(\infty) := \tfrac{a}{c},$$

wobei $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ und $ad - bc = 1$ ist.

(a) *[7 Punkte]* Weisen Sie nach, dass die Menge M zusammen mit der üblichen Komposition $\circ$ von Funktionen als Verknüpfung eine Gruppe bildet.
Dabei dürfen Sie unterstellen, dass die Assoziativität der Gruppenverknüpfung bereits bewiesen worden ist und dass das Verhalten in Polstellen bzw. in ∞ stets korrekt ist.

(b) *[5 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Menge $SL_2(\mathbb{C}) := \{A \in M_2(\mathbb{C}) \mid \det A = 1\}$ zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation als Verknüpfung eine Gruppe ist.

(c) *[5 Punkte]* Begründen Sie, dass die folgende Abbildung ein Gruppenisomorphismus ist:

$$\begin{aligned} \Phi : \quad M \quad &\longrightarrow SL_2(\mathbb{C}) \\ \frac{az+b}{cz+d} &\longmapsto \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

(d) *[3 Punkte]* Ist die Gruppe $(M, \circ)$ abelsch?

Lösung:

(a) Die *Verknüpfung* $\circ$ ist *abgeschlossen*:
Für $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ und $g(z) = \dfrac{pz+q}{rz+s}$ ergibt sich

$$(f \circ g)(z) = \frac{a\frac{pz+q}{rz+s} + b}{c\frac{pz+q}{rz+s} + d} = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + (cq+ds)}$$
$$\text{mit} \quad (ap+br)(cq+ds) - (aq+bs)(cp+dr) = 1.$$

Das *neutrale Element* ist offensichtlich die identische Abbildung $f(z) = z$.
Zu $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d} = w$ ergibt sich durch Auflösen nach z das *inverse Element* $f^{-1}(w) = \dfrac{dw-b}{-cw+a} = z$ mit $da - bc = 1$.

(b) $SL_2(\mathbb{C})$ zusammen mit der üblichen Matrizenmultiplikation ist eine Gruppe, da

- $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1$ für $A, B \in SL_2(\mathbb{C})$ ist und damit die Matrizenmultiplikation auf $SL_2(\mathbb{C})$ *abgeschlossen* ist,
- die *Assoziativität* von $M_2(\mathbb{C})$ auf $SL_2(\mathbb{C})$ vererbt wird,
- E_2 als *neutrales Element* offensichtlich in $SL_2(\mathbb{C})$ enthalten ist und
- zu $A \in SL_2(\mathbb{C})$ auch das *inverse Element* A^{-1} wegen $\det A = 1 \neq 0$ existiert und wegen $\det A^{-1} = \frac{1}{\det A} = 1$ ebenfalls in $SL_2(\mathbb{C})$ enthalten ist.

(c) Die Abbildung Φ ist für alle $f \in M$ *wohldefiniert*, da die Quotienten $f(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ wegen $ad - bc = 1$ normiert sind und damit die Mehrdeutigkeit, dass zwar $f(z) = \frac{az+b}{cz+d} = \frac{t(az+b)}{t(cz+d)}$ für $t \notin \{0,1\}$, aber $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} ta & tb \\ tc & td \end{pmatrix}$ gilt, nicht auftreten kann.

Die Abbildung Φ ist ein *Homomorphismus*, da $f, g \in M$, definiert wie in (a), mit

$$(f \circ g)(z) = \frac{(ap+br)z + (aq+bs)}{(cp+dr)z + (cq+ds)}$$

gerade

$$\Phi(f \circ g) = \begin{pmatrix} ap+br & aq+bs \\ cp+dr & cq+ds \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} = \Phi(f) \cdot \Phi(g)$$

zugeordnet wird.

Die *Umkehrbarkeit* von Φ ist klar.

(d) $(M, \circ)$ kann nicht kommutativ sein, da sein isomorphes Bild $SL_2(\mathbb{C})$ nicht kommutativ ist:

$$A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \; B := \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix}, \text{ aber } B \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} \\ -2 & 0 \end{pmatrix}.$$