DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 15. Oktober 2021

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 8 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[11 Punkte]* Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ sei die quadratische Matrix $A_n = (a_{ik}) \in M_n(\mathbb{R})$ mit folgender Festlegung gegeben:

$$a_{ik} := \begin{cases} -1, & i = k,\ k = 1, \ldots, n; \\ 1, & i = k+1,\ k = 1, \ldots, n-1; \\ 1, & i = k-1,\ k = 2, \ldots, n; \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

(a) *[4 Punkte]* Berechnen Sie $\det A_n$ für $n = 1, 2, 3$.

(b) *[7 Punkte]* Bestimmen Sie eine allgemeine Rekursionsformel für $\det A_n$, $n \geq 3$.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$\det A_1 = \det(-1) = -1,\ \det A_2 = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = 0,\ \det A_3 = \det\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 1.$$

(b) Für die Determinante von A_n, $n \geq 3$, ergibt sich zunächst im ersten Schritt mit Entwicklung nach der ersten Spalte und dann im zweiten Schritt mit Entwicklung nach der ersten Zeile die folgende Rekursionsformel:

$$\begin{aligned}
\det A_n &= \begin{vmatrix} -1 & 1 & 0 & & & & \\ 1 & -1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & -1 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}_{n \times n} \\
&= -\det A_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & & \ldots & & & 0 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & & & \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ & & & 0 & 1 & -1 & 1 \\ & & & & 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}_{(n-1) \times (n-1)} \\
&= -\det A_{n-1} - \det A_{n-2}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 2. *[18 Punkte]* Der *Zentralisator* $Z(A)$ einer Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ mit $n \in \mathbb{N}$ besteht aus denjenigen Matrizen $X \in M_n(\mathbb{R})$, die mit A bezüglich der Matrizenmultiplikation vertauschbar sind:

$$Z(A) = \{X \in M_n(\mathbb{R}) \mid AX = XA\}.$$

(a) *[9 Punkte]* Bestimmen Sie im Fall $n = 2$ den Zentralisator $Z(A)$ für die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) *[9 Punkte]* Zeigen Sie allgemein, dass der Zentralisator $Z(A)$ einer gegebenen Matrix $A \in M_n(\mathbb{R})$ additiv und multiplikativ abgeschlossen ist, d. h. zu je zwei Matrizen aus dem Zentralisator liegt ihre Summe und ihr Produkt wieder im Zentralisator.

Lösung:

(a) Mit $X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ entspricht die Matrizengleichung

$$AX = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \stackrel{!}{=} XA = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

den Gleichungen $c = 0$ und $a = d$, die Unbekannte b kann beliebig gewählt werden. Dies liefert die notwendige und hinreichende Bedingung $X = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix}$, also den Zentralisator

$$Z(A) = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \;\middle|\; a, b \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Für $X, X' \in Z(A)$ mit $AX = XA$ und $AX' = X'A$ gilt:

$$A(X + X') = AX + AX' = XA + X'A = (X + X')A \quad \text{und}$$
$$A(XX') = (AX)X' = (XA)X' = X(AX') = X(X'A) = (XX')A$$

d. h. $X + X'$ bzw. XX' vertauscht mit A, so dass $X + X' \in Z(A)$ und $XX' \in Z(A)$.

Aufgabe 3. *[23 Punkte]* Die quadratische Matrix A besitze die drei Eigenwerte $\lambda_1 = -1$, $\lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 1$ mit zugehörigen Eigenvektoren:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(a) *[10 Punkte]* Leiten Sie die Matrix A her.

(b) *[13 Punkte]* Berechnen Sie die Folge $A^n,\ n \in \mathbb{N}$.

Lösung:

(a) Für die drei Spaltenvektoren der Matrix $A = (a_1\ a_2\ a_3)$ ergeben sich folgende Gleichungen zu den drei Eigenwerten mit den o.g. Eigenvektoren:

$$\lambda = -1: \ (a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = a_1 + 2a_3 = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 0: \ (a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -a_1 + a_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\lambda = 1: \ (a_1\ a_2\ a_3) \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = a_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Einsetzen von a_3 in die erste Gleichung und dann von a_1 in die zweite Gleichung liefert:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -4 & -4 & 1 \end{pmatrix}.$$

(b) Da die quadratische Matrix A der Ordnung drei genau drei verschiedene Eigenwerte besitzt, existiert nach dem Satz über die Jordansche Normalform eine invertierbare Matrix $S \in GL_3(\mathbb{R})$, so dass

$$A = SDS^{-1} \ \text{ mit } D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit ergibt sich:

$$A^n = SD^nS^{-1} \ \text{ mit } D^n = \begin{pmatrix} (-1)^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

also

$$A^n = \begin{cases} A, & n \text{ ungerade;} \\ A^2, & n \text{ gerade;} \end{cases} \quad \text{wobei } A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

Aufgabe 4. *[20 Punkte]* Es sei $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ die durch $f_1 = f_2 = 1$ und $f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$ für alle $n \geq 2$ rekursiv definierte Folge.

(a) *[12 Punkte]* Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt die Ungleichung $f_n \geq \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$.

(b) *[8 Punkte]* Untersuchen Sie die Reihe $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{f_k}$ auf Konvergenz.

Lösung:

(a) Es ist $f_1 = 1 \geq \frac{4}{9} \cdot \frac{3}{2} = \frac{2}{3}$ und $f_2 = 1 = \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^2$. Damit ist Behauptung für $n = 1$ und $n = 2$ richtig.

Nimmt man an, dass für ein $n \geq 2$ die Ungleichungen $f_n \geq \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^n$ und $f_{n-1} \geq \dfrac{4}{9}\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}$ gelten, so folgt aus der Rekursionsgleichung:

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1} \geq \frac{4}{9}\left(\left(\frac{3}{2}\right)^n + \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{4}{9} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{n-1} \underbrace{\left(\frac{3}{2} + 1\right)}_{=\frac{10}{4} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^2} \geq \frac{4}{9}\left(\frac{3}{2}\right)^{n+1}.$$

Damit folgt die behauptete Ungleichung aus dem Prinzip der vollständigen Induktion.

(b) Nach Teil (a) gilt für alle $k \in \mathbb{N}$ die Ungleichung $0 < \dfrac{1}{f_k} \leq \dfrac{9}{4}\left(\dfrac{2}{3}\right)^k$. Daher ist die Reihe $\displaystyle\frac{9}{4}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^k$ eine konvergente Majorante für $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{f_k}$.

Aufgabe 5. *[16 Punkte]*
Die Funktion $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ sei in $[0, 2]$ stetig und in $(0, 2)$ zweimal differenzierbar. Weiter gelte $f(0) = f(1) = 3$ sowie $f(2) = 4$. Beweisen Sie:

(a) *[4 Punkte]* Es gibt ein $a \in (0, 2)$ mit $f'(a) = \frac{1}{2}$.

(b) *[6 Punkte]* Es gibt ein $b \in (0, 1)$ und ein $c \in (1, 2)$ mit $f'(b) = 0$ und $f'(c) = 1$.

(c) *[6 Punkte]* Es gibt ein $d \in (0, 2)$ mit $f''(d) > \frac{1}{2}$.

Lösung:

(a) Aus dem Mittelwertsatz, angewendet auf die Funktion f im Intervall $[0, 2]$ folgt: Es gibt ein $a \in (0, 2)$ mit $f'(a) = \frac{f(2)-f(0)}{2-0} = \frac{1}{2}$.

(b) Aus dem Mittelwertsatz, angewendet auf die Funktion f in den beiden Intervalle $[0, 1]$ und $[1, 2]$ folgt: Es gibt ein $b \in (0, 1)$ mit $f'(b) = \frac{f(1)-f(0)}{1-0} = 0$ und es gibt ein $c \in (1, 2)$ mit $f'(c) = \frac{f(2)-f(1)}{2-1} = 1$.

(c) Aus dem Mittelwertsatz, angewendet auf die Funktion f' im Intervall (b, c) mit den beiden Punkten aus Teil (b) folgt: Es gibt ein $d \in (b, c)$ mit $f''(d) = \frac{f'(c)-f'(b)}{c-b} = \frac{1}{c-b}$. Aus $0 < b < c < 2$ ergibt sich $0 < c - b < 2$ und $\frac{1}{c-b} > \frac{1}{2}$. Damit ist $d \in (b, c) \subset (0, 2)$, und $f''(d) > \frac{1}{2}$.

Aufgabe 6. *[16 Punkte]* Die Funktion f sei auf $[a,\, b]$ zweimal stetig differenzierbar und es gelte $f(b) = -f(a)$. Beweisen Sie die Gleichung

$$\int\limits_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,dx = 2\int\limits_a^b f(x)\,dx.$$

Lösung: Zweimalige partielle Integration ergibt

$$\int\limits_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\,dx = \underbrace{(x-a)(x-b)f'(x)\Big|_a^b}_{=0} - \int\limits_a^b \big(2x-(a+b)\big)f'(x)\,dx =$$

$$\underbrace{-\big(2x-(a+b)\big)f(x)\Big|_a^b}_{=-(b-a)(f(b)+f(a))=0} + \int\limits_a^b 2f(x)\,dx = 2\int\limits_a^b f(x)\,dx$$

Aufgabe 7. *[16 Punkte]* Bestimmen Sie mit der Methode der Lagrange-Multiplikatoren die Extrema der Funktion $F(x, y) = y\mathrm{e}^x$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = x^2 + y^2 = 6$.
Hinweis: Für Lösungen ohne die Methode der Lagrange-Multiplikatoren werden keine Punkte vergeben.

Lösung: Die notwendige Bedingung $\nabla F(x, y) = \lambda \nabla g(x, y)$ lautet hier:

$$\begin{aligned} y\mathrm{e}^x &= 2\lambda x \\ \mathrm{e}^x &= 2\lambda y \end{aligned}$$

Aus der zweiten Gleichung folgt zunächst $\lambda \neq 0$. Durch Multiplikation der zweiten Gleichung mit y und Vergleich mit der ersten Gleichung ergibt sich $y\mathrm{e}^x = 2\lambda x = 2\lambda y^2$ und damit $y^2 = x$. Setzt man dies in die Nebenbedingung ein, so erhält man die Gleichung $x^2 + x - 6 = 0$ mit den Lösungen $x_1 = -3$ und $x_2 = 2$. Die Lösung $x_1 = -3$ ist wegen $x = y^2 \geq 0$ nicht relevant. Aus der Lösung $x = 2$ erhält man die y-Werte $\pm\sqrt{2}$.
Es gibt zwei mögliche Punkte für die gesuchten Extrema, nämlich $(2, \sqrt{2})$ und $(2, -\sqrt{2})$ mit den Funktionswerten $F(2, \sqrt{2}) = \sqrt{2}\mathrm{e}^2$ und $F(2, -\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\mathrm{e}^2$. Das Maximum von $F(x, y)$ unter der Nebenbedingung $g(x, y) = 6$ liegt an der Stelle $(2, \sqrt{2})$, das Minimum liegt an der Stelle $(2, -\sqrt{2})$.