DAV

DEUTSCHE AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 14. Oktober 2023

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 12 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[19 Punkte]* Es ist die folgende Matrix mit einem Parameter $c \in \mathbb{R} \setminus \{0, 2\}$ gegeben:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & c & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *[3 Punkte]* Geben Sie alle Eigenwerte von A mit ihren algebraischen Vielfachheiten an.

(b) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie zu allen Eigenwerten von A die Eigenräume.

(c) *[4 Punkte]* Begründen Sie, dass A diagonalisierbar ist.
Geben Sie alle Diagonalmatrizen an, zu denen A ähnlich ist.

(d) *[6 Punkte]* Geben Sie eine Transformation von A auf eine Diagonalmatrix mit der zugehörigen Transformationsmatrix explizit an.

Lösung:

(a) Das charakteristische Polynom von A lautet:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = \lambda(c - \lambda)(\lambda - 2).$$

Also sind die Eigenwerte gerade: $0, 2, c$.

(b) Das Lösen der homogenen Gleichungssysteme

$$(A - \lambda E_3)x = 0 \quad \text{für} \quad \lambda \in \{0, 2, c\}$$

liefert die Eigenräume

$$\text{Eig}(A; 0) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \ \text{Eig}(A; 2) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}, \ \text{Eig}(A; c) = \text{span}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}.$$

(c) A ist offensichtlich symmetrisch und damit nach dem Spektralsatz diagonalisierbar.
Auf der Hauptdiagonalen der zu A ähnlichen Diagonalmatrix müssen die drei verschiedenen Eigenwerte von A stehen, die Reihenfolge der Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen ist dabei beliebig. Es gibt genau 6 verschiedene Anordnungen der drei Eigenwerte von A auf der Hauptdiagonalen und damit auch genau 6 verschiedene Diagonalmatrizen, zu denen A ähnlich ist.

(d) Für die hier gewählte Diagonalmatrix

$$D := \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & c & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

muss $D = T^{-1}AT$ gelten mit einer Transformationsmatrix T.
Dabei steht in den drei Spalten von T eine Basis des $\mathbb{R}^3$ aus Eigenvektoren, d.h. in diesem Fall zu jedem der drei verschiedenen Eigenwerte von A genau ein Eigenvektor. Nach (b) kann man unter Beachtung der gewählten Reihenfolge der Eigenwerte auf der Hauptdiagonalen von D die Spalten von T in der folgenden Form besetzen:

$$T := \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad T^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. *[19 Punkte]* Es sei $P_n[0,1]$ die Menge der Polynome mit Koeffizienten aus $\mathbb{R}$ vom Grad $\leq n$ auf dem Intervall $[0,1]$. Es ist bekannt, dass $P_n[0,1]$ zusammen mit der kanonischen Multiplikation von Funktionen mit Skalaren aus $\mathbb{R}$ und mit der kanonischen Addition von Funktionen einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ bildet.
Betrachten Sie nun in $P_n[0,1]$ die Teilmenge $P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$ aller Polynome, die nur Koeffizienten aus $\mathbb{Q}$ haben, wieder zusammen mit den beiden oben genannten Operationen, wobei die Skalare für die Skalarmultiplikation nun aber auch nur aus $\mathbb{Q}$ sein dürfen.

(a) *[12 Punkte]* Zeigen Sie, dass $P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$ einen Vektorraum über $\mathbb{Q}$ bildet.
Versuchen Sie dabei, die Kenntnis, dass bereits $P_n[0,1]$ ein Vektorraum ist, möglichst effizient einzusetzen.

(b) *[7 Punkte]* Weisen Sie nach, dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ die Abbildung

$$\langle p, q \rangle := \int_0^1 x^m \; p(x) \; q(x) \; \mathrm{d}x, \;\; p, q \in P_n^{\mathbb{Q}}[0,1],$$

ein Skalarprodukt auf $P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$ ist.

Lösung:

(a) Zunächst sei festgehalten, dass $\mathbb{Q}$ ein Körper ist.
Es seien nun aus $P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$ gegeben:

$$p(x) = a_0 + a_1 x^1 + \ldots + a_n x^n \;\; \text{und} \;\; q(x) = b_0 + b_1 x^1 + \ldots + b_n x^n,$$

wobei nach Definition von $P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$ alle Koeffizienten $a_0, \ldots, a_n$ und $b_0, \ldots, b_n$ aus $\mathbb{Q}$ sind.
Dann liegen auch $p + q$ und λp für $\lambda \in \mathbb{Q}$ wieder in $P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$ wegen

$$\begin{aligned} (p+q)(x) &= \underbrace{(a_0 + b_0)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(a_1 + b_1)}_{\in \mathbb{Q}} x^1 + \ldots + \underbrace{(a_n + b_n)}_{\in \mathbb{Q}} x^n \text{ und} \\ (\lambda p)(x) &= \underbrace{(\lambda a_0)}_{\in \mathbb{Q}} + \underbrace{(\lambda a_1)}_{\in \mathbb{Q}} x^1 + \ldots + \underbrace{(\lambda a_n)}_{\in \mathbb{Q}} x^n. \end{aligned}$$

Axiome der Addition:
Assoziativität und Kommutativität werden von $P_n[0,1]$ auf $P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$ vererbt.
Offensichtlich gilt auch $0 \in P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$.
Neben p liegt auch $-p$ mit $(-p)(x) = (-a_0) + (-a_1)x^1 + \ldots + (-a_n)x^n$ in $P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$, und $-p$ ist offenbar das inverse Element zu p.

Axiome der Skalarmultiplikation:
Da für $\lambda, \mu \in \mathbb{Q}$ gilt, dass $\lambda\mu \in \mathbb{Q}$ und $\lambda + \mu \in \mathbb{Q}$, werden die Assoziativität der Skalarmultiplikation und die beiden Distributivgesetze für Skalarmultiplikation und Addition ebenfalls von $P_n[0,1]$ auf $P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$ vererbt. Außerdem ist $1 \in \mathbb{Q}$ das neutrale Element der Skalarmultiplikation.

(b) Die Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ist wohldefiniert, da der Integrand stetig in $\mathbb{R}$ und damit auf dem kompakten Intervall $[0,1]$ nach dem HDI integrierbar ist.
Weiterhin liefert $\langle\cdot,\cdot\rangle$ für jedes $m \in \mathbb{N}$ und für alle $p, q \in P_n^{\mathbb{Q}}[0,1]$ stets Werte aus dem dem Vektorraum zugrundeliegenden Körper $\mathbb{Q}$, da

$$\int_0^1 \underbrace{x^m \; p(x) \; q(x)}_{\in P_{m+2n}^{\mathbb{Q}}[0,1]} \, \mathrm{d}x = \int_0^1 c_m x^m + \ldots + c_{m+2n} x^{m+2n} \, \mathrm{d}x = \sum_{k=m}^{m+2n} \frac{c_k}{k+1} \in \mathbb{Q}.$$

Die positive Definitheit folgt aus $\langle p,p\rangle = 0$ für $p \equiv 0$ und

$$0 = \langle p,p\rangle = \int_0^1 \underbrace{x^m p(x)^2}_{\geq 0,\text{ stetig}} \, \mathrm{d}x \Rightarrow \forall x \in [0,1] : x^m p(x)^2 = 0 \Rightarrow p \equiv 0.$$

Symmetrie und Linearität der Abbildung $\langle\cdot,\cdot\rangle$ ergeben sich unmittelbar aus der Kommutativität der Multiplikation in $\mathbb{R}$ bzw. der Linearität des Riemann-Integrals.

Aufgabe 3. *[14 Punkte]* Betrachten Sie die folgende quadratische Matrix mit $n \in \mathbb{N}$ Blöcken der Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}$ und einem Parameter $c \in \mathbb{R}$:

$$A := \begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{matrix}} & & & \\ & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{matrix}} & & \Large 0 \\ & & \ddots & \\ & \Large 0 & & \boxed{\begin{matrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{matrix}} \end{pmatrix}.$$

(a) *[3 Punkte]* Für welche c ist A orthogonal?

(b) *[3 Punkte]* Welche Eigenwerte hat A?

(c) *[4 Punkte]* Berechnen Sie zunächst A^2.
Wie sieht dann die Folge $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ aus?

(d) *[4 Punkte]* Welche $x \in \mathbb{R}^{2n}$ lösen das folgende lineare Gleichungssystem mit $m \in \mathbb{N}$:

$$A^m x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Die Matrix A ist genau dann orthogonal, wenn die Spalten von A eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^{2n}$ bilden. Durch Betrachtung des Skalarproduktes aus Spalten von A sieht man sofort, dass dieses genau dann der Fall ist, wenn $c = 0$ ist.

(b) Für das charakteristische Polynom von A erhält man unter Berücksichtigung, dass die Determinante einer unteren Dreiecksmatrix genau das Produkt der Hauptdiagonalelemente ist, gerade:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_{2n}) = (1-\lambda)^n(-1-\lambda)^n.$$

Also sind ± 1 die Eigenwerte von A.

(c) Unter Berücksichtigung von $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{pmatrix}^2 = E_2$ erhält man $A^2 = E_{2n}$, d.h. insbesondere $A = A^{-1}$.
Damit ergibt sich für die Folge $\left(A^k\right)_{k\in\mathbb{N}}$:

$$A^k = \begin{cases} E_{2n}, & k \text{ gerade} \\ A, & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

(d) Wegen $A^2 = E_{2n}$ bzw. $A = A^{-1}$ nach (c) ergibt sich für die eindeutige Lösung des Gleichungssystems
im Falle eines geraden m:

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

und im Falle eines ungeraden m:

$$A^m x = Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \iff x = A \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ c-1 \\ \vdots \\ 1 \\ c-1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 4. *[16 Punkte]* Es seien a, b zwei positive Zahlen mit $a > b$. Mit diesen Zahlen werden die Folgen $\big(a_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ und $\big(b_n\big)_{n\in\mathbb{N}_0}$ rekursiv definiert durch:

$$a_0 = a, b_0 = b \text{ und } a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}, b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} \text{ für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Beweisen Sie:

(a) *[4 Punkte]* Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n > b_n$.

(b) *[4 Punkte]* Die Folge $\big(a_n\big)$ ist monoton fallend und die Folge $\big(b_n\big)$ ist monoton wachsend.

(c) *[4 Punkte]* Die Folgen $\big(a_n\big)$ und $\big(b_n\big)$ sind konvergent.

(d) *[4 Punkte]* Die Grenzwerte dieser beiden Folgen stimmen überein.
(Anmerkung: Gauß hat diesen Grenzwert das arithmetisch-geometrische Mittel von a und b genannt.)

Lösung:

(a) Nach Voraussetzung ist $a_0 > b_0$. Wenn für ein $n \in \mathbb{N}_0$ die Ungleichung $a_n > b_n$ gilt, so folgt aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischen Mittel, dass

$$\frac{1}{2}\big(a_n + b_n\big) > \sqrt{a_n \cdot b_n} \iff a_{n+1} > b_{n+1}$$

gilt. Damit gilt die Ungleichung $a_n > b_n$ für alle $n \in N_0$.

(b) Aus $a_n > b_n$ folgt

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + b_n\big) < \frac{1}{2}\big(a_n + a_n\big) = a_n \text{ und } b_{n+1} = \sqrt{a_n \cdot b_n} > \sqrt{b_n \cdot b_n} = b_n.$$

Damit ist die Monotonie der beiden Folgen nachgewiesen.

(c) Es gilt $a_0 > a_1 > \ldots a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n > \ldots > b_1 > b_0$. Die Folgen $\big(a_n\big)$ und $\big(b_n\big)$ sind monoton und beschränkt und aus dem Monotonieprinzip folgt die Konvergenz dieser beiden Folgen.

(d) Es seien $A = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$ und $B = \lim\limits_{n\to\infty} b_n$. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ in der Rekursionsgleichung $a_{n+1} = \frac{1}{2}\big(a_n + b_n\big)$ ergibt sich $A = \frac{1}{2}\big(A + B\big)$ und daraus folgt $A = B$.

Aufgabe 5. *[18 Punkte]* Betrachten Sie die Funktion mit der Abbildungsvorschrift

$$f(x) = \arcsin\big(\sqrt{x}\big).$$

(a) *[4 Punkte]* Geben Sie den größtmöglichen Definitionsbereich für diese Funktion an.

(b) *[14 Punkte]* Ermitteln Sie die Stelle, an der die Tangente an den Funktionsgraph von f die kleinste Steigung hat. Geben Sie den Wert dieser minimalen Tangentensteigung an.
Hinweis: Ein Bruch mit positivem Zähler und Nenner wird kleiner, wenn der Nenner größer wird und der Zähler unverändert bleibt.

Lösung:

(a) Die Funktion arcsin ist im Intervall $[-1, 1]$ definiert und die Wurzelfunktion ist für $x \geq 0$ definiert. Weiter ist $\sqrt{x} \leq 1 \iff x \leq 1$. Damit ist das Intervall $D_f = [0, 1]$ der größtmögliche Definitionsbereich für die Funktion f.

(b) Die Ableitung von f ist

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}, \quad 0 < x < 1.$$

1. Lösungsweg:
Die Ableitung $f'(x)$ ist genau dann minimal, wenn der Nenner maximal wird. Aufgrund der Monotonie der Wurzelfunktion ist dies genau dann der Fall, wenn $g(x) = x(1-x) = x - x^2$ maximal wird. Es ist $g'(x) = 1 - 2x$. Damit ist $g'(x) > 0$, falls $0 < x < \frac{1}{2}$ und $g'(x) < 0$, falls $\frac{1}{2} < x < 1$ sowie $g'(\frac{1}{2}) = 0$. Daher nimmt g das Maximum an der Stelle $\frac{1}{2}$ an. Es folgt: Die Ableitung $f'(x)$ nimmt ihr Minimum an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ an. Der Wert dieser kleinsten Ableitung ist $f'(\frac{1}{2}) = 1$.

2. Lösungsweg:
Gesucht ist das Minimum von $h(x) = \frac{1}{2\sqrt{x(1-x)}}$ in $0 < x < 1$. Die Ableitung von h ist

$$h'(x) = \frac{-1}{4\sqrt{\big(x(1-x)\big)^3}} \cdot (1 - 2x).$$

Damit ist $h'(x) < 0$, falls $0 < x < \frac{1}{2}$ und $h'(x) > 0$, falls $\frac{1}{2} < x < 1$ sowie $h'(\frac{1}{2}) = 0$. Die Funktion $h = f'$ nimmt das Minimum an der Stelle $\frac{1}{2}$ an. Es folgt:
Die Ableitung $f'(x)$ nimmt daher ihr Minimum an der Stelle $x = \frac{1}{2}$ an. Der Wert dieser kleinsten Ableitung ist $f'(\frac{1}{2}) = 1$.

Aufgabe 6. *[18 Punkte]* Betrachten Sie das Doppelintegral

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^x f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$

(a) *[5 Punkte]* Dieses Integral können Sie als Bereichsintegral $I = \iint_B f(x,y)\,\mathrm{d}(x,y)$ schreiben.

Fertigen Sie eine möglichst genaue Skizze des Integrationsbereichs B an.

(b) *[4 Punkte]* Vertauschen Sie die Integrationsreihenfolge und schreiben Sie das Integral in der Form

$$I = \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} \int_{\boxed{}}^{\boxed{}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

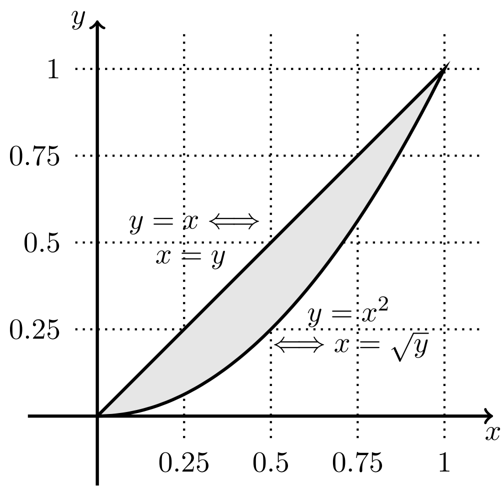
Bestimmen Sie die Ausdrücke, die an den mit $\boxed{}$ markierten Stellen fehlen und notieren Sie das Integral (ohne weitere Begründung) in Ihrer Lösung.

(c) *[9 Punkte]* Berechnen Sie das Integral $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{x}{y}\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$

Hinweis: Sie müssen die Existenz dieses Integrals nicht nachweisen.

Lösung:

(a) Der Integrationsbereich liegt über dem x-Intervall $[0,1]$ und zwischen den Graphen der Funktionen $y = x^2$ und $y = x$. Der Integrationsbereich ist in folgender Skizze dargestellt.



(b) Aus der obigen Skizze ergibt sich:

$$I = \int_0^1 \int_{x^2}^{x} f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

(c) Mit Teil (b) folgt

$$\int_0^1 \int_{x^2}^{x} \frac{x}{y}\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \frac{x}{y}\,\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^y}{y}\left(\frac{1}{2}y - \frac{1}{2}y^2\right)\,\mathrm{d}y =$$

$$\int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y - \left(\frac{1}{2}y\mathrm{e}^y\Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{1}{2}\mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y\right) = \int_0^1 \mathrm{e}^y\,\mathrm{d}y - \frac{1}{2}\mathrm{e} = \frac{1}{2}\mathrm{e} - 1.$$

Aufgabe 7. *[16 Punkte]*

(a) *[5 Punkte]* Untersuchen Sie, ob Sie aus dem Existenz- und Eindeutigkeitssatz für Differentialgleichungen erster Ordnung schließen können, dass das Anfangswertproblem

$$(y^2-4)\cdot\frac{dy}{dx}=\sin x,\ \ y(0)=2$$

eine eindeutige Lösung hat. Begründen Sie Ihre Antwort.

(b) *[11 Punkte]* Bestimmen Sie alle Funktionen f, die folgende Eigenschaften gleichzeitig erfüllen:

- f ist in $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
- f ist streng monoton (wachsend oder fallend).
- Für die Funktion f sind die Operationen „Ableiten" und „Quadrieren" vertauschbar, d.h. es gilt
$$\frac{d}{dx}\Big(f(x)\Big)^2=\Big(\frac{d}{dx}f(x)\Big)^2.$$
- Der Funktionsgraph von f geht durch den Punkt $(0,1)$.

Lösung:

(a) Die explizite Form dieser Differentialgleichung ist

$$\frac{dy}{dx}=f(x,y)=\frac{\sin x}{y^2-4}.$$

Die Funktion $f(x,y)$ ist an der Stelle $(x_0,y_0)=(0,2)$ nicht definiert und daher auch nicht stetig. Daher kann der Existenz- und Eindeutigkeitssatz auf das gegebene Anfangswertproblem nicht angewendet werden.

(b) Es ist $\frac{d}{dx}\Big(f(x)\Big)^2=2f(x)\cdot f'(x)$, d.h. die Funktion f erfüllt die Differentialgleichung

$$2f(x)\cdot f'(x)=\big(f'(x)\big)^2.$$

Aus der strengen Monotonie folgt $f'(x)\neq 0$ für alle $x\in\mathbb{R}$. Damit kann aus der Differentialgleichung ein Faktor $f'(x)$ gekürzt werden. Zusammen mit dem gegebenen Punkt auf dem Funktionsgraphen folgt: die gesuchte Funktion f erfüllt das Anfangswertproblem:

$$f'(x)-2f(x)=0,\ \ f(0)=1.$$

Dies ist eine homogene lineare Differentialgleichung erster Ordnung mit der allgemeinen Lösung $f(x)=C\cdot \mathrm{e}^{2x}$ mit $C\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ (da $f'(x)\neq 0$ ist). Aus $f(0)=1$ folgt $C=1$.
Es gibt genau eine Funktion mit den gegebenen Eigenschaften, nämlich $f(x)=\mathrm{e}^{2x}$.