DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 15. Oktober 2022

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 8 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[19 Punkte]* Es sei eine positiv definite Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ gegeben.
Dann heißen Vektoren $p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ *konjugiert bzgl. A*, falls gilt:

$$p_i^T A p_j = 0 \quad \text{für alle} \quad i, j \in \{1, \ldots, l\},\ i \neq j.$$

(a) *[8 Punkte]*
Zeigen Sie, dass bzgl. A konjugierte Vektoren $p_1, \ldots, p_l \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ linear unabhängig sind.

(b) *[11 Punkte]*
Es seien linear unabhängige Vektoren $w_1, \ldots, w_l \in \mathbb{R}^n$ gegeben.
Zeigen Sie, dass die nachfolgend konstruierten Vektoren $p_1, \ldots, p_l$ konjugiert bzgl. A sind:

$$p_j := \begin{cases} w_j, & \text{falls } j = 1 \\ w_j - \displaystyle\sum_{k=1}^{j-1} \frac{p_k^T A w_j}{p_k^T A p_k} p_k, & \text{falls } j = 2, \ldots, l. \end{cases}$$

(Hinweis: Für den Nachweis könnten Sie per Induktion über $2 \leq j \leq l$ zeigen:
$$p_j^T A p_i = 0 \quad \text{mit} \quad i, j \in \{1, \ldots, l\}, j > i.)$$

Lösung:

(a) Der Nullvektor kann mit den Vektoren $p_1, \ldots, p_l$ nur trivial linear kombiniert werden, denn:

$$\sum_{i=1}^{l} c_i p_i = 0 \quad \text{mit} \quad c_i \in \mathbb{R} \quad \text{und damit auch} \quad \sum_{i=1}^{l} c_i A p_i = 0$$

liefert für jedes $j \in \{1, \ldots, l\}$

$$0 = p_j^T \sum_{i=1}^{l} c_i A p_i = \sum_{i=1}^{l} c_i \cdot \underbrace{p_j^T A p_i}_{=0 \text{ für } i \neq j} = c_j \cdot \underbrace{p_j^T A p_j}_{>0, \text{ da } A \text{ pos. def. u. } p_j \neq 0},$$

und damit $c_j = 0$.

(b) Es ist $p_j \neq 0$ für alle $j = 1, \ldots, l$, denn:
Jeder neue Vektor p_j ist Linearkombination der Vektoren $w_1, \ldots, w_j$. Würde $p_j = 0$ für ein $j \in \{1, \ldots, l\}$ sein, würde $w_1 = 0$ für $j = 1$ folgen oder w_j Linearkombination der Vektoren $w_1, \ldots, w_{j-1}$ für $j > 1$ im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $w_1, \ldots, w_l$ sein.
Per Induktion über $2 \leq j \leq l$ erhält man

$$p_j^T A p_i = 0 \quad \text{mit} \quad i, j \in \{1, \ldots, l\}, j > i : \tag{1}$$

Induktionsanfang $j = 2$:

$$p_2^T A p_1 = \left(w_2 - \frac{p_1^T A w_2}{p_1^T A p_1} p_1 \right)^T A p_1 = w_2^T A p_1 - p_1^T A w_2 = 0.$$

Induktionsannahme (IA): Es gelte (1) für ein $j \geq 2$.
Induktionsschritt $j \to j + 1 \leq l$:

$$p_{j+1}^T A p_i = w_{j+1}^T A p_i - \sum_{k=1}^{j} \frac{p_k^T A w_{j+1}}{p_k^T A p_k} \cdot \underbrace{p_k^T A p_i}_{=0 \text{ für } k \neq i (\text{gem. IA})} = w_{j+1}^T A p_i - \frac{p_i^T A w_{j+1}}{p_i^T A p_i} p_i^T A p_i = 0.$$

Aufgabe 2. *[12 Punkte]* Es seien eine Matrix $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ mit Rang rg $A = m \leq n$ und eine symmetrische Matrix $B \in M_n(\mathbb{R})$ mit $B > 0$ auf Kern $A = \{x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = 0\}$, d.h.

$$p^T Bp > 0 \quad \text{für alle } p \in \text{Kern } A \setminus \{0\},$$

gegeben. Zeigen Sie, dass dann die folgende Matrix invertierbar ist:

$$C := \begin{pmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix}.$$

(Hinweis: Für den Nachweis könnten Sie zeigen, dass mit $p \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^m$ gilt:

$$C \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0 \iff \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = 0.)$$

Lösung: Für den Nachweis der Regularität von C wird Kern $C = \{0\}$ gezeigt.
Dazu betrachte für

$$x = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+m} \quad \text{mit} \quad p \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^m,$$

das homogene Gleichungssystem

$$Cx = \begin{pmatrix} B & A^T \\ A & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Bp + A^T q \\ Ap \end{pmatrix} = 0.$$

Dann muss $p \in$ Kern A sein, so dass

$$0 = p^T Bp + \underbrace{p^T A^T}_{=0} q = p^T Bp,$$

also $p = 0$, da $B > 0$ auf Kern A.
Damit ergibt sich

$$0 = \underbrace{Bp}_{=0} + A^T q = A^T q$$

und wegen rg $A^T = m$, also $\dim \text{Kern } A^T = 0$, gerade auch $q = 0$.

Aufgabe 3. *[21 Punkte]* Es sollen die Eigenräume der folgenden Matrix untersucht werden:

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *[2 Punkte]*
Begründen Sie ohne Berechnung des charakteristischen Polynoms, dass A nur reelle Eigenwerte haben kann.

(b) *[12 Punkte]*
Zeigen Sie, dass der Vektor $v = (1\ 1\ 2)^T$ ein Eigenvektor von A ist.
Geben Sie auch den zugehörigen Eigenwert an.
Bestimmen Sie dann alle Eigenwerte der Matrix A.

(c) *[7 Punkte]*
Geben Sie alle Eigenräume der Matrix A an.

Lösung:

(a) Die reelle Matrix A ist offensichtlich symmetrisch. Nach dem Spektralsatz besitzt A dann nur reelle Eigenwerte.

(b) Direkte Rechnung ergibt:

$$Av = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 6 \end{pmatrix} = 3v.$$

Also ist v Eigenvektor von A zum Eigenwert 3.
Für das charakteristische Polynom p_A von A ergibt sich:

$$p_A(\lambda) = \det(A - \lambda E_3) = -\lambda^3 - 3\lambda^2 + 9\lambda + 27.$$

Da bereits der Eigenwert 3 bekannt ist, ergibt sich per Polynomdivision das Polynom

$$\frac{p_A(\lambda)}{(\lambda - 3)} = -\lambda^2 - 6\lambda - 9 = -(\lambda + 3)^2.$$

Also hat A die Eigenwerte ± 3.

(c) Für die Eigenräume $\mathrm{Eig}_{\pm 3}(A)$ werden mit dem Gauß-Jordan-Algorithmus die Lösungsräume der beiden homogenen linearen Gleichungssysteme

$$(A - (\pm)3E_3)\, x = 0$$

berechnet. Es ergibt sich:

$$\mathrm{Eig}_3(\mathrm{A}) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}\right\} \quad \text{und} \quad \mathrm{Eig}_{-3}(\mathrm{A}) = \mathrm{span}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Aufgabe 4. *[16 Punkte]* Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $x \mapsto f(x) = x\cos(x)$.

(a) *[6 Punkte]*
Bestimmen Sie das Taylorpolynom $T_1(x)$ erster Ordnung von f mit dem Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(b) *[10 Punkte]*
Beweisen Sie für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung $\big|f(x) - T_1(x)\big| \leq \frac{1}{2}\big(2 + |x|\big)x^2$.

Lösung:

(a) Es ist $f(0) = 0$ und mit $f'(x) = \cos(x) - x\sin(x)$ ergibt sich $f'(0) = 1$. Das Taylorpolynom T_1 ist $T_1(x) = f(0) + f'(0)(x - 0) = x$.

(b) Mit $f''(x) = -2\sin(x) - x\cos(x)$ lautet das Restglied von Lagrange

$$f(x) - T_1(x) = \frac{1}{2}f''(\xi)(x-0)^2 = \frac{1}{2}\big(-2\sin(\xi) - \xi\cos(\xi)\big)x^2$$

mit einem ξ zwischen $x_0 = 0$ und x. Damit ergibt sich für alle $x \in \mathbb{R}$ die Abschätzung

$$\big|f(x) - T_1(x)\big| = \frac{1}{2}\big|-2\sin(\xi) - \xi\cos(\xi)\big|x^2 \leq$$

$$\frac{1}{2}\big(2\underbrace{|\sin(\xi)|}_{\leq 1} + \underbrace{|\xi|}_{\leq |x|}\underbrace{|\cos(\xi)|}_{\leq 1}\big)x^2 \leq \frac{1}{2}\big(2 + |x|\big)x^2.$$

Aufgabe 5. *[18 Punkte]* Beweisen Sie die Implikation

$$x^4 + y^4 = 1 \Longrightarrow x^3 + y^3 \leq \sqrt[4]{2},$$

indem Sie eine geeignete Extremwertaufgabe lösen.

Lösung: Es ist zu zeigen, dass das Maximum von $f(x,\, y) = x^3 + y^3$ unter der Nebenbedingung $g(x,\, y) = x^4 + y^4 = 1$ kleiner oder gleich $\sqrt[4]{2}$ ist.

1. Lösungsweg:
Mittels der Nebenbedingung kann y durch $y = \sqrt[4]{1 - x^4}$ eliminiert werden. Damit ist das Maximum der Funktion $h(x) = x^3 + (1 - x^4)^{3/4}$, $-1 \leq x \leq 1$ zu bestimmen. Es ist $h(1) = 1$, $h(-1) = -1$ und

$$h'(x) = 3x^2 \left(1 - \frac{x}{\sqrt[4]{1 - x^4}}\right) = 0 \Longleftrightarrow x = 0 \text{ oder } x = \frac{1}{\sqrt[4]{2}}.$$

Die Funktionswerte von h an diesen Stellen sind $h(0) = 1$ und $h\left(\frac{1}{\sqrt[4]{2}}\right) = \sqrt[4]{2}$. Der Maximale Funktionswert von h ist $\sqrt[4]{2}$, und damit ist die Ungleichung bewiesen.

2. Lösungsweg:
Mit dem Ansatz $\nabla f = \lambda \nabla g$ ergibt sich

$$\left.\begin{array}{rcl} 3x^2 &=& 4\lambda x^3 \\ 3y^2 &=& 4\lambda y^3 \end{array}\right\} \Longrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 0 \text{ oder } 3 = 4\lambda x \\ y = 0 \text{ oder } 3 = 4\lambda y \end{array}\right.$$

Es ergeben sich folgende Fälle:

(a) $x = 0$: Aus der Nebenbedingung folgt $y = \pm 1$ und die Funktionswerte sind $f(0,\, \pm 1) = \pm 1$.

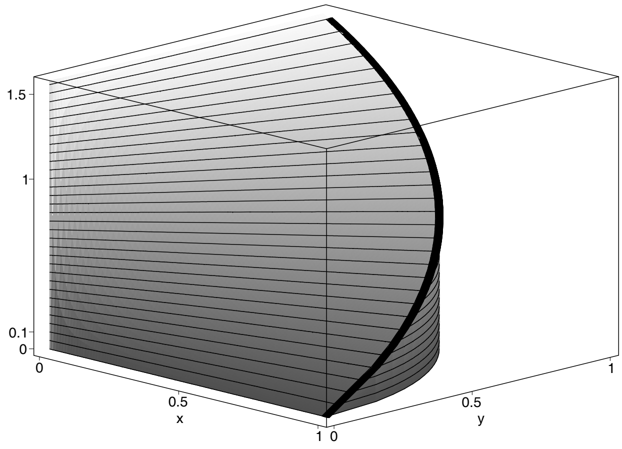
(b) $y = 0$: Aus der Nebenbedingung folgt $x = \pm 1$ und die Funktionswerte sind $f(\pm 1,\, 0) = \pm 1$.

(c) $x \neq 0$ und $y \neq 0$: In diesem Fall ist $x = y$ und aus der Nebenbedingung folgt $2x^4 = 1$, also $x = y = \pm \frac{1}{\sqrt[4]{2}}$. Die Funktionswerte an diesen Stellen sind $\pm \sqrt[4]{2}$.

Der maximale Funktionswert von $f(x,\, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x,\, y) = 1$ ist also $\sqrt[4]{2}$, und damit ist die Ungleichung bewiesen.

Aufgabe 6. *[16 Punkte]*

Betrachten Sie in $\left(\mathbb{R}_0^+\right)^3$ den Körper, der von den Ebenen $x = 0$, $z = 0$ sowie von den Flächen $x^2 + y^2 = 1$ und $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ berandet wird (siehe Skizze).
Berechnen Sie das Volumen dieses Körpers.



Lösung: Das Volumen des Körpers kann man durch Übergang zu Polarkoordinaten bestimmen. Die Fläche $z = \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$ hat in Polarkoordinaten die Darstellung $z = \arctan\left(\frac{r\sin\varphi}{r\cos\varphi}\right) = \varphi$ mit $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$. Das Volumen des Körpers ist daher

$$V = \int_0^{\pi/2}\int_0^1 \varphi \cdot r\,dr\,d\varphi = \frac{\pi^2}{16}.$$

Aufgabe 7. *[18 Punkte]* Die Fibonacci-Zahlen sind durch $f_0 = f_1 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für $n \in \mathbb{N}$ definiert. Betrachten Sie in dieser Aufgabe die Folge der Quotienten aufeinander folgender Fibonacci-Zahlen, also die Folge $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch $x_n = \dfrac{f_{n+1}}{f_n}$ für $n \in \mathbb{N}_0$.

(a) *[3 Punkte]*
Zeigen Sie, dass diese Folge $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ die Rekursion $x_0 = 1$, $x_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$, $n \in \mathbb{N}_0$ erfüllt.

(b) *[6 Punkte]*
Die Aussage von Teil (a) bedeutet: Die Folge $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ wird durch die Funktion g mit der Abbildungsvorschrift $g(x) = 1 + \frac{1}{x}$ mittels $x_0 = 1$ und $x_{n+1} = g(x_n)$ erzeugt.
Zeigen Sie für $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$:

$$\frac{3}{2} \le g(x) \le \frac{5}{3} \text{ und } \left|g'(x)\right| \le \frac{4}{9}.$$

(c) *[4 Punkte]*
Begründen Sie mit dem Banachschen Fixpunktsatz, dass die Folge $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}_0}$ konvergiert.

(d) *[5 Punkte]*
Bestimmen Sie den Grenzwert $x^\star = \lim\limits_{x\to\infty} x_n$.

Lösung:

(a) Es ist $x_{n+1} = \dfrac{f_{n+2}}{f_{n+1}} = \dfrac{f_{n+1} + f_n}{f_{n+1}} = 1 + \dfrac{f_n}{f_{n+1}} = 1 + \dfrac{1}{x_n}$.

(b) Zunächst ist: $g'(x) = -\frac{1}{x^2}$.
Dann ergibt sich für $x \in \left[\frac{3}{2}, 2\right]$:

$$\tfrac{1}{2} \le \tfrac{1}{x} \le \tfrac{2}{3} \Longrightarrow \tfrac{3}{2} \le 1 + \tfrac{1}{x} = g(x) \le \tfrac{5}{3}$$

und

$$\tfrac{1}{4} \le \tfrac{1}{x^2} \le \tfrac{4}{9} \Longrightarrow \left|g'(x)\right| \le \tfrac{4}{9}.$$

(c) Aus Teil (b) folgt, dass g eine Kontraktion auf $\left[\frac{2}{3},\, 2\right]$ ist. Wegen $x_1 = 2$ kann auf die Folge $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ der Banachsche Fixpunktsatz angewendet werden. Dieser besagt, dass die Folge gegen den eindeutig bestimmten Fixpunkt der Funktion g im Intervall $\left[\frac{2}{3},\, 2\right]$ konvergiert.

(d) Für den Grenzwert $x^\star$ gilt $x^\star \in \left[\frac{2}{3},\, 2\right]$ und $x^\star = g(x^\star) = 1 + \frac{1}{x^\star}$. Diese Gleichung ist gleichwertig mit $\left(x^\star\right)^2 - x^\star - 1 = 0$, also $x^\star \in \left\{\frac{1}{2}\left(1 \pm \sqrt{5}\right)\right\}$. Aus $x^\star \ge \frac{3}{2}$ folgt $x^\star = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$.