DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 14. Mai 2022

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 11 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[17 Punkte]* Welche der folgenden Teilmengen M des $\mathbb{R}^3$ bilden bzgl. der üblichen Vektoraddition und Skalarmultiplikation im $\mathbb{R}^3$ einen Untervektorraum des $\mathbb{R}^3$?
Geben Sie im Falle eines Untervektorraums eine Basis $\mathcal{B}$ für diesen Untervektorraum an.

(a) *[2 Punkte]*
$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 \cdot x_2 \cdot x_3 = 0 \right\}.$

(b) *[3 Punkte]*
$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 = x_2 = x_3 \right\}.$

(c) *[5 Punkte]*
$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; x_1 + x_2 + x_3 = 0 \right\}.$

(d) *[7 Punkte]*
$M := \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; < a, x >= 0 =< b, x > \right\}$ mit festen $a, b \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Lösung:

(a) M ist kein Untervektorraum, da

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\in M} + \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\in M} \notin M.$$

(b) M ist ein Untervektorraum, da für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x, y \in M$ gilt:

$$\lambda x_k + \mu y_k = \lambda x_l + \mu y_l \quad \text{für} \quad k, l \in \{1, 2, 3\},$$

also auch $\lambda x + \mu y \in M$.

Als Basis kann gewählt werden: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$

(c) M ist ein Untervektorraum, da für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x, y \in M$ gilt:

$$\sum_{k=1}^{3} (\lambda x_k + \mu y_k) = \lambda \sum_{k=1}^{3} x_k + \mu \sum_{k=1}^{3} y_k = 0,$$

also auch $\lambda x + \mu y \in M$.

Als Basis kann gewählt werden: $\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}.$

(d) M ist ein Untervektorraum, da für $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ und $x, y \in M$ infolge der Linearität des Skalarprodukts gilt:

$$< a, \lambda x + \mu y >= \lambda < a, x > +\mu < a, y >= 0 = \lambda < b, x > +\mu < b, y >=< b, \lambda x + \mu y > .$$

Als Basis kann gewählt werden:

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} a_2 \\ -a_1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_3 \\ 0 \\ -a_1 \end{pmatrix} \right\} \text{ falls } a, b \text{ linear abhängig } (M \text{ Ebene}),$$

und

$$\mathcal{B} = \{a \times b\} \text{ falls } a, b \text{ linear unabhängig } (M \text{ Ursprungsgerade}).$$

Aufgabe 2. *[18 Punkte]* Für ganzzahlige Matrizen $A \in M_n(\mathbb{Z})$ gilt folgende Aussage:

$$A \text{ ist invertierbar mit } A^{-1} \in M_n(\mathbb{Z}) \quad \Longleftrightarrow \quad \det(A) \in \{-1, +1\}. \tag{1}$$

(a) *[5 Punkte]* Verifizieren Sie die Aussage (1) zunächst für die folgende konkrete Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}.$$

(b) *[13 Punkte]* Beweisen Sie nun die allgemeine Aussage (1) anhand der folgenden Vorlage aus Fragen und Hinweisen. Begründen bzw. ergänzen Sie hierzu die einzelnen Schritte nachvollziehbar, so dass ein vollständiger Beweis entsteht.

Zu „$\Longrightarrow$":

- In welchem Zahlenbereich liegen $\det(A)$ und $\det\left(A^{-1}\right)$?
- Welchen Wert hat das Produkt $\det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right)$?
- Welche Werte können demzufolge für $\det(A)$ und $\det\left(A^{-1}\right)$ nur in Frage kommen?

Zu „$\Longleftarrow$":

- Warum ist A invertierbar?
- Sie können ohne Nachweis die folgende Darstellung der Elemente einer inversen Matrix A^{-1} benutzen:

$$\left(A^{-1}\right)_{ij} = \frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j} \det A_{ji}, \; i, j = 1, \ldots, n, \tag{2}$$

wobei A_{ji} aus A per Streichen der j-ten Zeile und i-ten Spalte hervorgeht.

Lösung:

(a) Für die Matrix $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 9 & 2 \end{pmatrix}$ gilt $\det(A) = -1$ und für die Inverse A^{-1} erhält man:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 9 & -4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{Z}).$$

(b) „$\Longrightarrow$":

Da die Determinanten $\det(A)$ und $\det\left(A^{-1}\right)$ allein per Additionen und Multiplikationen von Elementen der ganzahligen Matrizen A bzw. A^{-1} berechnet werden, müssen auch $\det(A)$ und $\det\left(A^{-1}\right)$ ganzzahlig sein.

Weiterhin gilt aufgrund des Multiplikationssatzes für Determinanten

$$\det(A) \cdot \det\left(A^{-1}\right) = \det\left(A \cdot A^{-1}\right) = \det E_n = 1.$$

Wegen $\det(A), \det\left(A^{-1}\right) \in \mathbb{Z}$ folgt:

$$\det(A) = \det\left(A^{-1}\right) = 1 \ \vee \ \det(A) = \det\left(A^{-1}\right) = -1.$$

„$\Longleftarrow$“:
Wegen $\det A \neq 0$ ist A invertierbar und A^{-1} kann per (2) dargestellt werden. Die in (2) auftretenden Streichmatrizen A_{ji} von A sind wieder ganzahlig und damit auch ihre Determinanten, die alle per Additionen und Multiplikationen von Elementen aus A_{ji} berechnet werden. Wegen $\det(A) \in \{-1, +1\}$ bleibt auch $\frac{1}{\det(A)}(-1)^{i+j} \det A_{ji}$ ganzzahlig und damit ist jedes Element von A^{-1} aus $\mathbb{Z}$.

Aufgabe 3.*[19 Punkte]* Eine invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$, $n \geq 2$, besitzt eine sogenannte *LU-Zerlegung*, wenn es eine untere Dreiecksmatrix L und eine obere Dreiecksmatrix U aus $M_n(\mathbb{R})$ gibt mit

$$A = L \cdot U.$$

In diesem Fall kann die LU-Zerlegung benutzt werden, um die Gleichung $Ax = b$ mit $b \in \mathbb{R}^n$ zu lösen, indem zunächst ein Lösungsvektor $y \in \mathbb{R}^n$ von $Ly = b$ und dann $x \in \mathbb{R}^n$ durch $Ux = y$ bestimmt wird (*LU-Verfahren*).

(a) *[4 Punkte]* Gibt es für jede invertierbare Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine LU-Zerlegung?

(b) *[2 Punkte]* Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix mit einer LU-Zerlegung.
Ist diese LU-Zerlegung dann eindeutig bestimmt?

(c) *[3 Punkte]* Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix mit einer LU-Zerlegung.
Wie viele Lösungen haben jeweils die beiden Gleichungen $Ly = b$ und $Ux = y$?

(d) *[2 Punkte]* Sei $A \in M_n(\mathbb{R})$ eine invertierbare Matrix mit einer LU-Zerlegung.
Lassen sich dann alle Lösungen von $Ax = b$ über das LU-Verfahren bestimmen?

(e) *[8 Punkte]* Zeigen Sie, dass in der folgenden konkreten Gleichung die Matrix aus $A \in M_2(\mathbb{R})$ eine LU-Zerlegung besitzt und lösen Sie diese Gleichung mit dem LU-Verfahren:

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

Lösung:

(a) Nein, denn man betrachte den Versuch

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_1 & 0 \\ l_2 & l_3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ 0 & u_3 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Dann müsste aber gleichzeitig $l_1 u_1 = 0$ und $l_1 u_2 = 1 = l_2 u_1$ gelten.

(b) Nein, die LU–Zerlegung ist im Falle ihrer Existenz nicht eindeutig, denn

$$A = L \cdot U = \frac{1}{\lambda} L \cdot \lambda U \quad \text{für jedes} \quad \lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

(c) Aus dem Multiplikationssatz für Determinaten folgt:

$$\det(A) = \det(L \cdot U) = \det(L) \cdot \det(U).$$

Da A invertierbar ist, gilt $\det(A) \neq 0$ und damit auch $\det(L), \det(U) \neq 0$. Also besitzen die beiden Gleichungen $Ly = b$ und $Ux = y$ jeweils genau eine Lösung.

(d) Man erhält mit dem LU-Verfahren alle Lösungen, genauer die eindeutig bestimmte Lösung wegen

$$x = U^{-1} y = U^{-1}\left(L^{-1} b\right) = A^{-1} b.$$

(e) Mit einem Schritt des Gauß-Algorithmus für lineare Gleichungssysteme erhält man:

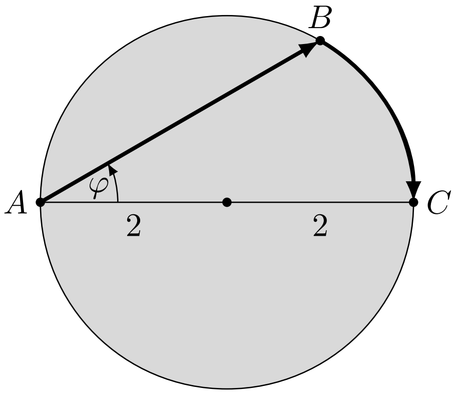
$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}}_{=:L^{-1}} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}}_{=:U}, \quad \text{also} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} = L \cdot U.$$

Für $b = (2\ 4)^T$ erhält man:

$$Ly = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix} \iff y_1 = 2 \wedge y_2 = 3$$

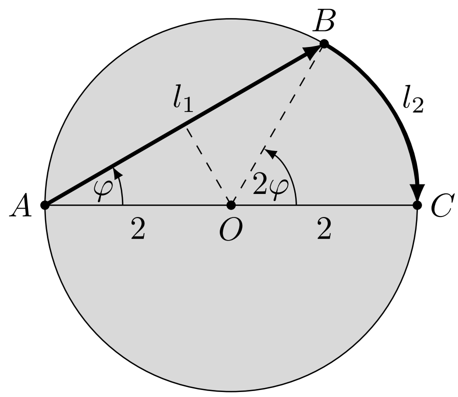
$$Ux = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \iff x_2 = -1 \wedge x_1 = 3.$$

Aufgabe 4. *[22 Punkte]* Eine Frau befindet sich am Punkt A am Ufer eines kreisförmigen Sees mit einem Radius von 2 km und möchte so schnell wie möglich zum diametral gegenüberliegenden Punkt C gelangen. Dabei kann Sie geradlinig zu einem Punkt B am Ufer des Sees rudern und von dort aus am Ufer entlang bis C laufen (siehe Skizze). Sie rudert mit einer Geschwindigkeit von $2\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$ und läuft mit einer Geschwindigkeit von $4\,\frac{\text{km}}{\text{h}}$. Wo muss der Punkt B liegen, damit sie so schnell wie möglich von A nach C kommt?



Lösung:

Im Folgenden seien alle Längenangaben in km und alle Zeitangaben in h.
In dem gleichschenkligen Dreieck AOB ist $\angle AOB = \pi - 2\varphi$. Daher ist $\angle COB = 2\varphi$ und die Länge l_2 ist $l_2 = 4\varphi$. Das Dreieck AOB setzt sich aus zwei rechtwinkligen Dreiecken zusammen, deren Katheten die Länge $\frac{1}{2}l_1 = 2\cos\varphi$ haben. Damit ergibt sich $l_1 = 4\cos\varphi$. Für die Strecke l_1 benötigt die Frau die Zeit $T_1 = 2\cos\varphi$, für die Strecke l_2 benötigt sie die Zeit $T_2 = \varphi$.



Die benötigte Gesamtzeit ist also $T(\varphi) = \varphi + 2\cos\varphi$, $0 \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$. Die Ableitung $T'(\varphi) = 1 - 2\sin\varphi$ hat die Nullstelle $\varphi_0 = \frac{\pi}{6}$.
Damit gibt es drei mögliche Winkel φ für das gesuchte Minimum, nämlich $\varphi \in \left\{0, \frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{2}\right\}$. Die Funktionswerte an diese Stellen sind $T(0) = 2$, $T\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\pi}{6} + \sqrt{3} \approx 2.26$ und $T\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \approx 1.57$. Der Frau sollte also die ganze Strecke am Ufer des Sees zurücklegen.

Aufgabe 5. *[12 Punkte]* Die Funktion $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei stetig und die Funktion $g : [0, 1] \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $g(x) = \int\limits_0^1 \min\{x, t\} \cdot f(t)\,dt$. Zeigen Sie, dass die Funktion g auf $[0, 1]$ zweimal stetig differenzierbar ist und dass $g''(x) = -f(x)$ gilt.

Hinweis: Verwenden Sie $\min\{x, t\} = \begin{cases} t, & t \leq x \\ x, & t > x. \end{cases}$

Lösung: Es ist $g(x) = \int\limits_0^x t f(t)\,dt + \int\limits_x^1 x f(t)\,dt$. Wegen der Stetigkeit der Integranden ist g differenzierbar und mit Hilfe des HDI folgt $g'(x) = x f(x) + \int\limits_x^1 f(t)\,dt + x \cdot \big(-f(x)\big) = \int\limits_x^1 f(t)\,dt$. Auch diese Funktion ist nach dem HDI differenzierbar und es gilt $g''(x) = -f(x)$.

Aufgabe 6. *[20 Punkte]* Die Funktion $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ sei total differenzierbar und es gelte $g(1,\, 2,\, 3) = 13$. Das Differential von g an der Stelle $(1,\, 2,\, 3)$ sei $dg = -3\,dx - 6\,dy - 2\,dz$.

(a) *[6 Punkte]* Bestimmen Sie einen Näherunswert für $g(1.1,\, 2.2,\, 2.7)$.

(b) *[7 Punkte]* Berechnen Sie die Gleichung der Tangentialebene an die Niveaufläche $g(x,\, y,\, z) = 13$ an der Stelle $(1,\, 2,\, 3)$.

(c) *[7 Punkte]* Bestimmen Sie die Werte aller möglichen Richtungsableitungen von g im Punkt $(1,\, 2,\, 3)$.

Lösung: Aus dem Wert $dg = -3\,dx - 6\,dy - 2\,dz$ des Differentials von g an der Stelle $(1,\, 2,\, 3)$ folgt $\nabla g(1,\, 2,\, 3) = \begin{pmatrix} -3 \\ -6 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\left\|\nabla g(1,\, 2,\, 3)\right\| = 7$.

(a) Der Näherungswert ist $g(1.1,\, 2.2,\, 2.7) \approx g(1,\, 2,\, 3) + \nabla g(1,\, 2,\, 3) \cdot \begin{pmatrix} 1.1 - 1 \\ 2.2 - 2 \\ 2.7 - 3 \end{pmatrix} = 12.1$

(b) Die Tangentialfläche an die Niveaufläche $g(x,\, y,\, z) = 13$ an der Stelle $(1,\, 2,\, 3)$ ist die Menge aller Punkte $(x,\, y,\, z)$ mit $\nabla g(1,\, 2,\, 3) \cdot \begin{pmatrix} x - 1 \\ y - 2 \\ z - 3 \end{pmatrix} = 0 \Longleftrightarrow 3x + 6y + 2z = 21.$

(c) Ist $\underline{v}$ ein normierter Richtungsvektor, so ist die Richtungsableitung von g im Punkt $(1,\, 2,\, 3)$ in Richtung $\underline{v}$ gleich $g_{\underline{v}}(1,\, 2,\, 3) = \nabla g(1,\, 2,\, 3) \cdot \underline{v} = \left\|\nabla g(1,\, 2,\, 3)\right\| \cos(\varphi)$, wobei φ der Winkel zwischen $\nabla g(1,\, 2,\, 3)$ und $\underline{v}$ ist. Aus $\left\|\nabla g(1,\, 2,\, 3)\right\| = 7$ folgt, dass die Wertemenge aller möglichen Richtungsableitungen von g im Punkt $(1,\, 2,\, 3)$ das Intervall $[-7,\, 7]$ ist.

Aufgabe 7. *[12 Punkte]* Es sei H ein Hilbert-Raum, $A \subset H$ ein abgeschlossener Unterraum und P der Projektionsoperator von H auf A.
Weisen Sie nach, dass dann gilt

$$\sup_{v \neq 0} \frac{\|Pv\|}{\|v\|} = 1.$$

Ist P ein stetiger Operator?

Lösung: Nach dem Projektionssatz für Hilbert-Räume lässt sich jedes Element $v \in H$ eindeutig in der Form $v = a^* + w$ schreiben. Dabei ist a^* das eindeutig bestimmte bestapproximierende Element aus A zu v, d.h.

$$\|v - a^*\| = \min_{a \in A} \|v - a\|$$

und $w = v - a^*$ aus dem orthogonalen Komplement $A^\perp$ von A.
Es gilt dann für alle $v \in H$:

$$\begin{aligned}
\|Pv\|^2 = \|a^*\|^2 &\leq \|a^*\|^2 + \|v - a^*\|^2 \\
&= < a^*, a^* > + < v - a^*, v > - \underbrace{< v - a^*, a^* >}_{=0 \ \text{da} \ v - a^* \in A^\perp} \\
&= \underbrace{< a^*, a^* - v >}_{=0} + < v, v > = \|v\|^2
\end{aligned}$$

und damit

$$\sup_{v \in H} \frac{\|Pv\|}{\|v\|} \leq 1.$$

Wegen $Pv = v$ für $v \in A$ erhält man sogar

$$\sup_{v \in H} \frac{\|Pv\|}{\|v\|} = 1.$$

Aus

$$\|Pv - P\tilde{v}\| = \|P(v - \tilde{v})\| \leq \|v - \tilde{v}\| \quad \text{für} \quad v, \tilde{v} \in H$$

folgt direkt die Stetigkeit von P.