DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 15. Mai 2021

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 9 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[16 Punkte]* Es sei die Matrix $A := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und die folgende Matrizengleichung gegeben:

$$x \cdot E_2 + y \cdot A + z \cdot A^2 = A^{-1}.$$

Dabei bezeichnet E_2 die zweidimensionale Einheitsmatrix.

(a) *[13 Punkte]* Bestimmen Sie alle Zahlen $x, y, z \in \mathbb{R}$, für die diese Matrizengleichung erfüllt ist.

(b) *[3 Punkte]* Welche Punktmenge im $\mathbb{R}^3$ beschreibt die Lösungsmenge aus (a)?
Ist diese ein Unterraum des $\mathbb{R}^3$?

Lösung:

(a) Es gilt:

$$x \cdot E_2 + y \cdot A + z \cdot A^2 = A^{-1} \Longleftrightarrow x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + z \cdot \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe des Gauß-Jordan-Algorithmus erhält man die Lösungsmenge

$$L = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

(b) Die Lösungsmenge L aus (a) beschreibt eine Gerade im $\mathbb{R}^3$ mit dem Startpunkt $\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Es handelt sich um keinen Unterraum des $\mathbb{R}^3$, da $0 \notin L$.

Aufgabe 2. *[19 Punkte]* In dieser Aufgabe steht der Begriff der linearen Unabhängigkeit in einem K-Vektorraum V im Mittelpunkt. Dabei ist K einer der Körper $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$.

(a) *[8 Punkte]* Es seien $V = K^3$ und

$$v_1 := \begin{pmatrix} a^2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ a^2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad v_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ a^2 \end{pmatrix}.$$

Bestimmen Sie alle Zahlen $a \in K$, für die die drei Vektoren v_1, v_2, v_3 linear unabhängig sind. Unterscheiden Sie dabei nach den drei o.g. Körpern K.

(b) *[11 Punkte]* Es seien V ein beliebiger K-Vektorraum und $S := \{v_1, \ldots, v_r\}$ bzw. $T := \{w_1, \ldots, w_s\}$ zwei jeweils linear unabhängige Teilmengen von V mit $S \cap T = \emptyset$.
Beweisen Sie die Aussage:

Genau dann ist $S \cup T$ linear unabhängig, wenn $\operatorname{span}(S) \cap \operatorname{span}(T) = \{0\}$ gilt.

Lösung:

(a) Es gilt:

$$v_1, v_2, v_3 \text{ linear unabhängig} \iff \det \begin{pmatrix} a^2 & 1 & 0 \\ 1 & a^2 & 1 \\ 0 & 1 & a^2 \end{pmatrix} = a^2 \left(a^4 - 2\right) \neq 0.$$

Abhängig vom gewählten Körper ist diese Bedingung genau dann erfüllt, wenn:

$$\left.\begin{array}{c} a \neq 0, \\ a \notin \{0, \pm 2^{\frac{1}{4}}\}, \\ a \notin \{0, 2^{\frac{1}{4}} \cdot e^{2\pi i \frac{k}{4}}, k = 0,1,2,3\}, \end{array}\right\} \text{falls } K = \left\{\begin{array}{l} \mathbb{Q}, \\ \mathbb{R}, \\ \mathbb{C}. \end{array}\right.$$

(b) Nach Definition gilt:

$$\begin{aligned} S \cup T \text{ ist linear unabhängig} \iff & (\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_s w_s = 0 \\ & \Rightarrow \lambda_1 = \ldots = \lambda_r = \mu_1 = \ldots = \mu_s = 0). \end{aligned} \tag{1}$$

"$\Rightarrow$":
Es sei $S \cup T$ linear unabhängig und $u \in \operatorname{span}(S) \cap \operatorname{span}(T)$.
Dann erhält man aus den Gleichungen

$$u = \lambda_1^u v_1 + \ldots + \lambda_r^u v_r = \mu_1^u w_1 + \ldots + \mu_s^u w_s$$

insbesondere

$$\lambda_1^u v_1 + \ldots + \lambda_r^u v_r - \mu_1^u w_1 - \ldots - \mu_s^u w_s = 0,$$

also nach (1) gerade

$$\lambda_1^u = \ldots = \lambda_r^u = \mu_1^u = \ldots = \mu_s^u = 0,$$

so dass $u = 0$ und damit $\operatorname{span}(S) \cap \operatorname{span}(T) = \{0\}$ folgt.

"$\Leftarrow$":
Es sei $\operatorname{span}(S) \cap \operatorname{span}(T) = \{0\}$.
Aus der Annahme

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r + \mu_1 w_1 + \ldots + \mu_s w_s = 0$$

folgt zunächst

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_r v_r = (-\mu_1) w_1 + \ldots + (-\mu_s) w_s =: u \in \operatorname{span}(S) \cap \operatorname{span}(T),$$

und dann $u = 0$ nach Voraussetzung.
Da S und T linear unabhängig sind, ergibt sich weiterhin

$$\lambda_1 = \ldots = \lambda_r = 0 = \mu_1 = \ldots = \mu_s,$$

so dass $S \cup T$ nach (1) ebenfalls linear unabhängig ist.

Aufgabe 3. *[17 Punkte]* Untersuchen Sie, ob die folgenden Aussagen über reelle quadratische Matrizen $A \in M_n(\mathbb{R})$ richtig oder falsch sind. Begründen Sie Ihre Entscheidung mit einer hinreichend genauen Herleitung oder einem geeigneten Gegenbeispiel.

(a) *[4 Punkte]* Falls alle Eigenwerte von A gleich null sind, dann ist A die Nullmatrix.

(b) *[4 Punkte]* Ist die Dimension n von A ungerade, dann besitzt A mindestens einen reellen Eigenwert.

(c) *[4 Punkte]* Falls A das charakteristische Polynom $p_A(\lambda) = \lambda^n + 1$ besitzt, dann ist A invertierbar.

(d) *[5 Punkte]* Falls A das charakteristische Polynom $p_A(\lambda) = \lambda^n$ besitzt, dann gilt $A^n = 0$.

Lösung:

(a) Die Aussage ist falsch, denn:
Die Matrix $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat das charakteristische Polynom $p_A(\lambda) = \lambda^2$ und damit nur den Eigenwert 0, ist aber nicht die Nullmatrix.

(b) Die Aussage ist wahr, da dann auch das charakteristische Polynom von A, p_A, von ungeradem Grad ist, so dass $p_A(x) \to \pm\infty$ für $x \to \pm\infty$ und p_A damit nach dem Zwischenwertsatz eine reelle Nullstelle, also A einen reellen Eigenwert besitzt.

(c) Die Aussage ist wahr, da die Matrix A dann offensichtlich nicht den Eigenwert 0 besitzt und damit die Determinate von A, geschrieben als Produkt der Eigenwerte von A, ungleich 0 sein muss. Also ist A invertierbar.

(d) Die Aussage ist wahr, da dann die Jordansche Normalform J von A, wobei $A = S \cdot J \cdot S^{-1}$ für eine geeignete Matrix $S \in GL_2(\mathbb{C})$ ist, als obere Dreiecksmatrix zusätzlich noch eine Hauptdiagonale aus lauter Nullen besitzt, so dass $J^n = 0$ und damit auch $A^n = S \cdot J^n \cdot S^{-1} = 0$ folgt.

Aufgabe 4. *[15 Punkte]* In dieser Aufgabe bestimmen Sie alle Tangenten an den Graphen der Funktion $y = \sqrt{x}$, $x \geq 0$, die durch den Punkt (3, 2) gehen.

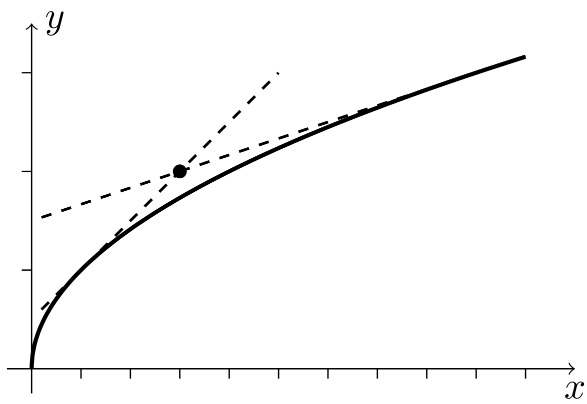
(a) *[3 Punkte]* Zeigen Sie mit Hilfe einer Skizze, dass es zwei solcher Tangenten gibt.

(b) *[3 Punkte]* Beweisen Sie, dass die Tangente an den Graphen der Funktion $y = \sqrt{x}$ an der Stelle x_0 die Gleichung $T_{x_0}(x) = \dfrac{x + x_0}{2\sqrt{x_0}}$ hat.

(c) *[9 Punkte]* Bestimmen Sie alle Werte von x_0 so, dass die Tangente an den Graphen von $y = \sqrt{x}$ an der Stelle x_0 durch den Punkt (3, 2) geht und geben Sie die resultierenden Tangentengleichungen an.

Lösung:

(a)



(b) Es ist $T_{x_0}(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0) = \sqrt{x_0} + \dfrac{1}{2\sqrt{x_0}}(x - x_0) = \dfrac{x + x_0}{2\sqrt{x_0}}$

(c) Die Tangente geht genau dann durch den Punkt (3, 2), wenn $2 = T_{x_0}(3) = \dfrac{3 + x_0}{2\sqrt{x_0}}$ gilt. Da $x_0 > 0$ gilt, ist dies äquivalent zu $\dfrac{(3 + x_0)^2}{4x_0} = 4 \Longleftrightarrow 0 = x_0^2 - 10x_0 + 9 = (x_0 - 9)(x_0 - 1)$. Es ergeben sich die Werte $x_0 = 1$ mit $T_1(x) = \frac{1}{2}(x + 1)$ und $x_0 = 9$ mit $T_9(x) = \frac{1}{6}(x + 9)$.

Aufgabe 5. *[16 Punkte]*
Betrachten Sie die Funktion $f : (0, \infty) \to (0, \infty)$, definiert durch $f(x) = x^{\sin(x)}$.

(a) *[10 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Funktion f in 0 stetig fortgesetzt werden kann.

(b) *[6 Punkte]* Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{x\to 0+} f'(x) = -\infty$ gilt.

Lösung:

(a) Nach Definition der Potenzfunktionen ist $x^{\sin(x)} = \exp(\ln(x) \cdot \sin(x))$. Diese Funktion kann in 0 stetig fortgesetzt werden, wenn $\lim\limits_{x\to 0+} f(x)$ endlich ist. Für die Ermittlung des Grenzwertes bestimmt man zunächst den Grenzwert $\lim\limits_{x\to 0+} \ln(x) \cdot \sin(x)$. Durch Anwendung der Regeln von l'Hospital erhält man:

$$\lim_{x\to 0+} \ln(x) \cdot \sin(x) = \lim_{x\to 0+} \frac{\ln(x)}{\frac{1}{\sin(x)}} \underset{\frac{-\infty}{\infty}}{=} \lim_{x\to 0+} \frac{\frac{1}{x}}{\frac{-\cos(x)}{\sin^2(x)}} = \lim_{x\to 0+} \underbrace{\frac{-\sin(x)}{\cos(x)}}_{\to 0} \cdot \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} = 0$$

Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt damit $\lim\limits_{x\to 0+} f(x) = \mathrm{e}^0 = 1$.

(b) Die Ableitung der Funktion f ist $f'(x) = x^{\sin(x)} \cdot \left(\ln(x) \cdot \cos(x) + \frac{\sin(x)}{x}\right)$. Daraus folgt

$$\lim_{x\to 0+} f'(x) = \lim_{x\to 0+} \underbrace{x^{\sin(x)}}_{\to 1} \cdot \left(\underbrace{\ln(x) \cdot \cos(x)}_{\to -\infty} + \underbrace{\frac{\sin(x)}{x}}_{\to 1} \right) = -\infty.$$

Aufgabe 6. *[18 Punkte]* Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sei definiert durch $f(x, y) = 2x^2 + y^2 - xy^2$.

(a) *[7 Punkte]* Bestimmen Sie alle stationären Punkte von f, d.h. alle Nullstellen von ∇f.

(b) *[6 Punkte]* Untersuchen Sie, ob diese stationären Punkte lokale Minima, lokale Maxima oder Sattelpunkte sind.

(c) *[5 Punkte]* Zeigen Sie, dass f kein globales Minimum und kein globales Maximum besitzt.

Lösung:

(a) Die partiellen Ableitungen von f sind $f_x(x, y) = 4x - y^2$ und $f_y(x, y) = 2y(1 - x)$. Es ist $f_y(x, y) = 0$ genau dann, wenn $y = 0$ oder $x = 1$ ist. Im Fall $y = 0$ wird aus $f_x(x, y) = 0$ die Gleichung $x = 0$ und es ergibt sich der stationäre Punkt $(0, 0)$. Im Fall $x = 1$ wird aus $f_x(x, y) = 0$ die Gleichung $4 - y^2 = 0$ mit den Lösungen $y = \pm 2$. Es ergeben sich die stationären Punkte $(1, 2)$ und $(1, -2)$.

(b) Zur Klassifikation der stationären Punkte kann man die Hesse-Matrix von f verwenden. Diese lautet $Hf(x, y) = \begin{pmatrix} 4 & -2y \\ -2y & 2(1-x) \end{pmatrix}$. An dem stationären Punkt $(0, 0)$ ist $Hf(0, 0) = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$. Diese Matrix ist positiv definit und daher hat die Funktion f an der Stelle $(0, 0)$ ein lokales Minimum. An den beiden stationären Punkten $(1, \pm 2)$ ist $Hf(1, \pm 2) = \begin{pmatrix} 4 & \mp 4 \\ \mp 4 & 0 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben die Determinante -16 und sind daher indefinit. Die Funktion f hat an den beiden Stellen $(1, \pm 2)$ jeweils einen Sattelpunkt.

(c) Es ist $f(x, 0) = 2x^2$ und daraus folgt $\lim\limits_{x \to \infty} f(x, 0) = \infty$. Weiter ist $f(2, y) = 8 - y^2$ und es folgt $\lim\limits_{y \to \infty} f(2, y) = -\infty$. Daher ist die Funktion f weder von oben noch von unten beschränkt ist und besitzt weder ein globales Maximum noch ein globales Minimum.

Aufgabe 7. *[19 Punkte]*

(a) *[3 Punkte]* Zeigen Sie, dass die Gerade $y = 1$ in Polarkoordinaten die Darstellung $r = \dfrac{1}{\sin\varphi}$ hat.

(b) *[5 Punkte]* Es sei D das Dreieck mit den Ecken $(0,\,0)$, $(1,\,1)$ und $(0,\,1)$. Beschreiben Sie D in Polarkoordinaten.

(c) *[11 Punkte]* Berechnen Sie das Integral

$$\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) d(x,\,y)$$

mit dem in Teil (b) definierten Dreieck D durch Übergang zu Polarkoordinaten.

Lösung:

(a) Es ist $y = r\sin(\varphi) = 1 \Longleftrightarrow r = \dfrac{1}{\sin(\varphi)}$.

(b) Die drei Seiten von D sind: Die Strecke von $(0,\,0)$ nach $(0,\,1)$, ein Teil der positiven y-Achse. Die Strecke von $(0,\,0)$ nach $(1,\,1)$, ein Teil der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten. Die Strecke von $(0,\,1)$ nach $(1,\,1)$, der Teil der Gerade $y = 1$ zwischen der y-Achse und der Winkelhalbierenden des ersten Quadranten. Damit ist

$$D = \left\{\big(r\cos(\varphi),\, r\sin(\varphi)\big) \;:\; \frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2},\, 0 \le r \le \frac{1}{\sin(\varphi)}\right\}.$$

(c) Zunächst wird der Integrand $\dfrac{y}{x^2+y^2} \cdot \arcsin\left(\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$ in Polarkoordinaten dargestellt: Aus $x = r\cos(\varphi)$ und $y = r\sin(\varphi)$ folgt $x^2+y^2 = r^2$ und damit $\dfrac{y}{x^2+y^2} = \dfrac{\sin(\varphi)}{r}$ und $\dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \sin(\varphi)$. Im Dreieck D gilt $\frac{\pi}{4} \le \varphi \le \frac{\pi}{2}$ und es folgt $\arcsin\big(\sin(\varphi)\big) = \varphi$. Die Darstellung des Integranden in Polarkoordinaten lautet also $\frac{\sin(\varphi)}{r} \cdot \varphi$. Damit ergibt sich

$$\iint\limits_D \frac{y}{x^2+y^2} \cdot \arcsin\left(\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) d(x,\,y) = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin(\varphi)}} \frac{\sin(\varphi)}{r} \cdot \varphi \cdot r\, dr\, d\varphi =$$

$$\int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \int\limits_{0}^{\frac{1}{\sin(\varphi)}} \varphi\sin(\varphi)\, dr\, d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\sin(\varphi) r\Big|_0^{\frac{1}{\sin(\varphi)}} d\varphi = \int\limits_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \varphi\, d\varphi = \frac{1}{2}\varphi^2\Big|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} = \frac{3\pi^2}{32}$$