DAV

DEUTSCHE
AKTUARVEREINIGUNG e.V.

Zulassungsprüfung in Mathematik

der Deutschen Aktuarvereinigung e. V.

am 20. Juni 2020

Hinweise:

- Als Hilfsmittel sind ein Taschenrechner, eine mathematische Formelsammlung sowie entsprechende Literatur zugelassen.
- Die Gesamtpunktzahl beträgt 120 Punkte. Die Klausur ist bestanden, wenn mindestens 60 Punkte erreicht werden.
- Bitte prüfen Sie die Ihnen vorliegende Prüfungsklausur auf Vollständigkeit. Die Klausur besteht aus 8 Seiten.
- Alle Antworten sind zu begründen und bei Rechenaufgaben muss der Lösungsweg ersichtlich sein.

Aufgabe 1. *[16 Punkte]* Betrachten Sie im $\mathbb{R}^4$ den Unterraum $U := \operatorname{span}\{v_1, v_2, v_3\}$ mit:

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad v_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad v_3 := \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

(a) *[5 Punkte]* Geben Sie eine Basis für den Unterraum U an.

(b) *[11 Punkte]* Ergänzen Sie die Basis für U aus (a) zu einer Basis des $\mathbb{R}^4$ durch eine Basis für den Orthogonalraum $U^\perp$ von U.

Lösung:

(a) Offensichtlich sind v_1 und v_2 linear unabhängig und es gilt:

$$v_3 = -v_1 + v_2.$$

Also ist $\{v_1, v_2\}$ eine Basis von U.

(b) Aus $\dim U = 2$ nach (a) folgt $\dim U^\perp = 4 - 2 = 2$.
Also wird eine Basis $\{w_1, w_2\}$ von $U^\perp$ unter der Bedingung $w_j \perp v_k$ bzw. $\langle w_j, v_k \rangle = 0$ für $j, k \in \{1, 2\}$ gesucht.
Das zugehörige Gleichungssystem für die gesuchten Koordinaten der Basisvektoren von $U^\perp$ lautet:

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & + & 2x_2 & & & - & x_4 & = & 0 \\ & & & & x_3 & + & x_4 & = & 0 \end{array}$$

Die erweiterte Koeefizientenmatrix

$$\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{array}$$

liegt bereits in normierter Zeilenstufenform (reduzierter Treppenform) vor, so dass sich durch Ablesen die beiden folgenden linear unabhängigen Lösungen ergeben:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad w_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2. *[20 Punkte]* Es sei $A \in GL_2(\mathbb{R})$ eine reelle quadratische invertierbare Matrix der Dimension 2, die zu sich selbst invers ist, d.h. es gilt: $A = A^{-1}$.

(a) *[4 Punkte]* Zeigen Sie zunächst, dass für A gilt: $\det A \in \{\pm 1\}$.

(b) *[16 Punkte]* Bestimmen Sie nun alle $A \in GL_2(\mathbb{R})$ mit $A = A^{-1}$.

Lösung:

(a) Aus $A = A^{-1}$ folgt $A^2 = I_2$ (I_2: Einheitsmatrix) und daraus mit Hilfe des Multiplikationssatzes für Determinanten: $(\det A)^2 = \det A^2 = \det I_2 = 1$.

(b) Mit der bekannten Formel für die Inverse einer Matrix $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in GL_2(\mathbb{R})$ muss die folgende Gleichung erfüllt werden:

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = A^{-1}. \qquad (\star)$$

1. Fall: $\det A = 1$
Wegen $a = d$, $b = -b$, $c = -c$ und $\det A = 1$ folgt: $A \in \{\pm I_2\}$.
2. Fall: $\det A = -1$
Aus der Gleichung $(\star)$ ergibt sich zunächst $d = -a$ und damit $1 = -\det A = a^2 + bc$.
Für $b \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig erhält man dann $c = \frac{1-a^2}{b}$, also

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ \frac{1-a^2}{b} & -a \end{pmatrix}, a \in \mathbb{R},\, b \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ beliebig.}$$

Für $b = 0$ ist $-1 = \det A = -a^2$, also $a \in \{\pm 1\}$, und damit

$$A = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 \\ c & \mp 1 \end{pmatrix}, \quad c \in \mathbb{R} \text{ beliebig.}$$

Aufgabe 3. *[16 Punkte]* Es seien V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum, $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V und $f : V \mapsto W$ eine $\mathbb{R}$-lineare Abbildung von V in einen $\mathbb{R}$-Vektorraum W. Bekanntlich ist dann f eindeutig bestimmt durch die n Bilder $w_1 := f(v_1), \dots, w_n := f(v_n)$ in W. Zeigen Sie nun folgende Aussage:

$$f \text{ ist injektiv } \Leftrightarrow \text{ Die Vektoren } w_1, \dots, w_n \text{ sind linear unabhängig in } W.$$

Lösung:
"$\Rightarrow$":
Es sei

$$\lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n = 0$$

für $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} 0 &= \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n \\ &= \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) \\ &= f\left(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n\right). \end{aligned}$$

Da f linear ist, gilt $f(0) = 0$ und damit folgt aus der Injektivität von f gerade

$$\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n = 0.$$

Da $\{v_1, \dots, v_n\}$ eine Basis ist, folgt daraus $\lambda_1 = \ldots \lambda_n = 0$.
Also sind die Vektoren $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig.

"$\Leftarrow$":
Seien $v = \lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n$ und $\tilde{v} = \tilde{\lambda}_1 v_1 + \ldots + \tilde{\lambda}_n v_n$ aus V mit $f(v) = f(\tilde{v})$.
Es folgt dann

$$\begin{aligned} \lambda_1 w_1 + \ldots + \lambda_n w_n &= \lambda_1 f(v_1) + \ldots + \lambda_n f(v_n) \\ &= f\left(\lambda_1 v_1 + \ldots + \lambda_n v_n\right) \\ &= f\left(\tilde{\lambda}_1 v_1 + \ldots + \tilde{\lambda}_n v_n\right) \\ &= \tilde{\lambda}_1 f(v_1) + \ldots + \tilde{\lambda}_n f(v_n) \\ &= \tilde{\lambda}_1 w_1 + \ldots + \tilde{\lambda}_n w_n \end{aligned}$$

Da $w_1, \dots, w_n$ linear unabhängig sind, gilt $\lambda_k = \tilde{\lambda}_k$ für alle $k = 1, \dots, n$ und damit $v = \tilde{v}$.

Aufgabe 4. *[14 Punkte]* Die beiden reellen Zahlenreihen $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ seien konvergent. Für alle $k \in \mathbb{N}$ sei $m_k = \min\{a_k,\, b_k\}$ und $M_k = \max\{a_k,\, b_k\}$. Untersuchen Sie, welche der folgenden Reihen sicher konvergieren und welche divergieren können. Begründen Sie Ihre Antwort mit Hilfe geeigneter Sätze oder durch ein kurzes Beispiel:

$$\sum_{k=1}^{\infty} m_k, \qquad \sum_{k=1}^{\infty} (m_k + M_k), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} M_k.$$

Lösung: Es sei $a_k = \frac{(-1)^k}{k}$ und $b_k = \frac{(-1)^{k+1}}{k}$. Dann ist $m_k = \frac{-1}{k}$ und $M_k = \frac{1}{k}$. Dieses Beispiel zeigt, dass die Reihen $\sum_{k=1}^{\infty} m_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} M_k$ beide divergieren können.

Weiter ist $m_k + M_k = a_k + b_k$. Aus der Konvergenz von $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ folgt mit den Rechenregeln für konvergente Reihen die Konvergenz der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} (a_k + b_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (m_k + M_k)$.

Aufgabe 5. *[14 Punkte]*

(a) *[9 Punkte]* Zeigen Sie, dass für alle $x,\, y \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right)$ mit $x \neq y$ folgende Ungleichung gilt:

$$|\tan x - \tan y| > |x - y|$$

(b) *[5 Punkte]* Schließen Sie daraus, dass für alle $x \in \left(0,\, \frac{\pi}{2}\right)$ die Ungleichung $\tan x > x$ gilt.

Lösung:

(a) Aus dem Mittelwertsatz folgt für $x,\, y \in \left[0,\, \frac{\pi}{2}\right)$ die Gleichung $\dfrac{\tan x - \tan y}{x - y} = 1 + \tan^2 \xi$ mit einem ξ zwischen x und y. Wegen $x \neq y$ ist $\xi \neq 0$ und es folgt $\left|\dfrac{\tan x - \tan y}{x - y}\right| = \left|1 + \tan^2 \xi\right| = 1 + \tan^2 \xi > 1$. Durch Multiplikation mit $|x - y|$ folgt die Behauptung.

(b) Setzt man in der Ungleichung von Teil (a) $y = 0$ ein und beachtet $\tan x > 0$ für $x > 0$, so wird aus dieser Ungleichung gerade $\tan x > x$.

Aufgabe 6. *[20 Punkte]* Die momenterzeugende Funktion $m(t)$ für die Normalverteilung ist definiert durch $m(t) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{tx} \frac{\mathrm{e}^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}}\, dx$. Bestimmen Sie einen expliziten Ausdruck für $m(t)$.

Hinweis: Wenden Sie quadratische Ergänzung im Argument der Exponentialfunktion an und nutzen Sie $\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-x^2/2}\, dx = \sqrt{2\pi}$.

Lösung:

Es ist $-\frac{x^2}{2}+tx = -\frac{1}{2}(x^2-2tx) = -\frac{1}{2}(x-t)^2+\frac{1}{2}t^2$. Damit folgt unter Verwendung der Substitution $y = x - t$ für festes $t \in \mathbb{R}$:

$$m(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2 + \frac{1}{2}t^2\right) dx =$$

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to-\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{r}^{R} \exp\left(-\frac{1}{2}(x-t)^2\right) \cdot \exp\left(\frac{1}{2}t^2\right) dx =$$

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ r\to-\infty}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{t^2/2} \int\limits_{r-t}^{R-t} \mathrm{e}^{-y^2/2}\, dy = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{t^2/2} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{-y^2/2}\, dy}_{\sqrt{2\pi}} = \mathrm{e}^{t^2/2}$$

Aufgabe 7. *[20 Punkte]* Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definiert durch den Ausdruck $f(x, y) = x^2 + \ln y$.

(a) *[4 Punkte]* Zeigen Sie, dass $\gamma(t) = (3 - 2t, 1 + t)$, $0 \le t \le 1$ eine Parameterdarstellung der Verbindungsstrecke vom Punkt $(3, 1)$ zum Punkt $(1, 2)$ ist.

(b) *[2 Punkte]* Berechnen Sie den Einheitsrichtungsvektor längs dieser Strecke.

(c) *[8 Punkte]* Bestimmen Sie die Richtungsableitung von f an der Stelle $\gamma(t)$, $t \in [0, 1]$ in die in (b) ermittelte Richtung.

(d) *[6 Punkte]* Berechnen Sie den Mittelwert der in (c) bestimmten Richtungsableitungen.

Lösung:

(a) Die Verbindungsstrecke von zwei Punkten $\underline{x}_a$ und $\underline{x}_e$ kann durch $\underline{x}_a + t\big(\underline{x}_e - \underline{x}_a\big)$, $0 \le t \le 1$ parametrisiert werden. Mit $\underline{x}_a = (3, 1)$ und $\underline{x}_e = (1, 2)$ erhält man die Parameterdarstellung $\gamma(t) = (3 - 2t, 1 + t)$, $0 \le t \le 1$.

(b) $\underline{v} = \dfrac{\dot\gamma(t)}{\|\dot\gamma(t)\|} = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

(c) Die gesuchte Richtungsableitung ist $f_{\underline{v}}\big(\gamma(t)\big) = \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \underline{v}$. Mit $\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ \frac{1}{y} \end{pmatrix}$ erhält man $\nabla f\big(\gamma(t)\big) = \begin{pmatrix} 6 - 4t \\ \frac{1}{1+t} \end{pmatrix}$. Daraus folgt $f_{\underline{v}}\big(\gamma(t)\big) = \nabla f\big(\gamma(t)\big) \cdot \underline{v} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left(8t - 12 + \frac{1}{1+t}\right)$.

(d) Der Mittelwert der Richtungsableitungen ist

$$\int_0^1 f_{\underline{v}}\big(\gamma(t)\big)\, dt = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{5}} \left(8t - 12 + \frac{1}{1+t}\right) dt = \frac{\ln 2 - 8}{\sqrt{5}}.$$